PP. МАТАН числ. ряди. част 1.

1.12) Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$$

$$a_n = \frac{18}{n^2-n-2} = \left\{ \begin{array}{l} n^2-n-2=0 \\ \begin{cases} n_1+n_2=1 & n_1=2 \\ n_1 n_2=-2 & n_2=-1 \end{cases} \\ n^2-n-2=(n-2)(n+1) \end{array} \right\} = \frac{18}{(n-2)(n+1)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{18}{(n-2)(n+1)} = \dfrac{A}{n-2} + \dfrac{B}{n+1} = \dfrac{A(n+1)+B(n-2)}{(n-2)(n+1)}. \\ An+A+Bn-2B=(A+B)n+A-2B. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -3B=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ B=-6 \end{cases} \quad B=-6,\ A=6$$

$$= \frac{6}{n-2} \cancel{*} - \frac{6}{n+1}$$

$S = \lim S_n$, S - сума ряду

S_n - сума ~~1 n~~ перших n доданків.

$$S_n = a_4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$a_4 = \frac{6}{2} - \frac{6}{5},\quad a_5 = \frac{6}{3} - \frac{6}{6},\quad a_6 = \frac{6}{4} - \frac{6}{7}$$

$$a_{n-1} = \frac{6}{n-3} - \frac{6}{n}$$

$$S_n = \left(\frac{6}{2} - \cancel{\frac{6}{5}}\right) + \left(\frac{6}{3} - \cancel{\frac{6}{6}}\right) + \left(\frac{6}{4} - \cancel{\frac{6}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{5}} - \cancel{\frac{6}{8}}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{6}{6}} - \cancel{\frac{6}{9}}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{7}} - \cancel{\frac{6}{10}}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{8}} - \cancel{\frac{6}{11}}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\cancel{\frac{6}{n-5}} - \cancel{\frac{6}{n-2}}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{n-4}} - \frac{6}{n-1}\right) +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{6}{n-3}} - \frac{6}{n}\right) + \left(\cancel{\frac{6}{n-2}} - \frac{6}{n+1}\right)$$

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} - \frac{6}{n-1} - \frac{6}{n} - \right.$$

$$\left. - \frac{6}{n+1}\right) = \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{4} - 0 - 0 - 0 = \frac{6}{2} + \frac{3}{2} + \frac{6}{3} = 4{,}5 + 2 =$$

$= 6{,}5.$

2.12) Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^3 + 5}$$

$$a_n = \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^3 + 5} \leq \left\{ \begin{matrix} \cos^2 n \leq 1, \\ \forall n \end{matrix} \right\} \leq \frac{n}{n^3+5} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Видно, що $a_n < b_n$, $a_n = \dfrac{n \cdot \cos^2 n}{n^3+5}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ - сходиться (узагальнений гармонійний ряд з $p = 2$)

Отже, по першому признаку порівняння (через нерівності) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cos^2 n}{n^3+5}$ - сходиться.

3.12) Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n} \, tg \frac{n-1}{n^3-n}$$

Порівняємо ~~д~~ цей ряд з рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ і використовуючи другу ознаку порівняння (границя відношення)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\, tg \frac{n-1}{n^3-n}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-1}{n^3-n} = \frac{n-1}{n(n^2-1)} = \frac{\cancel{n-1}}{n(\cancel{n-1})(n+1)} = \\ = \frac{1}{n(n+1)};\ \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{Отже } tg\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \sim \frac{1}{n(n+1)} \\ \text{(за еквівалентн. н. м.} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n \cdot n^5} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} n^{6/3} \cdot \frac{1}{n^2(1+1/n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2(1+\underbrace{1/n}_{0})} = \frac{1}{1} = 1$$ Границя відношення

дор. скінченному числу ~~, отж~~, що відмінне від нуля, отже, ряди сходяться або розх. одночасно.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ – є узагальненим гарм. рядом з $p = 5/3$. Такий ряд збігається, коли $p > 1$. $5/3 > 1$, отже ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ – збігається. А отже, ряд

ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, tg \frac{n-1}{n^3-n}$ – збігається (за другою озн. порівняння рядів).

4.12) Досл. на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \qquad a_n = \frac{n^n}{(n!)^2},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{((n+1)!)^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{(n!(n+1))^2 n^n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)} \cancel{(n!)^2}}{(n+1)^{\cancel{2}} \cancel{(n!)^2} n^n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim \frac{1}{n+1} = e \cdot 0 = 0$$

Отже, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow$ ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ — сходиться за ознакою Д'аламбера

5.12) Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$$

Перевіримо необхідну умову для збіжності ряду.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1+2n+2-n}{n+1}\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n+2} \cdot n^2 \cdot \frac{n+2}{n+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \frac{n+2}{n+1}} = +\infty \neq 0$$

Отже, не вик. необхідна умова збіжності числового ряду $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$ — розходиться

6.12) Дослідити на збіжн. ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}.$$

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

(інтеграл від ф-ції $\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ шукати набагато простіше, ніж від $\frac{1}{(2x-1)\ln(x+1)}$)

Дослідимо поведінку рядів вик. 2 порівн. ознаку.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cancel{\ln(n+1)}}{(2n-1)\cancel{\ln(n+1)}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{1/n}}{2-\underset{\to 0}{1/n}} =$$

$= \frac{1}{2}$. => ряди ведуть себе схожим чином (одночасно сходяться, або розходяться).

Встановимо, чи сходить ся ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Розглянемо ф-цію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$

Видно, що ф-ція неперервна, монотонно спадна, та набуває тільки додатн. значень на проміжку $[2;+\infty)$

Дослідимо на зб. невласн. інтеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ du = \frac{1}{x+1}dx \end{cases}$$

дше x

$$= \lim_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{\cancel{(x+1)}\,du}{\cancel{(x+1)}\,u} = \lim_{A\to+\infty} \ln u\, du \Big|_2^{A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln(x+1)) \Big|_2^{A} = \lim_{A\to+\infty} \Big(\underbrace{\ln(\ln(A+1))}_{+\infty} - \ln(\ln 3)\Big) =$$

$= +\infty$. – ~~[illegible]~~ інтеграл розходиться.

Отже, за інтегральним принц. збіжності, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$ – розходиться.

Отже, за другою порівняльною ознакою,

ряд $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$$ н розходиться.

~~8~~7.12) Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$$

Розглянемо ряд $$\sum_{n=3}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}\right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(2n)}$$

Розглянемо ф-цію $f(x) = \frac{1}{x\ln(2x)}$

Видно, що вона монотонно спадає, набуває тільки додатніх зн. ~~[illegible]~~ та неперервна на проміжку ~~[illegible]~~ $[3; +\infty)$

Досліджуємо на збіжність інтеграл:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\ln(2x)}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A \frac{dx}{x\ln(2x)} = \lim_{A\to+\infty}\int_3^A \frac{\cancel{x}\,d(\ln(2x))}{\cancel{x}\,\ln(2x)} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln(2x))\Big|_3^A = \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln 2A)) - \ln(\ln(6)) =$$

$= +\infty$. => інтеграл розходиться. Отже ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{1}{n\ln(2n)}\right|$ розходиться по інтегральному признаку.

Спробуємо дослідити ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$ по ознаці Лейбніца:

1) Видно, що послідовність $\{|a_n|\}$, $n\in\mathbb{N}$ монотонно спадає, де a_n - заг. член ряду.

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n \to \text{обмеж.}}{\underbrace{\underset{\downarrow\,\infty}{n}\,\ln\underset{\downarrow\,\infty}{(2n)}}_{\downarrow\,\infty}} = 0$$

Отже, із 1), 2) => признак Лейбніца вик. => ряд $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$ сходиться умовно.

8.12) Обчислити суму ряда з точністю α.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n, \quad \alpha = 0{,}01$$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n$ - маємо знакозмінний ряд.

Перевіримо, чи вик. для нього теорема Лейбніца.

1) Видно, що послідовн. $\{a_n\}=\left(\frac{2}{5}\right)^n$ – монотонно спадає при $n\in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Отже, виконуються умови 1,2 → цей ряд є Рядом Лейбніця.

Використ. наслідок з теор. Лейбніця, обчислимо його суму з точн. α.

$a_0 = 1 > \alpha$, $a_1 = 0,4 > \alpha$, $a_2 = 0,16 > \alpha$, $a_3 = 0,064 > \alpha$, $a_4 = 0,0256 > \alpha$, $a_5 = 0,01024 > \alpha$, $a_6 = 0,004096 < \alpha$.

Отже, сума ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ з точне. $\alpha = 0,01$ дорівн.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n \approx 1 - 0,4 + 0,16 - 0,064 + 0,0256 - 0,01024 \approx 0,71136$$