Heli Hyttinen

Diskreetti matematiikka
Joukko-oppi

2019

Kaakkois-Suomen ammattikorkeakoulu

SISÄLLYS

1 ARGUMENTTI PROPOSITIOLOGIIKAN SYMBOLEIN

Jos tekstinkäsittely onnistuu, niin tietokone toimii. Jos tekstinkäsittely ei onnistu, niin mainoskirjettä ei voi korjata. Mainoskirjeen voi korjata. Siis, tietokone toimii.

Tekstinkäsittely onnistuu	p
Tietokone toimii	q
Mainoskirjeen voi korjata	r

Jos p niin q, jos ei p niin ei r, kuitenkin r, siis q.

$p \longrightarrow q, \neg p \longrightarrow \neg r, r \vdash Q$

1.1 Totuustaulu

p	q	r	p⟶q	¬p	¬r	¬p⟶¬r
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

taulukko 1

Taulukosta 1 reunoilla korostettujen sarakkeiden r, p⟶q ja ¬p⟶¬r tulosten (T tai F) tulee taulukon ainakin yhdellä rivillä olla kaikkien totta (true/T). Tässä totuustaulussa ensimmäisellä rivillä r, p⟶q ja ¬p⟶¬r ovat kaikki totta (T), joten argumentti kohdassa 1.2 on validi.

2 JOUKOT A, B

Perusjoukko $\mathrm{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{U} \mid \mathrm{x\ on\ parillinen}\}$, otetaan perusjoukosta U kaikki parilliset luvut.

Joten $\mathrm{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

$\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{U} \mid \mathrm{x} \leq 7\}$, otetaan perusjoukosta U kaikki lukua 7 pienemmät luvut.

Joten $\mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2.1 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ja $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c$

Luvut 2, 4 ja 6 esiintyvät molemmissa joukoissa A ja B.

Joten $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$.

Määrätäkseni $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c$, selvitän aluksi molempien joukkojen alkiot,

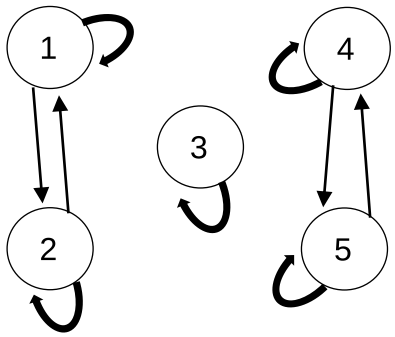
$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Seuraavaksi tarkistan mitä jäisi perusjoukkoon U jäljelle, jos yllä olevat alkiot otettaisi sieltä pois. Jäljelle jäisi 9, joten $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^c = \{9\}$.

3 SUUNNATTU GRAAFI JA PARTITIO

$\mathrm{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Ekvivalenssirelaatio S:ssa on $\mathrm{R} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$



Kuva 1: suunnattu graafi relaatiosta R

Relaation R indusoima joukon S partitio määrätään kuvan 1 perusteella aloittamalla solmusta 1. Merkitään graafin solmu $\mathrm{R}[\mathrm{x}]$ ja nuolen osoittaman solmun luku otetaan ylös. Solmut ovat nimetty alkioiden mukaan.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}[1] &= \{1\} \\
&= \{2\} \\
\mathrm{R}[2] &= \{1\} \\
&= \{2\} \\
\mathrm{R}[3] &= \{3\} \\
\mathrm{R}[4] &= \{4\} \\
&= \{5\} \\
\mathrm{R}[5] &= \{4\} \\
&= \{5\}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{R}[1]$ on sama kuin $\mathrm{R}[2]$, joten jätetään $\mathrm{R}[2]$ pois. Nyt partitiossa on $\{1,2\}$ $[1]$ mukaisesti.

Alkio 3 ei esiinny muissa kuin $\mathrm{R}[3]$, joten $\{3\}$ myös osaksi partitiota.

$\mathrm{R}[4]$ on sama kuin $\mathrm{R}[5]$, joten jätetään $[5]$ pois, ja saadaan $\{4,5\}$ osaksi partitiota.

S partitio R indusoimana on $[\{1,2\}, \{3\}, \{4,5\}]$.

4 RELAATIOTAULUT

$\mathrm{U} = \{1,2,3,4\}$

$\mathrm{V} = \{50,60,70\}$

Tulojoukko $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ relaatio $\mathrm{R} = \{(1,50), (2,60),(3,50),(4,60)\}$

Tulojoukko $\mathrm{V} \times \mathrm{U}$ relaatio $\mathrm{Q} = \{(70,4),(50,2),(50,3)\}$

Relaatiotaulu R

U	V
1	50
2	60
3	50
4	60

Taulun vasempaan sarakkeeseen U on sijoitettu relaation R vasemman puoleiset koordinaatit ja sarakkeeseen V on vastaavasti sijoitettu relaation R oikean puoleiset koordinaatit.

Relaatiotaulu Q

V	U
70	4
50	2
50	3

Taulun vasempaan sarakkeeseen V on sijoitettu relaation Q vasemman puoleiset koordinaatit ja sarakkeeseen U on vastaavasti sijoitettu relaation Q oikean puoleiset koordinaatit. Järjestys on tauluissa ylhäältä alas.

Relaatiotaulu $Q \circ R$

U	V
2	60
2	50
3	50
4	60
4	70

Kompositio $Q \circ R$ tulee siitä, kun relaatiot $R \subseteq U \times V$ ja $Q \subseteq V \times U$ yhdistetään. Ajattelin relaatiotaulujen joukon U henkilöinä ja joukon V eri automerkkeinä.

Relaatiotaulussa R henkilöllä 1 on automerkki 50, mutta relaatiotaulussa Q ei ole henkilöä 1. Jätän sen pois komposition relaatiotaulusta.

Relaatiotaulussa R henkilöllä 2 on automerkki 60 ja relaatiotaulussa Q tämän automerkki on 50, komposition relaatiotauluun laitan molemmat autot henkilölle 2.

Relaatiotaulussa R henkilöllä 3 on automerkki 50 samoin kuin relaatiotaulussa Q. Laitan tämän relaatiotauluun, sillä se esiintyy molemmissa.

Relaatiotaulussa R henkilöllä 4 on automerkki 60 ja relaatiotaulussa Q tämän automerkki on 70, komposition relaatiotauluun laitan molemmat autot henkilölle 4.

4.1 Q ei ole funktio

Q ei ole funktio, koska joukosta U alkio 60 ei määrää mitään ja alkio 50 määrää kahta. Relaatiossa Q pitäisi jokaista $u \in U$ kohti olla olemassa $v \in V$, jotta Q voisi olla funktio.

4.2 Alkioiden määrä $\mathcal{P}(U \times V)$

Lasken joukon $U \times V$ potenssijoukon alkioiden määrän kertomalla 2 itsellään alkioiden määrän verran. Joukolla U on neljä alkiota ja joukolla V on kolme alkiota, yhteensä 7.

$2^7 =$ 128 alkiota.

$\mathcal{P}(U \times V) = 128$

Selvitin vielä erikseen joukkojen V ja U potenssijoukkojen alkioiden määrän.

$2^4 = 16$ alkiota. $\mathcal{P}(U) = 16$

$2^3 = 8$ alkiota. $\mathcal{P}(V) = 8$

$U = \{U, \{1\},\{2\},\{3\},\{4\}, \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},$

$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{\emptyset\}\}$

$V= \{V, \{50\},\{60\},\{70\},\{50,60\},\{50,70\},\{60,70\},\{\emptyset\}\}$

Ja joukkojen potenssijoukkojen alkioiden määrät kerrottuna

$8 * 16 = 128$

5 TÄYDELLINEN TULOJEN-SUMMAMUOTO

$E(x,y,z) = (x+y'z)(y+z')$

$(x+y'z)(y+z')$

$=(xy'+z)+(yz')$, DeMorganin sääntö vaihtaa operaattorit päinvastoin

$= xy(z+z') + x(y+y')z'$, perusteena Distributiivisuus eli osittelulaki, jossa yhteiset yhteenlaskettavat määritellään.

$= xy + xz'$, soveltaen kompelementtilakia a + a' = 0 ja absorptiota

Täydellisen tulojen-summamuodon päättelin ihan vain päättelemällä muuttujan x lisäksi nuo kaikki mahdolliset muuttujat.

$= xyz + xyz' + xyz + xy'z'$

$= xyz + xyz' + xy'z'$, sillä xyz esiintyy jo kerran.