№11.245 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{\gamma} \sqrt{\bar z}\, dz,$$

якщо $\gamma = \{z \mid |z| = 1,\ \pi/2 \le \arg z \le \pi\}$,

$$\sqrt{1} = -1.$$

Розв'язок. Функція $\sqrt{z}$ є багатозначною: $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i}{2}(\varphi + 2\pi k)}$, $k = 0, 1$, $\varphi = \arg z$.

$$\Rightarrow \sqrt{1} = 1 \cdot e^{\frac{i}{2}(0 + 2\pi k)} = e^{i\pi k} = \left[\begin{array}{l} 1,\ k = 0, \\ -1,\ k = 1. \end{array}\right.$$

Таким чином, в підінтегральній функції використовується та гілка однозначності, для якої $k = 1$

$$\boxed{\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)}}.$$

Параметричне рівняння γ:

$$z = e^{i\varphi}, \quad \pi/2 \le \varphi \le \pi. \Rightarrow$$

$$dz = i e^{i\varphi} dz; \quad \bar z = e^{-i\varphi}; \Rightarrow \sqrt{\bar z} = e^{i\left(-\frac{\varphi}{2} + \pi\right)};$$

$$\int\limits_{\gamma} \sqrt{\bar z}\, dz = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{i\left(-\frac{\varphi}{2} + \pi\right)} \cdot i e^{i\varphi} d\varphi = i \int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{i\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)} d\varphi =$$

$$= i e^{i\pi} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{\frac{i}{2}\varphi} d\varphi = i(-1)\frac{2}{i} e^{i\frac{\varphi}{2}}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -2\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) =$$

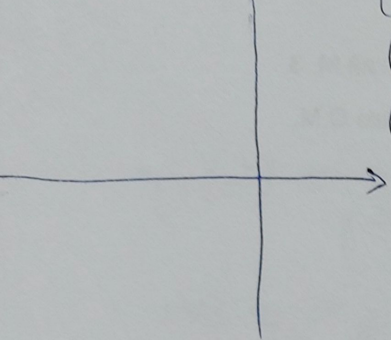
$$= -2\left(i - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)\right) = \boxed{\sqrt{2}\left(1 + i(1 - \sqrt{2})\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1; \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i; \\ e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i). \end{array}\right.$$

№ Обчислити за допомогою лишків

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2}.$$

<u>Розв'язок.</u>



Заміна змінних: $z = e^{it} \Rightarrow$

$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z};$

$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2z}(z^2+1);$

$\overrightarrow{t \in [0;2\pi]} \Rightarrow |z| = 1$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t)^2} = -i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(\sqrt{5}+\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\underset{\sqrt{2}}{\cancel{2}}z}(z^2+1)\right)^2} =$$

$$= -i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z\left(\frac{\sqrt{10}z+z^2+1}{\sqrt{2}z}\right)^2} = -i\oint_{|z|=1} \frac{2z}{(z^2+\sqrt{10}z+1)^2}dz =$$

$$= -2i\oint_{|z|=1} f(z)dz, \quad \text{де } f(z) = \frac{z}{(z^2+\sqrt{10}z+1)^2}.$$

Знайдемо особливі точки $f(z)$ — це нулі знаменника.

$$z^2+\sqrt{10}z+1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{\sqrt{10}}{2} \pm \sqrt{\frac{10}{4}-1} =$$

$$= -\frac{\sqrt{10}}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow z_1 = -\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}; \; z_2 = \frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}.$$

$$|z_1| = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2} > \frac{3+2}{2} > 1;$$

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \Rightarrow z_2 = \frac{1}{z_1} \Rightarrow |z_2| = \frac{1}{|z_1|} < 1.$$

Таким чином, в круг $|z|<1$ попала одна особлива точка $z_2 = \frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$ за теоремою про лишки

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} f(z) \cdot (-2i) =$$

$$= 4\pi \operatorname*{res}_{z_2} f(z).$$

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+\sqrt{10}z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z_2$ є нулем $2^{\text{го}}$ порядку для знаменника $\Rightarrow$ це полюс $2^{\text{го}}$ порядку.

Відповідно, $\operatorname*{res}_{z_2} f(z) = \lim\limits_{z\to z_2}\left((z-z_2)^2 f(z)\right)' =$

$$= \lim_{z\to z_2}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right)' = \lim_{z\to z_2}\frac{(z-z_1)^2 - 2(z-z_1)z}{(z-z_1)^4} =$$

$$= \lim_{z\to z_2}\frac{z-z_1-2z}{(z-z_1)^3} = -\lim_{z\to z_2}\frac{z+z_1}{(z-z_1)^3} = -\frac{z_2+z_1}{(z_2-z_1)^3} =$$

$$\begin{cases} z_2+z_1 = \frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2} + \frac{-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{10}; \\ z_2-z_1 = \frac{-\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2} - \frac{-\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}; \end{cases}$$

$$= -\frac{-\sqrt{10}}{(\sqrt{6})^3} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{3}}}.$$

$$\Rightarrow I = 4\pi \operatorname*{res}_{z_2} f(z) = 4\pi\frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi\sqrt{15}}{9}}.$$