Сформулировать и решить задачу о нагреве конечного стержня $x \in [0; l]$, с начальным распределением температуры $T_0 = 300$, когда на боковой поверхности стержня происходит теплообмен по з-ну Ньютона с коэффициентом теплоотдачи $\alpha = 0{,}2$ и температурой окр. среды $u_e = 1000$. На концах заданы постоянные температуры: на левом $\mu_0 = 500$, на правом $\mu_1 = 400$. Исследовать ортогональность и нормировку собственных функций, построить графики.

$u(0,t) = 500$

$u(l,t) = 400$ краевые усл. I рода (1)

$u(x,0) = 300$ Н. У. (2)

Формулировка:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \alpha(u - 1000) & \cancel{\forall x \in D}\ (x,t) \in D \\ u(x,0) = 300 \\ u(0,t) = 500 \\ u(l,t) = 400 \end{cases} \quad (3)$$

Редукция $u = w + 1000$ (4)

Формулировка задачи для w:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + \alpha w & \forall (x,t) \in D \\ w(x,0) = -700 \\ w(0,t) = -500 \\ w(l,t) = -600 \end{cases}$$

w в виде произведения

$w(x,t) = e^{\beta t} \vartheta(x,t) \Rightarrow w_t = e^{\beta t} \vartheta_t + \beta e^{\beta t} \vartheta$

$w(x,0) = e^0 \vartheta = -700$

$w_{xx} = e^{\beta t} \vartheta_{xx}$

$w(0,t) = e^{\beta t} \vartheta(0,t) = -500 \Rightarrow \vartheta(0,t) = -500 e^{-\beta t}$

$w(l,t) = e^{\beta t} \vartheta(l,t) = -600 \Rightarrow \vartheta(l,t) = -600 e^{-\beta t}$

$w_t = a^2 w_{xx} + \alpha w \ \forall (x,t) \Leftrightarrow e^{\beta t} \vartheta_t(x,t) + \beta e^{\beta t} \vartheta(x,t) =$

$= e^{\beta t} \vartheta_{xx}(x,t) + \alpha e^{\beta t} \vartheta(x,t)$

$e^{\beta t} \vartheta_t(x,t) = e^{\beta t} \vartheta_{xx}(x,t) + (\alpha - \beta) e^{\beta t} \vartheta(x,t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0{,}2$

Задача для функции $\vartheta(x,t)$

$$\begin{cases} \vartheta_t(x,t) = a^2\vartheta_{xx} \quad \forall(x,t)\in\mathcal{D} \\ \vartheta(x,0) = -700 \\ \vartheta(0,t) = -500e^{-0{,}2t} \\ \vartheta(l,t) = -600e^{-0{,}2t} \end{cases}$$

Редукция для обнуления краевых условий:

$$\begin{cases} \vartheta(x,t) = w(x,t) + r(x,t) \\ r(x,t) = r_0(x,t) + r_l(x,t) \end{cases}$$

Левая редукция:

$$\begin{cases} (r_0)_t = a^2(r_0)_{xx} \quad \forall(x,t)\in\mathcal{D} \\ r_0(0,t) = -500e^{0{,}2t} \\ r_0(l,t) = 0 \end{cases}$$

долгое решение.

$$\Rightarrow \quad r(x,t) = \frac{500e^{0{,}2t}\cdot\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{x-l}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{x}{a}\right)}$$

Правая редукция:

$$\begin{cases} (r_l)_t = a^2(r_l)_{xx} \quad \forall(x,t)\in\mathcal{D} \\ (r_l)(0,t) = 0 \\ r_0(l,t) = -600e^{0{,}2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-600e^{0{,}2t}\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{l}{a}\right)}$$

Начальные условия

$$w(x,0) = \frac{600e^{0{,}2t}\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{l}{a}\right)} - \frac{500e^{0{,}2t}\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{x-l}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0{,}2}\,\frac{l}{a}\right)} - 700 \qquad (*)$$

Задача для w

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \quad \forall(x,t)\in\mathcal{D} \\ w(x,0) = (*) \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \end{cases}$$

Метод Фурье (разделение переменных)

$$w(x,t) = X(x)\cdot T(t) \neq 0$$

$$T'(t)\cdot X(\overset{x}{t}) = a^2 X''(x) T(t), \quad \forall (x,t) \in \mathcal{D}$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda - const$$

$$\begin{cases} \underline{X''(x)} + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Из граничных условий

$$w(0,t) = X(0)\cdot T(t) \Rightarrow X(0) = 0$$
$$w(l,t) = X(l)\, T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции в виде $u = e^{kx}$

$$k^2 e^{kx} + \lambda e^{kx} = 0 \quad | \div e^{kx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda$$

Замечание:

1. $\lambda = -k^2 < 0$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \,sh(kx) + C_2\, ch(kx)$$
$$X(0) = C_2 = 0$$
$$X(l) = C_1\, sh(kl) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$ Тривиальное решение

2. $\lambda = 0$.

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Bx + C \\ X(0) = C = 0 \\ X(l) = Bl = 0 \end{cases}$$ Тривиальное решение

3. $k=\sqrt{\lambda}i$

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0)=A=0$$

$$X(-l)=B\sin(-l\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow l\sqrt{\lambda}=\pi n, n\in\mathbb{N}$$

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X_n=\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Ортогональность собственных функций на $x\in[0;l]$:

$n\neq m$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)=\frac{1}{2}\int_0^l\cos\left(\frac{2\pi(n-m)x}{l}\right)dx-\frac{1}{2}\int_0^l\cos\left(\frac{2\pi(n+m)x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{l}{4\pi(n+m)}\sin\left(\frac{2\pi(n+m)x}{l}\right)\Big|_0^l-\frac{l}{4\pi(n-m)}\sin\left(\frac{2\pi(n-m)x}{l}\right)\Big|_0^l=0$$

Квадрат нормы:

$$\|X_n(x)\|^2=\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^l 1-\cos\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{l}{4\pi(2n+1)}\cdot\sin\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)\Big|_0^l=\frac{l}{2}$$

Получим:

$$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ l/2, & n=m\end{cases}$$

$$T'(t)+\left(a\frac{\pi n}{l}\right)^2 T(t)=0 \Rightarrow T(t)=A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}$$

Решение w имеет вид:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

Из начального условия

$$w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)=\frac{600e^{0,2t}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}-\frac{500e^{0,2t}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x-l}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}-700$$

Разложени в ред Фурье:

$$A_n=\frac{\left[\frac{600e^{0,2t}\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}-\frac{500e^{0,2t}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x-l}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}-\left(700,\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)\right]}{\left\|\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right\|^2}=$$

$$=\frac{2}{l}\left[\frac{2000e^{0,2t}\cdot a^3 l^2\pi(2n-1)}{(a\pi(2n-1))^2-0,8l^2}(-1)^{n+1}-\frac{2000e^{0,2t}\cdot a^2 l^3\sqrt{0,8}}{(a\pi(2n-1))^2-0,8l^2}\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)\right]+$$

$$+\frac{2400e^{0,2t}a^3 l^2\pi(2n-1)}{(a\pi(2n-1))^2-0,8l^2}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\right)\frac{l}{a}-\frac{1400l}{\pi(2n-1)}\Bigg]=$$

$$=\frac{4000e^{0,2t}\cdot a^3 l\pi(2n-1)}{(a\pi(2n-1))^2-0,8l^2}(-1)^{n+1}-\frac{4000e^{0,2t}\cdot a^2 l^2\sqrt{0,8}}{(a\pi(2n-1))^2-0,8l^2}\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)+$$

$$+\frac{4800e^{0,2t}a^3 l\pi(2n-1)}{(a\pi(2n-1))^2-0,8l^2}(-1)^{n+1}\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)-\frac{2400}{\pi(2n-1)}$$

Скалярное произведени:

$$(\ ,\ )=\int_0^l\left(\frac{600\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}-\frac{500\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x-l}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}-700\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx=$$

$$=\int_0^l\frac{600\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx=\frac{-250}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}I_1+\frac{300}{\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{l}{a}\right)}I_2-700I_3=$$

$$=\frac{600a^3l^2\pi n}{(a\pi n)^2-0,8l^2}(-1)^{n+1}+\frac{500a^2l^3\sqrt{0,8}}{(a\pi n)^2-0,8l^2}-\frac{700l}{\pi n}$$

$$I_3=\int_0^l\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx=-\frac{l}{\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n x}{l}\right)\Big|_0^l=\frac{l}{\pi n}$$

$$I_1=2\int_0^l\sin\left(\sqrt{0,2}\,\frac{x-l}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx=\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n x}{l}-\sqrt{0,2}\,\frac{x-l}{a}\right)dx-\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n x}{l}+\sqrt{0,2}\,\frac{x-l}{a}\right)dx=$$

$$= -\frac{2a^3\ell^3\sqrt{0,8}}{(a\pi n)^2-0,8\ell^2}\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)$$

$$I_2 = 2\int_0^\ell \sin\left(\sqrt{0,2}\frac{x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)dx = \int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}-\sqrt{0,2}\frac{x}{a}\right)dx - \int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}+\sqrt{0,2}\frac{x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{2a^3\ell^2\pi n}{(a\pi n)^2-0,8\ell^2}(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)$$

Решение вспомогательной задачи:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\quad\cdots\quad\right]e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

Общее решение с учетом редукции:

$$u(x,t) = 1000 + e^{-0,2t}\left[-600e^{0,2t}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{x}{a}\right) - 500e^{0,2t}\cdot\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{x-\ell}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{600e^{0,2t}\cdot a^3\cdot\ell^2\pi n}{(a\pi n)^2-0,8\ell^2}(-1)^{n+1} + \frac{500e^{0,2t}\cdot a^2\cdot\ell^3\cdot\sqrt{0,8}}{(a\pi n)^2-0,8\ell^2} - \frac{700\ell}{\pi n}\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = 1000 - 600\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{x}{a}\right) - 500\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{x-\ell}{a}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{600a^3\ell^2\pi n}{(a\pi n)^2-0,8\ell^2}(-1)^{n+1} + \frac{500a^3\ell^3\sqrt{0,8}}{(a\pi n)^2-0,8\ell^2} - \frac{700\ell}{\pi n}\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t-0,2t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

Проверка:

$$u(0,t) = 1000 - \frac{600\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{0}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)} - \frac{500\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi a n}{\ell}\right)^2 t-0,2t}\cdot\sin(0) =$$

$$= 1000 - 500 = 500$$

$$u(\ell,t) = 1000 - \frac{600\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)} + \frac{500\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{0}{a}\right)}{\sin\left(\sqrt{0,2}\frac{\ell}{a}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t-0,2t}\cdot\sin(\pi n) =$$

$$= 1000 - 600 = 400$$