Heli Hyttinen

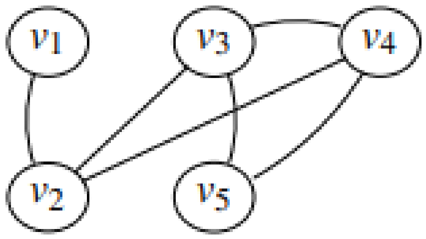
Diskreetti matematiikka 2
Graafiteoria

2020

Kaakkois-Suomen ammattikorkeakoulu

SISÄLLYS

1 $G = (V,E)$ ASTELUKUJEN SUMMA



Kuva 1. Graafi $G = (V,E)$.

Linkkejä on yhteensä 6, joten solmujen astelukujen summa on 2 kertaa 6 eli 12.

Lasken jokaisen solmun asteluvun;

$\deg(v1) = 1$

$\deg(v2) = 3$

$\deg(v3) = 3$

$\deg(v4) = 3$

$\deg(v5) = 2$

ja näiden summa on 12.

1 + 3 + 3 + 3 + 2 = 12

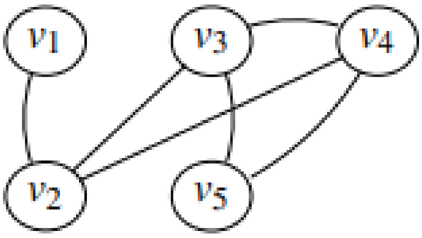
G:n solmujen astelukujen summa on 12.

1.1 Eulerin reitti

G:ssä ei ole Eulerin reittiä. G:n solmuista neljän solmun asteluku on pariton eli G:ssä on 4 kpl paritonta solmua. Jotta G:ssä olisi Eulerin reitti, siinä tulisi olla täsmälleen 2 kpl parittomia solmuja.

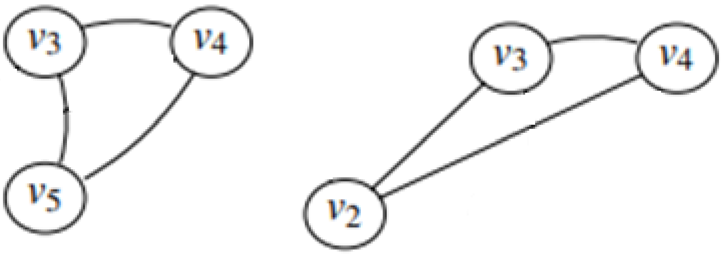
G.ssä ei myöskään ole reittiä, jossa jokainen linkki $e \in E$ esiintyisi.

2 $G = (V,E)$ KAKSIJAKOISUUS



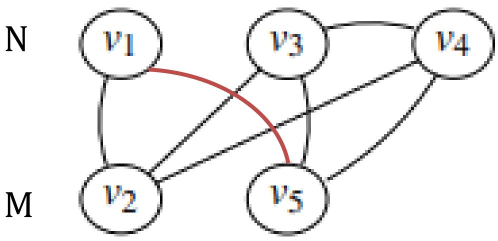
Kuva 2. Graafi $G = (V,E)$.

G ei ole kaksijakoinen. G:ssä on kaksi 3-sykliä. Jotta G olisi kaksijakoinen, sen ei tulisi sisältää yhtään paritonta sykliä ja 3-sykli on pariton sykli.



Kuva 3. G:n syklit.

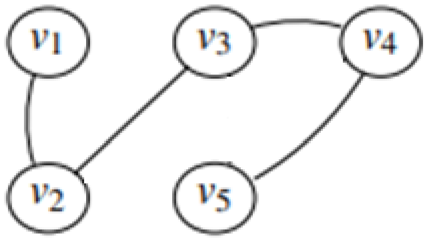
Lisäksi jos solmujoukko V voitaisi jakaa osajoukkoihin M ja N niin, että linkki yhdistäisi jokaisen M:n solmun solmuihin N, voisi G olla kaksijakoinen. $V1$ ja $v5$ välillä ei ole linkkiä, jotta tämä onnistuisi (kuva 4).



Kuva 4. Linkki $v1$ ja $v5$ välillä.

2.1 G :n virittävä puu

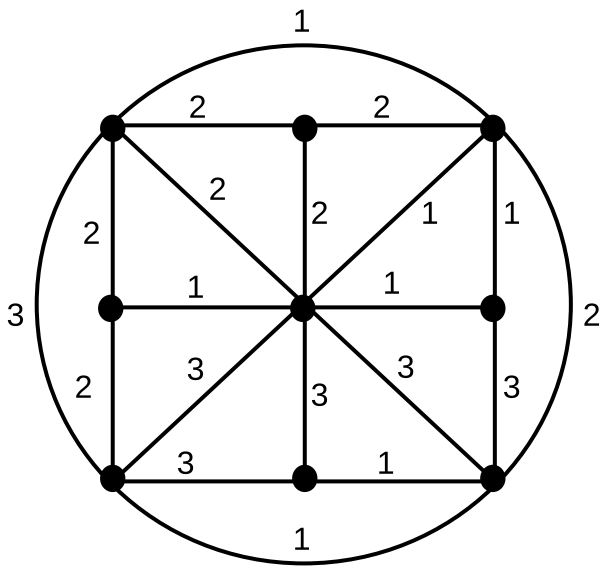
Kuvassa 5 on G:n virittävä puu. Jokainen G:n solmu esiintyy siinä.



Kuva 5. G:n virittävä puu.

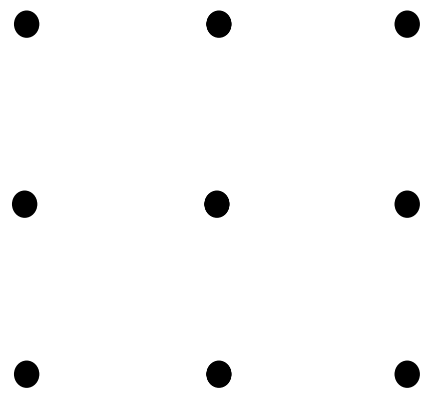
3 MINIMAALINEN VIRITTÄVÄ PUU

Kuvassa 6 esiintyy graafi G painoarvoineen, jolle määrään minimaalisen virittävän puun.

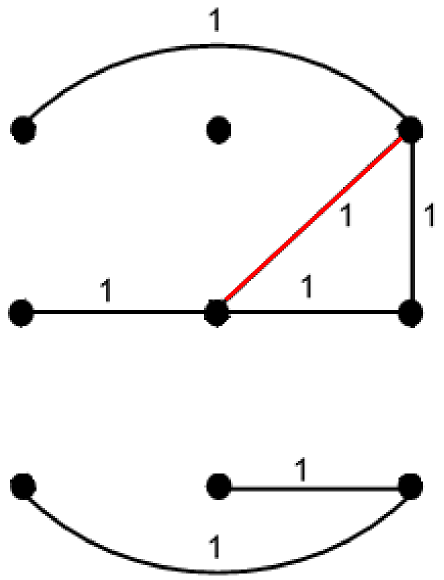


Kuva 6. Graafi G painoarvoineen.

Lähden liikkeelle yhdeksästä solmusta (kuva 7) ja lisään pienimmän, eli 1, painoarvon omaavat linkit solmujen väliin.

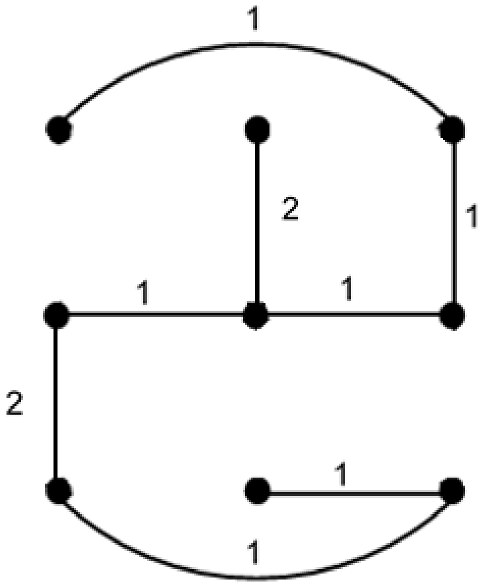


Kuva 7. G:n solmut.



Kuva 8. Linkit joilla on pienimmät painoarvot.

Vielä poistetaan linkki, jonka merkitsin punaisella kuvaan 8, jotta saadaan graafista syklitön. Lisäksi yksi solmu on kokonaan yhdistämättä ja graafi ei ole vielä yhtenäinen. Lisätään linkit, jotta graafista tulee yhdistetty, sen mukaan millä linkeillä on seuraavaksi pienimmät painoarvot, eli arvo 2. Kuvassa 9 on tehty nämä muutokset tuloksena G:n minimaalinen virittävä puu.



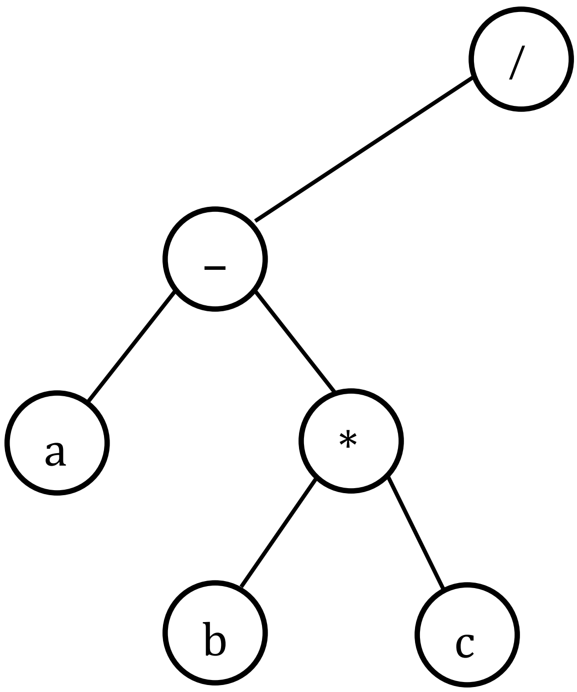
Kuva 9. G:n minimaalinen virittävä puu.

Painoarvojen summa on 10.

4 ABSTRAKTI SYNTAKSIPUU

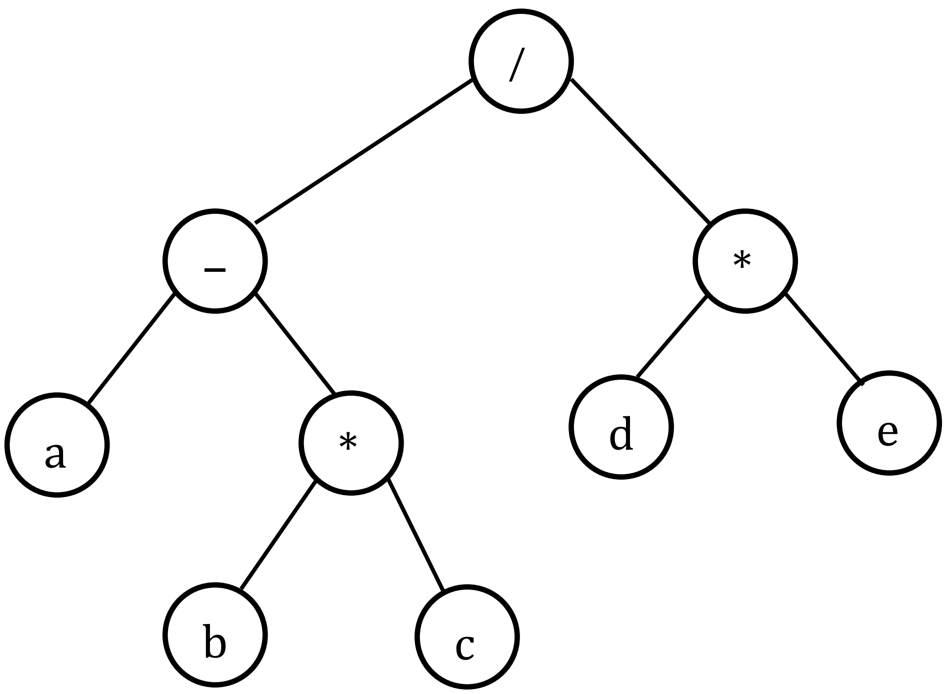
Muodostan laskutoimituksesta $(a-(b*c))/(d*e)$ abstraktin syntaksipuun. Operaattorit tarkoittavat kaksipaikkaisia laskutoimituksia ja operaattori $/$ jakaa koko laskutoimituksen aluksi kahteen osaan ollessa kaikkien ”isäsolmu”.

Jatkan puun muodostamista lukien laskutoimitusta operaattorin $/$ vasemmalta puolelta, jossa seuraava operaattori on $-$, joka on ”isäsolmu” operandeille a ja $(b*c)$. Tässä $(b*c)$ operaattori $*$ on b:n ja c:n ”isäsolmu” ja operaattori $*$ merkitään puuhun solmun ”–” toiselle paikalle, kun toisella paikalla on a. Lapsisolmut b ja c merkitään solmun ”*” paikoille. Kuvassa 10 näkyy tähän asti muodostettu puu.



Kuva 10. Keskeneräinen abstrakti syntaksipuu.

Jatkan puun muodostamista solmun ”/” oikealle puolelle/paikalle. Jäljellä on operaattori ∗, joka on ”isäsolmu” d:lle ja e:lle. Kuvassa 11 puu on valmis.



Kuva 11. Abstrakti syntaksipuu.

4.1 Puolalainen esijärjestys

Kirjoitan laskutoimituksen $(\mathrm{a}-(\mathrm{b} * \mathrm{c}))/(\mathrm{d} * \mathrm{e})$ puolalaisessa esijärjestyksessä äsken muodostetun puun avulla. Ensimmäiseksi merkitään isäsolmu ”/” ja tästä jatketaan vasemmalle niin, että ”vanhempisolmu” merkitään ensin ja ns. tasa-arvoisista solmuista vasen merkitään ensin. Kun solmun ”/” vasen puoli/paikka on kirjoitettu, kirjoitetaan perään oikean puolimmaiset solmut samalla tavalla. Saan seuraavan näköisen järjestyksen aikaiseksi.

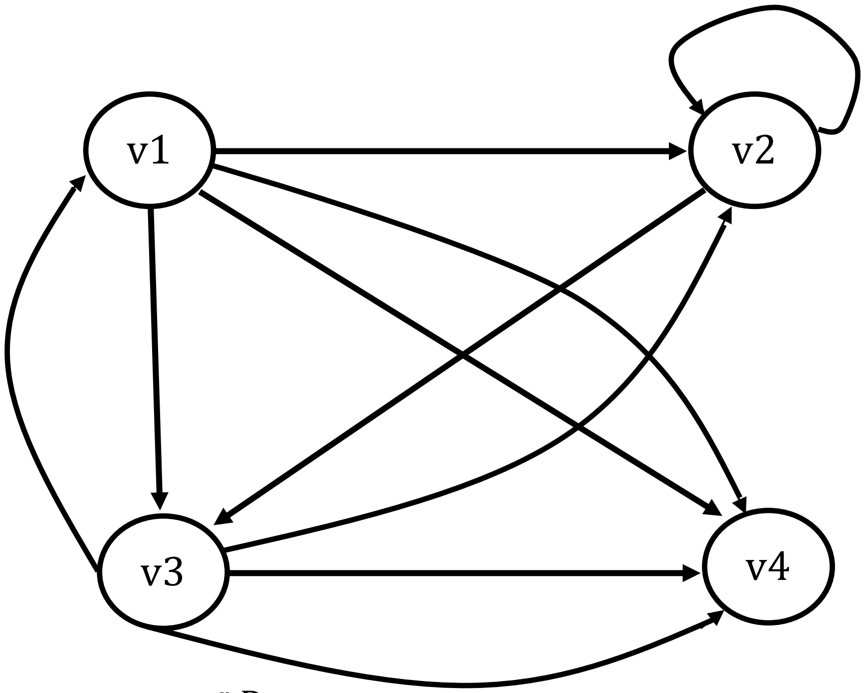
$$/- \mathrm{a} * \mathrm{b}\ \mathrm{c} * \mathrm{d}\ \mathrm{e}$$

5 3 NUOLEN MITTAISET SUUNNATUT KÄVELYT

Suunnattu graafi $\mathrm{D} = (\mathrm{V}, \mathrm{A})$, missä $\mathrm{V} = (\mathrm{v}1, \mathrm{v}2, \mathrm{v}3, \mathrm{v}4)$ on matriisina seuraava

$$\mathrm{M_D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lasken kuinka monta kolmen nuolen mittaista suunnattua kävelyä on olemassa solmusta $\mathrm{v}1$ solmuun $\mathrm{v}2$. Matkan solmusta $\mathrm{v}1$ solmuun $\mathrm{v}2$ ilmaisee matriisin alkio $m_{1,2}$. Eli solmusta $\mathrm{v}1$ solmuun $\mathrm{v}2$ on matkaa yhden nuolen verran yllä olevan matriisin mukaan. Havainnollistan suunnatun graafin kuvassa 12.



Kuva 12. Graafi D.

Kerron graafista annetun matriisin M_D kolmesti itsellään, jotta saadaan selville kolmen nuolen mittaisten suunnattujen kävelyiden määrät.

$$M_D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0*0+1*0+1*1+1*1	0*1+1*1+1*1+1*0	0*1+1*1+1*0+1*0	0*1+1*0+1*2+1*0
0*0+1*0+1*1+0*1	0*1+1*1+1*1+0*0	0*1+1*1+1*0+0*0	0*1+1*0+1*2+0*0
1*0+1*0+0*1+2*1	1*1+1*1+0*1+2*0	1*1+1*1+0*0+2*0	1*1+1*0+0*2+2*0
1*0+0*0+0*1+0*1	1*1+0*1+0*1+0*0	1*1+0*1+0*0+0*0	1*1+0*0+0*2+0*0

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_D^2 * M_D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2*0+2*0+1*1+2*1	2*1+2*1+1*1+2*0	2*1+2*1+1*0+2*0	2*1+2*0+1*2+2*0
1*1+2*1+1*1+2*0	1*1+2*1+1*1+2*0	1*1+2*1+1*0+2*0	1*1+2*0+1*2+2*0
2*0+2*0+2*1+1*1	2*1+2*1+2*1+1*0	2*1+2*1+2*0+1*0	2*1+2*0+2*2+1*0
0*0+1*0+1*1+1*1	0*1+1*1+1*1+1*0	0*1+1*1+1*0+1*0	0*1+1*0+1*2+1*0

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{M}_{\mathrm{D}}^{3}$$

Kolmen nuolen mittaisia matkoja solmusta $\mathrm{v}1$ solmuun $\mathrm{v}2$ ilmaisee matriisin $\mathrm{M}_{\mathrm{D}}^{3}$ alkio $m_{1,2}$, eli 5. Kolmen nuolen mittaisia suunnattuja kävelyitä on siis 5.

5.1 3 nuolen mittaiset suunnatut kävelyt Pythonilla

```
In [1]: import numpy as np
        #matriisi
        Md = np.array([[0,1,1,1], [0,1,1,0], [1,1,0,2], [1,0,0,0]])
        print(Md)

[[0 1 1 1]
 [0 1 1 0]
 [1 1 0 2]
 [1 0 0 0]]
```

```
In [2]: Md3 = np.linalg.matrix_power(Md,3)
        #matriisin md tulo itsensä kanssa md * md * md
        print(Md3)

[[3 5 4 4]
 [3 4 3 3]
 [3 6 4 6]
 [2 2 1 2]]
```

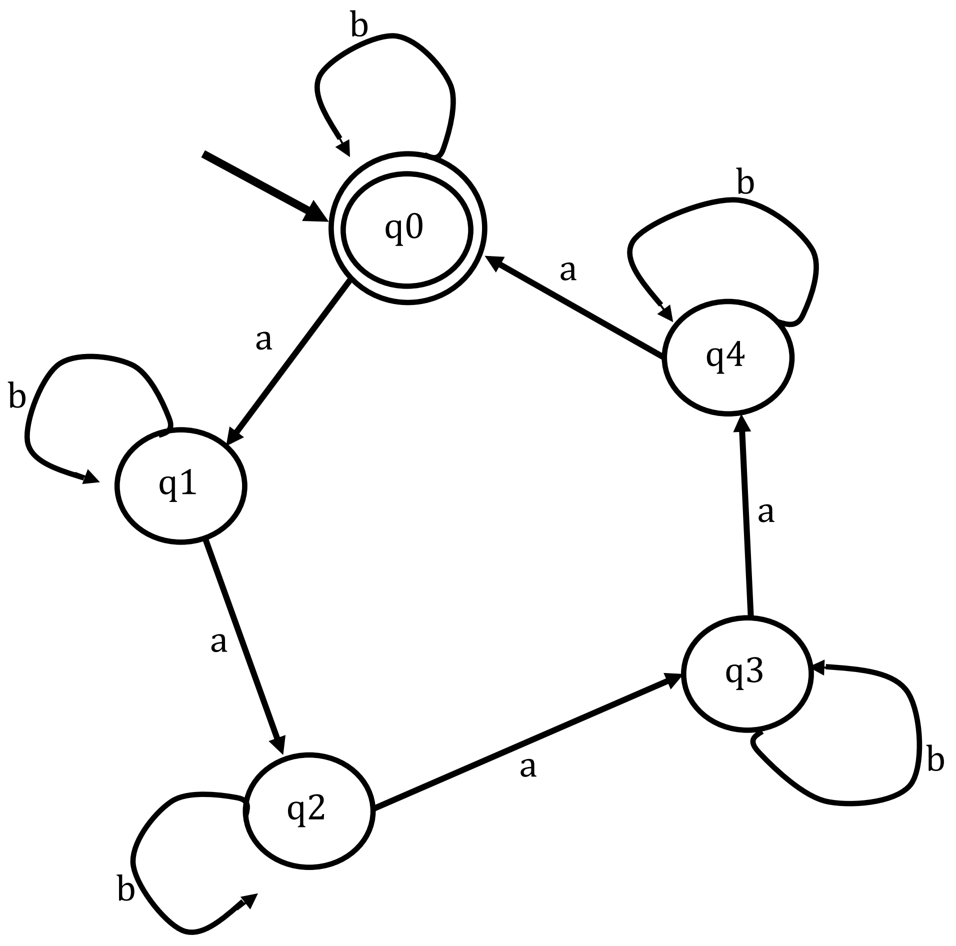
Kuva 13. Matriisit Pythonilla.

```
[[3 5 4 4]
 [3 4 3 3]
 [3 6 4 6]
 [2 2 1 2]]
```

Kuva 14. Kolmen nuolen mittaiset kävelyt $m_{1,2}$.

6 ÄÄRELLINEN AUTOMAATTI A

Äärellinen automaatti A hyväksyy syötejonot missä on 5:llä jaollinen määrä symboleita a. A saa syötteenä symbolit a ja b. Kuvassa 15 on äärellisen automaatin A diagrammi suunnatusta ja merkitystä graafista.



Kuva 15. Suunnatun merkityn graafin diagrammi äärellisestä automaatista **A.**

Nuoli osoittaa alkutilan eli solmun q0. Kaksinkertainen ympyrä samassa solmussa ilmaisee automaatin hyväksyvän tilan. Kun automaatille syötetään sana, automaatti lukee sen ja mikäli automaatti on viimeisen syötesymbolin lukemisen jälkeen hyväksyvässä tilassa, niin automaatti hyväksyy syötesanan. Kuten diagrammista näkyy, syötesanassa voi olla syötesymbolina a vähintään 5 kertaa tai ei ollenkaan ja syötesymboli b voi esiintyä missä välissä tahansa tai pelkästään.