Лабораторная работа N4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$

$u(\pi,y,t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$

$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$

$u(x,\pi,t) = (-1)^{\mu_2}\cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$

$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$.

2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$

$u(\frac{\pi}{2}\mu_1, y, t) = 0,$

$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$

$u(x, \frac{\pi}{2}\mu_2, t) = 0,$

$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$.

3.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$u(0, y, t) = \cosh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{4}, y, t) = 0$,

$u(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x, \ln 2, t) = \frac{5}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x, y, 0) = \cos(2x)\cosh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

4.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$u(0, y, t) = \cosh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{4}, y, t) = 0$,

$u(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at)$,

$u_y(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x, y, 0) = \cos(2x)\cosh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\cosh(y)\exp(-3at)$.

5.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$u(0, y, t) = \sinh(y)\exp(-3at)$,

$u(\frac{\pi}{2}, y, t) = -\sinh(y)\exp(-3at)$,

$u_y(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at)$,

$u(x, y, 0) = \cos(2x)\sinh(y)$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$u(0, y, t) = \sinh(y)\exp(-3at),$

$u_x(\frac{\pi}{4}, y, t) = -2\sinh(y)\exp(-3at),$

$u_y(x, 0, t) = \cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$

$u(x, y, 0) = \cos(2x)\sinh(y).$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x)\sinh(y)\exp(-3at)$.

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$$

$u(0, y, t) = 0,$

$u(1, y, t) = y\cos t,$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u(x, 1, t) = x\cos t,$

$u(x, y, 0) = xy.$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy\cos t$.

8.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t,$$

$u(0, y, t) = 0,$

$u(1, y, t) - u_x(1, y, t) = 0,$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u(x, 1, t) - u_y(x, 1, t) = 0,$

$u(x, y, 0) = xy.$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy\cos t$.

9.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x\sin y(\mu\cos\mu t + (a+b)\sin\mu t),$$

$u(0, y, t) = 0,$

$u(\frac{\pi}{2}, y, t) = \sin y\sin(\mu t),$

$u(x,0,t)=0,$

$u_y(x,\pi,t)=-\sin x\sin(\mu t),$

$u(x,y,0)=0$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a=1, b=1, \mu=1$.

2). $a=2, b=1, \mu=1$.

3). $a=1, b=2, \mu=1$.

4). $a=1, b=1, \mu=2$.

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sin x\sin y(\mu\cos\mu t+(a+b)\sin\mu t),$$

$u(0,y,t)=0,$

$u_x(\pi,y,t)=-\sin y\sin(\mu t),$

$u(x,0,t)=0,$

$u_y(x,\pi,t)=-\sin x\sin(\mu t),$

$u(x,y,0)=0$.

Аналитическое решение: $U(x,y,t)=\sin x\sin y\sin(\mu t)$.

1). $a=1, b=1, \mu=1$.

2). $a=2, b=1, \mu=1$.

3). $a=1, b=2, \mu=1$.

4). $a=1, b=1, \mu=2$.