Класична імовірність

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ — 1) скінченний простір ел. подій, причому 2) всі ел. події є рівноможливими.

Нехай $P(\omega_i) = p$, $\forall i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $1 = P(\Omega) = n \cdot p$ $\Rightarrow$

$$\boxed{p = \frac{1}{n}}$$

Нехай A - деяка подія $\Rightarrow A \subset \Omega \Rightarrow A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_m}\}$

$\Rightarrow P(A) = p \cdot m = \frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$ $\Rightarrow$ отримали формулу клас. імовірності

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}} \overset{\text{або}}{=} \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

кількість ел. подій, що сприяють події A.

кількість всіх ел. подій

(2) Якщо $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(8) „формула включення — виключення"

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Отримали формулу геом. ймовірності :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{l_A}{l} = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}}$$

← геом. міра (в даному випадку — довжина)

← геом. міра Ω

Аналогічно, якщо точку кидають в обл. $\Omega \subset R^2$, то

$$\mathbb{P}(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

← площа

← площа

, а для простору

$$\mathbb{P}(A) = \frac{V_A}{V_\Omega}.$$

Отже, формула геом. ймовірності :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}}$$

mes — геом. міра (довжина відрізка, площа, об'єм, ...)

Нехай потрібно знайти ймов. події A за умови, що подія B відбулася. Цю ймовірність наз. умовною і позначають $\mathbb{P}(A \mid B)$.

$\Rightarrow$ В схемі клас. ймовірності (якщо Ω - скінченне)

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$ – формула умовної ймов-ті

або загальна формула:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}, \quad \mathbb{P}(B) \neq 0$$

Незалежні події

Інтуїтивно подія A є незалежною з B, якщо B не впливає на виконання події A $\Rightarrow$ $P(A|B) = P(A)$! $\Rightarrow$

$$P(A|B) = \boxed{\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

Озн. Події A і B наз. незалежними, якщо $\boxed{P(A\cap B) = P(A)P(B)}$

Властивості

1. Нехай A і B — несумісні. Тоді A і B незалежні $\Leftrightarrow$ $P(A) = 0$ або $P(B) = 0$

2. A, B — незалежні, то
   1. $\overline{A}, B$ — незалежні
   2. $A, \overline{B}$ — незалежні
   3. $\overline{A}, \overline{B}$ — незалежні

Попарна незалежність і незалежність у сукупності

Озн. 1 Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ наз. попарно незалежними, якщо $\forall\ 1 \le k \le l \le n:\ P(A_k \cap A_l) = P(A_k) \cdot P(A_l)$.

Озн. 2 Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ наз. незал. у сукупності, якщо $\forall\ k = \overline{1,n}$ і $\forall\ 1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k \le n$ виконується:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Теореми додавання і множення ймовірностей

Додавання

1) A, B — несумісні $\Rightarrow$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

2) $\forall A, B$:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

3) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — несумісні $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

4) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — довільні $\Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i\cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k\neq i} P(A_i\cap A_j\cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Множення

1) A, B — незалежні $\Rightarrow$

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

2) $\forall A, B$:

$$P(A\cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

3) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — незалежні у сукупності $\Rightarrow$

$$P(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

4) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot \ldots \cdot P\left(A_n \,\Big|\, \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

◄ доводиться методом мат. індукції!

Схема Бернулі. Поліноміальна схема

Схема Бернулі. Розглянемо найпростішу схему незалежних випробувань. Нехай в кожному випробуванні можливі 2 результати: відбувається подія A з імов-тю p, або відбувається подія $\bar{A}$ з імов-тю $1-p=q$. Всього проводимо n випробувань. Така схема наз. схемою Бернулі.

Термінологія

якщо відбувається подія A — називаємо „успіхом"

якщо не відбувається A — „невдачею".

Нас цікавить: імовірність, що в n випробуваннях подія A здійснилась рівно m разів: $P_n(m)$.

Теорема $$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=0,1,\dots,n.$$

Найбільш імовірна кількість успіхів в схемі Бернулі

Число m_0, при якому біноміальна імовірність $P_n(m)$ набуває найбільшого значення, наз. найбільш імовірною кількістю успіхів у схемі Бернулі.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_0 \le pn+p \\ m_0 \ge pn-q \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{pn-q \le m_0 \le pn+p}$$

відрізняються рівно на 1.

$\Rightarrow$

1) якщо $(pn+p) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (pn-q) \in \mathbb{Z} \Rightarrow m_0 = \left[\begin{array}{l} pn-q \\ pn+p \end{array}\right.$

2) якщо $(pn+p) \notin \mathbb{Z} \Rightarrow m_0 = [pn+p]$.

Асимптотична формула Пуассона для схеми Бернуллі

n велике
p маленьке : $np < 10$!!!

Як це порахувати ?

$\Downarrow$

Формула Пуассона: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{e^{-a} a^m}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$,

де $a = np$

Поліноміальна схема

Ω – простір елем. подій $\quad A_1, A_2, \dots, A_k$ – повна група подій

Проводимо n незалежних випробувань, в результаті кожного з яких може відбутись одна з подій $A_1, A_2 \dots, A_k$. При цьому,

подія A_1 відбувається з імов-тю p_1

A_2 // – // – // з імов-тю p_2

...

A_k // – // – // p_k

$$p_1+p_2+p_3+\dots+p_k=1.$$

(Для $k=2$ – це схема Бернуллі.)

Така схема наз. поліноміальною схемою.

Питання: Яка імовірність, що в n незал. випробуваннях здійсниться

рівно m_1 подій A_1

рівно m_2 подій A_2

...

рівно m_k подій A_k ?

Позначимо цю імовірність $\mathbb{P}_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$.

$$m_1+m_2+\dots+m_k=n.$$

Теорема

$$\mathbb{P}_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\dots m_k!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$$