№3.

Сформулировать и решить задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике $l_1 \times l_2$, когда на левой границе задан поток $u_x(0,y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$, а на остальных — нулевые значения функции.

Формулировка задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega, \; 0 < x < l_1, \; 0 < y < l_2, \\ u_x\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{l_2}, \quad u\big|_{x=l_1} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0, \\ u\big|_{y=l_2} = 0 \end{cases}$$

Решение методом разделения переменных.

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$X''(x) \cdot Y(y) + Y''(y)\,X(x) = 0$$

подставим в задачу.

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0 \quad \Big| \div Y(y)X(x)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda - const$$

Граничные условия:

$$u(x,0) = X(x)Y(0) \Rightarrow Y(0) = 0 \qquad X \neq 0$$

$$u(x,l_2) = X(x)Y(l_2) = 0 \Rightarrow Y(l_2) = 0$$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(l_2) = 0 \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u = e^{hy}$

подставим в

$$h^2 e^{hy} + \lambda e^{hy} = 0 \quad | \div e^{hy}$$

$$h^2 + \lambda = 0 \Rightarrow h^2 = -\lambda$$

3 случая:

1. $\lambda = -h^2 < 0$ $\quad Y''(y) - h^2 Y(y) = 0$

$$Y(y) = C_1 sh(hy) + C_2 ch(hy) \Rightarrow Y(0) = C_2 = 0$$

$$Y(l_2) = C_1 sh\, h l_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$ Тривиальные решение X

2. $\lambda = 0$

$$Y''(y) = 0 \Rightarrow Y(y) = By + C$$

$$X(0) = C = 0$$

$$X(l_2) = Bl_2 = 0 \Rightarrow B = 0$$

3. $\lambda > 0$

$$h = \sqrt{\lambda}\, i \Rightarrow Y(y) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, y) + B\sin(\sqrt{\lambda}\, y) \Rightarrow Y(0) = A = 0$$

$$Y(l_2) = B\sin(\sqrt{\lambda}\, l_2) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, l_2 = \pi n,\ n \in \mathbb{N} \qquad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2$$

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{l_2}\right)$$

$B_n = 1$. $\quad X''(x) - \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2 X(x) = 0$

Решение в виде:

$$X_n(x) = A_n ch\left(\frac{\pi n x}{l_2}\right) + B_n sh\left(\frac{\pi n x}{l_2}\right)$$

Подставим в $u = X \cdot Y$ $\quad X_n, Y_n$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n ch\left(\frac{\pi n x}{l_2}\right) + B_n sh\left(\frac{\pi n x}{l_2}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n y}{l_2}\right)$$

$$u_x(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n \frac{\pi n}{l_2} \sin\left(\frac{\pi y n}{l_2}\right)\right] = \sin\frac{\pi y}{l_2} \Rightarrow \begin{cases} B_n = 0, \ n \neq 1 \\ B_1 = \frac{l_2}{\pi} \end{cases}$$

$$u(l_1, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n ch\left(\frac{\pi n l_1}{l_2}\right) + B_n sh\left(\frac{\pi n l_1}{l_2}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n y}{l_2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_n = 0, \ n \neq 1 \\ A_1 ch\left(\frac{\pi l_1}{l_2}\right) + \frac{l_2}{\pi n} sh\left(\frac{\pi l_1}{l_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_n = 0, \ n \neq 1 \\ A_1 = -\frac{l_2}{\pi} th\left(\frac{\pi l_1}{l_2}\right) \end{cases}$$

$$u(x,y) = \frac{l_2}{\pi}\left(th\left(\frac{\pi l_1}{l_2}\right) ch\left(\frac{\pi x}{l_2}\right) + sh\left(\frac{\pi x}{l_2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l_2}\right)$$