

Convolution et Corrélation des signaux

----Traitement du signal en matlab

Hengshuo LI , Ruidong PAN

Convolution et Corrélation des signaux

----Traitement du signal en matlab

Introduction

Partie 1 (signal réel pair)

Preuve:

Exemple:

code:simulation de $x(t)$, sa auto-convolution et auto-corrélation

Partie 2 (signal complexe)

comparer auto-corrélation et auto-convolution

preuve:

Exemple1:

Exemple2:

Exemple3:

Exemple4:

Comparer $R_{yx}(t)$ et $R_{xy}(t)$

preuve:

Exemple1:

Exemple2:

Conclusion

Annexe

Introduction

Le but de notre projet est d'étudier les produits de convolution et les corrélations entre plusieurs signaux.

Dans ce projet, nous allons tout d'abord prendre deux signaux généraux $x(t)$ et $y(t)$ d'énergie finie, ensuite nous allons nous intéresser à un signal $x(t)$ réel et pair, et enfin nous étudierons un signal $y(t)$ complexe.

Pour que nous puissions mieux comprendre les conclusions, nous utiliserons Matlab en prenant les signaux particuliers afin de vérifier nos résultats.

Partie 1 (signal réel pair)

Preuve:

Si $x(t)$ est pair alors: $x(t) = x(-t)$, si $x(t)$ est réel alors: $x(t) = x^*(t)$

Calculer la corrélation: $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(\tau-t)dt$

Calculer le produit de convolution: $x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau$ Donc nous pouvons conclure que si $\tau = t$, alors $R_x(\tau) = x(t) * x(t)$

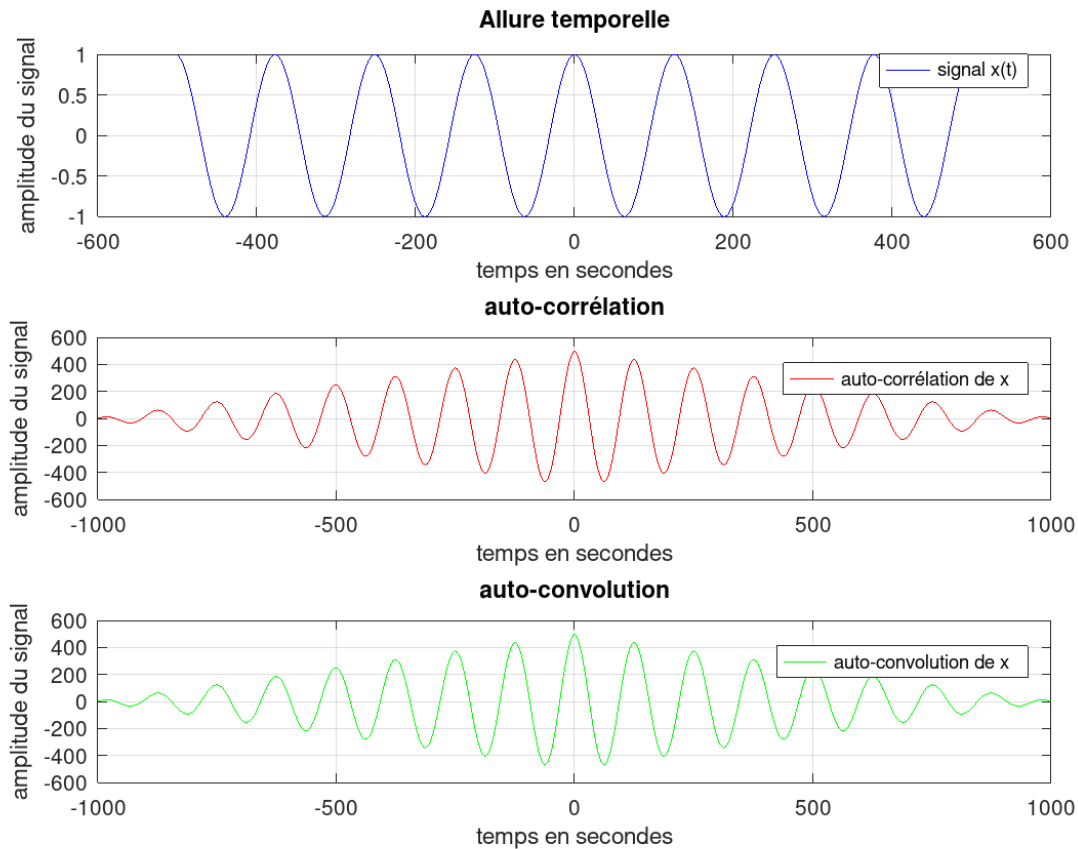
Maintenant nous utilisons Matlab pour vérifier notre résultat:

Exemple:

on prend un signal sinusoïdal $\cos(wt)$, cette fonction est bien vérifiée la condition pair et réel, donc on peut dire que sa auto-corrélation et auto-convolution sont identiques par théorème. nous le vérifions à l'aide de octave

code: [simulation de x\(t\), sa auto-convolution et auto-corrélation](#)

et nous obtenons le résultat suivant:



nous s'apercevons la graph 2 et 3 sont similaire, donc on peut conclure sa auto-convolution et auto-corrélation sont identique.

Partie 2 (signale complexe)

comparer auto-corrélation et auto-convolution

preuve:

$$R_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) y^*(\tau - t) d\tau$$
$$y(\tau) * y(\tau)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

$y(t)$ est complex donc $y(t) = Re_y(t) + jIm_y(t)$

$$\begin{aligned} R_y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau) + jIm_y(\tau))(Re_y(\tau - t) - jIm_y(\tau - t))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau)Re_y(\tau - t) + Im_y(\tau)Im_y(\tau - t) + jRe_y(\tau - t)Im_y(\tau) - j(Re_y(\tau)Im_y(\tau - t)))d\tau \\ &= R_{Re_y}(t) + R_{Im_y}(t) + jR_{Im_y Re_y}(t) - jR_{Re_y Im_y}(t) \\ &= (Re_y(\tau) * Re_y(-\tau))(t) + (Im_y(\tau) * Im_y(-\tau))(t) + j(Im_y(\tau) * Re_y(-\tau))(t) - jRe_y(\tau) * Im_y(-\tau)(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(\tau) * y(\tau)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)y(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau) + jIm_y(\tau))(Re_y(t-\tau) + jIm_y(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau)Re_y(t-\tau) - Im_y(\tau)Im_y(t-\tau) + jRe_y(t-\tau)Im_y(\tau) + jRe_y(\tau)Im_y(t-\tau))d\tau \\
&= (Re_y(\tau) * Re_y(\tau))(t) - (Im_y(\tau) * Im_y(\tau))(t) + j(Im_y(\tau) * Re_y(\tau))(t) + jRe_y(\tau) * Im_y(\tau)(t)
\end{aligned}$$

on suppose $x(t)$ et $y(t)$ sont réel.

quand $x(t)$ est paire et réel, alors auto-convolution et auto-convolution de $x(t)$ sont identique;

quand $x(t)$ est impaire et réel, alors auto-convolution et auto-convolution de $x(t)$ sont opposés;

quand $y(t)$ est paire et réel, alors cross-corrélation $R_{xy}(t)$ et convolution de $x(t)$ et $y(t)$ sont identique;

quand $y(t)$ est impaire et réel, alors cross-corrélation $R_{xy}(t)$ et convolution de $x(t)$ et $y(t)$ sont opposés;

$$\begin{aligned}
R_x(t) &= (x(\tau) * x(-\tau))(t) = (x(-\tau) * x(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)x(t-\tau)d\tau \\
(x(\tau) * x(\tau))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
R_{xy}(t) &= x(\tau) * y(-\tau)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(-\tau)x(t-\tau)d\tau \\
(x(\tau) * y(\tau))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Donc, quand partie réelle de $x(t)$ est paire et partie imaginaire de $x(t)$ est impaire, alors $R_x(t) = y(\tau) * y(\tau)(t)$;

quand partie réelle de $x(t)$ est impaire et partie imaginaire de $x(t)$ est paire, alors $R_x(t) = -y(\tau) * y(\tau)(t)$

Re_y	Im_y	$Re_{R_y} = Re_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$	$Re_{R_y} = -Re_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$
paire	paire		
paire	impaire	✓	
impaire	paire		✓
impaire	impaire		

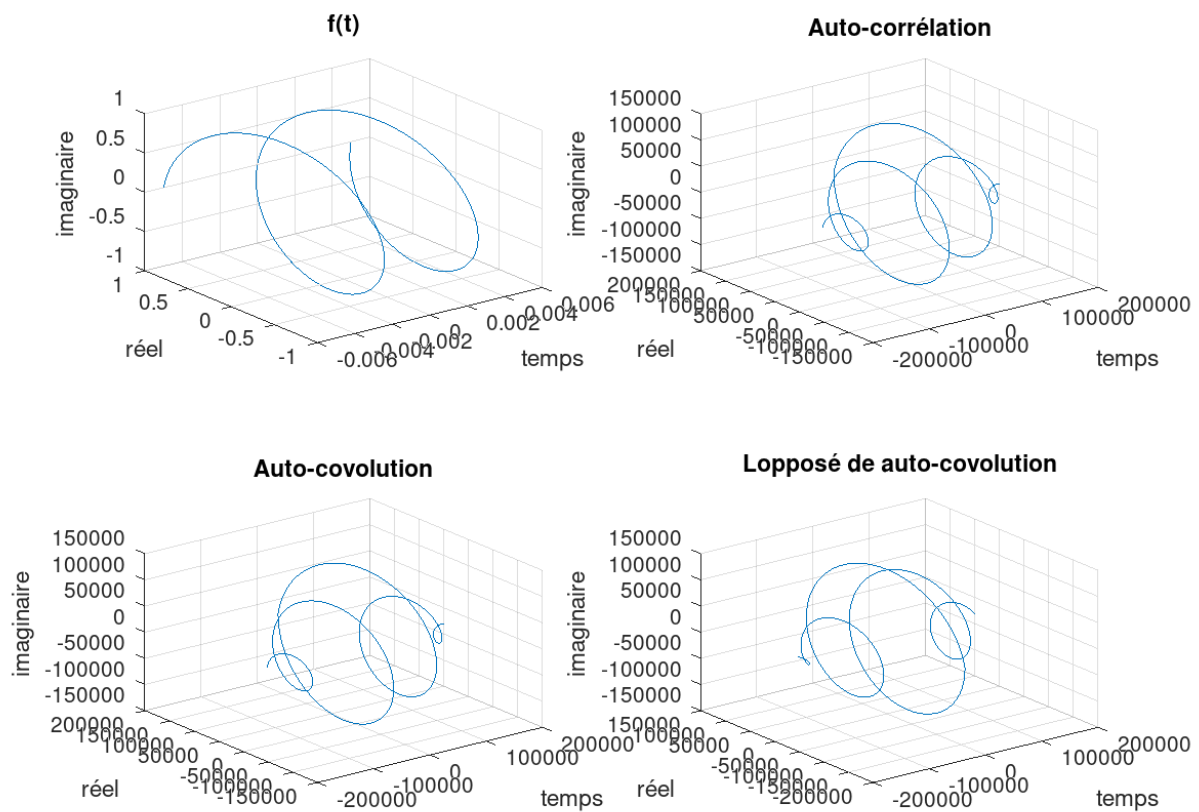
Re_y	Im_y	$Im_{R_y} = Im_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$	$Im_{R_y} = -Im_{y(\tau)*y(\tau)(t)}$
paire	paire		
paire	impaire	✓	
impaire	paire		✓
impaire	impaire		

Re_y	Im_y	$R_y = y(\tau) * y(\tau)(t)$	$R_y = -y(\tau) * y(\tau)(t)$
paire	paire		
paire	impaire	✓	
impaire	paire		✓
impaire	impaire		

nous préons des quatre signales différentes pour vérifie ce résultat.

Exemple1:

on prends un signal très générale $f(t) = \exp(jwt)$ $w = 400\pi$ $t \in [-2\pi/w, 2\pi/w]$ partie réelle de la fonction est paire et la partie imaginaire est impaire on obtient la graphie à l'aide de octave ci -dessous:



code: [parite réelle cos et parite imaginaire sin](#)

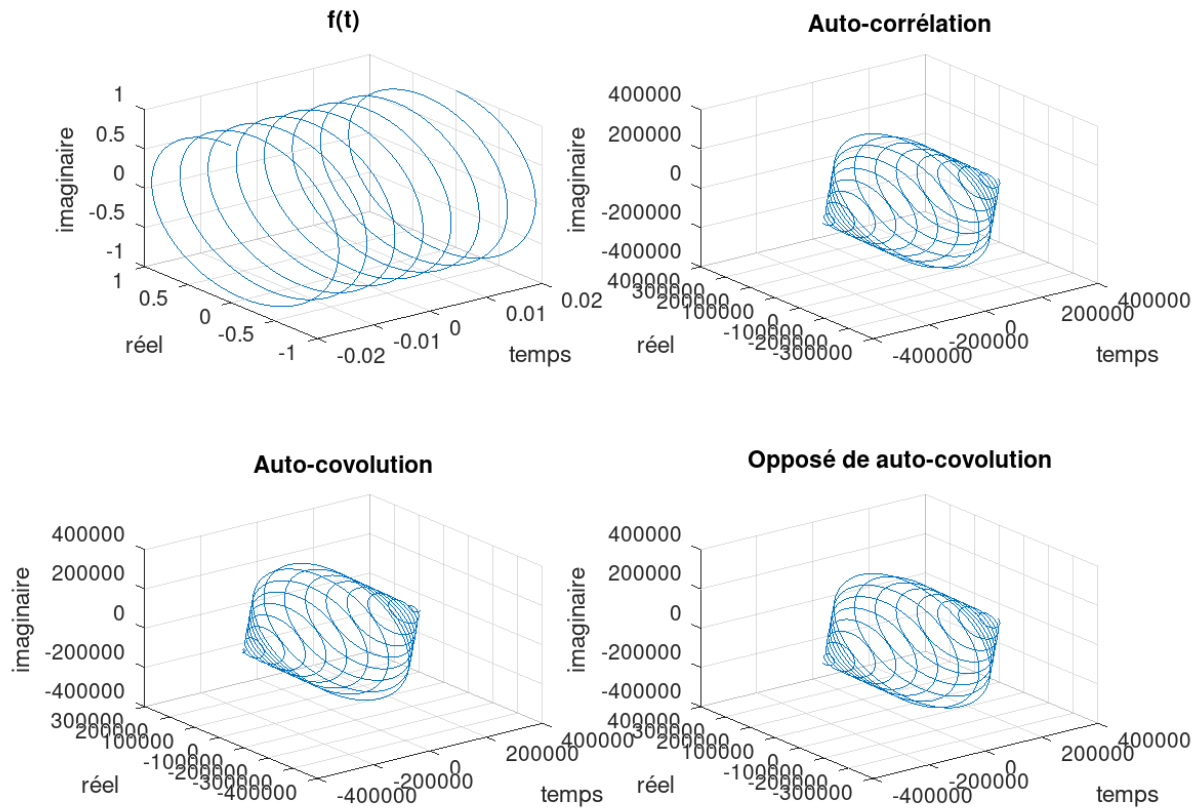
nous trouvons la résultat est bien vérifie, $R_y = y(\tau) * y(\tau)(t)$

Exemple2:

on choisie une signal dont partie imaginaire est pair et partie réelle est impaire.

$$f(t) = \sin(wt) + j\cos(wt) \quad w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$$

nous le simulons dans octave, et graphe est ci-dessous :



code: [parite réelle sin et parite imaginaire cos](#)

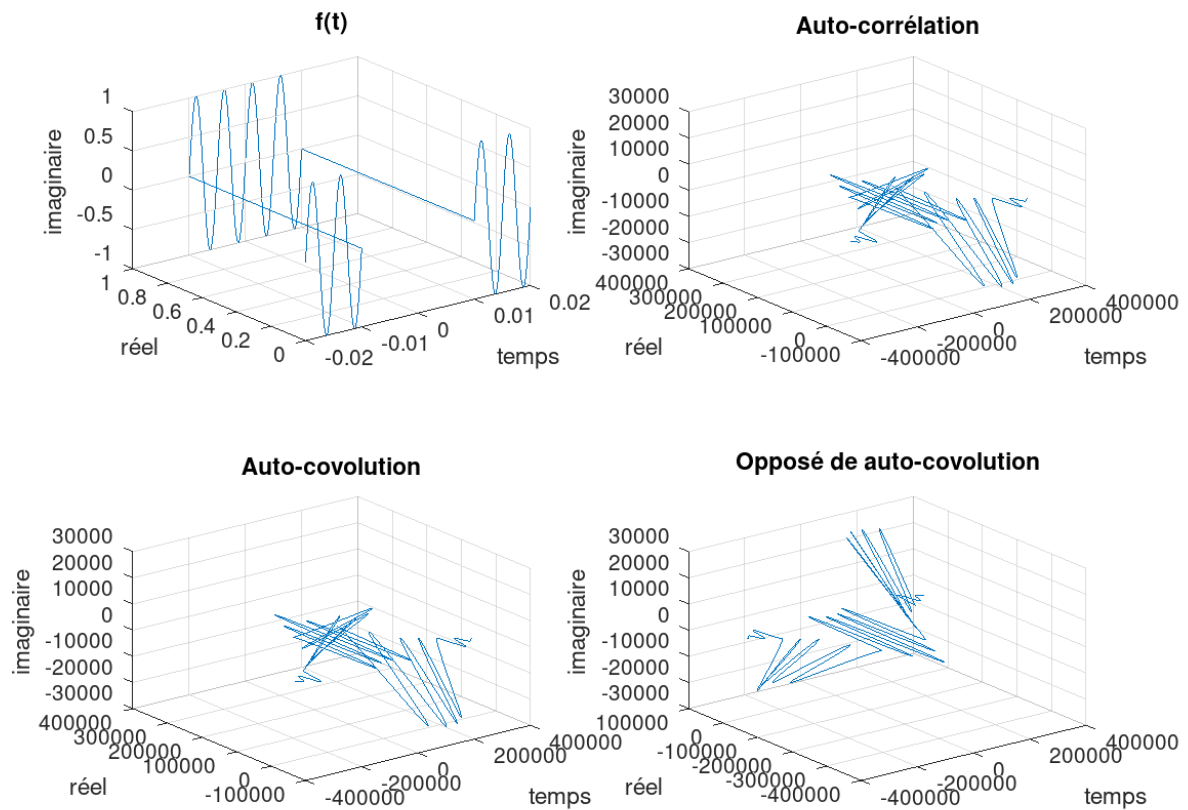
ces graphes sont un peu difficile à observer, mais lorsque vous les comparez soigneusement, tu dois te rendre compte que la opposées de auto-covolution et auto-corrélation sont identique, qui vérifie la proposition on trouve.

Exemple3:

Dans ce cas la, on veut prend d'autre fonction complex aléatoire mais bien vérifie la condition que la partie réelle est paire et parite imaginaire est impaire. par exemple : $f(t) = \text{rect}_{8\pi/w}(t) + j\sin(wt)$ $w = 400\pi$ $t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

code: [parite réelle rectangle et parite imaginaire sin](#)

la graphe est ci-dessous:



donc la preuve est vraie et on peut conclure $R_y = y(\tau) * y(\tau)(t)$ quand RE_y paire IM_y impaire

Exemple4:

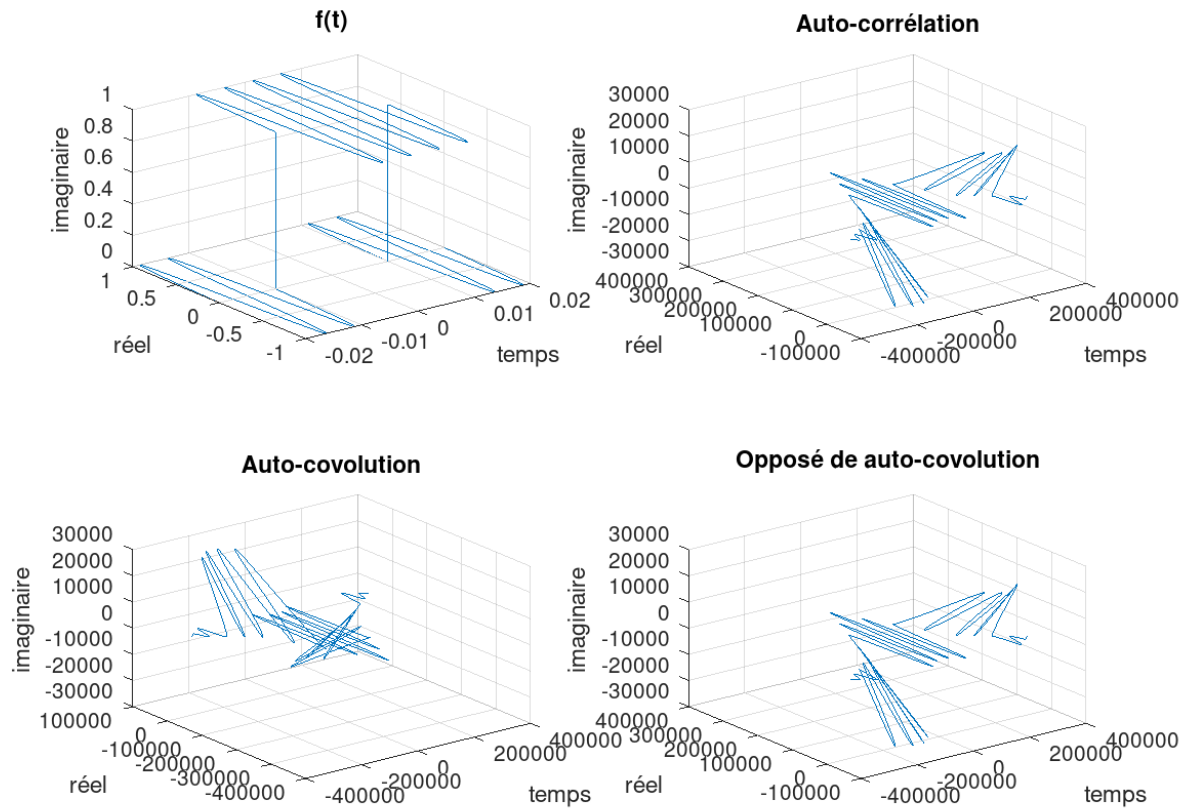
quand même on construit un cas contrôle avec Exemple3:

$$f(t) = \sin(wt) + jrect_{8\pi/w}(t) \quad w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$$

dont partie réelle est impaire et partie imaginaire est paire.

code: [partie réelle sin et partie imaginaire rectangle](#)

la graphie est ci-dessous:



donc la preuve est vraie et on peut conclure $R_y = -y(\tau) * y(\tau)(t)$ quand IM_y paire RE_y impaire

Comparer $R_{yx}(t)$ et $R_{xy}(t)$

preuve:

$$\begin{aligned}
 R_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_x(\tau) + jIm_x(\tau))(Re_y(\tau - t) - jIm_y(\tau - t))d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_x(\tau)Re_y(\tau - t) + Im_x(\tau)Im_y(\tau - t) + j(Re_y(\tau - t)Im_x(\tau)) - j(Re_x(\tau)Im_y(\tau - t)))d\tau \\
 &= R_{Re_x Re_y}(t) + R_{Im_x Im_y}(t) + jR_{Im_x Re_y}(t) - jR_{Re_x Im_y}(t) \\
 R_{yx}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau) + jIm_y(\tau))(Re_x(\tau - t) - jIm_x(\tau - t))d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Re_y(\tau)Re_x(\tau - t) + Im_y(\tau)Im_x(\tau - t) + j(Re_x(\tau - t)Im_y(\tau)) - j(Re_y(\tau)Im_x(\tau - t)))d\tau \\
 &= R_{Re_y Re_x}(t) + R_{Im_y Im_x}(t) + jR_{Im_y Re_x}(t) - jR_{Re_y Im_x}(t)
 \end{aligned}$$

si $x(t)$ et $y(t)$ sont réel, alors

$$\begin{aligned}
 R_{xy}(t) &= (x(\tau) * y(-\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(-\tau)x(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(-t - a)x(-a)da \quad (t - \tau = -a, \quad -\tau = -a - t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)y(-t - \tau)d\tau \\
 R_{yx}(t) &= (x(-\tau) * y(\tau))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)y(t - \tau)d\tau \\
 R_{xy}(t) &= R_{yx}(-t)
 \end{aligned}$$

si $x(t)$ est complexe et $y(t)$ est complexe,

$$\begin{aligned}
R_{xy}(t) &= R_{Re_x Re_y}(t) + R_{Im_x Im_y}(t) + jR_{Im_x Re_y}(t) - jR_{Re_x Im_y}(t) \\
R_{yx}(t) &= R_{Re_y Re_x}(t) + R_{Im_y Im_x}(t) + jR_{Im_y Re_x}(t) - jR_{Re_y Im_x}(t) \\
&= R_{Re_x Re_y}(-t) + R_{Im_x Im_y}(-t) - (jR_{Im_x Re_y}(-t) - jR_{Re_x Im_y}(-t)) \\
R_{xy}(t) &= R_{yx}^*(-t)
\end{aligned}$$

donc $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(-t)$

nous prenons 2 cas différentes pour vérifier ce résultat.

Exemple1:

nous prenons deux signaux complex aléatoire, comme

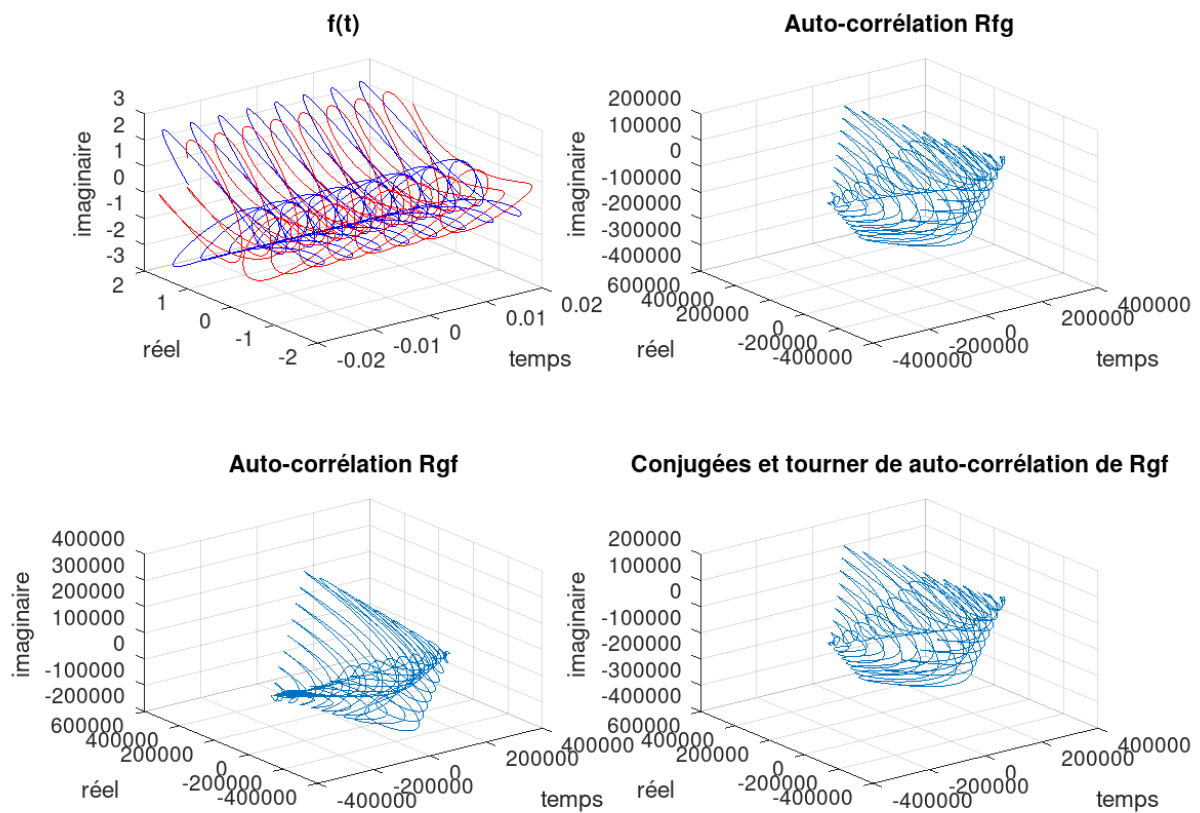
pour $w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

$$f(t) = \sin(wt) + \cos(3wt) + j(\cos(wt) + \cos(2wt) + \sin(4wt)) \quad g(t) = \cos(2wt) + \sin(3wt) + j(\cos(wt) + \sin(2wt) + \sin(4wt))$$

alors nous vérifions $R_{fg}(t) = R_{gf}^*(-t)$

code en matlab: [corrélation conjuguées 1](#)

image:



nous voyons que ce graphe montre $R_{fg}(t)$ est bien égale $R_{gf}^*(-t)$ des signaux complexes.

Exemple2:

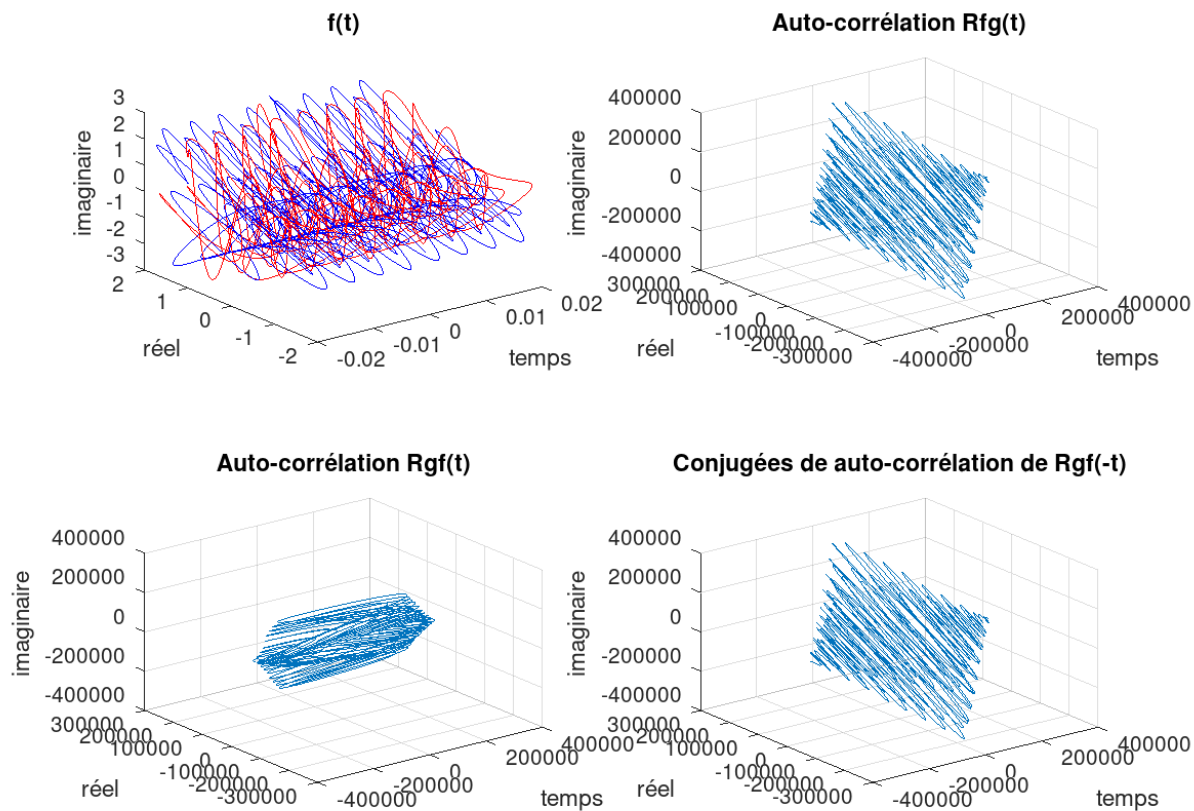
pour exlure les imprévus: nous prenons un cas différent:

pour $w = 400\pi \quad t \in [-8\pi/w, 8\pi/w]$

$$f = \text{sinc}(wt) + \cos(wt) + j(\cos(4wt) + \cos(3wt) + \sin(4wt)) \quad g = \cos(2wt) + \sin(4wt) + j(\cos(wt) + \sin(4wt) + \text{sinc}(wt))$$

code en matlab: [corrélation conjuguées 2](#)

image:



Sans doute, $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(-t)$

Conclusion

Dans cette projet, nous apprenons plein de choses, comment réaliser une projet en GIT, comment fait mieux de travaille en distance. je me profite de maîtriser la commande de matlab dans projet et mieux comprendre la corrélation et concolution des signales.

Annexe

none.