Linear regresjon

Data : $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

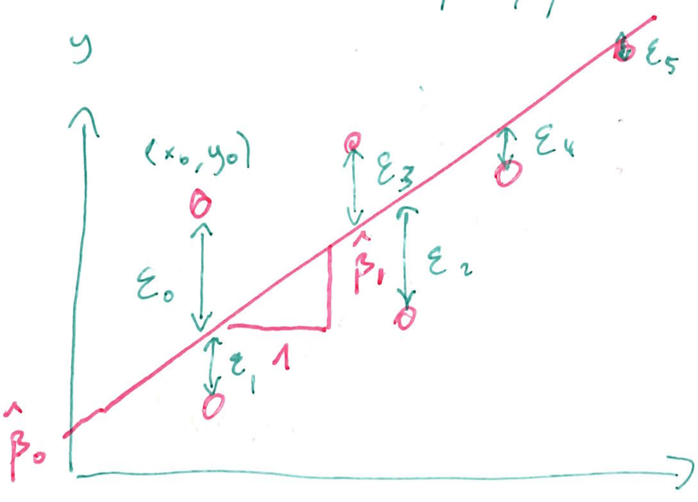
Regresjonsmodell : $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i)$

↳ Estimat av (β_0, β_1) basert på datasettet

kalles $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$

Beste tilpasning $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$

Bias Stign. tall



* Finne linja ved å minimalisere $\{\varepsilon_i\}$!

Hvordan gjøre det for alle $\{\varepsilon_i\}$ samtidig?

↳ Se demo oppg. 1)

Ved å 1) Finne "sum of squares of errors" (SSE)

2) Minimere denne størrelsen ved å justere $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$

$$\varepsilon_0^2 = (y - y_0)^2, \text{ der } y = \hat{\beta}_0 + \beta_1 x$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n^2 = (y - y_n)^2 \qquad L = SSE = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y - y_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{\beta}_0 - \beta_1 x_i - y_i)^2$$

2) kan utføres på to måter

a) Eksakte formler fra statistikken (kan utledes ved optimeringskravet $\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = 0$ og $\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = 0$)

↳ Gir $\beta_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

der $\bar{\ }$ over størrelse angir middelverdi

Eks $\overline{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i / n$, $\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i / n$

b) Vha. gradient descent metoden

↳ Inkrementelt justere β_0 og β_1 slik at L blir mindre og mindre ....

↳ Gjøres på en bestemt måte (ikke helt random)

Kan utledes en <u>kvalitetsparameter</u> $R^2 \in [0,1]$

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma (y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}$$

(se link Newcastle Univ.)

Multivariat linear regresjon

Data : $(\underline{x}^0, y^0), (\underline{x}^1, y^1), \ldots, (\underline{x}^{N-1}, y^{N-1})$

der $\underline{x}^t = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_M]^t$

Regresjonsmodell : $y = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_M x_M$

Sample-matrise $\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^0 & x_2^0 & \ldots & x_M^0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_1^{N-1} & & \ldots & x_M^{N-1} \end{bmatrix}$

Vekter : $\underline{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_M]$

↳ Ønsker å estimere $\underline{w}$ med $\hat{\underline{w}}$

↳ Kan utlede "normal-ligning" (eksakt formel)

$$\hat{\underline{w}} = (\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{X}})^{-1} \underline{\underline{X}}^T \underline{y} \quad , \quad \text{der} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y^0 \\ y^1 \\ \vdots \\ y^{N-1} \end{bmatrix}$$