Лабораторная работа 1

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

1.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u(0,t) = 0,$

$u(1,t) = 0,$

$u(x,0) = \sin(2\pi x)$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-4\pi^2 at)\sin(2\pi x)$.

2.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u(0,t) = 0,$

$u(1,t) = 1,$

$u(x,0) = x + \sin(\pi x)$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = x + \exp(-\pi^2 at)\sin(\pi x)$

3.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u(0,t) = \exp(-at),$

$u(\pi,t) = -\exp(-at),$

$u(x,0) = \cos x$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\cos x$.

4.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u_x(0,t) = \exp(-at),$

$u_x(\pi,t) = -\exp(-at),$

$u(x,0) = \sin x$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\sin x$.

5.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin(\pi x),$$
$u(0,t)=0,$

$u(1,t)=0,$

$u(x,0)=0$.

Аналитическое решение: $U(x,t)=\dfrac{1}{\pi^2}(1-\exp(-\pi^2 t))\sin(\pi x)$.

6.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos x(\cos t+\sin t),$$
$u(0,t)=\sin t,$

$u_x(\dfrac{\pi}{2},t)=-\sin t,$

$u(x,0)=0,$

Аналитическое решение: $U(x,t)=\sin t\cos x$.

7.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+0{,}5\exp(-0{,}5t)\cos x,$$
$u_x(0,t)=\exp(-0{,}5t),$

$u_x(\pi,t)=-\exp(-0{,}5t),$

$u(x,0)=\sin x$,

Аналитическое решение: $U(x,t)=\exp(-0{,}5t)\sin x$.

8.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu,\ \ a>0,\ \ c<0.$$
$u_x(0,t)=\exp((c-a)t),$

$u(\dfrac{\pi}{2},t)=\exp((c-a)t),$

$u(x,0)=\sin x$,

Аналитическое решение: $U(x,t)=\exp((c-a)t)\sin x$.

9.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x},\ \ a>0,\ \ b>0.$$
$u_x(0,t)-u(0,t)=-\exp(-at)(\cos(bt)+\sin(bt)),$

$u_x(\pi,t)-u(\pi,t)=\exp(-at)(\cos(bt)+\sin(bt)),$

$u(x,0)=\cos x$,

Аналитическое решение: $U(x,t)=\exp(-at)\cos(x+bt)$.

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu,\ a > 0,\ \ b > 0,\ c < 0.$$

$u_x(0,t) + u(0,t) = \exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$

$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -\exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$

$u(x,0) = \sin x$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin(x+bt)$.