№2.

Сформулировать и решить задачу о свободных колебаниях конечного стержня $x \in [0; l]$, $l = 0{,}1$м, $a^2 = 10^6$ с нулевыми начальными отклонением и скоростью, когда левый конец движется по заданному закону $\mu_1 = \sin t$, а правый свободен.

Формулировка.

1. Левый конец $\mu_1 = \sin t$ — Неоднородное левое краевое условие первого рода $u(0,t) = \sin t$.

2. Правый конец свободен — Краевое условие второго рода $u_x(l,t) = 0$

3. Начальные условия: нулевые

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l,\ t>0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \sin t \\ u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

Обнулим краевые условия для применения метода Фурье при помощи редукции:

$$r(x,t) = \frac{\sin t}{\cos\frac{l}{a}} \cdot \cos\frac{x-l}{a} \Rightarrow \begin{cases} r_{xx} - \frac{1}{a^2} r_{tt}\ ;\ r(0,t) = \sin t \\ r_x = 0 \\ r(x,0) = 0 \\ r_t(x,0) = \frac{1}{\cos\frac{l}{a}} \cdot \cos\frac{x-l}{a} \end{cases}$$

Тогда:

$$u(x,t) = \vartheta(x,t) + r(x,t) \Rightarrow \vartheta(x,t) = u(x,t) - r(x,t)$$

$$\begin{cases} \vartheta_{tt} = a^2 \vartheta_{xx} \\ \vartheta(x,0) = 0 \\ \vartheta_t(x,t) = -\dfrac{1}{\cos\frac{\ell}{a}} \cos\dfrac{x-\ell}{a} \\ \vartheta(0,t) = 0 \\ \vartheta_x(\ell,t) = 0 \end{cases}$$

Метод разделения переменных

$\vartheta(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$ $\qquad \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = const$

$T''(t)\,X(x) = a^2 T(t)\,X''(x)$

$\Rightarrow$ 2 уравнение $\quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$T''(t) + a^2\lambda\, T(t) = 0$

Из граничных условий:

$u(0,t) = X(0)\,T(t) \Rightarrow X(0) = 0$

$u_x\big|_{x=\ell} = X'(\ell)\,T(t) = 0 \Rightarrow X'(\ell) = 0$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Собственные ф-ции и числа в виде $u = e^{kx}$

$k^2 e^{kx} + \lambda e^{kx} = 0$

$k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda$

3 случая:

1. $\lambda = -k^2 < 0 \Rightarrow X''(x) - k^2 X(x) = 0$

$X(x) = C_1 sh(kx) + C_2 ch(kx)$

$X(0) = C_2 = 0$

$X'(\ell) = \cancel{C_1 s} \; C_1 ch(k\ell) = 0 \Rightarrow 0 = C_1$ $\quad$ Тривиальное решение

2. $\lambda=0$ $\begin{cases} X''(x)=0 \\ X(0)=C=0 \\ X(\ell)=B=0 \end{cases}$ $\Rightarrow X(x)=Bx+C$, $\Rightarrow C=B=0$ $\varnothing$

3. $\lambda>0$ $k=\sqrt{\lambda}i$ $\Rightarrow X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(x)=-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)+B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0)=A=0 \Rightarrow X'(\ell)-B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ell)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\ell-\dfrac{\pi(2n+1)}{2} \Rightarrow \lambda_n=\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2\ell}\right)^2$

Собственные функции:

$X_n(x)=\sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)x}{2\ell}\right)$, $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2\ell}\right)^2$

Ортогональность: на $x\in[0;\ell]$

$\lambda_n\neq\lambda_m$

$X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0 \quad |\times X_n$

$X_m''(x)+\lambda_m X_m(x)=0 \quad |\times X_m$

$\int\limits_0^\ell X_n''(x)(X_m(x))-X_m''(x)X_n(x)\,dx+(\lambda_n-\lambda_m)\int\limits_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx=$

$=\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{X_n'(x)X_m(x)}-\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{X_m'(x)X_n(x)}\Big|_0^\ell-\underbrace{\int\limits_0^\ell X_n'(x)X_m'(x)\,dx+\int\limits_0^\ell X_m'(x)X_n(x)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{0}}+$

$+(\lambda_n-\lambda_m)\int\limits_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx$

Т.к. $\lambda_n\neq\lambda_m \Rightarrow \int\limits_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx=0$, $n\neq m$ Ортогональность ✓

Квадрат нормы $\|X_n(x)\|$:

$\|X_n(x)\|^2=\int\limits_0^\ell \sin^2\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2\ell}x\right)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^\ell dx-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^\ell\cos\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{\ell}x\right)dx \quad \dots \quad =\dfrac{\ell}{2}$

$\int\limits_0^\ell X_n(x)X_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \|X_n\|^2=\dfrac{\ell}{2}, & \text{Иначе}\end{cases}$

$$\cancel{T''(x)}\quad T''(t)+\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2T(t)=0 \Rightarrow T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}t\right)$$

решение в виде наложение частных решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_nX_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}t\right)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)\right]$$

Начальные условие:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)=0 \Rightarrow A_n=0,\ \forall n$$

второе условие

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\pi(2n+1)}{2l}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)=-\frac{1}{\cos\frac{l}{a}}\cdot\cos\frac{x-l}{a}$$

Разложение начального условие по собственным колебанием:

$$B_n\frac{\pi(2n+1)}{2l}=\frac{\left(-\frac{1}{\cos\frac{l}{a}}\cdot\cos\frac{x-l}{a},X_n\right)}{\|X_n\|^2}\Rightarrow B_n=-\frac{4}{\cos\frac{l}{a}}\cdot\frac{\left(\cos\frac{x-l}{a},X_n\right)}{\pi(2n+1)}=$$

$$=\frac{-4}{\pi(2n+1)}\cdot\frac{1}{\cos\frac{l}{a}}\cdot\frac{4al^2}{(a\pi(2n+1))^2-4l^2}\cdot\cos\frac{l}{a}=\frac{-4}{\pi(2n+1)}\cdot\frac{4al^2}{(a\pi(2n+1))^2-4l^2}$$

$$\left(\cos\frac{x-l}{a},X_n\right)=\int_0^l\cos\frac{x-l}{a}\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^l\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x-\frac{x-l}{a}\right)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x+\frac{x-l}{a}\right)dx=\frac{al}{a\pi(2n+1)+2l}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x+\frac{x-l}{a}\right)\Big|_0^l-$$

$$-\frac{al}{a\pi(2n+1)-2l}\cos\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x-\frac{x-l}{a}\right)\Big|_0^l=\frac{4al^2}{(a\pi(2n+1))^2-4l^2}\cdot\cos\frac{l}{a}-$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\cos\frac{l}{a}}\cos\frac{x-l}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n+1)}\cdot\frac{4al^2}{(a\pi(2n+1))^2-4l^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}t\right)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)$$