Convolution et Corrélation des signaux

---Traitement du signal en matlab

Hengshuo LI , Ruidong PAN

Introduction

Le but de notre projet est d'étudier les produits de convolution et les corrélations entre plusieurs signaux.

Dans ce projet, nous allons tout d'abord prendre deux signaux généraux x(t) et y(t) d'énergie fi◷nie, ensuite nous allons nous intéresser à un signal x(t) réel et pair, et enfin nous étudierons un signal y(t) complexe.

Pour que nous puisson mieux comprendre les conculsions, nous utiliserons Matlab en prenant les signaux particuliers afin de vérifier nos résultats.

Partie 1 (signal réel pair)

Preuve:

Si x(t) est pair alors: $x(t) = x(-t)$, si $x(t)$ est réel alors: $x(t) = x^*(t)$

Calculer la corrélation : $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(\tau-t)dt$

Calculer le produit de convolution: $x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$. Donc nous pouvons conclure que si $\tau = t$, alors $R_x(\tau) = x(t) * x(t)$.

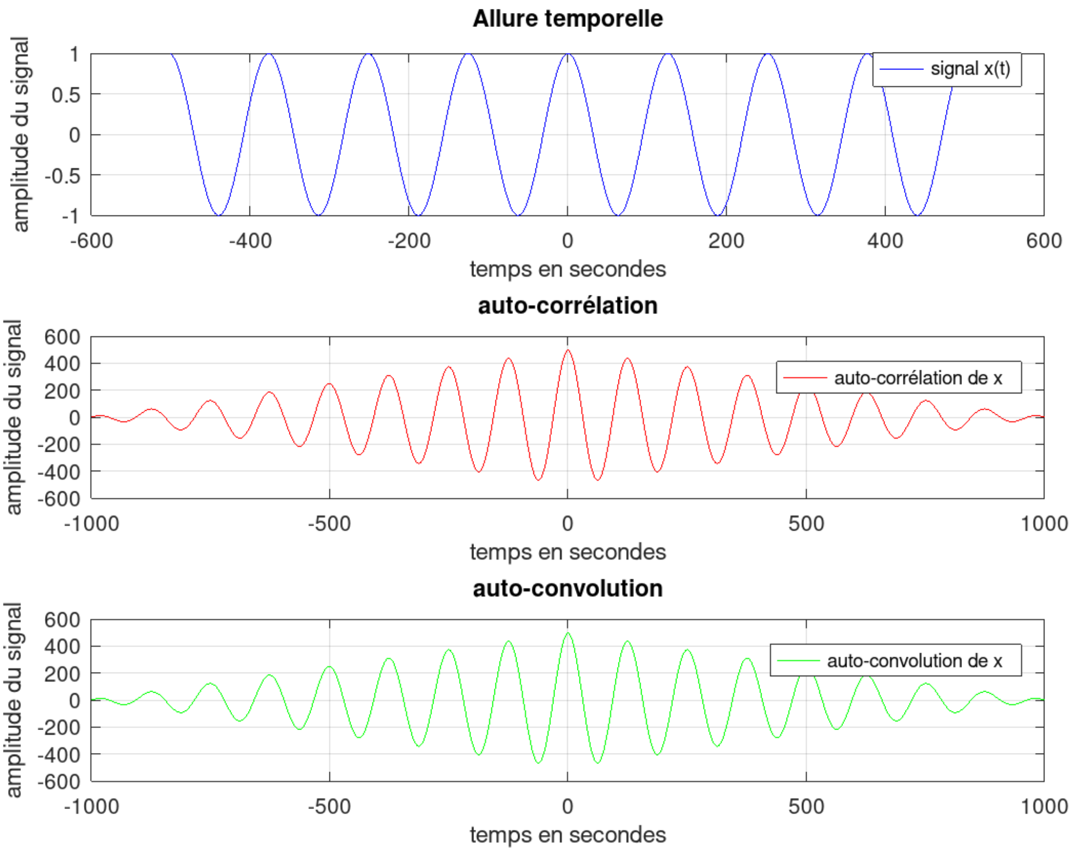
Ensuit nous utilisons Matlab pour vérifier notre résultat.

Exemple:

On prend un signal sinusoÏde $cos(wt) \quad w = 0.05$, cette fonction a bien vérifié la condition paire et réelle, donc on peut dire que sa auto-corrélation et auto-convolution sont identiques par la théoème. Nous le vérifions à l'aide de Matlab.

code:simulation de x(t) ,sa auto-convolution et auto-corrélation

et nous obtetons la résultat suivant:



Nous s'apercevons la graph 2 et 3 sont similaires, donc on peut conclure sa auto-convolution et auto-corrélation sont identiques.

Partie 2 (signal complexe)

Comparer auto-corrélation et auto-convolution

preuve:

$$R_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)y^*(\tau - t)d\tau$$
$$y(\tau) * y(\tau)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ est complex donc $y(t) = Re_y(t) + jIm_y(t)$

$$\begin{aligned} R_y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau) + jIm_y(\tau))(Re_y(\tau - t) - jIm_y(\tau - t))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau)Re_y(\tau - t) + Im_y(\tau)Im_y(\tau - t) + jRe_y(\tau - t)Im_y(\tau) - j(Re_y(\tau)Im_y(\tau - t))d\tau \\ &= R_{Re_y}(t) + R_{Im_y}(t) + jR_{Im_y Re_y}(t) - jR_{Re_y Im_y}(t) \\ &= (Re_y(\tau) * Re_y(-\tau))(t) + (Im_y(\tau) * Im_y(-\tau))(t) + j(Im_y(\tau) * Re_y(-\tau))(t) - jRe_y(\tau) * Im_y(-\tau)(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\tau) * y(\tau)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)y(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau) + jIm_y(\tau))(Re_y(t-\tau) + jIm_y(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau)Re_y(t-\tau) - Im_y(\tau)Im_y(t-\tau) + jRe_y(t-\tau)Im_y(\tau) + jRe_y(\tau)Im_y(t-\tau)d\tau \\ &= (Re_y(\tau) * Re_y(\tau))(t) - (Im_y(\tau) * Im_y(\tau))(t) + j(Im_y(\tau) * Re_y(\tau))(t) + jRe_y(\tau) * Im_y(\tau)(t) \end{aligned}$$

on suppose $x(t)$ et $y(t)$ sont réel.

quand $x(t)$ est pair et réel, alors auto-convolution et auto-convolution de $x(t)$ sont identques;

quand $x(t)$ est impair et réel, alors auto-convolution et auto-convolution de $x(t)$ sont opposés;

quand $y(t)$ est pair et réel, alors cross-corrélation $R_{xy}(t)$ et convolution de $x(t)$ et $y(t)$ sont identiques;

quand $y(t)$ est impair et réel, alors cross-corrélation $R_{xy}(t)$ et convolution de $x(t)$ et $y(t)$ sont opposés;

$$R_x(t) = (x(\tau) * x(-\tau))(t) = (x(-\tau) * x(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$(x(\tau) * x(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$R_{xy}(t) = x(\tau) * y(-\tau)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(-\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$(x(\tau) * y(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Donc, quand partie réelle de x(t) est paire et partie imaginaire de x(t) est impaire, alors $R_x(t)$= $y(\tau) * y(\tau)$(t) ;

quand partie réelle de x(t) est impaire et partie imaginaire de x(t) est paire, alors $R_x(t)$= $-y(\tau) * y(\tau)$(t)

Re_y	Im_y	$Re_{R_y} = Re_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$	$Re_{R_y} = -Re_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$
paire	paire		
paire	impaire	✓	
impaire	paire		✓
impaire	impaire		

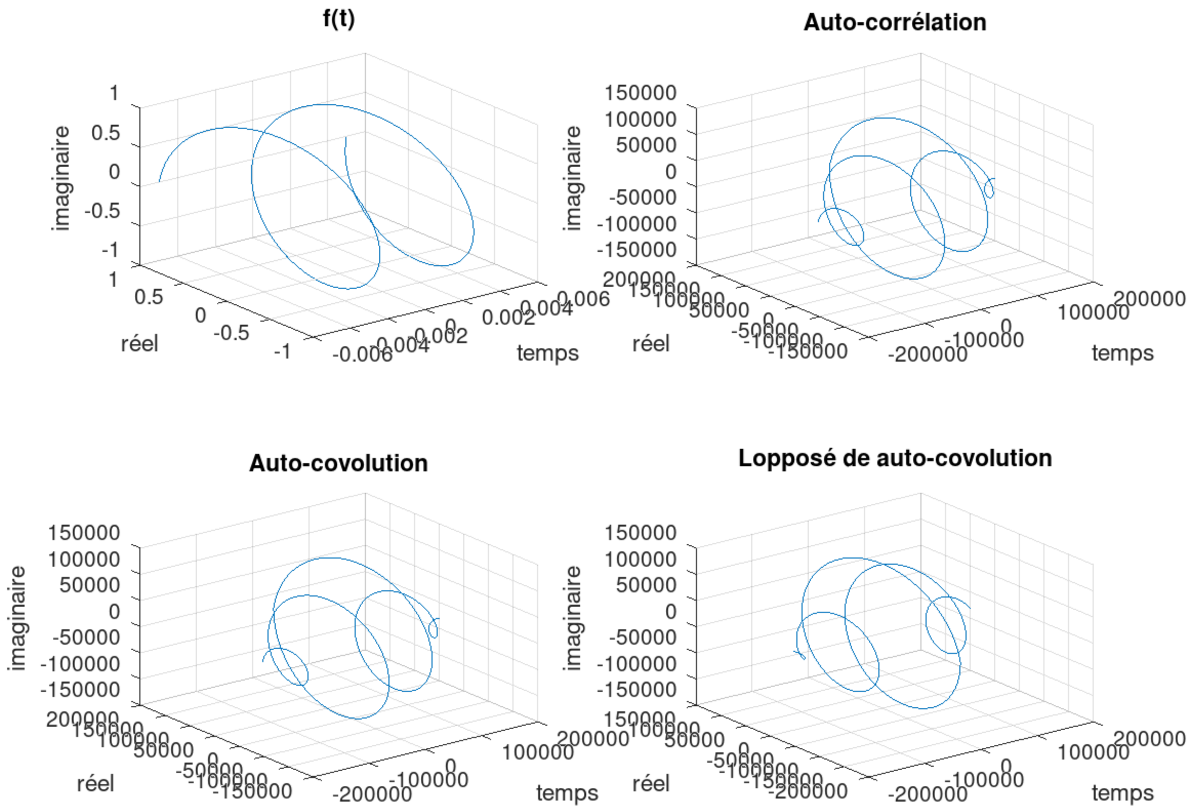
Re_y	Im_y	$Im_{R_y} = Im_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$	$Im_{R_y} = -Im_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$
paire	paire		
paire	impaire	✓	
impaire	paire		✓
impaire	impaire		

Re_y	Im_y	$R_y = y(\tau) * y(\tau)(t)$	$R_y = -y(\tau) * y(\tau)(t)$
paire	paire		
paire	impaire	✓	
impaire	paire		✓
impaire	impaire		

Nous prenons des quatre signaux différentes pour vérifier ce résultat.

Exemple1:

On prend un signal très générale $f(t) = exp(jwt) \quad w = 400\pi \quad t \in [-2\pi/w, 2\pi/w]$ partie réelle de la fonction est paire et la partie imaginaire est impaire on obtient la graphie à l'aide de Matlab ci -desous:



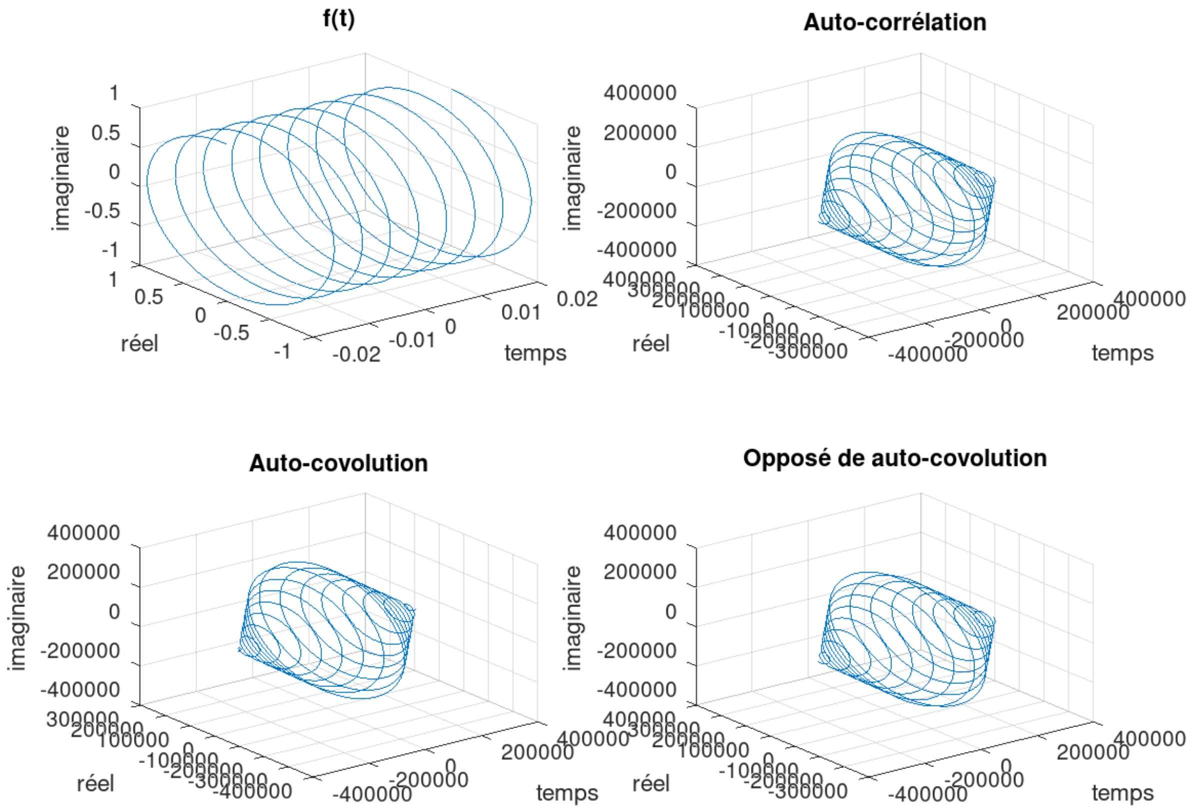
code:[parite réelle cos et parite imaginaire sin]

Nous trouvons le résultat est bien vérifié, $R_y = y(\tau) * y(\tau)(t)$

Exemple2:

On choisit un signal dont partie imaginaire est paire et partie réelle est impaire.
$f(t) = sin(wt) + jcos(wt) \quad w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

nous le simulons dans Matlab, et graphe est ci-desous :



code:[parite réelle sin et parite imaginaire cos]

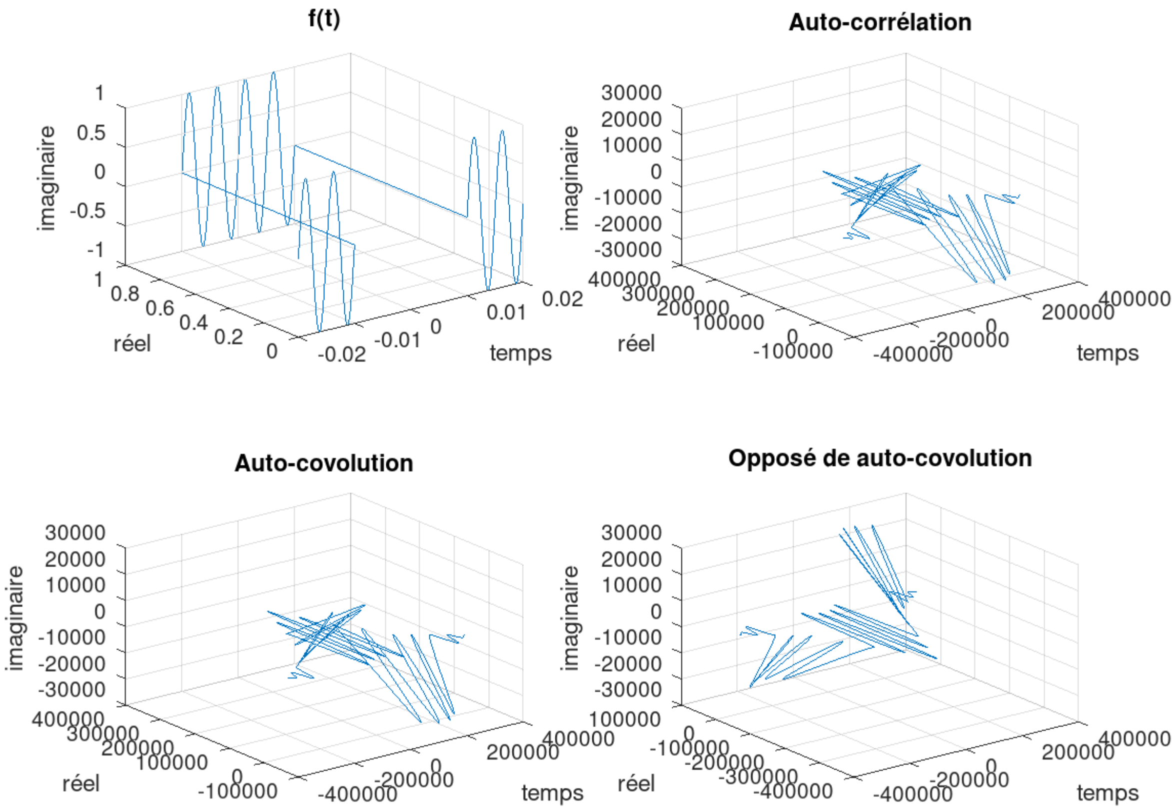
Ces graphes sont un peu difficile à observer, mais lorsque vous les comparez soigneusement , vous devez se rendre compte que la opposées de auto-covolution et auto-corrélation sont identiques, qui vérifie la propostion on trouve.

Exemple3:

Dans ce cas là, on veut prendretu d'autre fonction complex aléatoire mais bien vérifie la condition que la partie réelle est paire et la parite imaginaire est imapire. par example : $f(t) = rect_{8\pi/w}(t) + jsin(wt) \quad w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

code:[parite réelle rectrangle et parite imaginaire sin]

la graphe est ci-desous:



donc la preuve est vrais et on peut conclure $R_y = y(\tau) * y(\tau)(t)$ quand $RE_y paire \quad IM_y impare$

Exemple4:

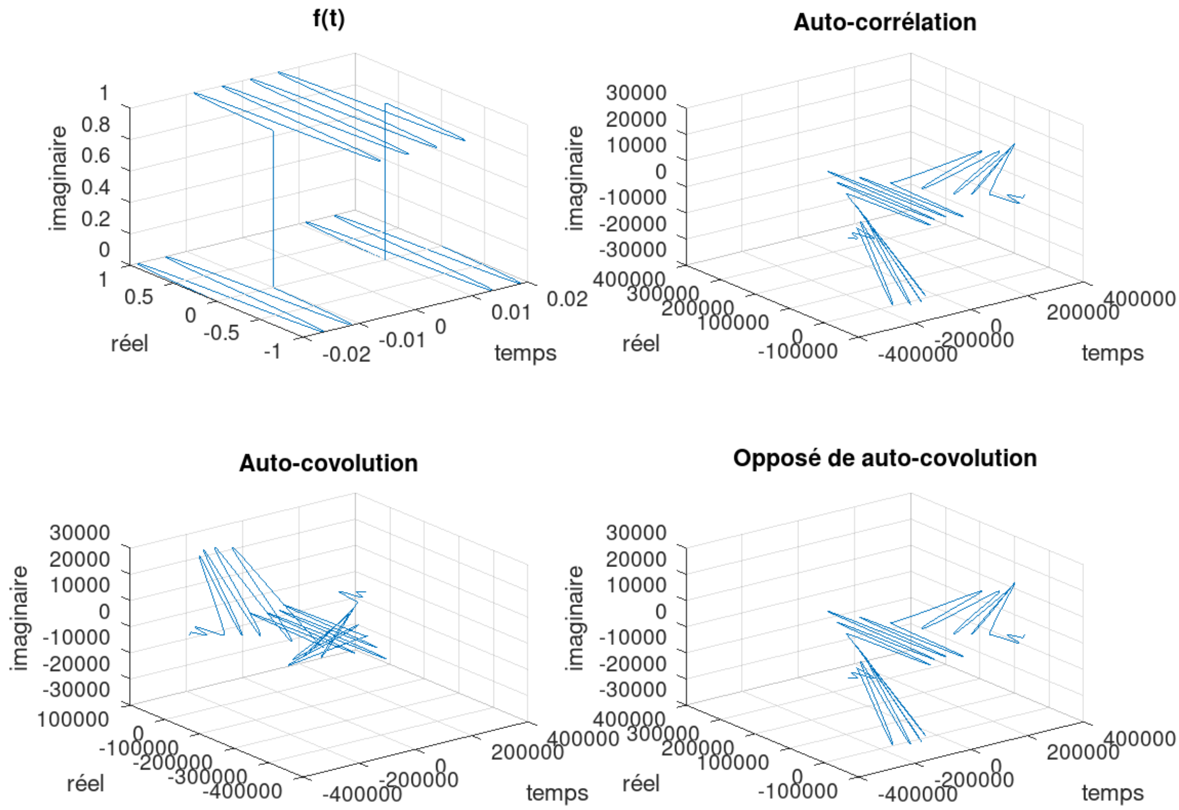
Quand même on construite un cas contôle avec Exemple3:

$f(t) = sin(wt) + jrect_{8\pi/w}(t) \quad w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

dont partie réelle est impaire et partie imaginaire est paire.

code:[partie réelle sin et partie imaginaire rectangle]

la graphe est ci-desous:



donc la preuve est vrais et on peut conclure $R_y = -y(\tau) * y(\tau)(t)$ quand $IM_y paire \quad RE_y impare$

Comparer $R_{yx}(t) et R_{xy}(t)$

preuve:

$$\begin{aligned}
R_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_x(\tau) + jIm_x(\tau))(Re_y(\tau - t) - jIm_y(\tau - t))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_x(\tau)Re_y(\tau - t) + Im_x(\tau))Im_y(\tau - t) + j(Re_y(\tau - t)Im_x(\tau)) - j(Re_x(\tau)Im_y(\tau - t))d\tau \\
&= R_{Re_x Re_y}(t) + R_{Im_x Im_y}(t) + jR_{Im_x Re_y}(t) - jR_{Re_x Im_y}(t) \\
R_{yx}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau) + jIm_y(\tau))(Re_x(\tau - t) - jIm_x(\tau - t))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau)Re_x(\tau - t) + Im_y(\tau))Im_x(\tau - t) + j(Re_x(\tau - t)Im_y(\tau)) - j(Re_y(\tau)Im_x(\tau - t))d\tau \\
&= R_{Re_y Re_x}(t) + R_{Im_y Im_x}(t) + jR_{Im_y Re_x}(t) - jR_{Re_y Im_x}(t)
\end{aligned}$$

si $x(t)$ et $y(t)$ sont réel , alors

$$\begin{aligned}
R_{xy}(t) = (x(\tau) * y(-\tau))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(-\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y(-t-a)x(-a)da \quad (t - \tau = -a, \quad -\tau = -a - t) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)y(-t-\tau)d\tau \\
R_{yx}(t) = (x(-\tau) * y(\tau)(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)y(t-\tau)d\tau \\
R_{xy}(t) &= R_{yx}(-t)
\end{aligned}$$

si x(t) est complex et y(t) est complex,

$$
\begin{aligned}
R_{xy}(t) &= R_{Re_xRe_y}(t) + R_{Im_xIm_y}(t) + jR_{Im_xRe_y}(t) - jR_{Re_xIm_y}(t) \\
R_{yx}(t) &= R_{Re_yRe_x}(t) + R_{Im_yIm_x}(t) + jR_{Im_yRe_x}(t) - jR_{Re_yIm_x}(t) \\
&= R_{Re_xRe_y}(-t) + R_{Im_xIm_y}(-t) - (jR_{Im_xRe_y}(-t) - jR_{Re_xIm_y}(-t)) \\
& \quad R_{xy}(t) = R_{yx}^*(-t)
\end{aligned}
$$

donc $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(-t)$

nous prenons 2 cas différentes pour vérifier ce résultat.

Exemple1:

Nous prenons deux signaux complex aléatoires $f(t)$ et $g(t)$

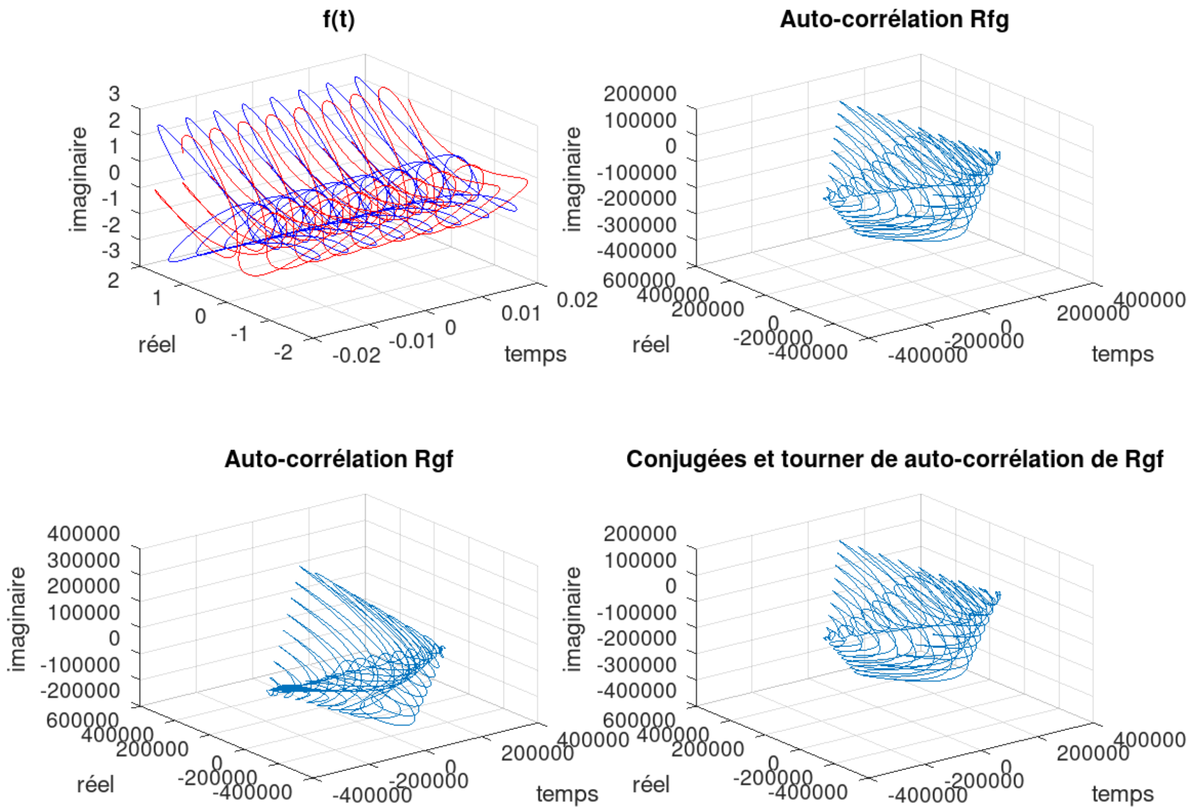
pour $w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

$f(t) = sin(wt) + cos(3wt) + j(cos(wt) + cos(2wt) + sin(4wt)) \quad g(t) = cos(2wt) + sin(3wt) + j(cos(wt) + sin(2wt) + sin(4wt))$

alors nous vérifions $R_{fg}(t) = R_{gf}^*(-t)$

code en matlab:corrélation conjugées 1

image:



Nous voyons que ce graphe montre $R_{fg}(t)$ est bien égal à $R_{gf}(-t)$ des signaux complexes.

Exemple2:

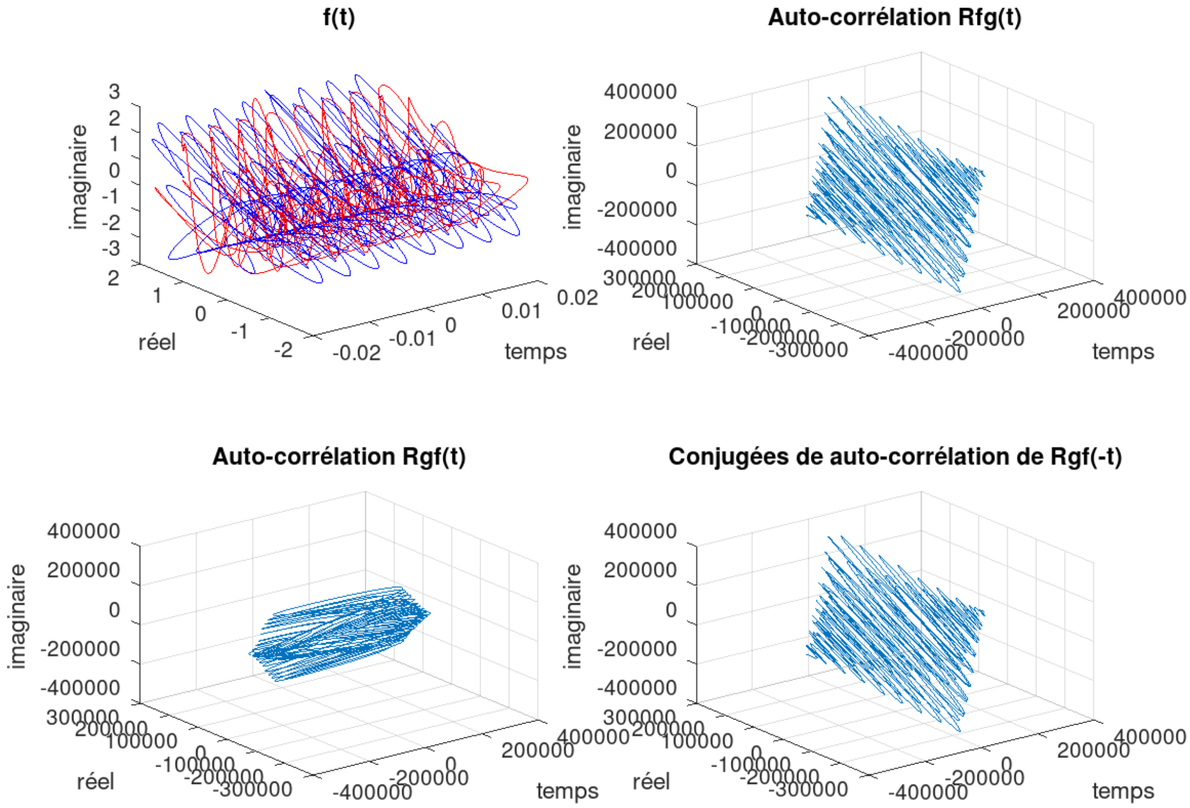
Pour exclure les imprévus: nous prenons un cas différent:

pour $w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

$f = sinc(wt) + cos(wt) + j(cos(4wt) + cos(3wt) + sin(4wt)) \quad g = cos(2wt) + sin(4wt) + j(cos(wt) + sin(4wt) + sinc(wt))$

code en matlabcorrélation conjugées 2

image:



Sans doute $R_{xy}(t) = R^*_{yx}(-t)$

Conclusion

Dans ce projet, nous apprenons plein de choses. Nous nous profitons de maîtriser la commande de Matlab dans ce projet et mieux comprendre la corrélation et convolution des signaux. Par ailleur en ce moment particulièrement difficile à cause de covid-19, nous avons aussi su que comment réaliser un projet en GIT, comment faire mieux de travailler en distance.

Annexe

> none.