Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»
Навчально-науковий комплекс
«Інститут прикладного системного аналізу»

І.Я. Спекторський
О.В. Стусь
В.М. Статкевич

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано Вченою радою НТУУ «КПІ»
як навчальний посібник для студентів, які навчаються
за напрямом підготовки «Системний аналіз»

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

УДК 510.3+512.5+519.1
ББК 22.1
С71

Гриф надано Вченою Радою НТУУ «КПІ»
протокол № 3 від 6 квітня 2015 р.

Рецензенти: *О.О. Калюжний* (Інститут математики НАН України)
Д.Г. Діденко (НДІ Прикладних інформаційних технологій)

Відповідальний редактор: *В.Д. Романенко*

Спекторський І.Я., Стусь О.В., Статкевич В.М.
С71 Дискретна математика. Збірник задач: навч. посіб. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 105 с.: іл.

Даний посібник з дискретної математики містить задачі з дискретної математики по розділах: алгебра висловлень, алгебра множин, теорія відношень, комбінаторика, теорія графів, теорія груп та кілець, частково впорядковані множини та решітки, булеві алгебри, булеві функції та функціональна повнота в P_2. Посібник містить основні теоретичні відомості, які необхідні для розв'язання задач, відповіді, а за потреби вказівки.

Матеріал орієнтовано для студентів математичних факультетів вищих навчальних закладів.

УДК 510.3+512.5+519.1
ББК 22.1

Зміст

Вступ

Дисципліна «Дискретна математика» є однією з основних фундаментальних дисциплін при підготовці студентів за напрямами «Системний аналіз» та «Комп'ютерні науки». Посібник містить задачі по розділах «Алгебра висловлень», «Алгебра множин», «Елементи теорії відношень», «Елементи комбінаторики», «Елементи теорії графів», «Елементи теорії груп», «Елементи теорії кілець», «Частково впорядковані множини», «Решітки», «Булеві алгебри» та «Булеві функції та функціональна повнота». Даний посібник відповідає учбовій програмі дисципліни «Дискретна математика», задачі посібника орієнтовані на теоретичний матеріал, викладений у [15, 16].

Кожен розділ містить основні теоретичні відомості, які необхідні при розв'язанні задач даного розділу. Задачі впорядковані у відповідності до рівня складності. Деякі задачі, зокрема задачі розділів 6 та 7, передбачають володіння базовими поняттями дисциплін «Лінійна алгебра» та «Математичний аналіз». Для надання можливості самоконтролю на всі задачі обчислювального характеру надані відповіді, а в особливих випадках вказівки. Посібник містить як задачі, що використовувались авторами раніше під час проведення курсу лекцій та практичних занять зі студентами, так і задачі, запозичені з [1–7], [13].

Даний посібник може бути використаний на математичних факультетах у вищих навчальних закладах, а також може бути корисним для інженерів, які мають на меті навчитися розв'язувати основні задачі з курсу дискретної математики.

Розділ 1

Алгебра висловлень

1.1. Основні теоретичні відомості

Висловленням називають розповідне речення, стосовно якого в даному контексті можна визначити, є воно правдивим чи неправдивим. Будемо позначати висловлення великими літерами англійського алфавіту з індексами чи без (так звані пропозиційні літери).

Диз'юнкцією (логічною сумою) висловлень A та B називають висловлення $A \vee B$, яке є правдивим тоді і тільки тоді, коли правдиве хоча б одне з висловлень A чи B. Кон'юнкцією (логічним добутком) висловлень A та B називають висловлення $A \wedge B$ (в інших позначеннях $A\&B$), яке є правдивим тоді і тільки тоді, коли правдиві обидва висловлення A та B. Запереченням висловлення A називають висловлення $\neg A$, яке є правдивим тоді і тільки тоді, коли висловлення A неправдиве. Імплікацією висловлень A та B називають висловлення $A \to B$, яке є правдивим тоді і тільки тоді, коли з правдивості висловлення A випливає правдивість B; висловлення A часто називають посилкою або гіпотезою імплікації $A \to B$, а висловлення B – наслідком. Еквіваленцією (подвійною імплікацією) висловлень A та B називають висловлення $A \leftrightarrow B$, яке є правдивим тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення A та B є водночас правдивими або водночас неправдивими (набувають однакових значень). Сумою за модулем 2 (виключною логічною сумою) висловлень A та B називають висловлення $A \oplus B$, яке є правдивим тоді і тільки тоді, коли рівно одне з висловлень A чи B є правдивим (висловлення A та B набувають різних значень).

Множина формул визначається умовами: 1) пропозиційна літера є формулою; 2) якщо $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ – формули, то $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\neg \mathcal{A})$ – також формули; 3) інших формул немає. Інтерпретацією формули алгебри висловлень називається зіставлення кожній пропозиційній літері у формулі значення «правда» (1) чи «неправда» (0). Множину всіх інтерпретацій даної формули зручно зводити в так звану таблицю правдивості, яка містить 2^n рядків.

Основні закони алгебри висловлень:
1) комутативність (переставний закон): $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$;
2) дистрибутивність (розподільний закон): $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
3) нейтральність: $A \vee 0 = A$, $A \wedge 1 = A$;
4) доповненість: $A \vee \neg A = 1$, $A \wedge \neg A = 0$;
5) універсальні межі: $A \vee 1 = 1$, $A \wedge 0 = 0$;
6) абсорбція (поглинання): $A \vee (A \wedge B) = A$, $A \wedge (A \vee B) = A$;
7) ідемпотентність: $A \vee A = A$, $A \wedge A = A$;
8) асоціативність (сполучний закон): $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$;
9) єдиність заперечення: $(A \vee X = 1, A \wedge X = 0) \Rightarrow (X = \neg A)$;
10) інволютивність (подвійне заперечення): $\neg\neg A = A$;
11) закон (правило) де Моргана: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;
12) склеювання: $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = A$, $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = A$;
13) закон Порецького: $A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$, $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$.

Перші чотири пари законів називають основними, інші можуть бути виведені з них без використання таблиць правдивості.

Аргумент x_i називають суттєвим для функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ для деякого набору $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ з 0 та 1; інакше x_i називають фіктивним.

Формули алгебри висловлень можна розглядати як електричні ланцюги, які містять лише дроти та двопозиційні перемикачі (так звані *релейно-контактні схеми*). 1 – вважається, що перемикач пропускає струм, 0 – не пропускає, $\neg x$ – розмикаючий контакт, $\wedge$ – послідовне з'єднання контактів, $\vee$ – паралельне. Дві релейно-контактні схеми вважають еквівалентними, якщо струм проходить через одну з них тоді і тільки тоді, коли проходить через іншу. З двох еквівалентних релейно-контактних схем більш простою вважають ту, яка містить менше контактів.

Формула B логічно випливає з формул $A_1, \dots, A_n$ (або формули $A_1, \dots, A_n$ логічно тягнуть формулу B), якщо формула B є правдивою на всіх інтерпретаціях, на яких водночас правдиві формули $A_1, \dots, A_n$ (позначення $A_1, \dots, A_n \models B$ або $A \Rightarrow B$ у випадку $n = 1$). Формули $A_1, \dots, A_n$ називають гіпотезами, формулу B – наслідком. У випадку $n = 0$ формула B є тавтологією (позначення $\models B$).

1.2. Задачі

№ 1.1. Довести закони 5–13 алгебри висловлень. Перед доведенням закону 8 довести допоміжні леми:

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{C}, \\ \neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{B} = \mathcal{C}); \qquad \left.\begin{array}{r} \mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{A} \vee \mathcal{C}, \\ \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{C} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{B} = \mathcal{C}).$$

№ 1.2. Побудувати таблиці правдивості для висловлень: $A \vee B$, $A \wedge B$, $\neg A$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$, $A \oplus B$.

№ 1.3. Побудувати таблиці правдивості для висловлень:

1) $\mathcal{A}_1 = (A \to B) \to C$;
2) $\mathcal{A}_2 = (\neg A \to B) \to C$;
3) $\mathcal{A}_3 = (A \to \neg B) \to C$;
4) $\mathcal{A}_4 = (A \to B) \to \neg C$;
5) $\mathcal{A}_5 = (\neg A \to \neg B) \to C$;
6) $\mathcal{A}_6 = (\neg A \to B) \to \neg C$;
7) $\mathcal{A}_7 = (A \to \neg B) \to \neg C$;
8) $\mathcal{A}_8 = (\neg A \to \neg B) \to \neg C$;
9) $\mathcal{A}_9 = (A \wedge \neg B) \oplus C$;
10) $\mathcal{A}_{10} = A \vee (B \leftrightarrow C)$;
11) $\mathcal{A}_{11} = (\neg A \vee B) \wedge C$;
12) $\mathcal{A}_{12} = (A \oplus B) \vee C$.

№ 1.4. Спростити (за можливості) та вказати всі суттєві аргументи:
1) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$;
2) $(A \wedge B) \vee A$;
3) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

№ 1.5. Перевірити правило вибору (Modus Ponens) $A, A \to B \models B$ та правило силогізму $A \to B, B \to C \models A \to C$.

№ 1.6. Довести логічний наслідок:

1) $A \to B, B \to C \models A \to C$;
2) $A \to (B \to C) \models B \to (A \to C)$;
3) $A \to (B \to C) \models (A \wedge B) \to C$;
4) $(A \wedge B) \to C \models A \to (B \to C)$;
5) $A \to B \models (B \to C) \to (A \to C)$;
6) $A \to B \models (C \to A) \to (C \to B)$;
7) $A \to B \models (C \wedge A) \to (C \wedge B)$;
8) $A \to B \models (A \wedge C) \to (B \wedge C)$;
9) $A \to B \models (A \vee C) \to (B \vee C)$;
10) $A \to B \models (C \vee A) \to (C \vee B)$;
11) $\neg A \models A \to B$;
12) $A \models \neg A \to B$;
13) $B \models A \to B$;
14) $A \to B \models \neg B \to \neg A$;
15) $A \to \neg B \models B \to \neg A$;
16) $\neg A \to B \models \neg B \to A$;
17) $\neg A \to \neg B \models B \to A$.

№ 1.7. Перевірити, чи має місце логічний наслідок:

1) $\models (A \vee B) \to (A \wedge C)$;
2) $\models ((A \to B) \to B) \to A$;
3) $\models ((A \to B) \to B) \to B$;
4) $\models \neg(A \vee \neg A) \to (A \vee \neg A)$;
5) $A \models \neg(A \to \neg A)$;
6) $A \to B \models B \to A$;
7) $A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge C$;
8) $(A \vee B) \wedge C \models A \vee (B \wedge C)$.

№ 1.8. У вказаних задачах перевірити правильність міркувань. Для цього представити кожне речення у вигляді пропозиційної форми та перевірити, чи випливає наслідок з гіпотез.

1. Якщо книга узгоджується з Кримінальним Кодексом, то вона не потрібна. Якщо книга не узгоджується з Кримінальним Кодексом, то вона шкідлива. Якщо книга не потрібна або шкідлива, ми її не читаємо. Отже, книгу ми не читаємо.

2. Якщо Джонс комуніст, то Джонс атеїст. Джонс атеїст. Отже, Джонс комуніст.

3. Якщо будувати протиатомні сховища, то інші держави будуть почувати себе в небезпеці, а наш народ отримає хибну уяву про свою безпеку. Якщо інші держави будуть почувати себе в небезпеці, то вони можуть розпочати превентивну війну. Якщо наш народ отримає хибну уяву про свою безпеку, то він послабить зусилля, спрямовані на збереження миру. Якщо не будувати протиатомні сховища, то ми ризикуємо мати колосальні втрати в разі війни. Отже, або інші держави можуть розпочати превентивну війну, та наш народ послабить зусилля, спрямовані на збереження миру, або ми ризикуємо мати колосальні втрати в разі війни [1].

4. Якщо Джонс не зустрічав цієї ночі Сміта, то або Сміт вбивця, або Джонс бреше. Якщо Сміт не вбивця, то Джонс не зустрічав Сміта цієї

[1] В даній задачі «або» вважаємо виключним

ночі та вбивство було після 12 годин ночі. Якщо вбивство було після 12 годин ночі, то або Сміт вбивця, або Джонс бреше. Отже, Сміт вбивця [2].

№ 1.9. Перевірити сумісність множини тверджень. Для цього представити кожне речення у вигляді пропозиційної форми, а потім перевірити, чи є їх кон'юнкція суперечністю.

Якщо вечірка нудна, то або Аліса починає плакати, або Анатоль розповідає смішні історії. Якщо Сільвестр приходить на вечірку, то або вечірка нудна, або Аліса починає плакати. Якщо Анатоль розповідає смішні історії, то Аліса не починає плакати. Сільвестр приходить на вечірку тоді і тільки тоді, коли Анатоль не розповідає смішні історії. Якщо Аліса починає плакати, то Анатоль розповідає смішні історії.

№ 1.10. Для формул побудувати релейно-контактні схеми:
1) $(A \to B) \wedge (B \to C)$;
2) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$;
3) $(A \to B) \to (\neg A \wedge (B \vee C))$;
4) $(A \to (B \to C)) \to (B \to \neg A)$.

№ 1.11. Для релейно-контактних схем на рис. 1.1–1.9 побудувати формули.

№ 1.12. Для релейно-контактних схем на рис. 1.4–1.9 побудувати більш прості еквівалентні їм ланцюги, записати відповідні формули.

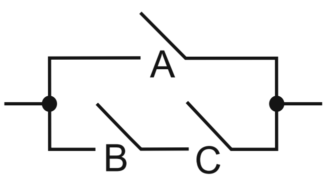

Рис. 1.1

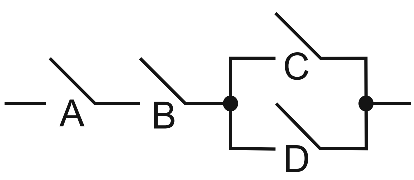

Рис. 1.2

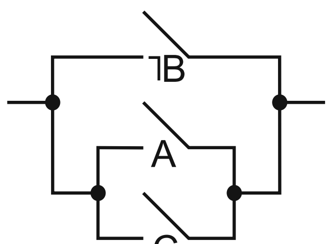

Рис. 1.3

[2] Тут і в наступній задачі «або» вважаємо невиключним

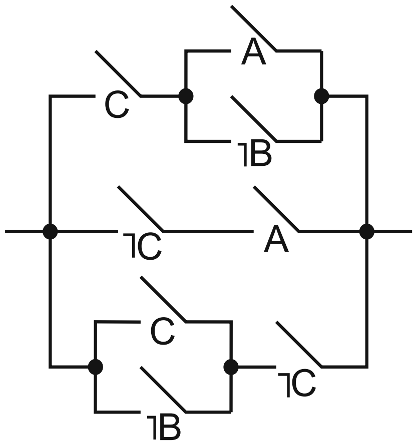

Рис. 1.4

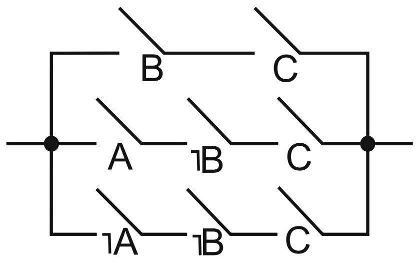

Рис. 1.5

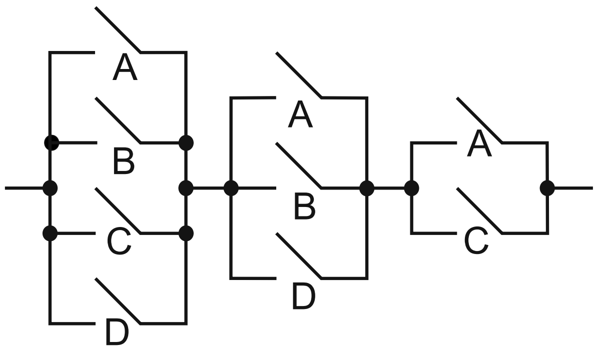

Рис. 1.6

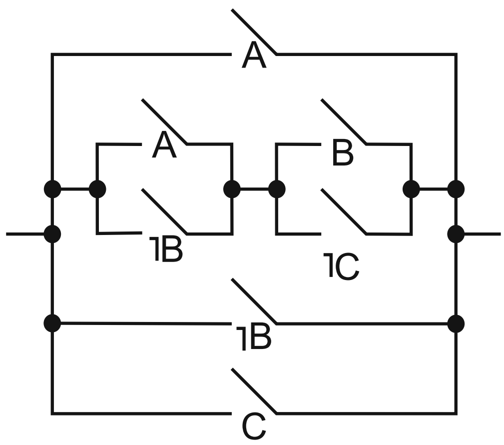

Рис. 1.7

№ 1.13. Знайти значення дійсної змінної x, які задовольняють дві умови: 1) якщо x менше 13, то x більше 40; 2) якщо x більше 13, то x менше 1.

№ 1.14. Нехай кожен із трьох членів комітету голосує «за», натискаючи на кнопку. Побудувати за можливістю найпростіший електричний ланцюг, який би проводив струм тоді і тільки тоді, коли не менше двох членів комітету голосують «за». Записати відповідну формулу.

№ 1.15. Потрібно, щоб світло в кімнаті вмикалося за допомогою трьох різних перемикачів таким чином, що натискання на кожен з них призводить до вмикання світла, якщо воно було вимкнуте, та до вимикання в протилежному випадку. Побудувати простий ланцюг, який задовольняє цю умову. Записати відповідну формулу.

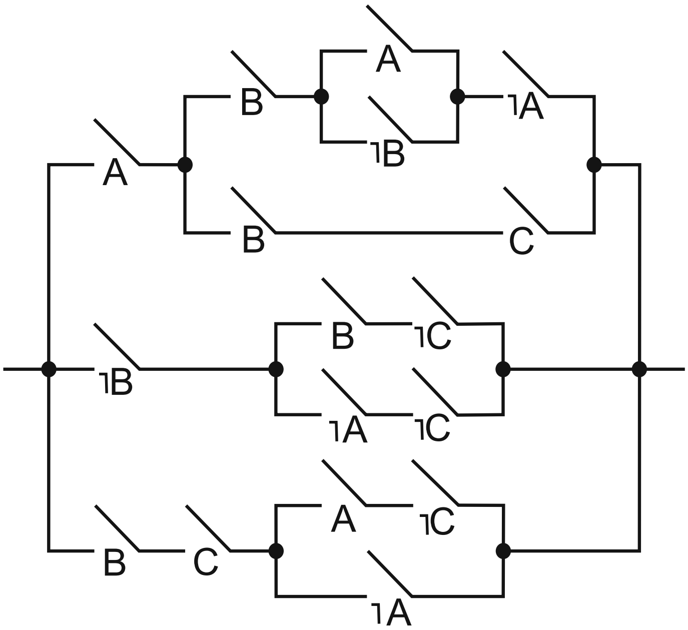

Рис. 1.8

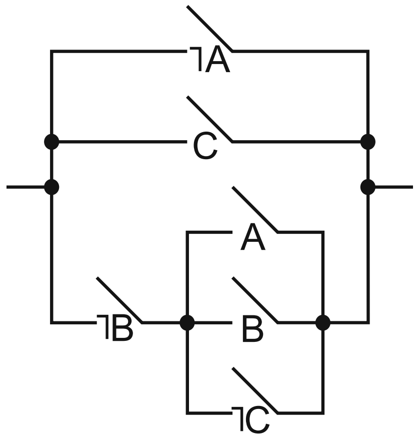

Рис. 1.9

Розділ 2

Алгебра множин

2.1. Основні теоретичні відомості

Довільний набір об'єктів, що попарно розрізняються, називають множиною («наївне» означення множини, Г. Кантор). $x \in A$ позначає належність елемента x множині A, $x \notin A$ позначає неналежність. $\varnothing$ – порожня множина, тобто множина, яка не містить жодного елемента. Множини A та B називають еквівалентними або рівними, якщо вони містять одні й ті самі елементи: $(A = B) \Leftrightarrow ((x \in A) \leftrightarrow (x \in B))$. Потужністю $\mathrm{card}(A)$ скінченної множини A називають кількість її елементів. Множину B називають підмножиною множини A (позначення $B \subset A$), а множину A надмножиною множини B ($A \supset B$), якщо кожен елемент множини B належить множині A: $(B \subset A) \Leftrightarrow (A \supset B) \Leftrightarrow ((x \in B) \to (x \in A))$. Множину всіх підмножин множини A позначають 2^A.

Об'єднанням множин A та B називають множину $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$. Перерізом множин A та B називають множину $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Різницею множин A та B називають множину $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$. Симетричною різницею множин A та B називають множину $A \vartriangle B = \{x \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\}$; очевидно, що $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Вважаємо, що в межах заданого контексту визначена так звана універсальна множина U, яка містить всі елементи, які розглядаються в заданому контексті. Доповненням до множини A (відносно універсальної множини U) називають множину $A^c = \{x \in U \mid$

$(x \notin A)\}$; очевидно, що $A^c = U \setminus A$.

Декартовим добутком множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають множину $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$, що складається з упорядкованих n-ок вигляду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Оскільки елементи множин A_i можуть бути різної природи, доцільно вводити різні універсальні множини U_i, а універсальною множиною для декартового добутку в цьому разі вважатимемо $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.

Для скінченних множин $A_1, \ldots, A_n$ має місце формула включень і виключень: $\operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i} \operatorname{card}(A_i) - \sum\limits_{i<j} \operatorname{card}(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{i<j<k} \operatorname{card}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{card}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.

2.2. Задачі

№ 2.1. Чи існують множини A, B, C такі, що $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

№ 2.2. Довести:
1) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
2) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$.

№ 2.3. Довести еквівалентності:
$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \cap B^c = \varnothing) \Leftrightarrow (A^c \cup B = U) \Leftrightarrow (B^c \subset A^c).$$

№ 2.4. Довести:
1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
3) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
5) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
6) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
7) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;
8) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;
9) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
10) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

№ 2.5. Довести:
1) $((A \cup B) \subset C) \Leftrightarrow ((A \subset C) \wedge (B \subset C))$;
2) $(A \subset (B \cap C)) \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (A \subset C))$;
3) $((A \cap B) \subset C) \Leftrightarrow (A \subset (B^c \cup C))$;
4) $(A \subset (B \cup C)) \Leftrightarrow ((A \cap B^c) \subset C)$;
5) $((A \setminus B) \cup B = A) \Leftrightarrow (B \subset A)$;
6) $((A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow (C \subset A)$ [1];
7) $(A \subset B) \Rightarrow ((A \cup C) \subset (B \cup C))$;
8) $(A \subset B) \Rightarrow ((A \cap C) \subset (B \cap C))$;
9) $(A \subset B) \Rightarrow ((A \setminus C) \subset (B \setminus C))$;
10) $(A \subset B) \Rightarrow ((C \setminus B) \subset (C \setminus A))$;
11) $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$;
12) $(A = B^c) \Leftrightarrow ((A \cap B = \varnothing) \wedge (A \cup B = U))$.

Для пп. 7–10 перевірити зворотні твердження, відповідь обгрунтувати.

№ 2.6. Довести:
1) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$;
2) $A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$;
3) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$;
4) $A \vartriangle (A \vartriangle B) = B$;
5) $A \cup B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B)$;
6) $A \cap B = (A \vartriangle B) \vartriangle (A \cup B)$;
7) $A \setminus B = A \vartriangle (A \cap B)$;
8) $A \setminus B = (A \vartriangle B) \setminus B$;
9) $A \vartriangle \varnothing = A$;
10) $A \vartriangle A = \varnothing$;
11) $A \vartriangle U = A^c$;
12) $A \cup B = (A \vartriangle B) \cup (A \cap B)$.

№ 2.7. Спростити $A \vartriangle (B \vartriangle C)$, якщо $A \subset B$, $A \cap C = \varnothing$.

№ 2.8. Довести:
1) $((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \vartriangle (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) \subset ((A_1 \vartriangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \vartriangle B_n))$;
2) $((A_1 \cap \ldots \cap A_n) \vartriangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n)) \subset ((A_1 \vartriangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \vartriangle B_n))$.

№ 2.9. Довести:
1) $(A \vartriangle B = \varnothing) \Leftrightarrow (A = B)$;
2) $(A \cap B = \varnothing) \Leftrightarrow (A \cup B = A \vartriangle B)$;
3) $(A \vartriangle B = C) \Leftrightarrow (B \vartriangle C = A) \Leftrightarrow (C \vartriangle A = B)$.

[1] імплікацію «⇐» називають модулярністю

№ 2.10. Нехай $U = [0; 1)$. Множина A складається з скінченного об'єднання півінтервалів $[a_k; b_k) \subset [0; 1)$, $k \geqslant 1$, тобто $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [a_k; b_k)$. Довести, що набір таких множин S є алгеброю множин (таку алгебру називають борелівською). Навести приклад, коли нескінченне об'єднання та нескінченний перетин вказаних півінтервалів не належить S.

№ 2.11. Множина A містить n елементів, множина B – m елементів. Скільки елементів можуть містити множини: 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $A \vartriangle B$? У яких випадках досягаються мінімальна та максимальна кількість?

№ 2.12. Множина A містить 5 елементів, множина B – 4 елемента, множина C – 10 елементів. Скільки елементів та в яких конкретно випадках може містити множина $A \vartriangle (B \vartriangle C)$?

№ 2.13. Визначити операції $\cup$, $\cap$, $\setminus$ через: 1) $\vartriangle$, $\cap$; 2) $\vartriangle$, $\cup$; 3) $\setminus$, $\vartriangle$.

№ 2.14. Довести, що не можна визначити: 1) $\setminus$ через $\cap$, $\cup$; 2) $\cup$ через $\cap$, $\setminus$.

№ 2.15. Серед 350 студентів англійську мову знають 200, французьку – 150, німецьку – 100. Англійську та французьку знають 50, англійську та німецьку – 40, французьку та німецьку – 30. Всі три мови знають 15 студентів. Скільки студентів не знає жодної з вказаних мов?

№ 2.16. 1) Довести: $(A \vartriangle B = A \vartriangle C) \Rightarrow (B = C)$.
2) Чи вірно, що $(A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (B = C)$; $(A \cup B = A \cup C) \Rightarrow (B = C)$?
3) Чи вірно, що $(A \cap B = A \cap C, A \cup B = A \cup C) \Rightarrow (B = C)$?

№ 2.17. Розв'язати рівняння $X \vartriangle A = B$ відносно змінної X.

№ 2.18. Розв'язати рівняння відносно змінної X та вказати умови на множини A, B, коли розв'язок існує:

1) $A \cap X = B$;	5) $A \setminus X = B \cap X$;
2) $A \cup X = B$;	6) $A \cup X = B \cap X$;
3) $A \setminus X = X$;	7) $A \cup X = B \cup X$;
4) $A \setminus X = B \cup X$;	8) $A \cap X = B \cap X$.

№ 2.19. Розв'язати систему рівнянь відносно змінної X та вказати умови на множини A, B, C, коли розв'язок існує:

1) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C; \end{cases}$

2) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \setminus A = C; \end{cases}$

3) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ A \cup X = C; \end{cases}$

4) $\begin{cases} A \cup X = B \cap X, \\ A \cap X = C \cup X; \end{cases}$

5) $\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B, \\ X \setminus A = C \setminus X; \end{cases}$

6) $\begin{cases} A \cap X = B \setminus X, \\ C \cup X = X \setminus A; \end{cases}$

7) $\begin{cases} X \cup (B \setminus C) = B, \\ X \setminus A = B^c \cup C. \end{cases}$

№ 2.20. Навести приклад, коли $A \times B \neq B \times A$, вказати бієкцію $f\colon A \times B \to B \times A$. Навести приклад, коли $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$.

№ 2.21. Довести:
1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
3) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;
4) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
6) $(U_1 \times U_2) \setminus (A \times B) = ((U_1 \setminus A) \times U_2) \cup (U_1 \times (U_2 \setminus B))$, де U_1, U_2 універсальні множини для A, B.

№ 2.22. Нехай множини A, B, C, D непорожні. Довести еквівалентність: $((A \subset B) \wedge (C \subset D)) \Leftrightarrow (A \times C \subset B \times D)$.

№ 2.23. Довести: $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$. При яких A, B, C, D має місце рівність?

№ 2.24. Нехай множини A, B непорожні та $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Довести, що $A = B = C = D$.

№ 2.25. Нехай $A_k = \{k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ – одноелементні множини, $B_k = \{km \mid m \in \mathbb{N}\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Чи кожну підмножину множини $\mathbb{N}$ можна зобразити через скінченну кількість операцій об'єднання, перерізу та доповнення над множинами виду A_k та B_k?

Розділ 3

Елементи теорії відношень

3.1. Основні теоретичні відомості

Нехай $A_1, \ldots, A_n$ – довільні множини. Відношенням R, що задане на множинах $A_1, \ldots, A_n$, називають довільну підмножину декартового добутку: $R \subset A_1 \times \ldots \times A_n$. Якщо $A_1 = \ldots = A_n = A$, то кажуть, що R задане на множині A. Відношення $R = \varnothing$ називають порожнім, відношення $R = A_1 \times \ldots \times A_n$ – повним. Якщо $n = 1$, відношення називають унарним, якщо $n = 2$ – бінарним, якщо $n = 3$ – тернарним. Тотожне відношення позначають I_A: $(xI_Ay) \Leftrightarrow (x = y)$ або $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

Областю визначення бінарного відношення $R\colon A \to B$ називається множина $\{x \in A \mid \exists y \in B\colon xRy\}$, областю значень (образом) – множина $\{y \in B \mid \exists x \in A\colon xRy\}$. Обернене відношення $R^{-1}\colon B \to A$ визначається таким чином: $(xR^{-1}y) \Leftrightarrow (yRx)$. Композицією відношень $R_1\colon A \to B$ та $R_2\colon B \to C$ називається відношення $R_1 \circ R_2$ таке, що $(x(R_1 \circ R_2)z) \Leftrightarrow (\exists y \in B\colon (xR_1y) \wedge (yR_2z))$.

Відношення R на множині A називається: рефлексивним, якщо $\forall x \in A$ $(x, x) \in R$; антирефлексивним, якщо $\forall x \in A$ $(x, x) \notin R$; симетричним, якщо $(xRy) \Leftrightarrow (yRx)$; антисиметричним, якщо $((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)$; транзитивним, якщо $((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$.

Транзитивним замиканням відношення $R\colon A \to A$ називається відношення $R^+\colon A \to A$ таке, що: 1) R^+ транзитивне; 2) $R^+ \supset R$; 3) якщо відношення $S\colon A \to A$ транзитивне та $S \supset R$, то $S \supset R^+$. Має місце формула $R^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup (R \circ R) \cup \ldots \cup (R \circ \ldots \circ R) \cup \ldots$, яка для скінченної множини A, що містить n елементів, перетворюється на таку: $R^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{n} R^k$.

Відношенням еквівалентності (еквівалентністю) на A називається рефлексивне, симетричне та транзитивне відношення на A (часто замість xRy використовують $x \sim y$). Класом еквівалентності (суміжним класом) елемента $x \in A$ називається множина $[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$. Фактор-множиною $A/_\sim$ називається множина всіх класів еквівалентності.

Відношеням часткового порядку (частковим порядком) на A називається рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на A (часто замість xRy використовують $x \preceq y$). Частковий порядок «$\preceq$» називається лінійним порядком, якщо два довільні елементи x та y порівняні: або $x \preceq y$, або $y \preceq x$.

Відношення $R\colon A \to B$ називають сюр'єктивним, якщо $\forall y \in B\ \exists x \in A\ xRy$; ін'єктивним, якщо $((x_1Ry) \wedge (x_2Ry)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$; функціональним, якщо $((xRy_1) \wedge (xRy_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2)$. Функцію $f\colon A \to B$ називають відображенням, якщо вона визначена для всіх $x \in A$.

Ін'єкцією (відображенням «у») називають відображення, що відповідає ін'єктивному функціональному відношенню; сюр'єкцією (відображенням «на») – відображення, що відповідає сюр'єктивному функціональному відношенню; бієкцією (взаємно однозначним відображенням) – відображення, яке є і ін'єкцією, і сюр'єкцією.

3.2. Задачі

№ 3.1. Знайти область визначення, область значень, R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для відношень $R = R_1, \ldots, R_5$:
1) $R_1 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, y$ ділиться на $x\}$;
2) $R_2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x$ ділиться на $y\}$;
3) $R_3 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0\}$;
4) $R_4 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2x \geqslant 3y\}$;
5) $R_5 = \{(x, y) \mid x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], y \geqslant \sin x\}$.

№ 3.2. Довести, що для довільних бінарних відношень:

1) $R \cup R = R \cap R = R$;
2) $(R^{-1})^{-1} = R$;
3) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
4) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;
5) $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$;
6) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$;
7) $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i\right) \circ S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (R_i \circ S)$;
8) $S \circ \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (S \circ R_i)$;
9) $S \circ \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i\right) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} (S \circ R_i)$;
10) $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} R_i\right) \circ S \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} (R_i \circ S)$.

Навести приклад, коли у пп. 9–10 вкладення є строгими.

№ 3.3. Довести, що матриця $M_{R \circ S}$ композиції відношень R, S є «логічним множенням» матриць M_R та M_S.

№ 3.4. 1. Для відношень $R\colon A \to B$ та $S\colon B \to C$ обчислити композицію $R \circ S$ за допомогою матриць та за допомогою стрілочних діаграм:
1) $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2\}$,
$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$, $S = \{(b_1, c_2), (b_3, c_1)\}$;
2) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$,
$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_4, b_2)\}$,
$S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_3), (b_2, c_2), (b_2, c_3)\}$;
3) $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$,
$R = \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_4)\}$,
$S = \{(b_1, c_1), (b_1, c_3), (b_2, c_2), (b_3, c_2), (b_3, c_3), (b_4, c_1)\}$.

2. Для відношень R та S п. 1 обчислити R^{-1}, S^{-1}, $(R \circ S)^{-1}$ та переконатись, що $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

№ 3.5. Нехай $R\colon A \to A$. Обчислити:
1) R^{2000}, якщо $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 2)\}$;
2) R^{800}, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3)\}$.

№ 3.6. Навести приклад відношення, яке:
1) симетричне і антисиметричне одночасно;
2) рефлексивне, симетричне, не транзитивне;
3) рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне;
4) рефлексивне, транзитивне, не симетричне;
5) антисиметричне, транзитивне, не рефлексивне;
6) симетричне, транзитивне, не рефлексивне.

№ 3.7. Нехай відношення R_1 та R_2 рефлексивні. Довести, що відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} та $R_1 \circ R_2$ рефлексивні.

№ 3.8. Нехай відношення R_1 та R_2 антирефлексивні. Довести, що відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ та R_1^{-1} антирефлексивні. Навести контрприклади, коли відношення $R_1 \circ R_2$ та $R_1 \circ R_1^{-1}$ не антирефлексивні.

№ 3.9. Нехай відношення R_1 та R_2 симетричні. Довести, що відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1^{-1} та $R_1 \circ R_1^{-1}$ симетричні. Довести, що відношення $R_1 \circ R_2$ симетричне тоді й тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

№ 3.10. Нехай відношення R_1 та R_2 антисиметричні. Довести, що відношення $R_1 \cap R_2$ та R_1^{-1} антисиметричні. Довести, що відношення $R_1 \cup R_2$ антисиметричне тоді й тільки тоді, коли $R_1 \cap R_2^{-1} \subset I_A$. Навести контрприклади, коли відношення $R_1 \circ R_2$ та $R_1 \circ R_1^{-1}$ не антисиметричні.

№ 3.11. Нехай відношення R_1 та R_2 транзитивні. Довести, що відношення R_1^{-1} та $R_1 \cap R_2$ транзитивні. Навести контрприклади, коли відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \circ R_2$ та $R_1 \circ R_1^{-1}$ не транзитивні.

№ 3.12. Довести, що відношення, яке симетричне і антисиметричне одночасно, є транзитивним.

№ 3.13. Дослідити відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{1, 2, 3, 4\}$, на рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність:
1) $R = \{(1,1), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,4)\}$;
2) $R = \{(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (4,1), (4,2)\}$;
3) $R = \{(1,1), (1,4), (2,2), (3,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$.

№ 3.14. Дослідити відношення $R \subset \mathbb{R}^2$ на рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність:
1) $(xRy) \Leftrightarrow (xy \geqslant 0)$;
2) $(xRy) \Leftrightarrow (0 \leqslant xy \leqslant 1)$;
3) $(xRy) \Leftrightarrow (0 < \frac{y}{x} < 1)$;
4) $(xRy) \Leftrightarrow (\frac{1}{3} < \frac{y}{x} < 3)$;
5) $(xRy) \Leftrightarrow (|x| \leqslant |y|)$;
6) $(xRy) \Leftrightarrow (|x| < |y|)$;
7) $(xRy) \Leftrightarrow (x > y)$;
8) $(xRy) \Leftrightarrow (x^2 = y^2)$;
9) $(xRy) \Leftrightarrow (x^2 \geqslant y)$;
10) $(xRy) \Leftrightarrow (|x| + |y| \leqslant 4)$;
11) $(xRy) \Leftrightarrow (\max(x, y) \geqslant 1)$;
12) $(xRy) \Leftrightarrow (\{x + y\} \geqslant \frac{1}{2})$, ($\{x + y\}$ – дробова частина числа $x + y$).

№ 3.15. Нехай $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \geqslant 2$. Дослідити відношення $R \subset A \times A$, $R = R_1, \ldots, R_8$ на транзитивність:
1) $R_1 = I_A \cup \{(a_2, a_1), \ldots, (a_n, a_{n-1})\}$;
2) $R_2 = I_A \cup \{(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n)\}$;
3) $R_3 = R_1 \circ R_1^{-1}$;
4) $R_4 = R_2 \circ R_2^{-1}$;
5) $R_5 = \{(a_1, a_i), (a_i, a_i) \mid i = 2, \ldots, n\}$;
6) $R_6 = R_5 \cup \{(a_1, a_1)\}$;
7) $R_7 = R_5 \circ R_5^{-1}$;
8) $R_8 = R_6 \circ R_6^{-1}$.

№ 3.16. Дослідити відношення R на рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність та знайти транзитивне замикання R^+, якщо:
1) $\{C_i\}$ множина кіл на координатній площині, $C_i R C_j$, якщо кола C_i та C_j мають хоча б одну спільну точку;
2) $\{l_i\}$ множина прямих на координатній площині, $(l_i R l_j) \Leftrightarrow (l_i \cap l_j \neq \varnothing)$;
3) $\{l_i\}$ множина прямих на координатній площині, $(l_i R l_j) \Leftrightarrow (l_i \parallel l_j)$;
4) $\{l_i\}$ множина прямих на координатній площині, $(l_i R l_j) \Leftrightarrow (l_i \perp l_j)$;
5) $\{l_i\}$ множина прямих в просторі, $l_i R l_j$, якщо прямі l_i та l_j мимобіжні.

№ 3.17. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Знайти транзитивне замикання R^+, якщо:
1) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1)\}$;
2) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_2)\}$;
3) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3)\}$.

№ 3.18. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Знайти транзитивне замикання R^+, якщо:
1) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_4)\}$;
2) $R = \{(a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2)\}$;
3) $R = \{(a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4), (a_4, a_3)\}$;
4) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4)\}$.

№ 3.19. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Знайти транзитивне замикання R^+, якщо:
1) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_5), (a_5, a_3)\}$;
2) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_5, a_4), (a_4, a_3), (a_3, a_5)\}$;
3) $R = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_3, a_5)\}$.

№ 3.20. Знайти транзитивне замикання R^+, якщо:

1) $R = \{(n,n),(n,n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
2) $R = \{(n,n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3) $R = \{(n,n),(n+1,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
4) $R = \{(n+1,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
5) $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
6) $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

У пп. 1–4 $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, у пп. 5–6 $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

№ 3.21. Знайти транзитивні замикання R^+ для відношень R задачі 3.15.

№ 3.22. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Дослідити, чи є відношення R сюр'єктивним, ін'єктивним, функціональним, відображенням.
1) $R \subset A \times B$, $R = \{(a_1,b_1),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_4,b_4)\}$;
2) $R \subset A \times B$, $R = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3)\}$;
3) $R \subset A \times A$, $R = \{(a_1,a_4),(a_2,a_4),(a_3,a_2),(a_4,a_2)\}$;
4) $R \subset A \times A$, $R = \{(a_1,a_3),(a_2,a_4),(a_3,a_2),(a_4,a_1)\}$.

№ 3.23. Дослідити відображення на сюр'єктивність, ін'єктивність, бієктивність.
1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
2) $f\colon \mathbb{R} \to [-1;1]$, $f(x) = \sin x$;
3) $f\colon \mathbb{R} \to (0;+\infty)$, $f(x) = e^x$;
4) $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

№ 3.24. Чи є відображення $R \subset \mathbb{R}^2$ функціональними?
1) $R = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$;
2) $R = \{(x,y) \mid x^2 = y\}$;
3) $R = \{(x,y) \mid y^3 = x\}$;
4) $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

№ 3.25. Довести, що композиція:
1) відображень є відображенням;
2) сюр'єктивних відношень є сюр'єктивним відношенням;
3) ін'єктивних відношень є ін'єктивним відношенням;
4) функціональних відношень є функціональним відношенням;
5) бієкцій є бієкцією.

№ 3.26. Нехай A, B множини, $f\colon A \to B$ функція.
1. Довести, що відношення $R \subset A \times A$, $(xRy) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$ є відношенням еквівалентності.
2. Довести, що для відображення f існує розклад $f = \varepsilon \circ f'$, де ε природне відображення A на $A/_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$, тобто $\varepsilon(x) = [x]_R$, а f' взаємно однозначна відповідність між $A/_R$ та $f(A)$.
3. Для функції $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - 3x \in \mathbb{R}$ знайти ε та f'.

4. Для множин $A = \{a_1, \dots, a_6\}$, $B = \{b_1, \dots, b_5\}$ та функції f, яка задана парами значень $\{(a_1, b_5), (a_2, b_4), (a_3, b_2), (a_4, b_2), (a_5, b_4), (a_6, b_3)\}$, знайти ε та f'.

№ 3.27. Нехай «$\sim$» – відношення еквівалентності на $\mathbb{R}$, що задане співвідношенням $(x \sim y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. Вказати в явному вигляді класи еквівалентності A_α, що відповідають значенню $\alpha = f(x)$, та фактор-множину $\mathbb{R}/_\sim$.

1) $f(x) = [x]$ (ціла частина числа x); 2) $f(x) = \sin x$.

№ 3.28. Нехай «$\sim$» – відношення еквівалентності на $\mathbb{R}^2$, що задане співвідношенням $((x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)) \Leftrightarrow (f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2))$. Вказати в явному вигляді класи еквівалентності A_α, що відповідають значенню $\alpha = f(x_1, x_2)$, фактор-множину $\mathbb{R}^2/_\sim$ та зобразити на координатній площині класи еквівалентності для декількох суттєвих значень α.

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
2) $f(x_1, x_2) = |x_1 x_2|$;
3) $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$;
4) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2$;
5) $f(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 1)^3$.

№ 3.29. Чи є множини $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ класами еквівалентності за деяким відношенням «$\sim$»? Якщо так, навести для відношення «$\sim$» функцію $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (див. задачу 3.28). Зобразити на координатній площині множини A_α для декількох суттєвих значень α.

1) $A_\alpha = \{(x, x + \alpha) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
2) $A_\alpha = \{(x, x^2 + \alpha) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
3) $A_\alpha = \{(x, \alpha x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

№ 3.30. На множині $A = \{1, \dots, 20\}$ задане відношення:
1) $(x \sim y) \Leftrightarrow$ (кількість простих дільників x та y збігаються);
2) $(x \sim y) \Leftrightarrow$ (кількість дільників x та y збігаються).
Перевірити, що це дійсно відношення еквівалентності, знайти відповідні фактор-множини.

№ 3.31. Нехай $R \subset A \times A$. Довести:
$$(R \text{ – відношення еквівалентності}) \Leftrightarrow ((R \circ R^{-1}) \cup I_A = R).$$

№ 3.32. Довести, що відношення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$((x_1, y_1) R (x_2, y_2)) \Leftrightarrow ((x_1 \leqslant x_2) \wedge (y_1 \leqslant y_2)),$$
є частковим порядком, але не є лінійним порядком.

№ 3.33. Довести, що відношення $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$((x_1, y_1)R(x_2, y_2)) \Leftrightarrow ((x_1 < x_2) \vee ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leqslant y_2)))$$

(так зване лексикографічне впорядкування) є лінійним порядком.

Розділ 4

Елементи комбінаторики

4.1. Основні теоретичні відомості

Основні принципи комбінаторики:

1. Принцип добутку. Нехай деяку дію можна розбити на n послідовних незалежних піддій, причому кожну піддію j можна виконати k_j способами ($j = 1, \ldots, n$). Тоді вихідну дію можна виконати $k_1 k_2 \ldots k_n$ способами.

2. Принцип суми. Нехай множину способів виконання деякої дії можна розбити на k підмножин, які попарно не перерізаються, причому в кожній j-й множині міститься n_j елементів (способів). Тоді вихідну дію можна виконати $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

3. Принцип Діріхле. Нехай елементи множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ потрібно розмістити по m комірках, причому $n > m$. Тоді принаймні одна з комірок буде містити більше одного елемента.

Кількість розміщень без повторень з n за k позначають через P_n^k або A_n^k, $P_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$; кількість переставлень (випадок $n = k$) позначають через P_n, $P_n = n!$. Кількість розміщень з повтореннями з n за k позначають через $\widetilde{P}_n^k$, $\widetilde{P}_n^k = n^k$. Кількість комбінацій без повторень з n за k позначають через C_n^k (в інших позначеннях $\binom{n}{k}$), $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. C_n^k також називають біноміальними коефіцієнтами. Кількість комбінацій з повтореннями з n за k позначають через $\widetilde{C}_n^k$, $\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$. Упорядковані розбиття $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$, де $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, також називають поліноміальними коефіцієнтами.

Мають місце біноміальна та поліноміальна формули: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_m \geqslant 0\\ k_1+\cdots+k_m=n}} C_n^{k_1,\ldots,k_m} a_1^{k_1}\ldots a_m^{k_m}$. Біноміальні коефіцієнти зручно розташовувати у формі трикутника Паскаля.

4.2. Задачі

4.2.1. Текстові задачі

№ 4.1. В посудині містяться 5 білих нумерованих куль та 4 чорних. Скільки є варіантів вибору 3 білих куль та 2 чорних, якщо кулі 1) повертаються; 2) не повертаються в посудину?

№ 4.2. В посудині містяться 5 білих нумерованих куль, 8 чорних та 4 червоних. Витягнемо 4 кулі. Скільки є варіантів витягнути хоча б одну 1) білу; 2) чорну; 3) червону кулю?

№ 4.3. В посудині містяться 6 білих нумерованих куль та 5 чорних. Лівою рукою витягнемо 2 кулі з посудини, потім, не повертаючи кулі, правою рукою витягнемо 2 кулі. Скільки існує варіантів вибору, якщо:
1) в лівій руці білих куль не більше, ніж білих куль в правій?
2) в лівій руці білих куль не більше, ніж чорних куль в правій?
3) в лівій руці білих куль не менше, ніж білих куль в правій?
4) в лівій руці білих куль не менше, ніж чорних куль в правій?
5) кількість білих куль в лівій руці та білих куль в правій руці співпадають?
6) кількість білих куль в лівій руці та чорних куль в правій руці співпадають?
7) кількість білих куль в лівій руці вдвічі більша за кількість білих куль в правій руці?
8) кількість білих куль в лівій руці вдвічі менша за кількість чорних куль в правій руці?
9) в кожній руці містяться як білі, так і чорні кулі?
10) в кожній руці містяться кулі лише одного кольору?
11) якщо викласти кулі з обох рук на стіл, то на столі будуть як білі, та і чорні кулі?

№ 4.4. Розв'язати пп. 1–10 задачі 4.3 за такої умови: витягнуті лівою рукою кулі повертаються до посудини, а вже потім кулі витягуються правою рукою.

№ 4.5. В посудині містяться 12 білих нумерованих куль, 11 чорних та 10 червоних. Лівою рукою витягнемо 3 кулі, потім, не повертаючи кулі, правою рукою витягнемо 3 кулі. Скільки існує варіантів вибору куль, якщо:
1) в кожній руці містяться кулі лише одного кольору?
2) в кожній руці містяться кулі в точності двох кольорів?
3) в кожній руці містяться кулі в точності трьох кольорів?
4) якщо викласти кулі з обох рук на стіл, то на столі будуть кулі всіх трьох кольорів?

№ 4.6. Розв'язати пп. 1–3 задачі 4.5 за такої умови: витягнуті лівою рукою кулі повертаються до посудини, а вже потім кулі витягуються правою рукою.

№ 4.7. Скількома способами можна розставити на шаховій дошці 8 тур, щоб вони не били одна одну?

№ 4.8. На колі лежать n точок $A_1, \ldots, A_n$. Скільки можна вибрати 1) хорд; 2) трикутників?

№ 4.9. На колі лежать n точок $A_1, \ldots, A_n$. Скільки можна побудувати чотирикутників: 1) опуклих; 2) неопуклих?

№ 4.10. На одній з двох паралельних прямих вибрано m точок, на іншій – n точок. Скільки можна побудувати трикутників?

№ 4.11. Даний правильний n-кутник з вершинами $A_1, \ldots, A_n$. Скількома способами можна обрати три вершини, щоб утворений трикутник був рівнобедрений або рівносторонній, якщо 1) $n = 4$; 2) $n = 6$; 3) n довільне?

№ 4.12. Скільки діагоналей можна провести в правильному n-кутнику?

№ 4.13. На екзамен приходять n студентів $A_1, \ldots, A_n$. Система оцінювання чотирибальна: «відмінно», «добре», «задовільно», «незадовільно». Скільки є варіантів розподілу оцінок так, щоб ніхто з студентів не отримав «незадовільно»?

№ 4.14. Телефонний номер складається з чотирьох цифр 0–9. Скільки існує телефонних номерів:
1) у яких всі цифри різні?
2) у яких в точності дві цифри однакові, а інші всі різні?
3) у яких в точності три цифри однакові?
4) у яких всі чотири цифри однакові?
5) які містять в точності дві пари однакових цифр?
6) які складаються тільки з двох цифр?
7) які складаються тільки з трьох цифр?
8) які не містять 2 та не містять 3?
9) які є паліндромами?
10) у яких цифри розташовані за зростанням (строгим) зліва направо?
11) у яких цифри розташовані за зростанням (нестрогим) зліва направо?

Для всіх пунктів розглянути два випадки: перша цифра може бути нулем та перша цифра не може бути нулем.

№ 4.15. Телефонний номер складається з семи цифр 0–9. Скільки існує телефонних номерів:
1) які містять в точності дві цифри 2 та вони розташовані поруч, а всі інші цифри різні між собою?
2) які містять в точності дві цифри 2 та вони розташовані не поруч, а всі інші цифри різні між собою?
3) які містять в точності одну цифру 2 і одну цифру 5 та вони розташовані поруч, а всі інші цифри різні між собою?
4) які містять в точності одну цифру 2 і одну цифру 5 та вони розташовані не поруч, а всі інші цифри різні між собою?

Для всіх пунктів розглянути два випадки: перша цифра може бути нулем та перша цифра не може бути нулем.

№ 4.16. Телефонний номер складається з семи цифр 0–9. Людина набирає номер, але помиляється: 1) в одній цифрі; 2) в двох цифрах. Скільки людина може набрати «неправильних» номерів? Розглянути два випадки: перша цифра може бути нулем та перша цифра не може бути нулем.

№ 4.17. Яких натуральних чисел від 1 до 999999 більше: тих, що містять цифру 2, або тих, що не містять?

№ 4.18. У будівлі 16 поверхів, на кожному поверсі 6 квартир, в кожній квартирі 4 мешканця, які розрізняються. До під'їзду підходять чотири мешканця будівлі. Обчислити кількість варіантів того, що:
1) вони живуть в одній квартирі;
2) вони живуть на одному поверсі;
3) вони живуть в точності на двох поверхах та поверхи сусідні;
4) вони живуть в точності на трьох поверхах та поверхи сусідні;
5) номери поверхів, де вони живуть, тільки парні числа.

№ 4.19. Будівля має поверхи з номерами від 0 до n. У ліфт на поверсі 0 входять m пасажирів та виходять на поверхах $1 - n$.
1. Знайти кількість всіх способів висадки.
2. Знайти кількість способів висадки, якщо на жодному поверсі не виходить більше одного пасажира.
3. Знайти кількість способів висадки, якщо на кожному поверсі виходить хоча б один пасажир.

№ 4.20. Є стіл з n нумерованими стільцями та n осіб $A_1, \dots, A_n$, серед яких є троє друзів A_1, A_2, A_3 та двоє осіб A_4, A_5, що посварилися. Скільки є варіантів розсадити осіб за столом так, щоб друзі сиділи поруч, а ті, що посварилися, не поруч, якщо:
1) стіл круглий, $n = 9$?
2) стіл прямокутний, $n = 9$?
3) стіл круглий, n довільне?
4) стіл прямокутний, n довільне?

№ 4.21. Є круглий стіл з n нумерованими стільцями та 1) n; 2) $n + m$ осіб. Скільки є варіантів розсадити осіб за столом так, щоб k заздалегідь вибраних осіб ($k \leqslant n$) потрапили за стіл та опинилися поруч?

№ 4.22. Скільки існує двійкових векторів розмірності $n+m$, які містять n нулів та m одиниць, та жодні дві одиниці не стоять поруч?

№ 4.23. Знайти кількість слів, що утворені перестановкою літер в слові «математика».

№ 4.24. Є книжкова полиця на 10 книжок, на якій розставляють 5 екземплярів першої книжки, які не розрізняються між собою, 2 екземпляри другої книжки та 3 екземпляри третьої книжки. Скільки варіантів розставити книжки на полиці?

№ 4.25. Є книжкова полиця на 42 книжки та 10 томів Пушкіна (нумерованих), 17 томів Гоголя та 15 томів Достоєвського. Скільки варіантів розставити на полиці так, щоб всі тома Пушкіна були поруч?

№ 4.26. Є книжкова полиця на 10 книжок, на якій розставляють 10 томів Пушкіна (нумерованих). Скільки варіантів розставити книжки на полиці так, щоб принаймні два томи стояли невпорядковано?

№ 4.27. Є 32 карти без шісток (від туза до сімки) та три гравця A_1, A_2 та A_3, у кожного з яких 10 карт на руках.
1. Обчислити кількість n_1 способів розподілити карти.
2. Обчислити кількість n_2 способів розподілити карти так, щоб всі тузи були в одного гравця.
3. Обчислити кількість n_3 способів розподілити карти так, щоб кожен гравець мав по одному тузу.
4. Обчислити відносну частоту ситуацій пп. 2–3 (відношення $\frac{n_2}{n_1}$ та $\frac{n_3}{n_1}$) і порівняти, наскільки часто зустрічаються ситуації пп. 2–3.

№ 4.28. Є 32 карти без шісток (від туза до сімки) та три гравця A_1, A_2 та A_3. У гравця A_1 12 карт на руках, з яких в точності чотири ♠.
1. Обчислити кількість n_1 способів розподілити інші карти між гравцями A_2 та A_3 по 10 карт кожному.
2. Обчислити кількість n_2 способів розподілити інші карти між гравцями A_2 та A_3 по 10 карт кожному так, щоб в одного з них було три ♠, а в іншого одна.
3. Обчислити кількість n_3 способів розподілити інші карти між гравцями A_2 та A_3 по 10 карт кожному так, щоб в одного з них було чотири ♠, а в іншого не було жодної.
4. Обчислити кількість n_4 способів розподілити інші карти між гравцями A_2 та A_3 по 10 карт кожному так, щоб у кожного з них було дві ♠.
5. Обчислити відносну частоту ситуацій пп. 2–4 (відношення $\frac{n_2}{n_1}$, $\frac{n_3}{n_1}$ та $\frac{n_4}{n_1}$) і порівняти, наскільки часто зустрічаються ситуації пп. 2–4.

№ 4.29. Є колода 36 карт. Скільки варіантів витягнути: 1) 5 карт, з яких в точності два тузи та в точності три ♠? 2) 6 карт, з яких в точності два вальти, в точності один туз та в точності три ♠?

№ 4.30. Трамвайний білет складається з чотирьох цифр від 0 до 9. Скільки існує щасливих квитків, у яких сума перших двох цифр дорівнює сумі двох останніх?

№ 4.31. Підрахувати кількість кісток доміно.

№ 4.32. На столі лежить одна кістка доміно 1) 3:3; 2) 4:6. Скільки є варіантів вибору двох кісток доміно так, щоб обидві вибрані кістки можна було приєднати до тієї, що вже лежить на столі?

№ 4.33. Букет квітів може містити хризантеми, троянди та ромашки, квіти ненумеровані, порядок складання в букет неважливий. Скільки букетів можна скласти:
1) з 7 квітів?
2) з 7 квітів так, щоб була хоча б одна хризантема та хоча б дві троянди?
3) з 7 квітів так, щоб була не більше трьох хризантем, не більше чотирьох троянд та не більше п'яти ромашок?
4) з 7 квітів так, щоб хризантем було не менше однієї та не більше чотирьох, троянд не менше двух та не більше п'яти, ромашок не менше двох та не більше трьох?

№ 4.34. У будівлі, в якій знаходяться n гостей $A_1, \ldots, A_n$, раптово зникло світло, та гості розбирають свої парасольки навмання. Скільки варіантів того, що
1) кожен з гостей обере чужу парасольку?
2) хоча б один із гостей обере свою парасольку?
3) в точності k гостей оберуть свої парасольки, а всі інші – чужі?

№ 4.35. У будівлі, в якій знаходяться n гостей $A_1, \ldots, A_n$, раптово зникло світло, та гості розбирають свої черевики навмання. Скільки варіантів вибрати кожному гостю по два черевики? Розглянути наступні варіанти:
1) вибір без додаткових обмежень;
2) кожен обирає один правий черевик і один лівий (можливо, із різних пар);
3) кожен гість обирає черевики однієї пари (можливо, не своєї).

Скільки існує способів для гостей вибрати та одягти два черевики (з обмеженнями, вказаними вище)?

№ 4.36. Множина A містить n елементів, множина B m елементів. Скільки існує: 1) функцій; 2) відображень; 3) ін'єкцій; 4) сюр'єкцій з A в B?

№ 4.37. Множина A містить n елементів. Скільки існує: 1) рефлексивних відношень; 2) антирефлексивних відношень; 3) симетричних відношень; 4) антисиметричних відношень $R\colon A \to A$?

№ 4.38. Комісія збиралася 40 разів, кожного разу по 10 осіб, причому жодна пара осіб не засідала більше одного разу. Довести, що загальна кількість членів комісії більше 60.

№ 4.39. Скільки варіантів розбити вісім хлопців та чотири дівчини на три ненумеровані команди по чотири особи в кожній? Розглянути наступні варіанти:
1) вибір без додаткових обмежень;
2) в кожній команді є хоча б одна дівчина;
3) в точності одна команда складається лише з хлопців;
4) в точності дві команди складаються лише з хлопців.

№ 4.40. Довести, що у довільній групі з шести осіб є або троє попарно знайомих осіб або троє попарно незнайомих.

4.2.2. Біноміальні та поліноміальні коефіцієнти

№ 4.41. Довести:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
4) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$;
5) $C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k$;
6) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$.

№ 4.42. Довести для $n \geqslant 1$:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;
2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;
3) $\sum\limits_{k \text{ парне}} C_n^k = \sum\limits_{k \text{ непарне}} C_n^k = 2^{n-1}$;
4) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k} = C_{n_1+n_2}^m$ [1] ;
5) $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$;
6) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;
7) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$;
8) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$.

№ 4.43. Довести $\sum\limits_{k_1+\ldots+k_m=n} C_n^{k_1,\ldots,k_m} = m^n$.

[1] Вважаємо, що $C_i^j = 0$ для $j > i$

№ 4.44. Довести оцінки: 1) $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 \leqslant 2^{2n}$; 2) $\sum\limits_{k_1+\ldots+k_m=n}(C_n^{k_1,\ldots,k_m})^2 \leqslant m^{2n}$.

№ 4.45. 1. У виразі $(1+2x+\frac{1}{3x^3})^{10}$ знайти коефіцієнт при x^4.
2. У виразі $(3x^3+6x^4+1)^{10}$ знайти коефіцієнт при x^{34}.
3. У виразі $(3-x+2x^2)^{10}$ знайти коефіцієнти при x^5, x^8, x^{11}.
4. У виразі $(x^2-3xy+y^3)^{10}$ знайти коефіцієнт при x^8y^{14}.

№ 4.46. За яких n всі C_n^k є непарними числами?

Розділ 5

Елементи теорії графів

5.1. Основні теоретичні відомості

Графом $G = (V, E)$ називають фігуру на площині, яка складається з непорожньої скінченної множини V точок (вершин) і скінченної множини E орієнтованих чи не орієнтованих ліній (ребер), що з'єднують деякі пари вершин. Ребро, що з'єднує деяку вершину саму з собою, називають петлею. Ребра, що з'єднують одну й ту саму пару вершин, називають мультиребрами. Граф, що не містить мультиребер та петель, називають простим; граф, в якому допускаються мультиребра чи петлі, називають мультиграфом. Граф, усі ребра якого неорієнтовані, називають неорієнтованим; граф, усі ребра якого орієнтовані – орієнтованим графом (орграфом). В орграфах пари протинапрямлених мультиребер, що з'єднують одну й ту саму пару вершин, часто зображують однією лінією зі стрілками на протилежних кінцях. Вершини позначатимемо літерою v (з індексами чи без), ребра – літерою e (з індексами чи без) або за відсутності мультиребер парою вершин v_iv_j (для орграфа ребро v_iv_j веде від v_i до v_j).

Розглянемо неорієнтовані графи.

Вершини v_1 та v_2 називають суміжними, якщо вони з'єднані ребром e; тоді кажуть, що вершини v_1 та v_2 інцидентні ребру e, а ребро e інцидентне вершинам v_1 та v_2. Шляхом, що починається у вершині v_1 і закінчується у вершині v_2, називають послідовність вершин та ребер вигляду

$v_1 e_{i_1} v_{i_1} e_{i_2} v_{i_2} e_{i_3} \dots v_{i_{n-1}} e_{i_n} v_2$, де кожне ребро інцидентне обом вершинам, які є для нього сусідніми в послідовності. Шлях однозначно визначається першою і останньою вершинами (v_1 та v_2) та послідовністю ребер, тобто проміжні вершини можна не вказувати, а для простографів шлях однозначно визначається послідовністю вершин. Зауважимо, що для орієнтованих графів шлях визначається з урахуванням орієнтації ребер, наприклад, ребро e_{i_1} має вести від v_1 до v_{i_1}. Шлях, який не містить повторень вершин і ребер, крім, можливо, двох крайніх вершин v_1 та v_2, називають простим шляхом. Замкнений шлях ($v_1 = v_2$) називають циклом; простий замкнений шлях – простим циклом. Граф G називають зв'язним, якщо будь-які дві його вершини можуть бути з'єднані шляхом; максимальний за включенням «$\subset$» зв'язний підграф графу G називають зв'язною компонентою або областю зв'язності. Ребро, видалення якого збільшує кількість областей зв'язності, називають мостом. Вершину, видалення якої збільшує кількість областей зв'язності, називають точкою з'єднання.

Степенем d_v вершини v простого графу називають кількість ребер, інцидентних v (у мультиграфі кожна петля збільшує d_v на 2); якщо $d_v = 0$, вершину v називають ізольованою. Граф, усі вершини якого ізольовані, називають порожнім; простий граф, усі вершини якого мають степінь $n-1$, де $n = \mathrm{card}(V)$, називають повним і позначають K_n. Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ називають підграфом графу $G = (V, E)$, якщо $V_1 \subset V$ та $E_1 \subset E$. Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають ізоморфними, якщо існує бієкція (ізоморфізм) $f\colon V_1 \to V_2$ така, що суміжність вершин v_1 та v_2 в G_1 еквівалентна суміжності $f(v_1)$ та $f(v_2)$ в G_2. Граф $\bar{G} = (V, E_1)$ називають доповненням (доповняльним графом) до графу $G = (V, E_2)$, якщо вершини v_1 та v_2 суміжні в $\bar{G}$ тоді і тільки тоді, коли вони не суміжні в G.

Нехай ребро e інцидентне вершинам v_1 та v_2. Підрозбиття ребра e полягає у видаленні e та додаванні двох нових ребер e_1, e_2 і нової вершини v так, що: 1) ребро e_1 інцидентне вершинам v_1 і v; 2) ребро e_2 інцидентне вершинам v і v_2. Підрозбиття ребра e зводиться (з точністю до ізоморфізму) до «навішування» на ребро e нової вершини v. Графи G_1 та G_2 називають гомеоморфними, якщо їх можна отримати з ізоморфних графів скінченною кількістю операцій підрозбиття ребер.

Ейлеровим шляхом називають шлях, який містить кожне ребро графу в точності один раз (проходить через кожне ребро без повторень); ейлеровим циклом називають замкнений ейлерів шлях. Зв'язний граф, що допускає побудову ейлерового циклу (шляху), називають ейлеровим (напівейлеровим). Гамільтоновим шляхом називають простий шлях, який містить кожну вершину графу в точності один раз (проходить через кожну вершину без повторень); гамільтоновим циклом називають замкнений гамільтонів шлях. Граф, що допускає побудову гамільтонового циклу (шляху), називають гамільтоновим (напівгамільтоновим).

Міченим графом або мережею називають граф, вершинам або/та ребрам якого зіставляються певні мітки. Якщо мітки є дійсними числами та зіставляються тільки ребрам, то граф називають зваженим, а самі числа – вагами (або вагами ребер). Деревом називають зв'язний граф, що не містить простих циклів. Остовним деревом зв'язного графу G називають підграф, який є деревом та містить всі вершини графу G. Мінімальним остовним деревом зв'язного зваженого графу називають остовне дерево з мінімальною вагою, тобто, мінімальною сумою ваг всіх ребер. Граф $G = (V, E)$ називають дводольним, якщо існують дві непорожні множини (долі) V_1 та V_2 такі, що $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, а будь-які дві вершини з однієї долі V_k $(k = 1, 2)$ є несуміжними. Граф називають плоским, якщо: 1) жодне ребро не має точок самоперетину; 2) жодні два ребра e_1 та e_2 не мають точок перетину, окрім вершин, інцидентних обом ребрам e_1 та e_2. Граф, ізоморфний плоскому, називають планарним.

Гранню плоского неорієнтованого мультиграфу називають максимальну за включенням «$\subset$» область площини r таку, що будь-які дві точки $a, b \in r$ можна з'єднати неперервною кривою, яка не має спільних точок з ребрами, окрім, можливо, самих точок a та b. Нехай G – плоский мультиграф з кількістю вершин n_v, ребер n_e, граней n_r. Плоский мультиграф G^* з кількістю вершин $\tilde{n}_v$, ребер $\tilde{n}_e$, граней $\tilde{n}_r$ називають дуальним (першим дуальним) до графу G, якщо: 1) $\tilde{n}_e = n_e$, $\tilde{n}_v = n_r$; 2) кожна грань r графу G містить в точності одну вершину v^* графу G^* (вершина v^* графу G^* відповідає грані r графу G); 3) кожне ребро e графу G перетинається в точності з одним ребром e^* графу G^* (ребро e графу G відповідає ребру e^* графу G^*). Другим дуальним графом називають граф $G^{**} = (G^*)^*$.

Фарбування вершин простого графу полягає у зіставленні кожній вершині деякого кольору, причому суміжні вершини фарбуються в різні кольори. Мінімальну кількість кольорів, достатніх для фарбування вершин графу, називають хроматичним числом і позначають через χ_G; граф з хроматичним числом k називають k-колірним. Фарбування граней плоского мультиграфу, який не містить мостів, полягає у зіставленні кожній грані кольору, причому суміжні грані (для яких існує ребро, що належить обом граням) фарбуються в різні кольори.

Деревом, у якому виділена (зафіксована) одна вершина, називають кореневим деревом, а саму вершину – кореневою вершиною або коренем. Рівнем вершини кореневого дерева називають довжину простого шляху, що з'єднує цю вершину з коренем. Кажуть, що вершина v_1 n-го рівня породжує вершину v_2 $(n+1)$-го рівня, якщо вершини v_1 та v_2 суміжні; тоді вершину v_1 називають батьком вершини v_2, а вершину v_2 – сином вершини v_1. Кореневе дерево можна також розглядати як орієнтоване дерево, тоді ребро v_1v_2 веде від v_1 до v_2. З кожною некореневою вершиною v можна пов'язати піддерево (підграф вихідного дерева), коренем якого є v; очевидно, що піддерево є деревом. Вершину, що не породжує жодну вершину даного дерева, називають листом (або листком). Висотою дерева називають довжину найдовшого шляху від кореня до будь-якого листа. Впорядкованим деревом називають кореневе дерево, у якому на множині синів кожної вершини заданий лінійний порядок; при зображенні такого дерева вважаємо, що множина синів впорядкована зліва направо.

Бінарним деревом називають впорядковане кореневе дерево таке, що: 1) кожен син деякої вершини v є або лівим сином, або правим сином; 2) кожна вершина v має не більше одного лівого сина та не більше одного правого сина. Лівим (правим) піддеревом вершини v називають максимальне піддерево, коренем якого є лівий (правий) син; за відсутності лівого (правого) сина ліве (праве) піддерево є порожнім. Інше означення рекурсивного типу (див., наприклад, [12]): бінарним деревом називають скінченне кореневе дерево, на множині вершина якого визначена структура, яка володіє наступною властивістю: всі вершини, крім кореня, містяться в двох підмножинах (піддеревах), що не перетинаються, – лівому та правому, коже з яких або порожнє, або є бінарним деревом. Бінарне дерево називають збалансованим, якщо для кожної вершини v висоти її лівого та правого піддерев відрізняються не більше, ніж на 1.

5.2. Задачі

№ 5.1. Побудувати прості неізоморфні графи із заданими степенями вершин: 1) 2, 3, 3, 4, 4; 2) 2, 2, 3, 3, 3, 5; 3) 2, 2, 2, 3, 3, 4.

№ 5.2. Чи існує простий граф із степенями вершин 2, 2, 2, 4, 5, 5? Якщо так, побудувати.

№ 5.3. Побудувати зв'язний граф, доповняльний до якого також є зв'язним.

№ 5.4. Дослідити графи рис. 5.1–5.8 на ейлеровість (напівейлеровість) за допомогою алгоритму Флері та, у разі ейлеровості (напівейлеровості), вказати відповідний цикл (шлях).

№ 5.5. Дослідити графи рис. 5.1–5.8 на гамільтоновість (напівгамільтоновість) та за можливості вказати відповідний цикл (шлях).

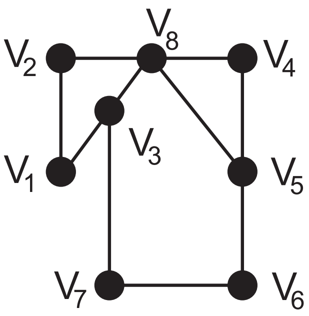

Рис. 5.1

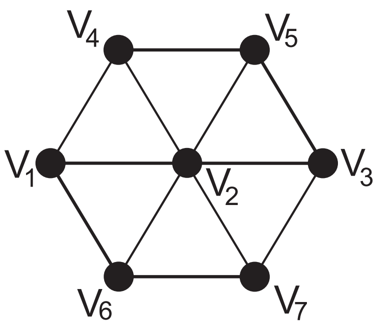

Рис. 5.2

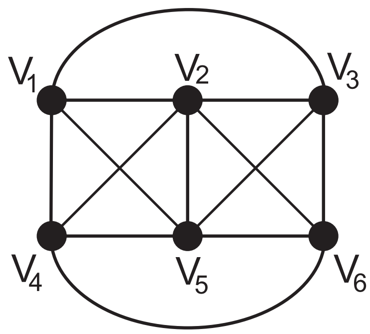

Рис. 5.3

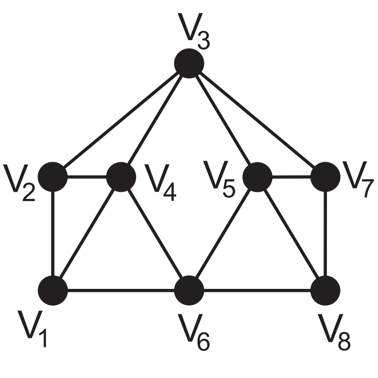

Рис. 5.4

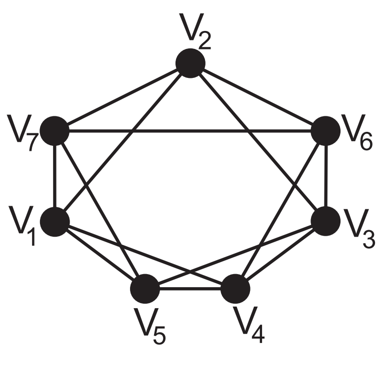

Рис. 5.5

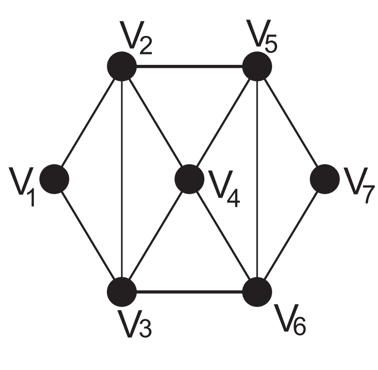

Рис. 5.6

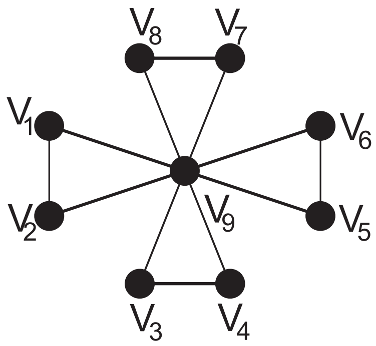

Рис. 5.7

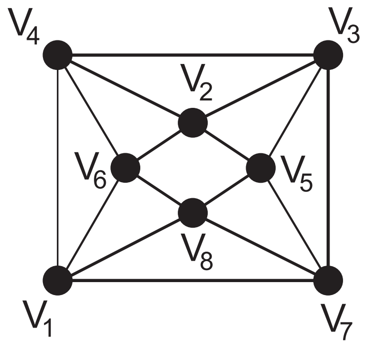

Рис. 5.8

№ 5.6. 1. Довести непланарність графів K_5 («зірка», рис. 5.9) та $K_{3,3}$ («три криниці», рис. 5.10).
2. Дослідити графи рис. 5.11–5.16 на планарність за допомогою критерію Понтрягіна-Куратовського: граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 та $K_{3,3}$. Для планарного графу побудувати ізоморфний йому плоский, для непланарного – вказа-

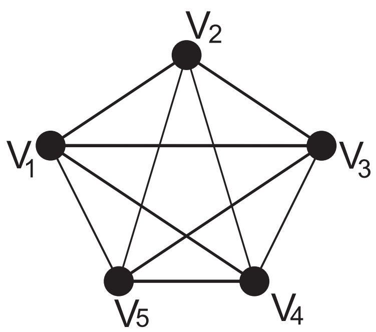

Рис. 5.9

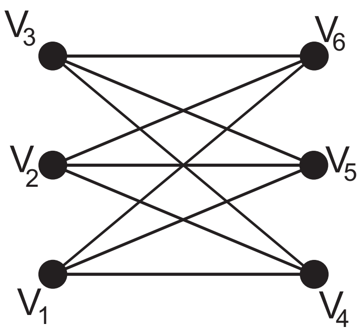

Рис. 5.10

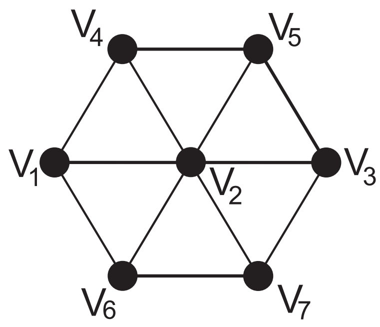

Рис. 5.11

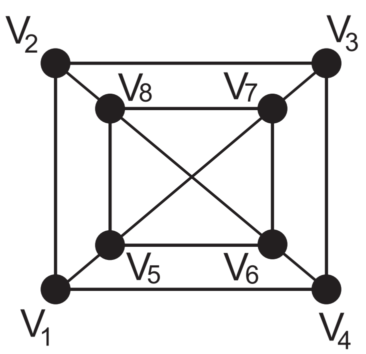

Рис. 5.12

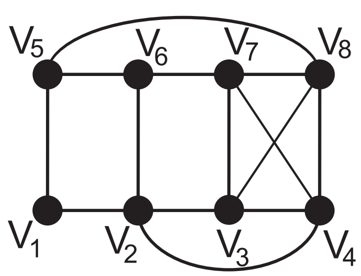

Рис. 5.13

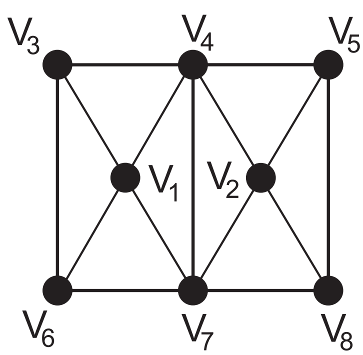

Рис. 5.14

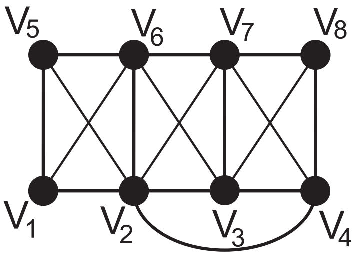

Рис. 5.15

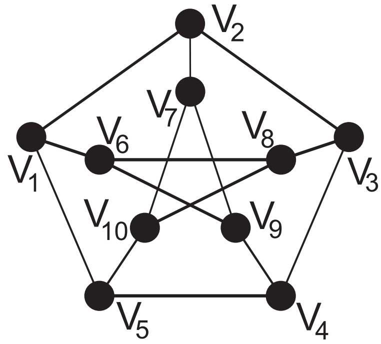

Рис. 5.16

ти відповідний підграф, гомеоморфний K_5 або $K_{3,3}$.

№ 5.7. Дослідити граф Петерсена (рис. 5.16) на ейлеровість (напівейлеровість), гамільтоновість (напівгамільтоновість), дводольність.

№ 5.8. Чи існує плоский зв'язний граф з 6 вершинами і 13 ребрами? Якщо так, побудувати.

№ 5.9. В архіпелагу кожен острів з'єднаний мостами у точності з сімома іншими; між будь-якими двома островами побудовано не більше одного моста. Всього мостів 84. Скільки островів в архіпелагу?

№ 5.10. Для графів рис. 5.17–5.23 побудувати дуальні та другі дуальні графи. Впевнитись, що граф рис. 5.19 є автодуальним (самодвоїстим), тобто ізоморфним своєму дуальному.

№ 5.11. 1. Знайти хроматичне число графа Петерсена (рис. 5.16), вказати відповідне розфарбування вершин.
2. Знайти хроматичні числа для графів рис. 5.24–5.26, вказати відповідні розфарбування вершин.
3. Розфарбувати мінімально можливою кількістю кольорів грані графів рис. 5.24–5.26.

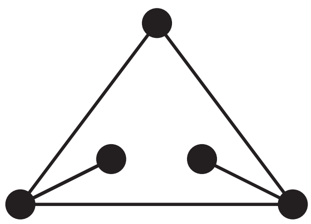

Рис. 5.17

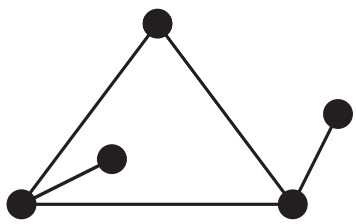

Рис. 5.18

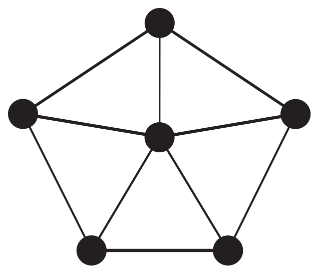

Рис. 5.19

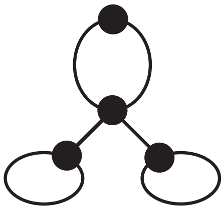

Рис. 5.20

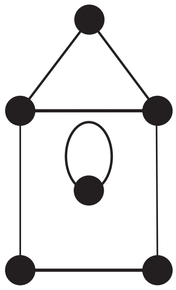

Рис. 5.21

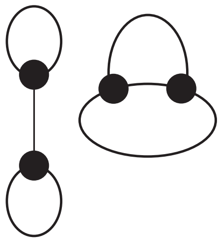

Рис. 5.22

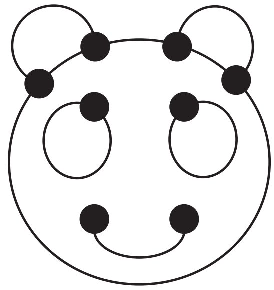

Рис. 5.23

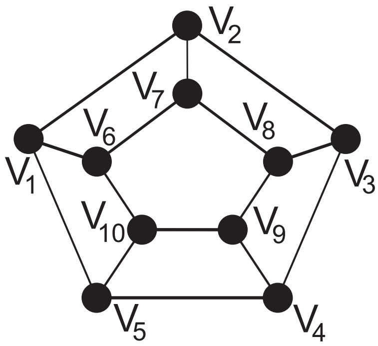

Рис. 5.24

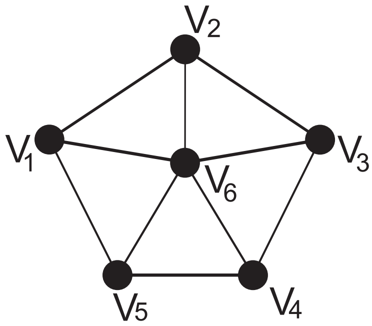

Рис. 5.25

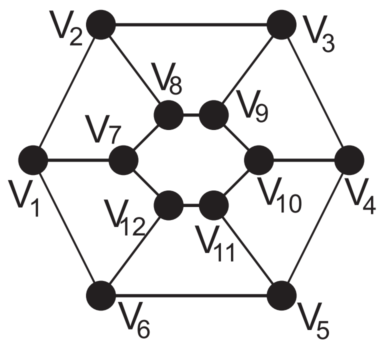

Рис. 5.26

№ 5.12. Для графу рис. 5.27 побудувати: 1) дерево пошуку в глибину (DFS-дерево, depth-first search англ.); 2) дерево пошуку в ширину (BFS-дерево, breadth-first search англ.).

№ 5.13. Побудувати мінімальні остовні дерева за допомогою: 1) алгоритму Краскала (рис. 5.28); 2) алгоритму Прима (рис. 5.29); 3) алгоритму Борувки (рис. 5.30); 4) всіх перерахованих алгоритмів (рис. 5.31).

№ 5.14. 1. Знайти найкоротші шляхи з вершини v_1 до інших за допомогою алгоритму Дейкстри (рис. 5.32–5.33). 2. Знайти найкоротші шляхи між всіма вершинами за допомогою алгоритму Флойда (рис. 5.34–5.35).

№ 5.15. За допомогою теорії графів (застосуванням формули Ейлера) довести, що існує всього п’ять правильних (платонових) тіл: тетраедр, октаедр, ікосаедр, гексаедр, додекаедр та намалювати їх на площині. Тіло називається правильним, якщо воно є опуклим, усі його грані є рівними між собою правильними багатокутниками та всі вершини мають однаковий степінь.

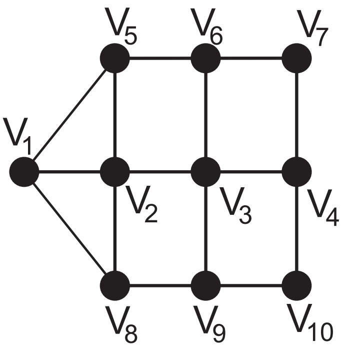

Рис. 5.27

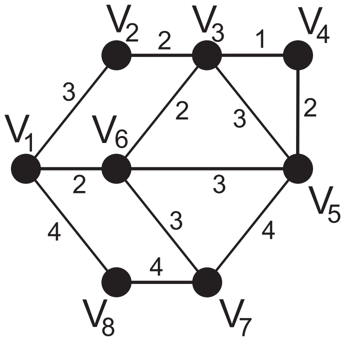

Рис. 5.28

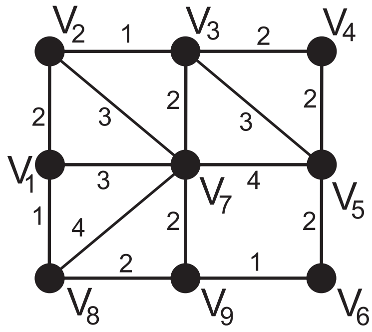

Рис. 5.29

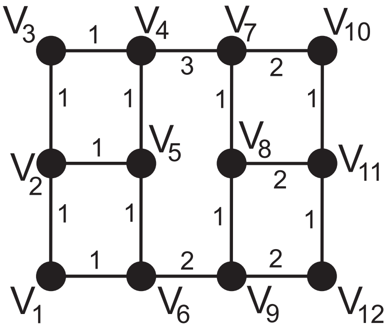

Рис. 5.30

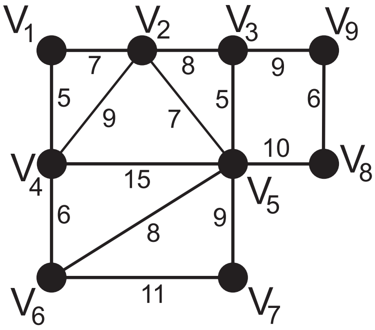

Рис. 5.31

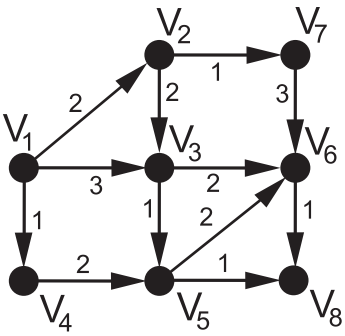

Рис. 5.32

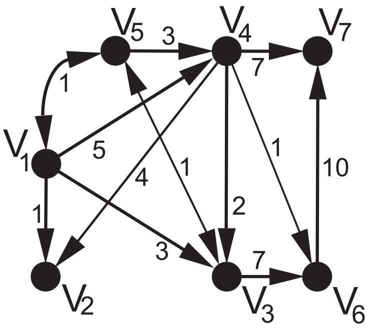

Рис. 5.33

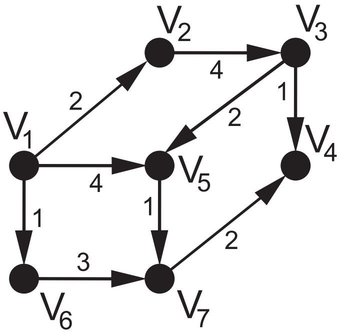

Рис. 5.34

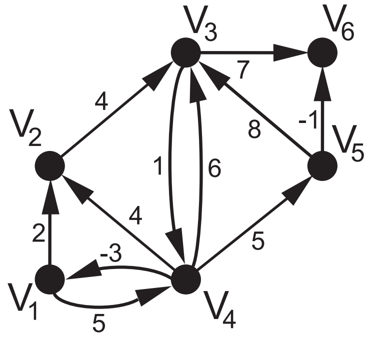

Рис. 5.35

№ 5.16. Нехай T – бінарне дерево, кожній вершині якого зіставлене деяке число (мітка) за таким правилом: для кожної вершини v з міткою $n(v)$ в кожному лівому (правому) піддереві мітки всіх вершин менші (більші) за $n(v)$. Таке дерево називають бінарним деревом пошуку, а мітку вершини – ключем. Для такого дерева існують алгоритми пошуку

елемента в дереві, додавання елемента до дерева, видалення елемента з дерева, алгоритм балансування та інші (див., наприклад, [12]).
1. Додати до дерева рис. 5.36 вершину з ключем: 11; 16; 22; 29; 37 за алгоритмом додавання елемента до бінарного дерева пошуку (див., наприклад, [12]).
2. Видалити з дерева рис. 5.36 вершину з ключем: 3; 8; 10; 24; 26 за алгоритмом видалення елемента з бінарного дерева пошуку (див., наприклад, [12]).

№ 5.17. Збалансувати дерева рис. 5.36–5.37 за алгоритмом балансування бінарного дерева пошуку (див. наприклад, [12]).

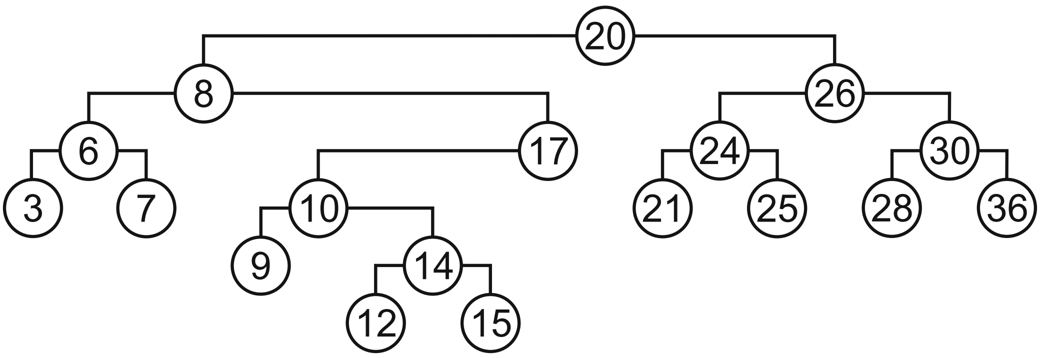

Рис. 5.36

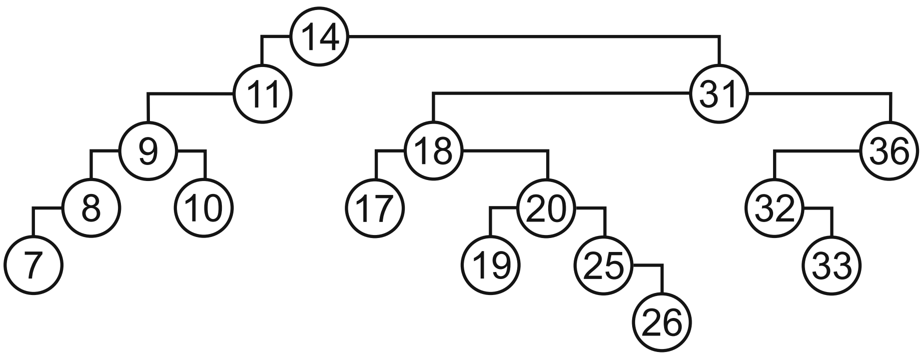

Рис. 5.37

Розділ 6

Елементи теорії груп

6.1. Основні теоретичні відомості

Алгебричною структурою з бінарною операцією називають пару $\langle A, * \rangle$, де A – непорожня множина, «$*\colon A \times A \to A$» – бінарна операція на множині A. Бінарну операцію «$*$» на множині A називають: комутативною, якщо $a * b = b * a$ для довільних $a, b \in A$; асоціативною, якщо $(a * b) * c = a * (b * c)$ для довільних $a, b, c \in A$ (права та ліва частини обидві визначені або обидві невизначені одночасно). Оперативом називають алгебричну структуру $\langle A, * \rangle$, якщо операція «$*$» замкнена, тобто $a * b \in A$ для довільних $a, b \in A$. Оператив з асоціативною операцією називають півгрупою. Для оператива $\langle A, * \rangle$ елемент $e \in A$ називають: правим нейтральним, якщо $a * e = a$ для довільного $a \in A$; лівим нейтральним, якщо $e * a = a$ для довільного $a \in A$; нейтральним (двостороннім нейтральним), якщо він є одночасно правим і лівим нейтральним. Півгрупу з нейтральним елементом називають моноїдом. Для оператива $\langle A, * \rangle$ з нейтральним елементом e елемент $a^{-1} \in A$ називають: правим оберненим до елемента $a \in A$, якщо $a * a^{-1} = e$; лівим оберненим до a, якщо $a^{-1} * a = e$; оберненим (двостороннім оберненим) до a, якщо він є одночасно правим і лівим оберненим до a. Групою називають моноїд, в якому для кожного елемента існує обернений. Групу з комутативною операцією називають абелевою. Кількість елементів у скінченній групі $\langle G, * \rangle$ називають порядком групи і позначають через $|G|$.

Перестановкою множини $A = \{1, 2, \dots, n\}$ називають лінійно впорядкований набір $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ такий, що: 1) $i_k \in A$ при $1 \leqslant k \leqslant n$; 2) $i_{k_1} \neq i_{k_2}$ при $k_1 \neq k_2$. Підстановкою σ на множині A називають довільне бієктивне відображення $\sigma\colon A \to A$. Тотожну підстановку (тобто, тотожне відображення) позначають ε. Підстановку $\sigma\colon i_k \mapsto j_k$, $k = 1, \dots, n$ зручно зображувати у вигляді $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{smallmatrix}\right)$. Для $\sigma_1, \sigma_2\colon A \to A$ визначено композицію (добуток) $\sigma_2 \circ \sigma_1$ таким чином $\left(\begin{smallmatrix} j \\ l \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} i \\ l \end{smallmatrix}\right)$. Підстановкою, оберненою до σ, називають підстановку σ^{-1} таку, що $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \varepsilon$. Множина підстановок на фіксованій множині A утворює групу за операцією «$\circ$», яку називають групою підстановок або симетричною групою степеня n і позначають $\langle S_n, \circ \rangle$. Для групи S_2 використовують позначення $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, для групи S_3 – позначення $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\varphi_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\varphi_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Підстановку $\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \\ i_2 & i_3 & \dots & i_k & i_1 & i_{k+1} & \dots & i_n \end{smallmatrix}\right)$ називають циклом $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, число k називають довжиною циклу. Цикл довжиною 2 називають транспозицією. Цикли $(i_1, i_2, \dots, i_{k_1})$, $(j_1, j_2, \dots, j_{k_2})$ називають незалежними, якщо $\{i_1, i_2, \dots, i_{k_1}\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_{k_2}\} = \varnothing$. Будь-які незалежні цикли σ_1 та σ_2 комутують: $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Будь-яку підстановку можна розкласти у композицію незалежних циклів, і цей розклад єдиний з точністю до переставлення циклів у розкладі; порядок підстановки дорівнює найменшому спільному кратному довжин незалежних циклів у цьому розкладі.

Існують два еквівалентні підходи до визначення парності підстановки.

1. Кажуть, що невпорядкована пара елементів i_{k_1}, i_{k_2} утворює інверсію в перестановці $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, якщо $((k_1 < k_2) \wedge (i_{k_1} > i_{k_2})) \vee ((k_1 > k_2) \wedge (i_{k_1} < i_{k_2}))$, тобто більший з елементів i_{k_1}, i_{k_2} розташований у перестановці i зліва від меншого. Перестановку називають парною, якщо вона допускає парну кількість інверсій, і непарною, якщо допускає непарну кількість інверсій; при цьому парністю перестановки i називають число $\varkappa(i) = 0$, якщо i парна, і $\varkappa(i) = 1$, якщо i непарна. Підстановку $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)$ називають парною, якщо перестановки i та j мають однакову парність, і непарною, якщо перестановки i та j мають різну парність.

2. Підстановку називають парною, якщо її зображують у вигляді композиції парної кількості транспозицій, і непарною, якщо зображують у вигляді композиції непарної кількості транспозицій.

Парністю підстановки σ називають число $\varkappa(\sigma) = 0$, якщо σ парна, і $\varkappa(\sigma) = 1$, якщо σ непарна. Множину всіх парних підстановок в S_n позначають через A_n.

Фактор-множина $\mathbb{Z}/_{(\bmod n)}$ за відношенням еквівалентності $(x \sim y) \Leftrightarrow ((x-y) \bmod p = 0)$ дорівнює $\mathbb{Z}/_{(\bmod n)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{k}, \ldots, \overline{n-1}\}$. В даному записі множини $\bar{k} = \{nm + k \mid m \in \mathbb{Z}\}$ (класи еквівалентності за відношенням $(\bmod n)$) називають класами лишків за модулем n. Адитивною групою $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ класів лишків за модулем n називають множину $\mathbb{Z}_n = Z/_{(\bmod n)}$ з операцією «+», яка визначена наступним чином: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ для $a, b \in \mathbb{Z}$; це визначення коректне. Мультиплікативною групою $\left\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot \right\rangle$ класів лишків за модулем p, де p просте число, називають множину $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ з операцією «·», яка визначена наступним чином: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ для $a, b \in \mathbb{Z}$; це визначення коректне.

Підгрупою групи $\langle G, * \rangle$ називають підмножину $H \subset G$, яка є групою за тією самою операцією, що і група $\langle G, * \rangle$. Відображення $f\colon G_1 \to G_2$ називають гомоморфізмом (гомоморфним відображенням) групи $\langle G_1, \hat{*} \rangle$ в групу $\langle G_2, \tilde{*} \rangle$, якщо $f(a \hat{*} b) = f(a) \tilde{*} f(b)$ для довільних $a, b \in G_1$. Ін'єктивний гомоморфізм називають мономорфізмом, сюр'єктивний – епіморфізмом, бієктивний – ізоморфізмом. Факт ізоморфності груп позначають таким чином: $\langle G_1, \hat{*} \rangle \sim \langle G_2, \tilde{*} \rangle$, ізоморфізм $f\colon G \to G$ називають автоморфізмом. Ядром гомоморфізму $f\colon G_1 \to G_2$ називають множину $\operatorname{Ker} f = \{x \in G_1\colon f(x) = e_2\} \subset G_1$, де e_2 – нейтральний елемент групи G_2, образом гомоморфізму – множину $\operatorname{Im} f = \{f(x)\colon x \in G_1\} \subset G_2$.

Циклічною підгрупою $[a]$, породженою елементом $a \in G$, називають множину $\{a^n\colon n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, a^{-n}, \ldots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \ldots, a^n, \ldots\}$ всіх цілих степенів елемента a; сам елемент a називають твірним елементом (твірною). Порядком $|a|$ елемента $a \in G$ називають таке найменше додатне число n, для кого $a^n = e$; якщо такого n не існує, вважають $|a| = \infty$. Групу, яка збігається з однією зі своїх циклічних підгруп, тобто $G = [a]$ для деякого $a \in G$, називають циклічною.

Нехай $H \subset G$ – підгрупа групи $\langle G, * \rangle$. Множину $a * H = \{a * h\colon h \in H\}$ називають лівим суміжним класом групи $\langle G, * \rangle$ за підгрупою H, який породжений елементом a; множину $H * a = \{h * a\colon h \in H\}$ – правим суміжним класом. Кількість лівих (правих) суміжних класів за підгрупою H називають індексом підгрупи H. Підгрупу H групи $\langle G, * \rangle$ називають нормальним дільником (нормальною підгрупою), якщо $a * H = H * a$ для довільного $a \in G$ (позначення $H \lhd G$); в цьому разі множину $\bar{a} = a * H = H * a$

називають суміжним класом. Фактор-групою групи G за нормальною підгрупою H називають множину $G/_H = \{\bar{a} : a \in G\}$, на яку перенесена операція «$*$» наступним чином: $\bar{a} * \bar{b} = \overline{a * b}$; це перенесення коректне.

6.2. Задачі

6.2.1. Задачі загального характеру

№ 6.1. Дослідити, чи є групами:
1) $\langle \mathbb{N}, - \rangle$;
2) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$;
3) $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, + \rangle$;
4) $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$;
5) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$;
6) $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$;
7) $\langle \mathbb{R}, + \rangle$;
8) $\langle \mathbb{C}, + \rangle$;
9) $\langle \mathbb{C}^*, \cdot \rangle$;
10) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, де $x * y = x^2 y^2$ для $x, y \in \mathbb{R}$;
11) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, де $x * y = x + y - 1$ для $x, y \in \mathbb{R}$;
12) $\langle \mathbb{R} \setminus \{-1\}, * \rangle$, де $x * y = x + y + xy$ для $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
13) $\left\langle \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, * \right\rangle$, де $x * y = x + y + 2xy$ для $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$;
14) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, де $x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$ для $x, y \in \mathbb{R}$;
15) $\langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}, * \rangle$, де операція «$*$» задається наступним чином: $x * y = \frac{x+y}{1-xy}$ для $x, y \in \mathbb{R}$, $x * \infty = \infty * x = -1/x$ для $x \in \mathbb{R}$, $\infty * \infty = 0$;
16) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, де $x * y = x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$ для $x, y \in \mathbb{R}$;
17) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, де $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ для $x, y \in \mathbb{R}$;
18) $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, де $x * y = (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} + 1)^n$ для $x, y \in \mathbb{R}$, $n = 3$ та $n = 5$;
19) $\langle S, \triangle \rangle$, де S кільце множин, а «$\triangle$» операція симетричної різниці;
20) $\left\langle \{\sqrt[n]{1}\}, \cdot \right\rangle$, де $\sqrt[n]{1} \in \mathbb{C}$;
21) $\langle \mathbb{R}[x], + \rangle$ (многочлени з дійсними коефіцієнтами);
22) $\langle \mathbb{R}_n[x], + \rangle$ (многочлени степеня не вище n з дійсними коефіцієнтами);
23) многочлени з дійсними коефіцієнтами, які містять лише x^{2k}, $k \geqslant 0$ (відносно операції «$+$»);
24) многочлени з дійсними коефіцієнтами, які містять лише x^{2k+1}, $k \geqslant 0$ (відносно операції «$+$»);

25) $\langle M_n(\mathbb{R}), +\rangle$, де $M_n(\mathbb{R})$ матриці розмірності n;
26) $\langle GL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle$, де $GL(n, \mathbb{R})$ невироджені матриці розмірності n;
27) $\langle SL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle$, де $SL(n, \mathbb{R})$ матриці розмірності n, визначник яких дорівнює одиниці;
28) $\langle O(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle$, де $O(n, \mathbb{R})$ ортогональні матриці розмірності n [1];
29) $\langle [0; 1), *\rangle$, де $a * b = \{a + b\}$ – дробова частина числа $a + b$;
30) множина дробово-лінійних функцій $w(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ в $\mathbb{R}$ за операцією композиції при $ad - bc \neq 0$;
31) множина дробово-лінійних функцій $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ в $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ за операцією композиції;
32) множина бінарних відношень $R\colon A \to A$ з операцією композиції;
33) множина бієкцій $R\colon A \to A$ з операцією композиції;
34) множина всіх парних підстановок A_n з операцією композиції.

№ 6.2. Дослідити, чи є групою множина логічних елементів $\{0, 1\}$ з операцією: 1) «$\vee$»; 2) «$\wedge$»; 3) «$\to$»; 4) «$\leftrightarrow$»; 5) «$\oplus$».

№ 6.3. Довести, що множина $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ з операцією множення, де 1 є одиницею множення, а елементи i, j, та k пов'язані співвідношеннями $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, утворює групу, яку називають групою кватерніонних одиниць [2].

№ 6.4. Чи утворюють верхньотрикутні (нижньотрикутні) матриці підгрупу $\langle M_n(\mathbb{R}), +\rangle$? Чи утворюють невироджені верхньотрикутні (нижньотрикутні) матриці підгрупу $\langle GL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle$?

№ 6.5. Чи утворюють матриці виду $\left(\begin{smallmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{smallmatrix}\right)$ підгрупу $\langle GL(2, \mathbb{R}), \cdot\rangle$? Якщо так, дослідити підгрупу на комутативність.

№ 6.6. Нехай матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ така, що сума елементів кожного стовпця дорівнює нулю, а також сума елементів кожного рядка дорівнює нулю. Чи утворюють такі матриці групу за операцією: 1) додавання; 2) множення?

[1] матрицю з дійсними коефіцієнтами називають ортогональною, якщо $A^{-1} = A^T$

[2] алгебру кватерніонів $\mathbb{H}$ з трьома уявними одиницями i, j та k запропонував У. Гамільтон в 1843 р., як узагальнення комплексних чисел. Це алгебра над полем $\mathbb{R}$, що породжена елементами i та j, для яких $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$. Базисом алгебри є множина $\{1, i, j, k\}$, де $k = ij$

№ 6.7. Нехай в групі $\langle G, *\rangle$ з нейтральним елементом e для кожного елемента $x \in G$ виконується рівність $x^2 = e$. Довести, що група є абелевою.

№ 6.8. Нехай група G з нейтральним елементом e містить парну кількість елементів. Нехай елемент a такий, що $a \neq e$ та $a^{-1} = a$. Довести, що таких елементів непарна кількість.

№ 6.9. Нехай $\langle G, *\rangle$ група. Комутатором елементів x, y називається $[x, y] = x * y * x^{-1} * y^{-1}$. Довести:
1) $[x, y] = e \Leftrightarrow x * y = y * x$; 2) $[x, y]^{-1} = [y, x]$.

№ 6.10. Нехай $\langle G, *\rangle$ група. За яких умов 1) $f\colon a \mapsto a^2$; 2) $f\colon a \mapsto a^{-1}$ є гомоморфізмом?

№ 6.11. Чи є відображення $f\colon x \mapsto 2^x$ гомоморфізмом вказаних груп: 1) $\langle \mathbb{R}, +\rangle \to \langle \mathbb{R}^*, \cdot\rangle$; 2) $\langle \mathbb{R}, +\rangle \to \langle (0; +\infty), \cdot\rangle$? У кожному з позитивних випадків перевірити, чи буде f епіморфізмом, мономорфізмом або ізоморфізмом, та знайти його ядро та образ.

№ 6.12. Чи є відображення $f\colon x \mapsto e^{ix}$ гомоморфізмом груп $\langle \mathbb{R}, +\rangle$ та $\langle \mathbb{C}^*, \cdot\rangle$? У позитивному випадку знайти ядро та образ f.

№ 6.13. Перевірити, чи є задане відображення гомоморфізмом:
1) $f\colon \langle M_n(\mathbb{R}), +\rangle \to \langle M_n(\mathbb{R}), +\rangle$, де $f(A) = A^2$;
2) $f\colon \langle M_n(\mathbb{R}), +\rangle \to \langle \mathbb{R}, +\rangle$, де $f(A) = \det A$;
3) $f\colon \langle GL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle \to \langle \mathbb{R}^*, \cdot\rangle$, де $f(A) = \det A$;
4) $f\colon \langle M_n(\mathbb{R}), +\rangle \to \langle \mathbb{R}, +\rangle$, де $f(A) = \operatorname{rank} A$;
5) $f\colon \langle GL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle \to \langle \mathbb{R}^*, \cdot\rangle$, де $f(A) = \operatorname{rank} A$.

№ 6.14. Нехай $\langle G, *\rangle$ група, $g \in G$ фіксований елемент. Елемент $x' = gxg^{-1}$ називають спряженим до елемента x. Довести, що відображення $x \mapsto x'$ є ізоморфізмом (його називають внутрішнім автоморфізмом групи G).

№ 6.15. Нехай $\langle G, *\rangle$ група.
1. Довести, що відношення спряженості $(x \sim y) \Leftrightarrow (\exists g \in G\colon gxg^{-1} = y)$ є еквівалентністю.
2. Довести $(x \sim y) \Rightarrow (x^k \sim y^k)$ для $k \in \mathbb{Z}$.
3. Класами спряженості групи $\langle G, *\rangle$ називають фактор-множину множини елементів групи G за відношенням спряженості. Довести наступні

властивості: 1) клас спряженості нейтрального елемента містить лише нейтральний елемент; 2) якщо група G абелева, то клас спряженості довільного елемента g містить лише елемент g.

№ 6.16. Впевнитись, що $\langle SL(2,\mathbb{Z}),\cdot\rangle$ є групою, та з'ясувати, які класи спряженості (див. задачу 6.15) є нескінченними.

№ 6.17. Нехай $\langle G,*\rangle$ група. Довести, що елементи xy та yx мають однакові порядки. Довести, що елементи xyz, yzx та zxy мають однакові порядки.

№ 6.18. Довести, що група з 7 елементів є абелевою.

№ 6.19. Нехай на множині G операція «$*$» задається вказаним нижче чином. Знайти нейтральний елемент, для кожного елемента знайти обернений, переконатись, що $\langle G,*\rangle$ є групою. Чи є вона абелевою групою? Знайти для кожного елемента породжену ним циклічну підгрупу; чи є $\langle G,*\rangle$ циклічною групою?

1.

$*$	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	e	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	e

2.

$*$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_6	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1
g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2
g_3	g_2	g_1	g_6	g_5	g_4	g_3
g_4	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3	g_4
g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_6	g_5
g_6	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6

№ 6.20. Знайти з точністю до ізоморфізму всі групи порядку 3, 4 та 6.

№ 6.21. Нехай $\langle G,*\rangle$ – група, H_1 та H_1 –її підгрупи. Довести: 1) $H_1\cap H_2$ є підгрупою G; 2) $H_1\cup H_2$ є підгрупою G тоді й тільки тоді, коли $H_1\subset H_2$ або $H_2\subset H_1$.

6.2.2. Групи підстановок

№ 6.22. Для підстановок $\sigma_1=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{smallmatrix}\right)$ обчислити:
1) $\sigma_1\circ\sigma_2$ та $\sigma_2\circ\sigma_1$ і пересвідчитися, що група підстановок $\langle S_4,\circ\rangle$ не є комутативною;
2) $\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1}$;
3) $\sigma_1^{-1}\circ\sigma_1,\sigma_2^{-1}\circ\sigma_2$ і пересвідчитись, що отримані підстановки є тотожними;
4) $\sigma_1^{-1}\circ\sigma_2,\sigma_2^{-1}\circ\sigma_1,\sigma_2^{-1}\circ\sigma_1^{-1},\sigma_1^{-1}\circ\sigma_2^{-1}$.

№ 6.23. 1. Розкласти підстановки на незалежні цикли:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Знайти парності підстановок п. 1 підрахунком інверсій, розкладанням на транспозиції та розкладанням на незалежні цикли.
3. Знайти порядки підстановок п. 1.

№ 6.24. Записати у вигляді циклів всі підстановки, окрім тотожної, для груп: 1) $\langle S_2, \circ\rangle$; 2) $\langle S_3, \circ\rangle$.

№ 6.25. У групі $\langle S_n, \circ\rangle$ знайти кількість різних циклів довжини k, $k \geqslant 2$ та кількість транспозицій.

№ 6.26. Визначити парності підстановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ та порядки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ n & n-1 & \dots & 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n\\ n+1 & n+2 & \dots & 2n & 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n\\ 2n & 2n-1 & \dots & n+1 & n & n-1 & \dots & 1\end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n\\ 1 & n & 2 & n-1 & 3 & n-2 & \dots & [n/2]+1\end{pmatrix}.$$

№ 6.27. Визначити найбільший порядок елемента в групі $\langle S_n, \circ\rangle$: 1) $n = 5$; 2) $n = 6$; 3) $n = 7$; 4) $n = 8$. Навести приклад елемента найбільшого порядку.

№ 6.28. 1. Побудувати таблицю Келі для групи $\langle S_3, \circ\rangle$. 2. Знайти парності елементів групи. 3. Знайти циклічну підгрупу та порядок для кожного елемента групи. Чи буде група циклічною? 4. Знайти всі підгрупи групи.

№ 6.29. Для матриць 2×2, 3×3, 4×4 записати формули визначників в явному вигляді з використанням групи підстановок та обчисленням парності відповідних підстановок.

№ 6.30. Знайти класи спряженості (див. задачу 6.15) для груп: 1) $\langle S_2, \circ\rangle$; 2) $\langle S_3, \circ\rangle$; 3) $\langle A_3, \circ\rangle$; 4) $\langle A_4, \circ\rangle$.

№ 6.31. Довести, що дві підстановки σ_1 та σ_2 групи $\langle S_n, \circ\rangle$ є спряженими (див. задачу 6.15) тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $1 \leqslant k \leqslant n$ підстановки σ_1 та σ_2 у розкладі на незалежні цикли мають однакову кількість циклів довжини k.

№ 6.32. Нехай S_∞ – множина бієкцій $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таких, що множина $\{i \in \mathbb{N} \mid \sigma(i) \neq i\}$ скінченна.
1. Переконатись, що $\langle S_\infty, \circ\rangle$ є групою.
2. Узагальнити результат задачі 6.31 для групи $\langle S_\infty, \circ\rangle$.
3. З'ясувати, які класи спряженості (див. задачу 6.15) групи $\langle S_\infty, \circ\rangle$ є нескінченними.

6.2.3. Адитивна та мультиплікативна групи класів лишків

№ 6.33. Побудувати таблиці Келі для груп $\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle$ $(n = 4, 5, 6)$ та $\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot\rangle$ $(n = 3, 5, 7)$. Для вказаних груп:
1) знайти порядок кожного елемента;
2) знайти обернені до кожного елемента;
3) знайти циклічну підгрупу кожного елемента;
4) пересвідчитись, що група є циклічною та знайти твірні.

№ 6.34. Знайти всі ізоморфізми: 1) $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot\rangle \to \langle \mathbb{Z}_4, +\rangle$; 2) $\langle \mathbb{Z}_7^*, \cdot\rangle \to \langle \mathbb{Z}_6, +\rangle$; 3) $\langle \mathbb{Z}_{11}^*, \cdot\rangle \to \langle \mathbb{Z}_{10}, +\rangle$.

№ 6.35. Знайти всі гомоморфізми: 1) $\langle \mathbb{Z}_4, +\rangle \to \langle \mathbb{Z}_6, +\rangle$; 2) $\langle \mathbb{Z}_{10}, +\rangle \to \langle \mathbb{Z}_{15}, +\rangle$; 3) $\langle \mathbb{Z}, +\rangle \to \langle \mathbb{Z}_n, +\rangle$; 4) $\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle \to \langle \mathbb{Z}, +\rangle$; 5) $\langle \mathbb{Z}, +\rangle \to \langle S_3, \circ\rangle$. Знайти ядро та образ гомоморфізму в кожному з випадків.

№ 6.36. Довести, що гомоморфізми $\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle \to \langle \mathbb{Z}_m, +\rangle$ за операцією суми $(f_1 \hat{+} f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ утворюють групу.

№ 6.37. Довести, що всі підгрупи циклічної групи є циклічними.

№ 6.38. Виписати в явному вигляді всі підгрупи груп $\langle \mathbb{Z}_{12}, +\rangle$, $\langle \mathbb{Z}_{18}, +\rangle$, $\langle \mathbb{Z}_{36}, +\rangle$.

№ 6.39. Довести малу теорему Ферма: нехай $n \in \mathbb{Z}$, тоді довільне просте число $p \in \mathbb{N}$ є дільником числа $n^p - n$.

№ 6.40. Довести теорему Вільсона: натуральне число $p > 1$ є простим тоді й тільки тоді, коли $(p-1)! + 1$ ділиться на p.

6.2.4. Фактор-групи

№ 6.41. Довести, що будь-яка підгрупа індексу 2 є нормальним дільником.

№ 6.42. Для вказаних нижче G та H:
– перевірити, що H є підгрупою в G;
– знайти лівий та правий суміжні класи за підгрупою H та впевнитися, що H є нормальним дільником в G;
– побудувати фактор-групу $G/_H$.
1. $G = \langle \mathbb{R}, +\rangle$, $H = \mathbb{Z}$.
2. $G = \langle \mathbb{R}^*, \cdot\rangle$, $H = (0; +\infty)$.
3. $G = \langle \mathbb{C}, +\rangle$, $H = \mathbb{R}$.
4. $G = \langle \mathbb{C}, +\rangle$, $H = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.
5. $G = \langle \mathbb{C}^*, \cdot\rangle$, $H = (0; +\infty)$.
6. $G = \langle \mathbb{C}^*, \cdot\rangle$, $H = \{|z| = 1\}$.
7. $G = \langle \mathbb{C}^*, \cdot\rangle$, H – числа, що лежать на дійсній та уявній осях.
8. $G = \langle \mathbb{C}^*, \cdot\rangle$, H – числа, аргументи яких належать множині $\{\frac{2\pi k}{n} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$, де $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване число.
9. $G = \langle GL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle$, $H = SL(n, \mathbb{R})$.
10. $G = \langle GL(n, \mathbb{R}), \cdot\rangle$, $H = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid |\det A| = 1\}$.
11. $G = \langle \mathbb{Z}_6, +\rangle$, H підгрупа в G порядку 2.
12. $G = \langle \mathbb{Z}_{12}, +\rangle$, H підгрупа в G порядку 3.
13. $G = \langle \mathbb{Z}_{18}, +\rangle$, H підгрупа в G порядку 3.
14. $G = \langle S_3, \circ\rangle$, $H = \{\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon\}$.
15. $G = \langle S_n, \circ\rangle$, $H = A_n$.
16. $G = \langle \mathbb{Z}, +\rangle$, $H = n\mathbb{Z}$.
17. $G = \langle \mathbb{H}, +\rangle$, $H = \mathbb{C}$, де $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ є дійсним лінійним простором з базисом $\{1, i, j, k\}$ (див. задачу 6.3).
18. $G = \langle \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}, \cdot\rangle$, $H = \{\pm 1, \pm i\}$ (див. задачу 6.3).

№ 6.43. Для пп. 1–18 задачі 6.42 вказати в явному вигляді групу, що ізоморфна $G/_H$, та вказати відповідний ізоморфізм.

№ 6.44. Навести приклад гомоморфізму $f\colon G \to G$, коли образ f не є нормальним дільником в $\langle G, *\rangle$.

№ 6.45. Центром групи G називають множину $\{z \in G \mid \forall g \in G\colon zg = gz\}$. Довести, що центр групи є її нормальним дільником.

№ 6.46. Нехай G – група з нейтральним елементом e; $H_1 \lhd G$, $H_2 \lhd G$ – нормальні дільники такі, що $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. Довести, що $h_1 * h_2 = h_2 * h_1$ для довільних елементів $h_1 \in H_1$ та $h_2 \in H_2$.

Розділ 7

Елементи теорії кілець

7.1. Основні теоретичні відомості

Кільцем називають алгебричну структуру $\langle R, +, \cdot \rangle$ із замкненими бінарними операціями «+» (додавання) та «·» (множення), визначеними на множині $R \neq \varnothing$, які задовольняють умови:
1) $\forall a, b, c \in R\colon (a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $\forall a, b \in R\colon a + b = b + a$;
3) $\exists 0 \in R\, \forall a \in R\colon a + 0 = a$;
4) $\forall a \in R\, \exists -a \in R\colon a + (-a) = 0$;
5) $\forall a, b, c \in R\colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
6) $\forall a, b, c \in R\colon (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c),\ c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$.

Нейтральний за додаванням елемент $0 \in R$ називають нулем кільця; елемент $-a$, обернений до a за додаванням, називають протилежним a. Умови 1–4 визначають, що $\langle R, + \rangle$ є абелевою групою; умова 5 визначає, що $\langle R, \cdot \rangle$ є півгрупою; умови 6 визначають дистрибутивність множення справа і зліва відносно додавання. Якщо операція «·» комутативна, то кільце $\langle R, +, \cdot \rangle$ називають комутативним, інакше – некомутативним. Кільце $\langle R, +, \cdot \rangle$ називають кільцем з одиницею, якщо існує нейтральний за множенням елемент $1 \in R$ – одиниця кільця.

Підкільцем кільця $\langle R, +, \cdot \rangle$ називають підмножину $R_1 \subset R$, яка є кільцем $\langle R_1, +, \cdot \rangle$ за тими самими операціями «+» та «·», що й кільце $\langle R, +, \cdot \rangle$.

Елемент $a \in R$ називають оборотним у кільці R з одиницею, або дільником одиниці, якщо існує елемент $a^{-1} \in R$, обернений до a за множенням: $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$. Мультиплікативною групою $\langle R^*, \cdot \rangle$ кільця $\langle R, +, \cdot \rangle$ називають множину R^* всіх оборотних елементів кільця з операцією множення.

Елементи $a, b \in R$ називають дільниками нуля, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = 0$; a називають лівим дільником нуля, b – правим. Області цілісності називають комутативне кільце з одиницею, яке не містить дільників нуля. Полем називають ненульове комутативне кільце з одиницею, всі ненульові елементи якого є оборотними.

Ідеалом кільця $\langle R, +, \cdot \rangle$ називають непорожню підмножину $J \subset R$ таку, що $\langle J, + \rangle$ є підгрупою групи $\langle R, + \rangle$ та $(r \in R, j \in J) \Rightarrow (rj, jr \in J)$. Ідеали $\{0\}$ та R називають тривіальними, інші ідеали – власними. У кільці головним ідеалом, породженим елементом a, називають ідеал (a), який є мінімальним (за відношенням «$\subset$») ідеалом, що містить a. У комутативному кільці з одиницею $(a) = aR = \{ar \mid r \in R\}$, без одиниці – $(a) = aR + \mathbb{Z}a = \{ar + ma \mid r \in R, m \in \mathbb{Z}\}$. Фактор-кільцем $\langle R/_J, +, \cdot \rangle$ кільця $\langle R, +, \cdot \rangle$ за ідеалом J називають множину $R/_J = \{\bar{a} = a + J \mid a \in R\}$ з операціями «$+$» та «$\cdot$», які визначаються наступним чином: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$; ці визначення коректні.

Відображення $f\colon R_1 \to R_2$ називають гомоморфізмом або гомоморфним відображенням кільця $\left\langle R_1, \hat{+}, \hat{\cdot} \right\rangle$ в кільце $\left\langle R_2, \tilde{+}, \tilde{\cdot} \right\rangle$, якщо $f(a \hat{+} b) = f(a) \tilde{+} f(b)$, $f(a \hat{\cdot} b) = f(a) \tilde{\cdot} f(b)$ для довільних $a, b \in R_1$.

Кільце R називають ідемпотентним, якщо $a^2 = a$ для кожного $a \in R$. В ідемпотентному кільці операцію додавання позначають «$\oplus$».

7.2. Задачі

№ 7.1. Дослідити, чи є кільцями:
1) $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$;
2) $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$;
3) $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$;
4) $\langle n\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $n > 1$;
5) $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$;
6) $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$;
7) $\left\langle \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot \right\rangle$;

8) $\left\langle\{x+y\sqrt[3]{2} \mid x,y\in\mathbb{Q}\},+,\cdot\right\rangle$;
9) $\left\langle\{x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4} \mid x,y,z\in\mathbb{Q}\},+,\cdot\right\rangle$;
10) $\langle\{x+yi \mid x,y\in\mathbb{Z}\},+,\cdot\rangle$;
11) $\langle\{x+yi \mid x,y\in\mathbb{Q}\},+,\cdot\rangle$;
12) $\langle\{a_1z_1+\ldots+a_nz_n \mid a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}\},+,\cdot\rangle$, де $z_1,\ldots,z_n$ – комплексні корені степеня n з 1;
13) $\langle M_n(\mathbb{R}),+,\cdot\rangle$;
14) множина дійсних симетричних матриць розмірності n за операціями п. 13;
15) множина дійсних ортогональних матриць (див. зноску п. 28 задачі 6.1) розмірності n за операціями п. 13;
16) множина матриць виду $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ Dy & x\end{smallmatrix}\right)$, де D – фіксоване ціле число, $x,y\in\mathbb{Z}$;
17) множина матриць виду $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ Dy & x\end{smallmatrix}\right)$, де D – фіксований елемент деякого кільця R, $x,y\in R$;
18) множина комплексних матриць виду $\left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z}\end{smallmatrix}\right)$;
19) множина дійсних матриць виду $\left(\begin{smallmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x\end{smallmatrix}\right)$;
20) $\langle\mathbb{R}[x],+,\cdot\rangle$;
21) $\langle\mathbb{Z}_n,+,\cdot\rangle$;
22) $\langle C[a;b],+,\cdot\rangle$ (тут і далі $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$);
23) $\langle\{f\in C[a;b] \mid f(a)=f(b)=0\},+,\cdot\rangle$;
24) $\langle\{f\in C(-\infty;+\infty) \mid$ носій функції f обмежений$\},+,\cdot\rangle$ [1];
25) $\langle S,\triangle,\cap\rangle$, де S кільце множин, «$\triangle$» операція симетричної різниці, «$\cap$» операція перерізу.

№ 7.2. Дослідити кільця задачі 7.1 на комутативність.

№ 7.3. Чи містять кільця задачі 7.1 одиницю? Якщо так, вказати одиницю кільця. Для п. 25 задачі 7.1 довести, що кільце має одиницю тоді й тільки тоді, коли S є алгеброю множин, і до того ж одиницею є універсальна множина.

№ 7.4. Довести, що

$$R_1=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\},\quad R_3=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\},$$
$$R_2=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\},\qquad R_4=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$$

за операціями додавання та множення є комутативними кільцями.

[1] носієм f називають множину $\operatorname{supp} f$, яка є замиканням множини $\{x \mid f(x)\neq 0\}$

№ 7.5. Побудувати ізоморфізми кілець R_1 та R_2, R_3 та R_4. Довести, що кільця R_1 та R_3 не ізоморфні.

№ 7.6. Визначити, чи є кільцем множина: 1) $\{2a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$; 2) $\{a + 2bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (за операціями додавання та множення).

№ 7.7. За яких $m \in \mathbb{Z}$ та $n \in \mathbb{Z}$ множина $\{ma + nbi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ за операціями додавання та множення є комутативним кільцем?

№ 7.8. Чи утворюють верхньотрикутні (нижньотрикутні) матриці підкільце кільця $\langle M_n(\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$?

№ 7.9. Чи утворюють матриці

1) $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$

підкільце $\langle M_n(\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$?

№ 7.10. Нехай R є кільцем з одиницею, $x, y \in R$. Довести, що

$$(1 - xy)c = 1 = (1 - xy) \Rightarrow (1 - yx)d = 1 = d(1 - yx),$$

де $d = 1 + ycx$, тобто: $\exists(1 - xy)^{-1} \Leftrightarrow \exists(1 - yx)^{-1}$. Обчислити елемент $1 + xdy$.

№ 7.11. Нехай R є кільцем з одиницею, $x, y \in R$. Довести, що:

1) якщо елементи xy та yx є оборотними, то елементи x та y також є оборотними;

2) якщо R не містить дільників нуля, то кожен елемент, який має односторонній обернений, є оборотним;

3) якщо R не містить дільників нуля та елемент xy оборотний, то елементи x та y є оборотними;

4) без додаткових припущень щодо R з того, що елемент xy оборотний, не випливає, що елементи x та y є оборотними.

№ 7.12. Нехай A матриця розмірності n, у якої сума елементів кожного стовпця дорівнює нулю, а також сума елементів кожного рядка дорівнює нулю. Чи утворюють такі матриці підкільце $\langle M_n(\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$?

№ 7.13. Знайти всі дільники нуля в кільці: 1) $\langle \mathbb{Z}_8, +, \cdot\rangle$; 2) $\langle \mathbb{Z}_{11}, +, \cdot\rangle$; 3) $\langle \mathbb{Z}_{48}, +, \cdot\rangle$; 4) $\langle \mathbb{Z}_n, +, \cdot\rangle$.

№ 7.14. Довести, що в кільці матриць $\langle M_n(\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$ будь-яка вироджена матриця є дільником нуля.

№ 7.15. Чи є кільце: 1) $\langle \mathbb{Z}_{11}, +, \cdot\rangle$; 2) $\langle \mathbb{Z}_{12}, +, \cdot\rangle$ полем?

№ 7.16. Знайти мультиплікативні групи кілець пп. 3, 5–6, 10, 13, 20–22 задачі 7.1.

№ 7.17. Знайти мультиплікативні групи кілець: 1) $\langle \mathbb{Z}_6, +, \cdot\rangle$; 2) $\langle \mathbb{Z}_9, +, \cdot\rangle$; 3) $\langle \mathbb{Z}_{12}, +, \cdot\rangle$; 4) $\langle \mathbb{Z}_{15}, +, \cdot\rangle$ та перевірити їх на циклічність.

№ 7.18. Знайти всі ідеали кілець: $\langle \mathbb{R}, +, \cdot\rangle$; $\langle M_2(\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$; $\langle M_n(\mathbb{R}), +, \cdot\rangle$.

№ 7.19. 1. Знайти всі головні ідеали кільця множин $\langle S, \triangle, \cap\rangle$. 2. Довести, що довільне скінченне кільце множин $\langle S, \triangle, \cap\rangle$ є кільцем головних ідеалів.

№ 7.20. 1. Довести, що $(x - a)$ $(a \in \mathbb{R})$ є головним ідеалом в кільці многочленів $\mathbb{R}[x]$. 2. Знайти фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/_{(x-a)}$. 3. Вказати ізоморфізм $\mathbb{R}[x]/_{(x-a)} \sim \mathbb{R}$.

№ 7.21. 1. Довести, що $(x^2 + 1)$ є головним ідеалом в кільці многочленів $\mathbb{R}[x]$. 2. Знайти фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)}$. 3. Вказати ізоморфізм $\mathbb{R}[x]/_{(x^2+1)} \sim \mathbb{C}$.

№ 7.22. 1. Довести, що $(ax^2 + bx + c)$ $(a, b, c \in \mathbb{R},\ D = b^2 - 4ac < 0)$ є головним ідеалом в кільці многочленів $\mathbb{R}[x]$. 2. Знайти фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/_{(ax^2+bx+c)}$. 3. Вказати ізоморфізм $\mathbb{R}[x]/_{(ax^2+bx+c)} \sim \mathbb{C}$.

№ 7.23. 1. Довести, що $(x - a)(x - b)$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b)$ є головним ідеалом в кільці многочленів $\mathbb{R}[x]$. 2. Знайти фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/_{(x-a)(x-b)}$. 3. Вказати ізоморфізм $\mathbb{R}[x]/_{(x-a)(x-b)} \sim \left\langle \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}, +, \cdot \right\rangle$.

№ 7.24. 1. Довести, що $(x - a)^2$ $(a \in \mathbb{R})$ є головним ідеалом в кільці многочленів $\mathbb{R}[x]$. 2. Знайти фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/_{(x-a)^2}$. 3. Вказати ізоморфізм $\mathbb{R}[x]/_{(x-a)^2} \sim \langle\{\left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{smallmatrix}\right) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}, +, \cdot\rangle$.

№ 7.25. Чи ізоморфні фактор-кільця: 1) $\mathbb{Z}[x]/_{(x^2-2)}$ та $\mathbb{Z}[x]/_{(x^2-3)}$? 2) $\mathbb{Z}[x]/_{(x^3+1)}$ та $\mathbb{Z}[x]/_{(x^3+2x^2+x+1)}$?

№ 7.26. Довести, що кільця $\langle \mathbb{Z}_2, +, \cdot\rangle$, $\langle \{0, 1\}, \oplus, \cdot\rangle$, $\langle S, \triangle, \cap\rangle$ ідемпотентні.

№ 7.27. Довести, що в ідемпотентному кільці $-a = a$. Довести, що ідемпотентне кільце є комутативним.

№ 7.28. Нехай R є кільцем, $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ є скінченною групою. Груповим кільцем $R[G]$ називають множину елементів виду $\alpha = a_1g_1 + \ldots + a_ng_n$, де $a_1, \ldots, a_n \in R$, з операціями «+» та «·», які визначені таким чином:

$$\alpha + \beta = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)g_k, \quad \alpha \cdot \beta = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{g_ig_j = g_k} a_ib_j \Big) g_k$$

для $\alpha = a_1g_1 + \ldots + a_ng_n$, $\beta = b_1g_1 + \ldots b_ng_n$. Довести:
1) $R[G]$ є кільцем;
2) якщо R та G комутативні, то $R[G]$ також комутативне;
3) якщо R є кільцем з одиницею, то $R[G]$ також є кільцем з одиницею;
4) якщо $H \subset G$ є підгрупою, то $R[H] \subset R[G]$ є підкільцем.

№ 7.29. 1. Записати в явному вигляді групові кільця $\mathbb{R}[S_2]$, $\mathbb{R}[S_3]$ та $\mathbb{R}[A_3]$ (див. задачу 7.28).
2. Вказати мультиплікативні групи кілець $\mathbb{R}[S_2]$ та $\mathbb{R}[A_3]$.

Розділ 8

Частково впорядковані множини

8.1. Основні теоретичні відомості

Частково впорядкованою множиною (ЧВМ) називають пару $\langle A, \preceq \rangle$, де A – непорожня множина, «$\preceq$» – відношення часткового порядку на A (див. підрозділ 3.1). Якщо $a \preceq b$ ($b \succeq a$) для $a, b \in A$, елемент a передує (нестрого передує) елементу b, або елемент b слідує (нестрого слідує) за елементом a; строге передування позначають «$\prec$», строге слідування – «$\succ$». Елементи $a, b \in A$ називають порівнянними, якщо $a \preceq b$ або $b \preceq a$; інакше – непорівнянними. Якщо будь-які два елементи ЧВМ $\langle A, \preceq \rangle$ порівнянні, множину A називають лінійно впорядкованою множиною або ланцюгом. Елемент $a \in A$ безпосередньо передує елементу $b \in A$ (b безпосередньо слідує за a), якщо не існує такого елемента $x \in A$, що $a \prec x \prec b$. ЧВМ, дуальною до $\langle A, \preceq \rangle$, називають ЧВМ $\langle A, \preceq^* \rangle$ з відношенням часткового порядку «$\preceq^*$»: $(a \preceq^* b) \Leftrightarrow (a \preceq^{-1} b) \Leftrightarrow (b \preceq a)$ (див. задачу 8.2).

Діаграмою Гессе ЧВМ $\langle A, \preceq \rangle$, де $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, називають граф спеціального вигляду: граф містить n вершин, які відповідають елементам $a_1, a_2, \ldots, a_n$; вершини a_i та a_j з'єднують ребром тоді і тільки тоді, коли елемент a_i безпосередньо передує елементу a_j; якщо $a_i \prec a_j$, вершину a_j розташовують на площині вище за a_i.

Нехай $B \subset A$, $B \neq \varnothing$. Елемент $M \in B$ називають максимальним для множини B, якщо для довільного $x \in B$ маємо $(x \succeq M) \Rightarrow (x = M)$ (еквівалентна умова: або $x \preceq M$, або x та M непорівнянні); елемент $m \in B$ називають мінімальним для множини B, якщо для довільного $x \in B$ маємо $(x \preceq m) \Rightarrow (x = m)$ (еквівалентна умова: або $x \succeq m$, або x та m непорівнянні). Елемент $M \in B$ називають найбільшим для множини B, якщо для довільного $x \in B$ маємо $x \preceq M$; елемент $m \in B$ називають найменшим для множини B, якщо для довільного $x \in B$ маємо $x \succeq m$. Елемент $M \in A$ називають верхньою межею для множини B, якщо для довільного $x \in B$ маємо $x \preceq M$; елемент $m \in A$ називають нижньою межею для множини B, якщо для довільного $x \in B$ маємо $x \succeq m$.

Точною верхньою межею (супремумом) множини B називають елемент $\sup B \in A$, який є найменшим у множині верхніх меж множини B, це еквівалентно умовам: 1) елемент $\sup B$ є верхньою межею для B; 2) якщо M довільна верхня межа для B, то $\sup B \preceq M$. Точною нижньою межею (інфімумом) множини B називають елемент $\inf B \in A$, який є найбільшим у множині нижніх меж множини B, це еквівалентно умовам: 1) елемент $\inf B$ є нижньою межею для B; 2) якщо m довільна нижня межа для B, то $\inf B \succeq m$.

8.2. Задачі

№ 8.1. Дослідити, чи є дана структура ЧВМ:
1) $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$;
2) $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$;
3) $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$, де $(a \preceq b) \Leftrightarrow (a \,\vdots\, b)$;
4) $\langle \mathbb{Z}, \preceq \rangle$, де $(a \preceq b) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} : a = kb)$;
5) $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$, де $(x \preceq y) \Leftrightarrow (x + y < 0)$;
6) $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$, де $(x \preceq y) \Leftrightarrow (|x - y| < 1)$;
7) $\langle \mathbb{R}^n, \preceq \rangle$, де $((x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)) \Leftrightarrow (\exists k : \ \ x_k \leqslant y_k)$;
8) $\langle \mathbb{R}^n, \preceq \rangle$, де $((x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)) \Leftrightarrow (\forall k : \ \ x_k \leqslant y_k)$;
9) $\langle \mathbb{C}, \preceq \rangle$, де $(z_1 \preceq z_2) \Leftrightarrow (|z_1| \leqslant |z_2|)$;
10) множина підпросторів лінійного простору X з відношенням «$\subset$».

№ 8.2. Довести: якщо R відношення часткового порядку, то R^{-1} також відношення часткового порядку.

№ 8.3. Побудувати діаграму Гессе множини 2^A всіх підмножин множини A з відношенням вкладення «$\subset$», якщо: 1) $A = \{1, 2, 3\}$; 2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; 3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

№ 8.4. Навести приклад ЧВМ, яка:
1) має нескінченну кількість максимальних елементів;
2) містить в точності один максимальний елемент, але не має супремуму;
3) містить в точності один мінімальний елемент, але не має інфімуму;
4) містить в точності один мінімальний елемент, в точності один максимальний елемент, але не має супремуму та не має інфімуму;
5) є нескінченною і не має супремуму та інфімуму;
6) є скінченою, але не має супремуму та інфімуму.

№ 8.5. Побудувати ЧВМ дільників чисел 8, 12, 15, 30, 48, 72, 168, 180, 480, 360, 900 по відношенню подільності.

№ 8.6. 1. Нехай a та b максимальні елементи. Довести, що $\sup\{a, b\}$ існує тоді й тільки тоді, коли $a = b$. 2. Нехай a та b мінімальні елементи. Довести, що $\inf\{a, b\}$ існує тоді й тільки тоді, коли $a = b$.

№ 8.7. Розглянемо множину $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ з відношенням $((m_1, m_2) \preceq (n_1, n_2)) \Leftrightarrow ((m_1 \leqslant n_1) \wedge (m_2 \leqslant n_2))$.
1. Перевірити, що $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq \rangle$ є ЧВМ.
2. Побудувати діаграму Гессе для скінченної підмножини.
3. Для множини $A = \{(m_1, m_2), (n_1, n_2)\}$ знайти супремум та інфімум.
4. Для елемента (m, n) знайти всі елементи, що непорівняні з ним.
5. Довести, що не існує нескінченної підмножини, усі елементи якої попарно не порівнюються.

№ 8.8. Розв'язати пп. 1–4 задачі 8.7 для множини $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Чи має місце твердження п. 5 задачі 8.7?

№ 8.9. Нехай A – деяка множина з відношенням часткового порядку «$\preceq$»; $M, N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; $x_{ij} \in A$ для $i = 1, \ldots, M$ та $j = 1, \ldots, N$. Довести $\sup\limits_j \left(\inf\limits_i \{x_{ij}\} \right) \preceq \inf\limits_i \left(\sup\limits_j \{x_{ij}\} \right)$ у припущенні, що всі вказані inf та sup існують.

Розділ 9

Решітки

9.1. Основні теоретичні відомості

Решіткою (також структурою, див., наприклад, [6]) називають алгебричну структуру $\langle L, \vee, \wedge \rangle$, де L – непорожня множина, «$\vee$», «$\wedge$» – замкнені бінарні операції на L, які задовольняють умови: 1) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (комутативність); 2) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (асоціативність); 3) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (абсорбція, поглинання). Операції «$\vee$» та «$\wedge$» називають диз'юнкцією та кон'юнкцією (за іншою термінологією об'єднанням та перетином або супремумом та інфімумом), умови 1–3 – аксіомами решітки. Альтернативне визначення решітки (наприклад, [6]): решіткою називають частково впорядковану множину, для якої існують супремуми та інфімуми всіх двохелементних підмножин.

Решітку L називають дистрибутивною, якщо для всіх $a, b, c \in L$ виконуються тотожності $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. Решітку L називають обмеженою зверху, якщо існує елемент $1 = 1_L = \sup L$; називають обмеженою знизу, якщо існує елемент $0 = 0_L = \inf L$; називають обмеженою, якщо вона обмежена і зверху, і знизу. У обмеженій решітці елемент $b \in L$ називають доповненням до елемента $a \in L$, якщо $a \vee b = 1$, $a \wedge b = 0$; якщо кожний елемент решітки має хоча б одне доповнення, то решітку називають доповненою. Решітку називають модулярною (за іншою термінологією дедекіндовою), якщо для довільних $x, y, z \in L$ виконується умова $(x \preceq z) \Rightarrow (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z)$.

9.2. Задачі

№ 9.1. 1. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка. Довести: $(a \vee b = b) \Leftrightarrow (a \wedge b = a)$.
2. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка. Довести, що $\langle L, \preceq \rangle$ з відношенням $(a \preceq b) \Leftrightarrow (a \vee b = b) \Leftrightarrow (a \wedge b = a)$ є частково впорядкованою множиною.
3. Нехай $\langle L, \preceq \rangle$ – частково впорядкована множина та для кожної пари $a, b \in L$ існують $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$. Довести, що $\langle L, \vee, \wedge \rangle$, де $a \vee b = \sup\{a, b\}$, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, є решіткою.
4. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка; $\langle L, \preceq \rangle$ – ЧВМ, побудована в п. 2; $\left\langle L, \hat{\vee}, \hat{\wedge} \right\rangle$ – решітка, побудована в п. 3 за ЧВМ $\langle L, \preceq \rangle$. Довести, що $\vee = \hat{\vee}$, $\wedge = \hat{\wedge}$.
5. Нехай $\langle L, \preceq \rangle$ – частково впорядкована множина та для кожної пари $a, b \in L$ існують $\sup\{a, b\}$ та $\inf\{a, b\}$; $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка, побудована в п. 3; $\left\langle L, \hat{\preceq} \right\rangle$ – ЧВМ, побудована в п. 2 за решіткою $\langle L, \vee, \wedge \rangle$. Довести, що $\preceq = \hat{\preceq}$ [1].
6. Нехай $\langle R, \oplus, \cdot \rangle$ – ідемпотентне кільце. Довести, що $\langle L, \vee, \wedge \rangle$, де $a \vee b = a \oplus b \oplus (a \cdot b)$, $a \wedge b = a \cdot b$, є дистрибутивною решіткою, обмеженою знизу.

№ 9.2. Навести приклад обмеженої решітки, яка містить нескінченну кількість елементів.

№ 9.3. Дослідити, чи є решіткою:
1) $\langle L_n, \preceq \rangle$, де L_n множина дільників заданого числа $n \in \mathbb{N}$, $(a \preceq b) \Leftrightarrow (b \,\vdots\, a)$;
2) $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$, де $(a \preceq b) \Leftrightarrow (b \,\vdots\, a)$;
3) $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \preceq \rangle$, де $(a \preceq b) \Leftrightarrow (b = ka, k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$;
4) $\langle \{0_L, 1_L\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \preceq \rangle$, де $0_L \prec a_n \prec 1_L$, а a_i та a_j для довільних i та j, $i \neq j$ непорівняні між собою.

№ 9.4. Нехай число n має розклад на прості дільники $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m}$, де $p_1, \ldots, p_m$ – прості числа, $n_1, \ldots, n_m \geqslant 0$. Довести, що множина L_n п. 2 задачі 9.3 містить $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (n_m + 1)$ елементів.

№ 9.5. Побудувати діаграми Гессе решіток дільників чисел 6, 8, 36, 48, 54, 72, 210. Визначити всі доповнення для кожного з елементів.

[1] пп. 2–3 доводять еквівалентність двох означень решітки, пп. 4–5 доводять взаємооберненість переходів

№ 9.6. 1. Нехай A_n – множина дільників числа n, які не є повними квадратами. Побудувати діаграму Гессе для ЧВМ $\langle A_n, \vdots \rangle$ та $n = 36, 40, 72, 96, 108, 192, 200, 288$. Чи будуть вказані ЧВМ решітками?
2. Нехай $B_n = A_n \cup \{1\}$. Чи будуть ЧВМ $\langle B_n, \vdots \rangle$ решітками?
3. В позитивних випадках отримані решітки дослідити на дистрибутивність, модулярність, доповненість. Визначити всі доповнення для кожного з елементів.

№ 9.7. Довести, що кожен мінімальний (відповідно, максимальний) елемент решітки є нулем (відповідно, одиницею) решітки.

№ 9.8. Довести, що решітки N_5 (рис. 9.1) та M_3 (рис. 9.2) не є дистрибутивними. Довести, що решітка N_5 не є модулярною, а решітка M_3 є модулярною.

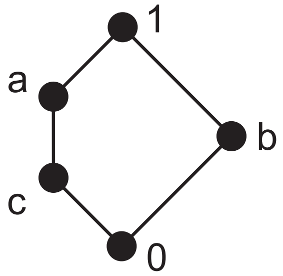

Рис. 9.1

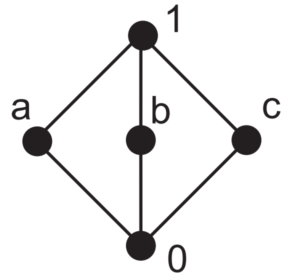

Рис. 9.2

№ 9.9. Частково впорядковані множини із задачі 9.3, які є решітками, дослідити на дистрибутивність, модулярність, обмеженість, доповненість (у випадку обмеженості). Вказівка: для перевірки дистрибутивності використати критерій дистрибутивності: решітка є дистрибутивною тоді і тільки тоді, коли не містить підрешіток, ізоморфних N_5 або M_3, а для перевірки модулярності – критерій модулярності: решітка є модулярною тоді і тільки тоді, коли не містить підрешіток, ізоморфних N_5 (див., наприклад, [8]).

№ 9.10. Розв'язати задачу 9.9 для ЧВМ рис 9.3–9.10.

№ 9.11. Яка найменша кількість елементів потрібна, щоб утворити решітку, що містить одночасно і підрешітку, ізоморфну N_5, і підрешітку, ізоморфну M_3? Навести приклад такої решітки.

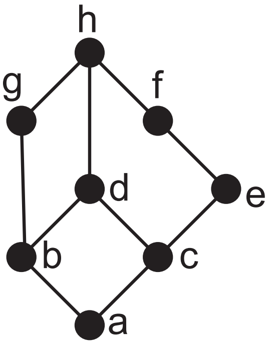

Рис. 9.3

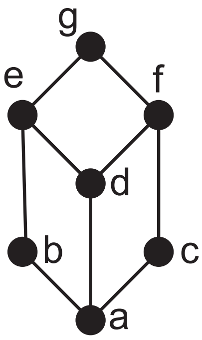

Рис. 9.4

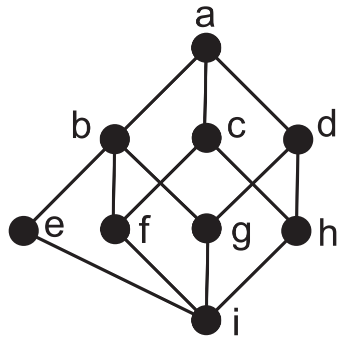

Рис. 9.5

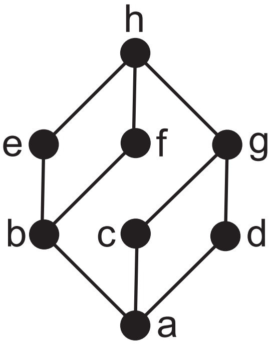

Рис. 9.6

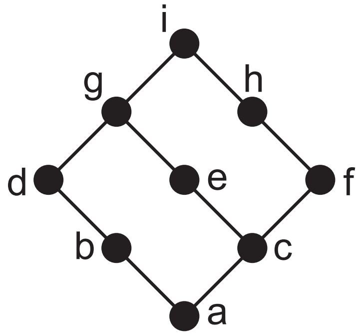

Рис. 9.7

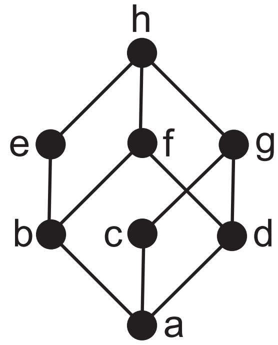

Рис. 9.8

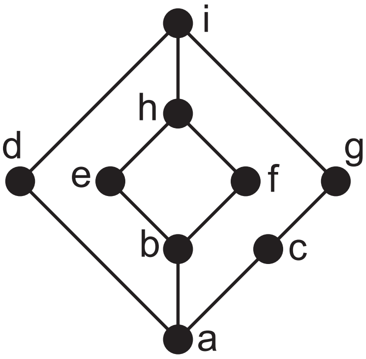

Рис. 9.9

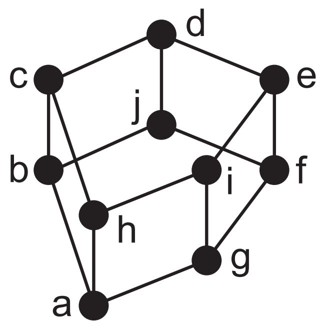

Рис. 9.10

№ 9.12. Навести приклад решітки, яка не є дистрибутивною, але кожен елемент має не більше одного доповнення.

№ 9.13. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка. Чи еквівалентні наступні умови:
1) $\forall a, b, c : \Big(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ та $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \Big)$;

2) $\Big(\forall a,b,c: \ \ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)\Big)$ або $\Big(\forall a,b,c: \ \ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)\Big)$;

3) $\forall a,b,c: \ \Big(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ або $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)\Big)$?

№ 9.14. За вказаними множинами A побудувати діаграми Гессе для ЧВМ $\langle A, \subset \rangle$. Чи будуть ЧВМ решітками? В позитивних випадках отримані решітки дослідити на дистрибутивність, модулярність, доповненість. Визначити всі доповнення для кожного з елементів.
1. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1\},\{2\},\varnothing\}$.
2. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{1\},\{2\},\varnothing\}$.
3. $A = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1\},\{2\},\{4\},\varnothing\}$.

№ 9.15. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка. Довести:
1) $(a \vee b = a \wedge b) \Rightarrow (a = b)$;
2) $(a_1 \vee \ldots \vee a_n = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \Rightarrow (a_1 = \ldots = a_n)$;
3) $((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \wedge a = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
4) $((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c)) = a \wedge b$;
5) $(a \preceq b) \Leftrightarrow (a \preceq a \wedge b) \Leftrightarrow (a \vee b \preceq b)$;
6) $((a \preceq c) \wedge (b \preceq c)) \Rightarrow (a \vee b \preceq c)$;
7) $((a \preceq b) \wedge (a \preceq c)) \Rightarrow (a \preceq b \wedge c)$.

№ 9.16. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка. Довести, що додаванням не більше як трьох елементів її можна вкласти в решітку з нулем та одиницею, кожен елемент якої має доповнення.

№ 9.17. Нехай $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ – решітка; $a,b,c \in L$; $M(a,b,c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$, $m(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$. Довести $m(a,b,c) \preceq M(a,b,c)$.

№ 9.18. Нехай X – лінійний простір. Дослідити, чи є решіткою ЧВМ підпросторів X з відношенням вкладення. Якщо так, дослідити решітку на дистрибутивність, модулярність та у випадку $\dim X < \infty$ на доповненість.

№ 9.19. 1. Для груп $\langle \mathbb{Z}_{18}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Z}_{36}, + \rangle$ побудувати діаграми Гессе множини підгруп за відношенням вкладення; переконатися, що отримані ЧВМ є решітками та дослідити їх на дистрибутивність, модулярність, доповненість.

2. Для груп $\langle S_3, \circ\rangle$, $\langle S_4, \circ\rangle$ побудувати діаграми Гессе множини підгруп та множини нормальних дільників за відношенням вкладення; переконатися, що отримані ЧВМ є решітками та дослідити їх на дистрибутивність, модулярність, доповненість.
3. Довести, що множина всіх підгруп групи $\langle G, *\rangle$ з відношенням вкладення є решіткою.
4. Довести, що множина всіх нормальних дільників групи $\langle G, *\rangle$ з відношенням вкладення є модулярною, але в загальному випадку не дистрибутивною решіткою.

Розділ 10

Булеві алгебри

10.1. Основні теоретичні відомості

Булевою алгеброю називають алгебричну структуру $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$ із визначеними на непорожній множині A замкненими бінарними операціями «$\vee$» та «$\wedge$», замкненою унарною операцією «$\bar{}$» і фіксованими елементами $0, 1 \in A$ (нуль-арними операціями на A), які задовольняють умови: 1) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (комутативність); 2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (дистрибутивність); 3) $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$ (нейтральність); 4) $a \vee \bar{a} = 1$, $a \wedge \bar{a} = 0$ (доповненість). Операції «$\vee$» та «$\wedge$» називають диз'юнкцією та кон'юнкцією (за іншою термінологією об'єднанням та перетином або сумою та добутком), операцію «$\bar{}$» – доповненням, елементи 0 та 1 – нулем та одиницею булевої алгебри, умови 1–4 – аксіомами булевої алгебри. Для диз'юнкції і кон'юнкції також використовуватимемо позначення «$+$» та «$\cdot$» відповідно, символ «$\cdot$» у формулах іноді опускатимемо. Елемент $a \in A$ називають атомом булевої алгебри A, якщо a безпосередньо слідує за нулем; множину всіх атомів булевої алгебри A позначатимемо через A_1.

Множина виразів або виразів над A визначається умовами: 1) змінна та елементи 0, 1 є виразами; 2) якщо $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ – вирази, то $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $\bar{\mathcal{A}}$ – також вирази; 3) інших виразів немає. Для позначення виразів будемо використовувати англійську літеру E з індексами або без, за потреби у дужках вказуватимемо список змінних, які можуть міститись у даному виразі. Вирази $E_1(x_1, \ldots, x_n)$ та $E_2(x_1, \ldots, x_n)$ називають еквівалентними, якщо вони задають однакове відображення з $A^{\times n}$ в A.

Вираз над булевою алгеброю називають кон'юнктом (відповідно, диз'юнктом), якщо він має вигляд кон'юнкції (відповідно, диз'юнкції) змінних або їх доповнень. Вважають, що змінні у кон'юнкті (відповідно, диз'юнкті) не повторюються. Кількість змінних у кон'юнкті або диз'юнкті називають його довжиною. Вираз 1 за визначенням вважають кон'юнктом довжини 0 та називають порожнім кон'юнктом, вираз 0 вважають диз'юнктом довжини 0 та називають порожнім диз'юнктом. Кон'юнкт (відповідно, диз'юнкт) $E(x_1, \ldots, x_n)$, який містить усі n змінних, називають кон'юнктом (відповідно, диз'юнктом) повної довжини.

Вираз над булевою алгеброю називають диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ), якщо він має вигляд диз'юнкції скінченної кількості кон'юнктів; вираз 0 за визначенням також вважають диз'юнктивною нормальною формою, яка не містить жодного кон'юнкта. Диз'юнктивну нормальну форму називають досконалою (ДДНФ), якщо вона містить лише кон'юнкти повної довжини. Вираз над булевою алгеброю називають кон'юнктивною нормальною формою (КНФ), якщо він має вигляд кон'юнкції скінченної кількості диз'юнктів; вираз 1 за визначенням також вважають кон'юнктивною нормальною формою, яка не містить жодного диз'юнкта. Кон'юнктивну нормальну форму називають досконалою (ДКНФ), якщо вона містить лише диз'юнкти повної довжини.

Кон'юнкт $E_1(x_1, \ldots, x_n)$ називають імплікантою функції, яка задана виразом $E(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $E(x_1, \ldots, x_n)$ набуває значення 1 на всіх наборах із $\{0, 1\}^{\times n}$, коли набуває значення 1 вираз $E_1(x_1, \ldots, x_n)$. Імпліканту E_1 виразу E називають простою, якщо видалення будь-якої змінної з кон'юнкта E_1 приводить до кон'юнкта, який не є імплікантою виразу E. Диз'юнктивну нормальну форму E називають тупиковою, якщо виконуються умови: 1) кожна імпліканта у складі E проста; 2) жодну імпліканту у складі E не можна викреслити зі збереженням еквівалентності виразу E. Імпліканти, які увійдуть в усі тупикові форми виразу E, називають ядровими, сукупність ядрових імплікант називають диз'юнктивним ядром (або просто ядром) виразу E.

Диз'юнктивну нормальну форму, яка складається з усіх простих імплікант, називають скороченою. Скорочена ДНФ у загальному випадку не є тупиковою, але будь-яку тупикову ДНФ можна отримати із скороченої ДНФ відкиданням деяких імплікант. Методи пошуку скороченої ДНФ та тупикових ДНФ поділяють на алгебричні (напр. метод Квайна, метод Квайна–Мак-Класкі, метод Блейка, метод Петрика, метод Нельсона та ін.) та геометричні (напр. карти Карно, діаграми Вейча).

10.2. Задачі

№ 10.1. 1. Нехай $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$ – булева алгебра. Довести, що $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ – решітка, яка є обмеженою, дистрибутивною та доповненою.
2. Нехай $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ – решітка, яка є обмеженою, дистрибутивною та доповненою. Довести, що $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$, де 0 – нуль решітки, 1 – одиниця решітки, $\bar{a}$ – доповнення до елементу $a \in A$, є булевою алгеброю. Окремо пояснити, чому для кожного $a \in A$ існує єдине доповнення $\bar{a}$.

№ 10.2. 1. Нехай $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$ булева алгебра. Довести, що $\langle A, \oplus, \cdot \rangle$, де $a \oplus b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$, $a \cdot b = a \wedge b$, є ідемпотентним кільцем з одиницею.
2. Нехай $\langle A, \oplus, \cdot \rangle$ ідемпотентне кільце з одиницею. Довести, що $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$, де $a \vee b = a \oplus b \oplus a \cdot b$, $a \wedge b = a \cdot b$, $\bar{a} = 1 \oplus a$, 0 та 1 – відповідно нуль та одиниця кільця, є булевою алгеброю.
3. Нехай $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$ булева алгебра; $\langle A, \oplus, \cdot \rangle$ ідемпотентне кільце з одиницею, побудоване в п. 1; $\left\langle A, \hat{\vee}, \hat{\wedge}, \widehat{\bar{}}, 0, 1 \right\rangle$ булева алгебра, побудована в п. 2 за кільцем $\langle A, \oplus, \cdot \rangle$. Довести, що операції «$\hat{\vee}$», «$\hat{\wedge}$», «$\widehat{\bar{}}$» збігаються з «$\vee$», «$\wedge$», «$\bar{}$» відповідно.
4. Нехай $\langle A, \oplus, \cdot \rangle$ ідемпотентне кільце з одиницею; $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$ булева алгебра, побудована в п. 2; $\langle A, \hat{\oplus}, \hat{\cdot} \rangle$ ідемпотентне кільце з одиницею, побудоване в п. 1 за булевою алгеброю $\left\langle A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1 \right\rangle$. Довести, що операції «$\hat{\oplus}$», «$\hat{\cdot}$» збігаються з «$\oplus$», «$\cdot$» відповідно [1].

№ 10.3. Побудувати найменшу підалгебру 2^U, яка містить B, вказати атоми, побудувати діаграму Гессе:
1) $U = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1\}, \{3\}\}$;

[1] пп. 3–4 доводять взаємообернeність переходів

2) $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$;
3) $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$.

№ 10.4. Чи існує булева алгебра, що містить 6 елементів? Якщо так, навести приклад та побудувати діаграму Гессе.

№ 10.5. За допомогою еквівалентних перетворень побудувати ДНФ для функцій:
1) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1x_2 \vee x_3)$ [2];
2) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1x_2 \oplus x_3)(x_1x_3 \to x_2)$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1x_3 \oplus (x_2 \to x_3))$;
4) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1\bar{x}_2 \vee x_3} \leftrightarrow (x_1 \to x_2\bar{x}_3)$;
5) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\overline{x_1x_2} \vee x_3)$;
6) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4)((\bar{x}_1 \vee x_4) \oplus x_2x_3) \vee \bar{x}_2(x_3 \vee \overline{x_1\bar{x}_4})$;
7) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to \bar{x}_3)(x_3 \to x_1\bar{x}_4)$.

№ 10.6. За допомогою еквівалентних перетворень побудувати КНФ для функцій:
1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee (x_1 \to x_2x_3)$;
2) $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \to (x_2 \to x_3)) \oplus x_1\bar{x}_2x_3$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \leftrightarrow (x_2 \to x_3)) \vee (x_2 \to x_1x_3)$;
4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_4$;
5) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (x_1x_3 \leftrightarrow x_4) \vee x_2\bar{x}_3$.

№ 10.7. За заданою ДНФ побудувати ДДНФ:
1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_3$;
2) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$;
3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4$;
4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_3\bar{x}_4$.

№ 10.8. За заданою КНФ побудувати ДКНФ:
1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2)x_3$;
2) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)\bar{x}_3$;
3) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$;
4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_4)$.

[2] тут і надалі знак операції «$\wedge$» опускаємо

№ 10.9. Побудувати ДДНФ та ДКНФ для функцій, що задані формулою або вектором:
1) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)}$;
2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3)$;
3) $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \leftrightarrow (\overline{x_2 \wedge x_3})$;
4) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(\overline{(x_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_3}) \vee (\overline{x_1 \wedge x_3})}$;
5) $f(x_1, x_2, x_3) = ((\overline{x_1 \vee \bar{x}_2}) \wedge (\overline{x_1 \wedge x_3})) \vee (\overline{x_1 \wedge (\overline{x_2 \wedge x_3})})$;
6) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \to x_2) \oplus (\bar{x}_1 \to (\overline{x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4}))$;
7) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((\overline{x_1 \wedge x_2}) \oplus (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4 \wedge (x_3 \vee x_4))) \leftrightarrow x_3$;
8) (0010 1101);
9) (1000 0011);
10) (0110 1001);
11) (0010 0011 0111 1100);
12) (1111 0110 0110 1111).

№ 10.10. Знайти довжину ДДНФ для наступних n-арних функцій, $n \geqslant 2$:

$$f_1 = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \wedge x_j); \quad f_3 = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to \ldots \to (x_{n-1} \to x_n) \ldots));$$
$$f_2 = \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \to x_j); \quad f_4 = ((x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)) \to (x_3 \wedge \ldots \wedge x_n).$$

№ 10.11. Нехай $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \varnothing$, довжини ДДНФ для функцій $f(x_1, \ldots, x_m)$ та $g(y_1, \ldots, y_m)$ дорівнюють k та l відповідно. Знайти довжину ДДНФ для функцій:

$$f(x_1, \ldots, x_m) \vee g(y_1, \ldots, y_n); \quad f(x_1, \ldots, x_m) \wedge g(y_1, \ldots, y_n).$$

№ 10.12. Побудувати скорочену ДНФ за допомогою методу Блейка:
1) $\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_2x_4 + x_2\bar{x}_3x_4$;
2) $x_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$;
3) $x_1 + \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$;
4) $x_1\bar{x}_2x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_3\bar{x}_4$.

№ 10.13. Побудувати скорочену ДНФ за допомогою методу Нельсона:
1) $(x_1+x_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+x_2+x_3)(\bar{x}_2+\bar{x}_3)$;
2) $(x_1 + \bar{x}_2)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)$;
3) $(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)$;
4) $(x_1+\bar{x}_2)(x_2+\bar{x}_3)(x_3+\bar{x}_4)(x_4+x_1)$.

№ 10.14. За допомогою карт Карно побудувати скорочену ДНФ та знайти всі тупикові ДНФ для функцій, що задані формулою або вектором. Вказати всі прості імпліканти та всі ядрові імпліканти.

1. $x_1x_2 + \bar{x}_2$;
2. $\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2x_3$;
3. (1110 1111);
4. (1011 1110);
5. (1110 0110);
6. (1101 1011);
7. (1111 1000 0100 1100);
8. (1110 1000 0110 1000);
9. (1110 0110 0001 0101);
10. (0001 0111 1010 1110);
11. (0001 1011 1110 0111);
12. (0011 1101 1110 1011).

№ 10.15. Розв'язати задачу 10.14 для функцій, що задані за допомогою карт Карно:

1)

	x_1x_2	$\bar{x}_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$
x_3x_4	1	1	1	1
$\bar{x}_3x_4$		1		1
$\bar{x}_3\bar{x}_4$				
$x_3\bar{x}_4$	1		1	

2)

	x_1x_2	$\bar{x}_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$
x_3x_4		1		1
$\bar{x}_3x_4$		1		1
$\bar{x}_3\bar{x}_4$		1	1	
$x_3\bar{x}_4$			1	

3)

	x_1x_2	$\bar{x}_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$
x_3x_4	1	1		
$\bar{x}_3x_4$	1	1	1	
$\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	1	1	1
$x_3\bar{x}_4$		1		

№ 10.16. Для функцій задачі 10.14:
1) побудувати скорочену ДНФ за допомогою методу Квайна;
2) знайти всі тупикові ДНФ за допомогою методу Квайна–Мак-Класкі з подальшим застосуванням методу Петрика, вказати всі прості імпліканти та всі ядрові імпліканти.

№ 10.17. Для функції (1011 1110 0111 1101) побудувати скорочену ДНФ за допомогою методів: 1) Блейка; 2) Нельсона; 3) Квайна. Який з методів для даної функції найшвидший? Вказати всі тупикові форми.

№ 10.18. Знайти кількість тупикових ДНФ для функції $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$.

Розділ 11

Булеві функції та функціональна повнота

11.1. Основні теоретичні відомості

Булевою функцією від n аргументів (змінних) називають відображення $f\colon \{0,1\}^{\times n} \to \{0,1\}$, $n \geq 0$; випадок $n = 0$ відповідає константам 0, 1. Змінні позначатимемо маленькими літерами англійського алфавіту з індексами або без. Число n називають арністю функції f (позначення $f^{(n)}$). Множину всіх булевих функцій довільної скінченної арності позначають через P_2.

Булеву функцію $f^{(2)}(x_1, x_2) = x_1|x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ називають штрихом Шеффера, а $f^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$ стрілкою Пірса. Також «|» називають «НЕ-І», (рос. «НЕ-И», англ. «NAND» від «not and»), а «↓» – «НЕ-АБО» (рос. «НЕ-ИЛИ», англ. «NOR» від «not or»).

Формули над непорожньою множиною (класом) булевих функцій $K \in P_2$ визначаються рекурсивно: 1) якщо $f^{(n)} \in K$, то $f(x_1, \ldots, x_n)$ – формула над K; 2) якщо $f^{(n)} \in K$, $E_1, \ldots, E_n$ – формули над K або змінні (не обов'язково різні), то $f^{(n)}(E_1, \ldots, E_n)$ – формула над K; 3) інших формул над класом K немає. Суперпозицією функцій із набору K називають булеву функцію f, яка реалізована деякою формулою над класом K. Замиканням $[K]$ непорожнього набору функцій $K \subset P_2$ називають множину функцій, які можна реалізувати формулами над набором K. Якщо клас функцій $K \subset P_2$ містить тотожну функцію $f(x) = x$, замикання $[K]$ можна визначити таким кроком рекурсії: якщо $g_1^{(n)}, \ldots, g_m^{(n)} \in [K]$ та $g_0^{(m)} \in [K]$, то $[K]$ містить функцію $h^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = g_0^{(m)}(g_1^{(n)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m^{(n)}(x_1, \ldots, x_n))$ (арності функцій g_k $(1 \le k \le m)$ можна вважати однаковими, оскільки функції меншої арності можна доповнити відповідною кількістю фіктивних змінних). Непорожній клас функцій $K \subset P_2$ називають функціонально замкненим або просто замкненим, якщо $[K] = K$. Непорожній клас функцій $K \subset P_2$ називають функціонально повним або просто повним, якщо $[K] = P_2$.

Для формул над P_2 розглядають бездужковий польський запис, коли аргументи записують після операції, та обернений польський запис, коли аргументи записують перед операцією. Наприклад, для формул $x \vee y$, $x \wedge y$, $\neg x$ польський запис: $\vee\ x\ y$, $\wedge\ x\ y$, $\neg\ x$, а обернений польський запис: $x\ y\ \vee$, $x\ y\ \wedge$, $x\ \neg$; для числової формули $\cos(x + y)$ – відповідно, $\cos\ +\ x\ y$ та $x\ y\ +\ \cos$. Також бездужковий польський запис називають префіксною формою запису, обернений польський запис – постфіксною формою запису, а запис виду $(x \vee y) \wedge z$ – інфіксною формою запису.

Говорять, що функція $f \in P_2$ зберігає константу 0, якщо $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, та зберігає константу 1, якщо $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Множину функцій, які зберігають 0 (відповідно, 1) позначають через T_0 (відповідно, T_1).

Функцію $f^{(n)}$ $(n \geqslant 1)$ називають монотонною, якщо $f^{(n)}(\alpha) \leqslant f^{(n)}(\beta)$ для всіх $\alpha \preceq \beta$ $(\alpha, \beta \in \{0, 1\}^{\times n})$, де «$\preceq$» – відношення часткового порядку $(\alpha \preceq \beta) \Leftrightarrow (\forall k\ \alpha_k \leqslant \beta_k)$. Зазначимо, що функції арності 0, тобто константи 0 та 1 монотонні. Множину монотонних функцій позначають через M.

Функцією, двоїстою до функції $f\colon \{0, 1\}^{\times n} \to \{0, 1\}$, називають функцію $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$. Функцію f називають самодвоїстою, якщо $f^* = f$. Множину самодвоїстих функцій позначають через S.

Поліномом Жегалкіна з n змінними називають формулу

$$a \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{1,2}x_1x_2 \oplus a_{1,3}x_1x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \oplus$$

$$\oplus a_{1,2,3}x_1x_2x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n-2,n-1,n}x_{n-2}x_{n-1}x_n \oplus \ldots \oplus a_{1,2,\ldots,n}x_1x_2 \ldots x_n,$$

де $a_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ $(0 \le k \le n)$ – фіксовані коефіцієнти 0 або 1. У випадку $n = 0$ поліном Жегалкіна є константою 0 або 1. Поліном Жегалкіна розглядають як суму за операцією «$\oplus$» кон'юнктів вигляду $x_{j_1}x_{j_2} \ldots x_{j_k}$

– такий кон'юнкт входить до полінома, якщо $a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} = 1$, і не входить, якщо $a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} = 0$; коефіцієнту a відповідає порожній кон'юнкт 1. Також поліном Жегалкіна розглядають як поліном у комутативному кільці $\langle\{0,1\},\oplus,\wedge\rangle$: 1) операцію «$\wedge$» позначають через «$\cdot$», як прийнято в теорії кілець, і, зазвичай, опускають; 2) пріоритет операції «$\cdot$» вважають вищим за пріоритет операції «$\oplus$», як прийнято в теорії кілець; 3) дужки опускають з урахуванням асоціативності операцій «$\oplus$», «$\cdot$» та пріоритету операцій. Булеву функцію $f^{(n)}$ називають лінійною, якщо її поліном Жегалкіна містить лише кон'юнкти не більше ніж з однією змінною: $f^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$. Множину лінійних функцій позначають через L.

Критерій повноти (теорема Поста): клас булевих функцій $K \subset P_2$ є функціонально повним тоді і тільки тоді, коли K не є підмножиною жодного із п'яти класів T_0, T_1, M, S, L.

Лема про функцію, що не зберігає константу. Якщо $f \in T_1 \setminus T_0$, то $1 \in [\{f\}]$, тобто константу 1 можна реалізувати формулою, що містить лише функцію f. Якщо $f \in T_0 \setminus T_1$, то $0 \in [\{f\}]$, тобто константу 0 можна реалізувати формулою, що містить лише функцію f. Якщо $f \notin T_0$ та $f \notin T_1$, то $\bar{x} \in [\{f\}]$, тобто функцію $\bar{x}$ можна реалізувати формулою, що містить лише функцію f.

Лема про немонотонну функцію. Якщо $f \notin M$, то $\bar{x} \in [\{f, 0, 1\}]$.

Лема про несамодвоїсту функцію. Якщо $f \notin S$, то $0, 1 \in [\{f, \bar{x}\}]$.

Лема про нелінійну функцію. Якщо $f \notin L$, то $x \wedge y \in [\{f, \bar{x}, 0\}]$.

Доведення вказаних лем конструктивне та використовується для розв'язання задач 11.13, 11.14, 11.17, 11.21 та 11.22.

11.2. Задачі

№ 11.1. 1. Побудувати таблиці істинності для стрілки Пірса «$\downarrow$» та штриха Шеффера «$|$».
2. Виразити $x \wedge y$, $x \vee y$ та $\bar{x}$ за допомогою: 1) «$\downarrow$»; 2) «$|$».

№ 11.2. Побудувати множину всіх функцій арності не більше 2, які належать замиканню заданого набору: 1) $\{\bar{x}\}$; 2) $\{x_1 \oplus x_2\}$; 3) $\{0, \bar{x}\}$; 4) $\{x_1 \wedge x_2\}$.

№ 11.3. Знайти замикання набору функцій: 1) $\{\bar{x}\}$; 2) $\{\bar{x}, 0\}$; 3) $\{\vee\}$; 4) $\{\wedge, \vee, \bar{x}\}$.

№ 11.4. Довести, що $f \in [K]$ шляхом зображення f формулою над K:
1) $f(x) = \bar{x}$, $K = \{0, x_1 \to x_2\}$;
2) $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, $K = \{x_1 \downarrow x_2\}$;
3) $f(x) = x$, $K = \{x_1 \oplus x_2\}$;
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $K = \{x_1 \leftrightarrow x_2\}$;
5) $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, $K = \{x_1 \to x_2\}$.

№ 11.5. Чи є функціонально замкненим набір: 1) $\{0, 1\}$; 2) $\{\bar{x}\}$; 3) $\{x, \bar{x}\}$; 4) $\{1, \bar{x}\}$; 5) $\{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mid n \geqslant 1\}$?

№ 11.6. Довести функціональну повноту заданого набору без використання теореми Поста: 1) $\{\wedge, \vee, \bar{x}\}$; 2) $\{\wedge, \oplus, 1\}$; 3) $\{\to, \bar{x}\}$.

№ 11.7. Довести функціональну повноту набору K шляхом зображення кожної функції набору $\{\wedge, \vee, \bar{x}\}$ або набору $\{\wedge, \oplus, 1\}$ (див. пп. 1–2 задачі 11.6) через функції набору K:
1) $K = \{x_1 \downarrow x_2\}$;
2) $K = \{(x_1 \wedge x_2) \oplus x_3, (x_1 \leftrightarrow x_2) \oplus x_3\}$;
3) $K = \{x_1 \to x_2, \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$;
4) $K = \{x_1 \to x_2, f = (0101.1110)\}$;
5) $K = \{0, (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3), 1 \oplus x_1 \oplus x_2\}$;
6) $K = \{x_1 \leftrightarrow x_2, x_1 \oplus x_2, (x_1 \wedge x_2) \oplus x_3\}$.

№ 11.8. Записати бездужковим польським записом та оберненим польським записом такі формули над P_2 та числові формули: 1) $(x \wedge y) \vee (y \oplus z)$; 2) $x + y$; 3) $x(y - 2)$; 4) $(x + 5)(y - 1)$; 5) $x^2(1 + y)^3$; 6) $e^{3x - x^2} - 1$.

№ 11.9. Записати формулу над P_2 за її польським записом або оберненим польським записом: 1) $\oplus\ \oplus\ x\ y\ z$; 2) $x\ y\ \vee\ z\ x\ \downarrow\ \wedge$.

№ 11.10. Чи є функція самодвоїстою?

1) $x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$ [1];
2) $x_1 \vee x_2$;
3) $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
4) $(x \vee \bar{y} \vee z)t \vee x\bar{y}z$;
5) $(x \vee \bar{y} \vee z)t \vee xyz$;
6) $x_1 \to x_2$;
7) $x_1 \oplus x_2$;
8) $x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

[1] тут і надалі знак операції «$\wedge$» опускаємо

№ 11.11. Знайти двоїсту функцію f^*, якщо функція f задана своїм вектором значень: 1) (1101); 2) (0101 1010); 3) (1001 0110).

№ 11.12. Чи є функція, що задана своїм вектором значень, самодвоїстою?

1) (1010);
2) (1001);
3) (1001 0110);
4) (0110 0110);
5) (0111 0001);
6) (0100 1101);
7) (1100 1001 0110 1100);
8) (1110 0111 0001 1000).

№ 11.13. Довести несамодвоїстість функції f. Згідно з лемою про несамодвоїсту функцію записати константи 0 та 1 формулами, що містять лише функції f та $\bar{x}$.

1) $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$;
2) $(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee x_3$;
3) $((x_1 \wedge \bar{x}_2) \to (x_2 \wedge x_3)) \oplus x_1$;
4) $(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$.

№ 11.14. Розв'язати задачу 11.13 для всіх несамодвоїстих функцій задачі 11.12.

№ 11.15. Побудувати поліном Жегалкіна для функції:

1) $x \vee y$;
2) $\bar{x}$;
3) $x \to y$;
4) $x \leftrightarrow y$;
5) $x \to (y \to z)$;
6) $\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$;
7) $(\bar{x} \vee \bar{y}) \to z$;
8) $(\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \oplus (\bar{x} \vee z)$;
9) $(x \vee y) \wedge \bar{z}$;
10) $(\bar{x} \to \bar{y}) \wedge \bar{z}$;
11) $((x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z) \leftrightarrow t$.

Які функції є лінійними?

№ 11.16. Побудувати поліном Жегалкіна для функції, що задана формулою або своїм вектором значень:

1) $\overline{x \to y} \oplus \bar{x}y$;
2) $x\bar{y}(x \leftrightarrow y)$;
3) $xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee z$;
4) $(xy \vee \bar{x}\bar{y})z \vee \bar{z}(x\bar{y} \vee \bar{x}y)$;
5) $((x \to y)(y \to x)) \leftrightarrow z$;
6) $xy\bar{z} \vee x\bar{y}$;
7) (1101);
8) (1001 0110);
9) (1010 0101);
10) (1010 0110);
11) (1100 1001 0110 1001);
12) (1001 0110 0110 1001).

Які функції є лінійними?

№ 11.17. Довести нелінійність функції f. Згідно з лемою про нелінійну функцію записати $x \wedge y$ формулою, що містить лише функції f, $\bar{x}$ та 0.
1) $1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$;
2) $x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$;
3) $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$;
4) $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4$.

№ 11.18. Чи є функція, що задана своїм вектором значень, монотонною?
1) (0110);
2) (0011 0111);
3) (0101 0111);
4) (0110 0110);
5) (0001 0111);
6) (0101 0011);
7) (0010 0011 0111 1111);
8) (0001 0101 0111 0111).

№ 11.19. Чи є функція монотонною? У випадку немонотонності вказати два набори змінних, які доводять немонотонність.
1) $(x_1 \oplus x_2) \wedge (x_1 \leftrightarrow x_2)$;
2) $x_1 \to (x_2 \to x_1)$;
3) $x_1 \to (x_1 \to x_2)$;
4) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$;
5) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
6) $(x_1 \oplus x_2)x_1x_2$;
7) $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;
8) $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_1$.

№ 11.20. Довести немонотонність функції, вказати два сусідні набори змінних, які доводять немонотонність.
1) $x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2$;
2) $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$;
3) $x_1x_2 \oplus x_3$;
4) $x_1 \vee x_2\bar{x}_3$;
5) $x_1x_3 \oplus x_2x_4$;
6) $(x_1x_2x_4 \to x_2x_3) \oplus x_4$.

№ 11.21. Довести немонотонність функції f. Згідно з лемою про немонотонну функцію записати $\bar{x}$ формулою, що містить лише функції f, 0 та 1.
1) $x_1 \oplus x_2$;
2) $x_1 \vee \bar{x}_2$;
3) $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$;
4) $x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2$;
5) $x_1x_3 \oplus x_2x_4$;
6) $(x_1x_2x_4 \to x_2x_3) \oplus x_4$.

№ 11.22. Розв'язати задачу 11.21 для всіх немонотонних функцій задачі 11.18.

№ 11.23. Нехай f – довільна функція, яка не є константою. Довести, що тотожна функція $x \in [\{f\}]$.

№ 11.24. 1. Визначити n, за яких наступні n-арні функції є самодвоїстими:

$$f_1 = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n; \quad f_2 = \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \wedge x_j); \quad f_3 = \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \wedge x_j);$$

$$f_4 = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus (x_n \vee x_1)$$

(для функції f_1 вважаємо $n \geqslant 1$, для інших $n \geqslant 2$).
2. За яких n функції f_1, f_2 належать множині $T_0 \setminus T_1$?
3. За яких n функції f_1, f_2 є монотонними?

№ 11.25. Класом функцій, двоїстим до класу $K \subset P_2$, називають клас $K^* = \{f^* \mid f \in K\}$. Знайти T_0^*, T_1^*, M^*, S^*, L^*.

№ 11.26. Нехай $f \in M$ та $\bar{f} \in M$. Довести, що f є константою.

№ 11.27. 1. Скільки існує булевих функцій n змінних?
2. Скільки існує булевих функцій n змінних класу T_0?
3. Скільки існує булевих функцій n змінних класу T_1?
4. Скільки існує булевих функцій n змінних класу S?
5. Скільки існує булевих функцій n змінних класу L?

№ 11.28. 1. Знайти всі самодвоїсті функції двох змінних. Які з них суттєво залежать від обох змінних?
2. Знайти всі самодвоїсті функції трьох змінних.
3. Знайти всі лінійні функції двох змінних.

№ 11.29. Базисом замкненої множини $K \subset P_2$ називають множину $K_0 \subset K$ таку, що $[K_0] = K$ та $[K_1] \subsetneqq K$ для жодної $K_1 \subset K_0$.
1. Довести, що функція $1 \oplus x \oplus y \oplus z$ утворює базис множини $L \cap S$.
2. Довести, що множина $\{0, 1, x \wedge y, x \vee y\}$ утворює базис множини M. Вказівка: довести, що функція є монотонною тоді і тільки тоді, коли жодна її проста імпліканта не містить доповнення.
3. Довести, що функція $m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ утворює базис множини $S \cap M$.

№ 11.30. Чи належить функція f замиканню $[K]$?
1) $f(x) = \bar{x}$, $K = \{\vee, \rightarrow\}$;
2) $f(x, y) = x \leftrightarrow y$, $K = \{\vee, \oplus\}$;
3) $f(x, y) = x \wedge y$, $K = \{\rightarrow\}$.

№ 11.31. Дослідити набір функцій на функціональну повноту за допомогою теореми Поста:
1) $\{\downarrow\}$;
2) $\{\wedge, \oplus, 1\}$;
3) $\{x \vee y, x \leftrightarrow y\}$;
4) $\{x \wedge \bar{y}, 1 \oplus x \oplus y, (x \wedge y) \oplus \bar{z}\}$;
5) $\{(\bar{x} \oplus (y \wedge z)) \leftrightarrow (x \vee z), x \wedge y\}$;
6) $\{(x \leftrightarrow y) \oplus z, x \wedge y\}$;
7) $\{\bar{z} \to (\bar{x} \vee y), (\bar{x} \leftrightarrow y) \wedge (\bar{x} \oplus z), \bar{x} \oplus \bar{y} \oplus z\}$;
8) $\{x \wedge y, x \vee y, x \oplus y, (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)\}$.

№ 11.32. Дослідити набір функцій, що задані своїми векторами значень, на функціональну повноту за допомогою теореми Поста:
1) $\{f_1 = (0110), f_2 = (1100\ 0011), f_3 = (1001\ 0110)\}$;
2) $\{f_1 = (0111), f_2 = (0101\ 1010), f_3 = (0111\ 1110)\}$;
3) $\{f_1 = (0111), f_2 = (1001\ 0110)\}$;
4) $\{f_1 = (0101), f_2 = (1110\ 1000), f_3 = (0110\ 1001)\}$.

№ 11.33. Дослідити множину функцій на функціональну повноту:
1) $(S \cap M) \cup (L \setminus M)$;
2) $(L \cap T_1 \cap T_0) \cup S \setminus (T_0 \cup T_1)$;
3) $(L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;
4) $(L \cap T_1) \cup (S \setminus T_0)$.

Розділ 12

Відповіді та вказівки

Алгебра висловлень

1.2

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

1.3

A	B	C	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_9$	$\mathcal{A}_{10}$	$\mathcal{A}_{11}$	$\mathcal{A}_{12}$
0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\mathcal{A}_3, \dots, \mathcal{A}_8$ аналогічно. **1.4** 1) Не спрощується, всі суттєві; 2) x, суттєвий аргумент x; 3) 1, нема суттєвих. **1.7** 1)–3), 6)–7) Ні; 4)–5), 8) так. **1.8** 1. Вірно. 2. Невірно. 3. Вірно. 4. Невірно. **1.9** Сумісні. **1.11** 1) $A \vee (B \wedge C)$; 2) $A \wedge B \wedge (C \vee D)$; 3) $A \vee \neg B \vee C$; 4) $(C \wedge (A \vee \neg B)) \vee (\neg C \wedge A) \vee ((C \vee \neg B) \wedge \neg C)$; 5) $(B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$; 6) $(A \vee B \vee C \vee D) \wedge (A \vee B \vee D) \wedge (A \vee C)$; 7) $A \vee ((A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)) \vee \neg B \vee C$; 8) $(A \wedge ((B \wedge (A \vee \neg B) \wedge \neg A) \vee (B \wedge C))) \vee (\neg B \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C))) \vee (B \wedge C \wedge ((A \wedge \neg C) \vee \neg A))$; 9)

$\neg A \vee C \vee (\neg B \wedge (A \vee B \vee \neg C))$. **1.12** 4) $A \vee \neg B$; 5) A; 6) $A \vee (C \wedge (B \vee D))$; 7) $A \vee \neg B \vee C$; 8) $(B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$; 9) $\neg A \vee \neg B \vee C$. **1.13** 13. **1.14** $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. **1.15** $A \oplus B \oplus C$.

Алгебра множин

2.1 Ні. **2.5** Не мають: 7–9) наприклад, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$; 8–10) наприклад, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \varnothing$. **2.7** $(B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus B)$. **2.10** $\bigcup\limits_{k \geqslant 3} [\frac{1}{2} + \frac{1}{k}; 1) \notin S$, $\bigcap\limits_{k \geqslant 3} [0; \frac{1}{2} + \frac{1}{k}) \notin S$. **2.11** 1) $[\max(m, n); m + n]$; 2) $[0; \min(m, n)]$; 3) $[0; n]$; 4) усі цілі числа з відрізку $[|m-n|; m+n]$ однакової парності з $m+n$. **2.12** $\{2k+1 \mid k = 1, \ldots, 9\}$. **2.13** 1) $A \cup B = A \vartriangle B \vartriangle (A \cap B)$, $A \setminus B = A \vartriangle (A \cap B)$; 2) $A \cap B = A \vartriangle B \vartriangle (A \cup B)$, $A \setminus B = (A \cup B) \vartriangle B$; 3) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cup B = A \vartriangle B \vartriangle (A \setminus (A \setminus B))$. **2.14** 1) Для $A = B = \{a\}$ не можна отримати $A \setminus B = \varnothing$; 2) вказівка: для $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ можна отримати лише A, B, $\varnothing$, а $A \cup B$ отримати не можна. **2.15** 5. **2.16** 2) Ні; 3) так. **2.17** $X = A \vartriangle B$. **2.18** Вказівка: використати 2.3 та 2.5 або 2.9, п. 1 та 2.17. 1) При $B \subset A$ $B \subset X \subset B \cup A^c$, інакше розв'язків не існує; 2) при $A \subset B$ $B \setminus A \subset X \subset B$, інакше розв'язків не існує; 3) при $A = \varnothing$ $X = \varnothing$, інакше розв'язків не існує; 4) при $A = B$ $X = \varnothing$, інакше розв'язків не існує; 5) при $A \cap B = \varnothing$ $A \subset X \subset B^c$, інакше розв'язків не існує; 6) при $A \subset B$ $A \subset X \subset B$, інакше розв'язків не існує; 7) $A \vartriangle B \subset X$; 8) $X \subset (A \vartriangle B)^c$. **2.19** Вказівка: використати 2.9, п. 1 та 2.17. 1) При $B \subset A \subset C$ $X = B \cup (C \setminus A)$, інакше розв'язків не існує; 2) при $B \subset A \subset C^c$ $X = (A \setminus B) \cup C$, інакше розв'язків не існує; 3) при $B \subset A \subset C$ $X = C \setminus B$, інакше розв'язків не існує; 4) при $C \subset A \subset B$ $X = A$, інакше розв'язків не існує; 5) при $C \subset A \subset B$ $X = A$, інакше розв'язків не існує; 6) при $B \cup C \subset A^c$ $B \cup C \subset X \subset A^c$, інакше розв'язків не існує; 7) при $A \cap C = \varnothing$, $B = U$ $C \subset X \subset A \cup C$, інакше розв'язків не існує. **2.20** $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $f\colon (x, y) \mapsto (y, x)$; $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$. **2.23** Рівність при $(A = C) \vee (B = D) \vee ((A \subset C) \wedge (B \subset D)) \vee ((C \subset A) \wedge (D \subset B))$. **2.25** Ні. Вказівка: кожній множині A співставити послідовність $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, де $\alpha_k = 1$, якщо $k \in A$, інакше – $\alpha_k = 0$; для ірраціональних чисел з $(0, 1)$ не існує відповідної множини.

Елементи теорії відношень

3.1 1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, R_2, R_1, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^2$; 2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, R_1, R_2, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^2$; 3) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, R, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$; 4) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2y \geqslant 3x\}$, $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 4x \geqslant 9y\}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$; 5) $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $[-1; \frac{\pi}{2}]$, $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \geqslant \sin y\}$, $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \geqslant \sin(\sin x)\}$, $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $[-1; \frac{\pi}{2}] \times [-1; \frac{\pi}{2}]$. **3.2** 9) Строге вкладення, наприклад, $R_1 = \{(1,1)\}$, $R_2 = \{(0,1)\}$, $S = \{(1,0),(1,1)\}$; 10) строге вкладення, наприклад, $R_1 = \{(1,1)\}$, $R_2 = \{(1,0)\}$, $S = \{(0,1), (1,1)\}$. **3.4** 1. 1) $\{(a_1,c_2),(a_2,c_1)\}$; 2) $\{(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_1),(a_2,c_3), (a_3,c_1),(a_3,c_3),(a_4,c_2),(a_4,c_3)\}$; 3) $\{(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_1),(a_2,c_3)\}$. 2. 1) $\{(b_1,a_1),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_3,a_2)\}$, $\{(c_1,b_3),(c_2,b_1)\}$, $\{(c_1,a_2),(c_2,a_1)\}$; 2) $\{(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,a_3),(b_2,a_1),(b_2,a_4)\}$, $\{(c_1,b_1),(c_2,b_2),(c_3,b_1),(c_3,b_2)\}$, $\{(c_1,a_1),(c_1,a_2),(c_1,a_3),(c_2,a_1),(c_2,a_4),(c_3,a_1),(c_3,a_2),(c_3,a_3),(c_3,a_4)\}$; 3) $\{(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_3,a_1),(b_4,a_1),(b_4,a_2)\}$, $\{(c_1,b_1),(c_1,b_4),(c_2,b_2),(c_2,b_3), (c_3,b_3)\}$, $\{(c_1,a_1),(c_1,a_2),(c_2,a_1),(c_3,a_1),(c_3,a_2)\}$. **3.5** 1) $I_{\{1,2,3,4,5\}}$; 2) R. **3.6** 1) $(xRy) \Leftrightarrow (x = y)$; 2) $(xRy) \Leftrightarrow (|x-y| \leqslant 1)$; 3) $(xRy) \Leftrightarrow (x \leqslant y \leqslant x^2)$; 4) $(xRy) \Leftrightarrow (x \leqslant y)$; 5) $(xRy) \Leftrightarrow (x < y)$; 6) $(xRy) \Leftrightarrow (x > 0, y > 0)$. **3.8** Наприклад, $(xR_1y) \Leftrightarrow (x < y)$, $R_2 = R_1^{-1}$. **3.10** Наприклад, $R_1 = \{(1,1), (2,1)\}$, $R_2 = R_1^{-1}$. **3.11** $R_1 \cup R_2$ не транзитивне, наприклад, для $R_1 = \{(1,2)\}$, $R_2 = \{(2,3)\}$; $R_1 \circ R_2$ не транзитивне, наприклад, для $R_1 = \{(1,1), (1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$, $R_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$; $R_1 \circ R_1^{-1}$ не транзитивне, наприклад, для $R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$. **3.13** 1) Не рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, антисиметричне, не транзитивне; 2) не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; 3) рефлексивне, не антирефлексивне, не симетричне, не антисиметричне, транзитивне.

3.14

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Рефлексивне	+	−	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−
Антирефлексивне	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	−	−
Симетричне	+	+	−	+	−	−	−	+	−	+	+	+
Антисиметричне	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	−	−
Транзитивне	−	−	+	−	+	+	+	+	−	−	+	−

3.15 1–4), 7–8) Транзитивні для $n = 2$, не транзитивні для $n \geqslant 3$; 5–6) транзитивні. **3.16** 1) Рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; 2) рефлексивне, не антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; 3) рефлексивне (вважаємо $l \parallel l$), не антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, транзитивне; 4) не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне; 5) не рефлексивне, антирефлексивне, симетричне, не антисиметричне, не транзитивне. **3.17**1) $\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_1), (a_2,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_1),(a_3,a_2),(a_3,a_3)\}$; 2) $\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_1),(a_2,a_2), (a_3,a_2),(a_3,a_3)\}$; 3) $\{(a_1,a_2),(a_1,a_3), (a_2,a_3)\}$. **3.18** 1) $\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),$

$(a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3),$ $(a_3, a_4)\}$; 2) $\{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_2), (a_3, a_3),$ $(a_3, a_4), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_4)\}$; 3) $\{(a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_3),$ $(a_3, a_4), (a_4, a_3), (a_4, a_4)\}$; 4) $\{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)\}$. **3.19** 1) $\{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_3),$ $(a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_4, a_5), (a_5, a_3), (a_5, a_4), (a_5, a_5)\}$; 2) $\{(a_1, a_1),$ $(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_4, a_5),$ $(a_5, a_3), (a_5, a_4), (a_5, a_5)\}$; 3) $\{(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_1, a_5), (a_2, a_2), (a_2, a_3),$ $(a_2, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_2), (a_3, a_3), (a_3, a_4), (a_3, a_5), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_4),$ $(a_4, a_5)\}$. **3.20** 1) $\{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, m \geqslant n\}$; 2) $\{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N},$ $m > n\}$; 3) $\{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, m \leqslant n\}$; 4) $\{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, m < n\}$; 5) $\{(x, y) \mid (x^2 + y^2 = 1) \vee (|x| = |y| \leqslant 1)\}$; 6) $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$. **3.21** 1) $\{(a_i, a_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant i\}$; 2) $\{(a_i, a_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, i \leqslant j \leqslant n\}$; 3) $A \times A$; 4) $A \times A$; 5) R_5; 6) R_6; 7) $A \times A$; 8) $A \times A$. **3.22** 1) Сюр'єктивне, не ін'єктивне, не функціональне, не відображення; 2) не сюр'єктивне, ін'єктивне не функціональне, не відображення; 3) не сюр'єктивне, не ін'єктивне, функціональне, відображення; 4) сюр'єктивне, ін'єктивне, функціональне, відображення. **3.23** 1) Не сюр'єктивне, не ін'єктивне; 2) сюр'єктивне, не ін'єктивне; 3) бієктивне; 4) бієктивне. **3.24** 1), 4) Ні; 2)–3) так. **3.26** 3) $\varepsilon(x) = \{x\}$, якщо $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, $\varepsilon(x) = \{-2, 1\}$, якщо $x = -2$, $\varepsilon(x) = \{-1, 2\}$, якщо $x = 2$; $\varepsilon(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$, де y_1, y_2, y_3 – корені рівняння $y^3 - 3y - (x^3 - 3x) = 0$, якщо $x \in (-2; 2)$; $f'(A/_R) = f(x)$, де x довільний елемент $A/_R$; 4) $\varepsilon(a_1) = \{a_1\}$, $\varepsilon(a_2) = \varepsilon(a_5) = \{a_2, a_5\}$, $\varepsilon(a_3) = \varepsilon(a_4) = \{a_3, a_4\}$, $\varepsilon(a_6) = \{a_6\}$; $f'(\{a_1\}) = b_5$, $f'(\{a_2, a_5\}) = b_4$, $f'(\{a_3, a_4\}) = b_2$, $f'(\{a_6\}) = b_3$. **3.27** 1) $A_\alpha = [\alpha; \alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; 2) $A_\alpha = \{(-1)^n \arcsin \alpha + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha \in [-1; 1]$. **3.28** 1) $A_0 = \{(0, 0)\}$, $A_\alpha = \{x_1^2 + x_2^2 = \alpha\}$, $\alpha > 0$; 2) $A_0 = \{(x_1 = 0) \vee (x_2 = 0)\}$, $A_\alpha = \{x_2 = \pm\frac{\alpha}{x_1}\}$, $\alpha > 0$; 3) $A_0 = \{(0, 0)\}$, $A_\alpha = \{|x_1| + |x_2| = \alpha\}$, $\alpha > 0$; 4) $A_0 = \{(x_1 = 1) \vee (x_2 = 0)\}$, $A_\alpha = \{x_2 = \frac{\alpha}{(x_1 - 1)^2}\}$, $\alpha \neq 0$; 5) $A_0 = \{(x_1 = 0) \vee (x_2 = -1)\}$, $A_\alpha = \{x_2 = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{x_1}} - 1\}$, $\alpha \neq 0$. **3.29** Вказівка: використовуючи логічну еквівалентність $((x_1, x_2) \in A_\alpha) \Leftrightarrow (f(x_1, x_2) = \alpha)$, виразити значення $\alpha = f(x_1, x_2)$ із умови $(x_1, x_2) \in A_\alpha$. 1) Так, $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1$; 2) так, $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$; 3) ні. **3.30** 1) $\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19\}, \{6, 10, 12, 14, 15, 18, 20\}\}$; 2) $\{\{1\}, \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \{4, 9\}, \{6, 8, 10, 14, 15\}, \{16, 18\}, \{12, 20\}\}$.

Елементи комбінаторики

4.1 1) 350; 2) 60. **4.2** 1) 1885; 2) 2254; 3) 1665. **4.3** 1) 1350; 2) 1290;

3) 1350; 4) 1590; 5) 720; 6) 900; 7) 300; 8) 180; 9) 600; 10) 420; 11) 310. **4.4** 1) 2125; 2) 1900; 3) 2125; 4) 2325; 5) 1225; 6) 1200; 7) 450; 8) 300; 9) 900; 10) 625. **4.5** 1) 196920; 2) 9810240; 3) 1306800; 4) 879340. **4.6** 1) 255025; 2) 13184161; 3) 1742400. **4.7** 8!. **4.8** 1) C_n^2; 2) C_n^3. **4.9** 1) C_n^4; 2) 0. **4.10** $\frac{1}{2}mn(m+n-2)$. **4.11** 1) 0; 2) 3 способа вибрати рівносторонній та 6 способів вибрати рівнобедрений, але не рівносторонній; 3) 0, якщо $n \neq 3k$; k способів вибрати рівносторонній та $n([\frac{n-1}{2}]-1)$ способів вибрати рівнобедрений, але не рівносторонній, якщо $n = 3k$. **4.12** $\frac{n(n-3)}{2}$. **4.13** 3^n. **4.14** Перша цифра може бути нулем: 1) 5040; 2) 4320; 3) 360; 4) 10; 5) 270; 6) 630; 7) 4320; 8) 4096; 9) 100; 10) 210; 11) 715. Перша цифра не може бути нулем – аналогічно. **4.15** Перша цифра може бути нулем: 1) 90720; 2) 226800; 3) 80640; 4) 201600. Перша цифра не може бути нулем – аналогічно. **4.16** Перша цифра може бути нулем: 1) 63; 2) 1701. Перша цифра не може бути нулем – аналогічно. **4.17** Більше тих, що не містять 2. **4.18** 1) 96; 2) 170016; 3) 2599920; 4) 6676992; 5) 54870480. **4.19** 1. n^m. 2. 0 при $m > n$, P_n^m при $m \leqslant n$. 3. 0 при $m < n$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^m$ при $m \geqslant n$ (вказівка: використати формулу включень і виключень). **4.20** 1) 25920; 2) 21600; 3) $6n(n-5)\cdot(n-4)!$; 4) $6(n-4)\cdot(n-3)!$. **4.21** 1) $n\cdot k!(n-k)!$; 2) $n \cdot k!\frac{(n+m-k)!}{m!}$. **4.22** C_{n+1}^m при $m \leqslant n+1$, 0 при $m > n+1$. **4.23** 151200. **4.24** 2520. **4.25** $10! \cdot 33!$. **4.26** $10! - 1$. **4.27** 1. $\frac{32!}{10!10!10!2!}$. 2. $\frac{3\cdot 28!}{6!10!10!2!}$. 3. $\frac{24\cdot 28!}{9!9!9!}$. 4. $\frac{63}{3596}$, $\frac{50}{899}$. **4.28** 1. 184756. 2. 91520. 3. 16016. 4. 77220. 5. $\frac{160}{323}$, $\frac{28}{323}$, $\frac{135}{323}$. **4.29** 1) 2072; 2) 10017. **4.30** 670. **4.31** 28. **4.32** 1) 51; 2) 96. **4.33** 1) 36; 2) 15; 3) 17; 4) 5. **4.34** Вказівка: використати формулу включень і виключень. 1) $F(n) = n!\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}$; 2) $n! - F(n)$; 3) $C_n^k F(n-k)$. **4.35** Вибрати по два черевики: 1) $\frac{(2n)!}{2^n}$; 2) $(n!)^2$; 3) $n!$. Вибрати та одягти два черевики: 1) $(2n)!$; 2) $2^n(n!)^2$; 3) $2^n \cdot n!$. **4.36** 1) $(1+m)^n$; 2) m^n; 3) $m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ при $m \geqslant n$, 0 при $m < n$; 4) див. п. 3 задачі 4.19. **4.37** 1) 2^{n^2-n}; 2) 2^{n^2-n}; 3) $2^{n(n+1)/2}$; 4) $2^n 3^{n(n-1)/2}$. **4.39** 1) 5775; 2) 3360; 3) 2380; 4) 35.

4.45 1) 18720; 2) 1105397280; 3) −4435236, 8414685, −5266100; 4) 295245. **4.46** $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Елементи теорії графів

5.1 1) Рис. 12.1; 2) рис. 12.2–12.3; 3) рис. 12.4–12.7. **5.2** Ні. **5.3** Наприклад, рис. 12.8. **5.4** 1) Напівейлерів, наприклад, $v_3v_1v_2v_8v_3v_7v_6v_5v_4v_8v_5$; 2) ні ейлерів, ні напівейлерів; 3) напівейлерів, наприклад, $v_2v_1v_3v_5v_1v_4v_2v_3v_6$

$v_2v_5v_4v_6v_5$; 4) ні ейлерів, ні напівейлерів; 5) ейлерів, наприклад, $v_1v_2v_3v_5v_7$ $v_6v_4v_1v_7v_2v_6v_3v_4v_5v_1$; 6) ейлерів, наприклад, $v_1v_2v_9v_3v_4v_9v_5v_6v_9v_7v_9v_9v_1$; 7) ейлерів, наприклад, $v_1v_2v_9v_3v_4v_9v_5v_6v_9v_7v_9v_9v_1$; 8) ейлерів, наприклад, v_1v_4 $v_3v_7v_1v_6v_4v_2v_3v_5v_7v_8v_6v_2v_5v_8v_1$. **5.5** 1) Гамільтонів, $v_1v_2v_8v_4v_5v_6v_7v_3v_1$ з точністю до першої та останньої вершини та напрямку руху; 2) гамільтонів, наприклад, $v_1v_4v_5v_2v_3v_7v_6v_1$; 3) гамільтонів, наприклад, $v_1v_2v_3v_6v_5v_4v_1$; 4) гамільтонів, наприклад, $v_3v_2v_4v_1v_6v_8v_5v_7v_3$; 5) гамільтонів, наприклад, $v_1v_7v_2v_6v_3v_4v_5v_1$; 6) гамільтонів, наприклад, $v_1v_2v_4v_5v_7v_6v_3v_1$; 7) ні гамільтонів, ні напівгамільтонів; 8) гамільтонів, наприклад, $v_1v_4v_3v_7v_5v_2v_6v_8v_1$.

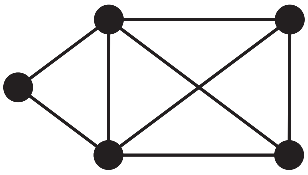

Рис. 12.1

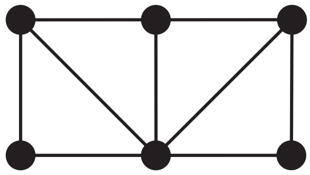

Рис. 12.2

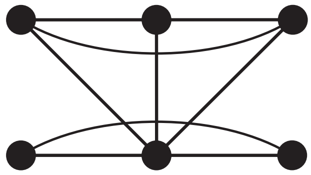

Рис. 12.3

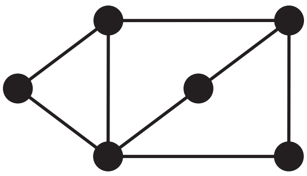

Рис. 12.4

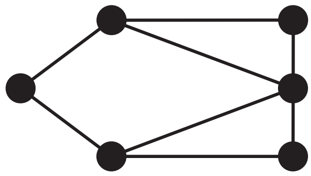

Рис. 12.5

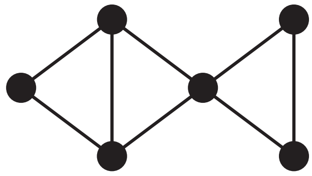

Рис. 12.6

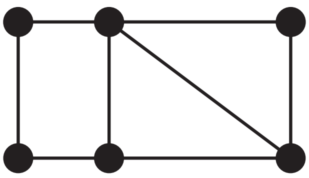

Рис. 12.7

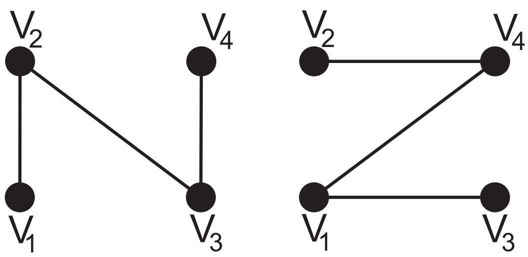

Рис. 12.8

5.6 1. Вказівка: для графа K_5 застосувати наслідок з формули Ейлера, для графа $K_{3,3}$ – наслідок з формули Ейлера для дводольних графів; 2. Непланарний, містить граф, гомеоморфний $K_{3,3}$, долі $\{v_1, v_5, v_7\}$ та $\{v_3, v_4, v_6\}$; непланарний, містить граф, гомеоморфний $K_{3,3}$, долі (з урахуванням гомеоморфізму) $\{v_2, v_4, v_5\}$ та $\{v_1, v_3, v_8\}$; непланарний, містить граф, гомеоморфний K_5, що визначається вершинами $\{v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\}$; планарний (плоский); планарний; непланарний, містить граф, гомеоморфний $K_{3,3}$, долі (з урахуванням гомеоморфізму) $\{v_2, v_9, v_{10}\}$ та $\{v_1, v_3, v_7\}$. **5.7** Ні ейлерів, ні напівейлерів, не гамільтонів, напівгамільтонів, не дводольний. **5.8** Ні. **5.9** 24. **5.10** Рис. 12.9–12.15, G^{**} аналогічно. **5.11** 1) 3; 2) 3, 4, 2; 3) 4, 4, 3. **5.12** 1) Рис. 12.16; 2) рис. 12.17.

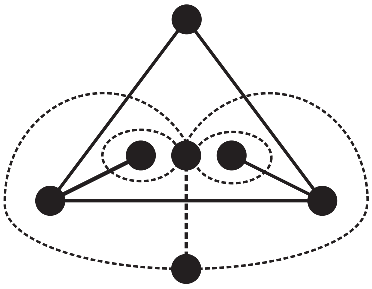

Рис. 12.9

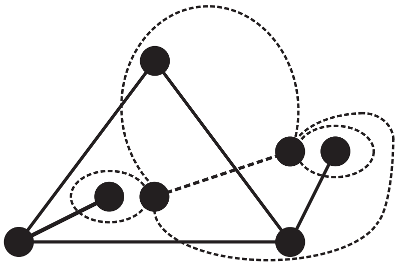

Рис. 12.10

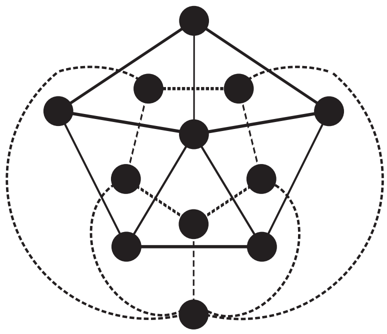

Рис. 12.11

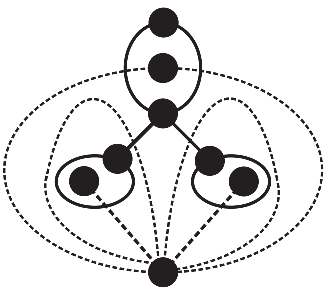

Рис. 12.12

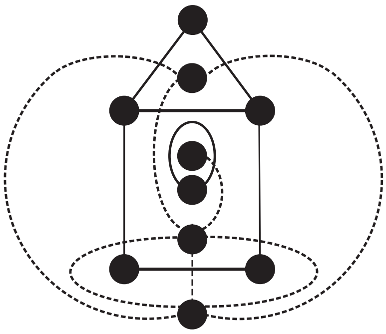

Рис. 12.13

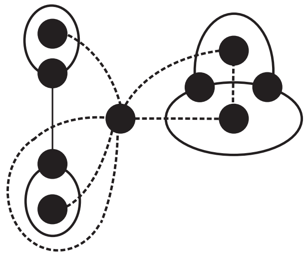

Рис. 12.14

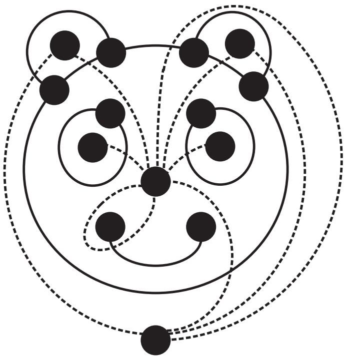

Рис. 12.15

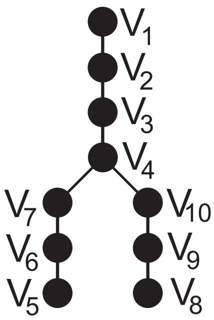

Рис. 12.16

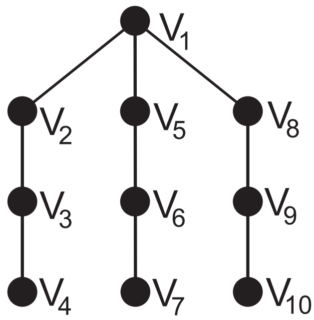

Рис. 12.17

5.13 1) Два мінімальні остовні дерева рис. 12.18–12.19; 2) одне з мінімальних остовних дерев, наприклад, рис. 12.20; 3) одне з мінімальних остовних дерев, наприклад, рис. 12.21; 4) рис. 12.22.

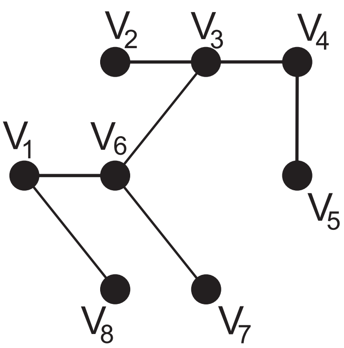

Рис. 12.18

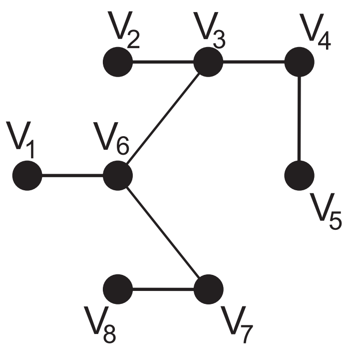

Рис. 12.19

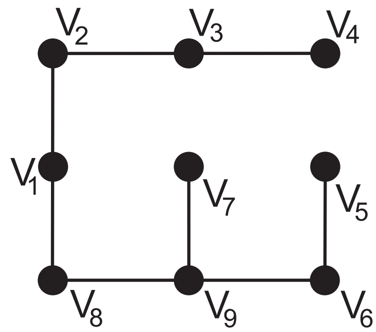

Рис. 12.20

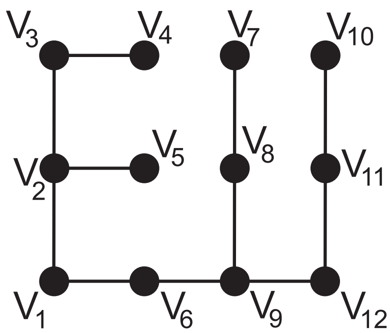

Рис. 12.21

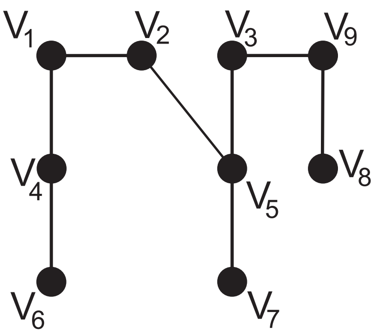

Рис. 12.22

5.14 1. $\begin{pmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 1 & 4 \\ \infty & 0 & 4 & 5 & 6 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 1 & 2 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 5 & 10 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 10 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 8 & 9 & 0 & -1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

5.16 1. Після додавання вершини з ключем 11 див. рис. 12.23; інші – аналогічно. 2. Після видалення вершини з ключем 3 див. рис. 12.24; з ключем 8 – див. рис. 12.25 або рис. 12.26; інші – аналогічно. **5.17** 1) Наприклад, рис. 12.27; 2) наприклад, рис. 12.28.

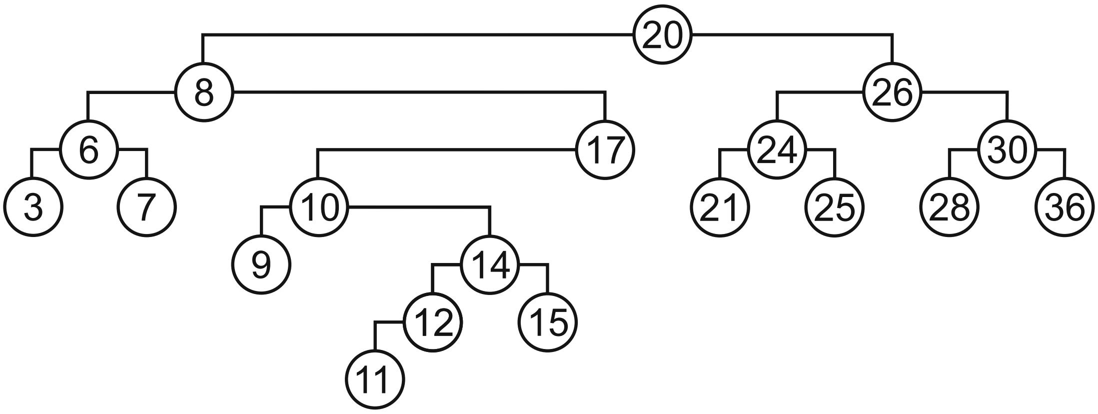

Рис. 12.23

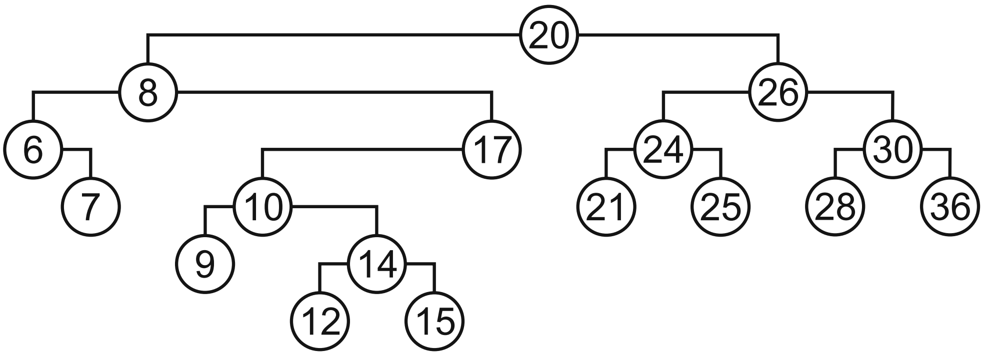

Рис. 12.24

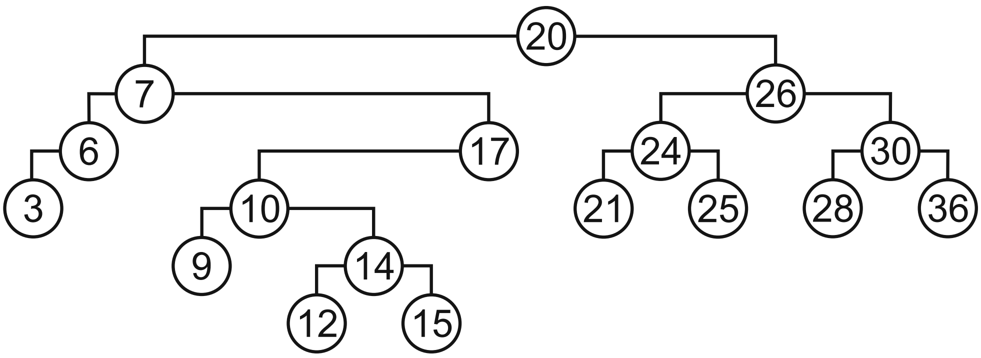

Рис. 12.25

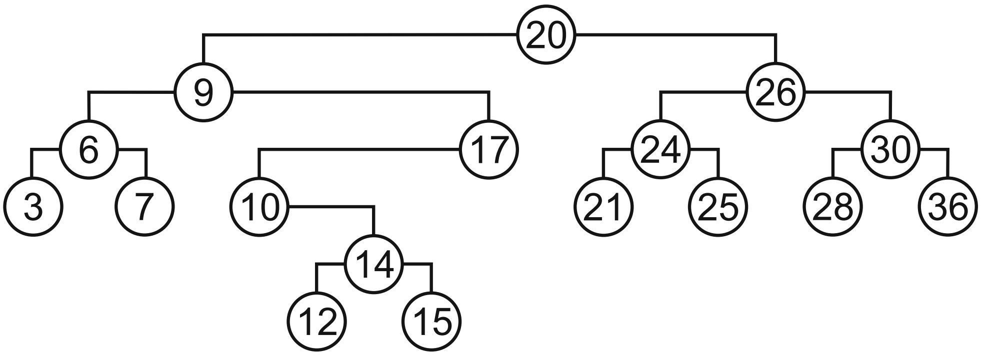

Рис. 12.26

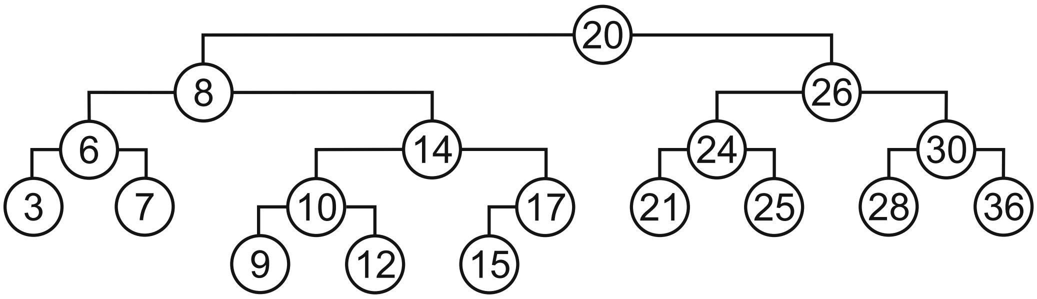

Рис. 12.27

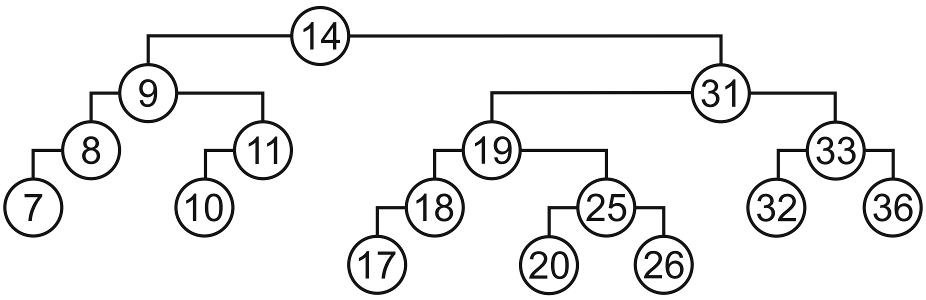

Рис. 12.28

Елементи теорії груп

6.1 1)–4), 6), 10), 24), 32) Ні; 5), 7)–9), 11)–23), 25)–31), 33)–34) так. **6.2** 1)–3) Ні; 4–5) так. **6.4** Так. Так. **6.5** Комутативна підгрупа. **6.6** 1) Так; 2) ні. **6.10** 1)–2) Група є абелевою. **6.11** 1) Так, мономорфізм, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Im} f = (0; +\infty)$; 2) так, ізоморфізм, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Im} f = (0; +\infty)$. **6.12** Так, $\operatorname{Ker} f = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Im} f = \{|z| = 1\}$. **6.13** 1)–2), 4)–5) Ні; 3) так.

6.16 Клас, породжений елементом I, містить лише I; клас, породжений елементом $-I$, містить лише $-I$; всі інші класи є нескінченними. Вказівка: для довільної матриці $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ розглянути спряжені елементи відносно матриць $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ та $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. **6.19** 1. Абелева група, нейтральний елемент e, $g_i^{-1} = g_i$, $[g_i] = \{g_i, e\}$ $(i = 1,2,3)$, не циклічна. 2. Вказівка: група ізоморфна $\langle S_3, \circ\rangle$. **6.20** $\langle \mathbb{Z}_3, +\rangle$; $\langle \mathbb{Z}_4, +\rangle$ та $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (див. п. 1 задачі 6.19); $\langle \mathbb{Z}_6, +\rangle$ та $\langle S_3, \circ\rangle$.

6.22 1) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&2&1&4 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&3&2 \end{smallmatrix}\right)$; 2) $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&2&3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&4&3 \end{smallmatrix}\right)$; 4) $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&3&2 \end{smallmatrix}\right)$, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&2&1&4 \end{smallmatrix}\right)$. **6.23** 1) $(1,2,3,4)$, $(1,3)\circ(2,4)$, $(1,8,4)\circ(2,5)\circ(3,7)\circ(6)$; 2) непарна, парна, парна; 3) 4, 2, 6. **6.24** 1) Нетотожна $\tau = (1,2)$; 2) нетотожні $\sigma_1 = (2,3)$, $\sigma_2 = (1,3)$, $\sigma_3 = (1,2)$, $\varphi_1 = (1,2,3)$, $\varphi_2 = (1,3,2)$. **6.25** $\frac{1}{k}P_n^k$, C_n^2. **6.26** σ_1 парна при $n = 4k$, $n = 4k-3$ та непарна при $n = 4k-1$, $n = 4k-2$, $k \in \mathbb{N}$; $|\sigma_1| = 2$. σ_2 парна при парних n та непарна при непарних n; $|\sigma_2| = 2$. σ_3 парна при парних n та непарна при непарних n; $|\sigma_3| = 2$. σ_4 непарна при $n = 4k-1$, $k \in \mathbb{N}$ та парна при інших n. **6.27** 1) 6; 2) 6; 3) 12; 4) 15. **6.28** 1) Рис. 12.29; 2) ε, φ_1, φ_2 парні, σ_1, σ_2, σ_3 непарні; 3) $[\sigma_1] = \{\sigma_1, \varepsilon\}$, $[\sigma_2] = \{\sigma_2, \varepsilon\}$, $[\sigma_3] = \{\sigma_3, \varepsilon\}$, $[\varphi_1] = [\varphi_2] = \{\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon\}$, $[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$, $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_3| = 2$, $|\varepsilon| = 1$, $|\varphi_1| = |\varphi_2| = 3$, не циклічна; 4) $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma_1, \varepsilon\}$, $\{\sigma_2, \varepsilon\}$, $\{\sigma_3, \varepsilon\}$, $\{\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon\}$, S_3. **6.29** Для $A \in M_3(\mathbb{R})$ $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$ (див. задачу 6.28), для інших аналогічно. **6.30** 1) $\{\varepsilon\}\cup\{\tau\}$; 2) $\{\varepsilon\}\cup\{\varphi_1, \varphi_2\}\cup\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$; 3) $\{\varepsilon\}\cup\{\varphi_1\}\cup\{\varphi_2\}$; 4) 12 елементів розбиваються на 4 класи, обчислення аналогічне.

6.33 Для $\langle \mathbb{Z}_4, +\rangle$, рис. 12.30: 1) $|\bar{0}| = 1, |\bar{1}| = |\bar{3}| = 4, |\bar{2}| = 2$; 2) $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$, $(\bar{1})^{-1} = \bar{3}$, $(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$, $(\bar{3})^{-1} = \bar{1}$; 3) $[\bar{0}] = \{\bar{0}\}$, $[\bar{1}] = [\bar{3}] = \mathbb{Z}_4$, $[\bar{2}] = \{\bar{0}, \bar{2}\}$; 4) $\bar{1}$, $\bar{3}$. Для $\langle \mathbb{Z}_5, \cdot\rangle$, рис. 12.31: 1) $|\bar{1}| = 1, |\bar{2}| = |\bar{3}| = 4, |\bar{4}| = 2$;

$\circ$	ε	σ_1	σ_2	σ_3	φ_1	φ_2
ε	ε	σ_1	σ_2	σ_3	φ_1	φ_2
σ_1	σ_1	ε	φ_1	φ_2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	φ_2	ε	φ_1	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	φ_1	φ_2	ε	σ_1	σ_2
φ_1	φ_1	σ_3	σ_1	σ_2	φ_2	ε
φ_2	φ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ε	φ_1

Рис. 12.29

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Рис. 12.30

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Рис. 12.31

2) $(\bar{1})^{-1} = \bar{1}$, $(\bar{2})^{-1} = \bar{3}$, $(\bar{3})^{-1} = \bar{2}$, $(\bar{4})^{-1} = \bar{4}$; 3) $[\bar{1}] = \{\bar{1}\}$, $[\bar{2}] = [\bar{3}] = \mathbb{Z}_5$, $[\bar{4}] = \{\bar{1}, \bar{4}\}$; 4) $\bar{2}$, $\bar{3}$. Для інших груп аналогічно. **6.34** 1) $f_1(\bar{1}) = \bar{0}$, $f_1(\bar{2}) = \bar{1}$, $f_1(\bar{3}) = \bar{3}$, $f_1(\bar{4}) = \bar{2}$; $f_2(\bar{1}) = \bar{0}$, $f_2(\bar{2}) = \bar{3}$, $f_2(\bar{3}) = \bar{1}$, $f_2(\bar{4}) = \bar{2}$; 2–3) аналогічно; вказівка: ізоморфізм переводить твірну в твірну. **6.35** 1) $f_0(\bar{1}) = \bar{0}$, $\operatorname{Ker} f_0 = \mathbb{Z}_4$, $\operatorname{Im} f_0 = \{\bar{0}\}$; $f_3(\bar{1}) = \bar{3}$, $\operatorname{Ker} f_3 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, $\operatorname{Im} f_3 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$; 2) $f_0(\bar{1}) = \bar{0}$, $\operatorname{Ker} f_0 = \mathbb{Z}_{10}$, $\operatorname{Im} f_0 = \{\bar{0}\}$; $f_k(\bar{1}) = \overline{3k}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, $\operatorname{Ker} f_k = \{\bar{0}, \bar{5}\}$, $\operatorname{Im} f_k = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$; 3) $f_k(m) = \overline{km}$ $(m \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \ldots, n-1)$; $\operatorname{Ker} f_k = \{m \mid km \,\vdots\, n\}$, $\operatorname{Im} f_k = \{\overline{km} \mid m \in \mathbb{Z}\}$; 4) $f_0(\bar{k}) = 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, $\operatorname{Ker} f_0 = \mathbb{Z}_n$, $\operatorname{Im} f_0 = \{0\}$; 5) $f_0(n) = \varepsilon$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\operatorname{Ker} f_0 = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im} f_0 = \{\varepsilon\}$; $f_i(2n) = \varepsilon$, $f_i(2n+1) = \sigma_i$ $(i = 1, 2, 3,\ n \in \mathbb{Z})$, $\operatorname{Ker} f_i = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Im} f_i = \{\sigma_i, \varepsilon\}$; $f_4(3n) = \varepsilon$, $f_4(3n+1) = \varphi_1$, $f_4(3n+2) = \varphi_2$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\operatorname{Ker} f_4 = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Im} f_4 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon\}$; $f_5(3n) = \varepsilon$, $f_5(3n+1) = \varphi_2$, $f_5(3n+2) = \varphi_1$ $(n \in \mathbb{Z})$, $\operatorname{Ker} f_5 = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\operatorname{Im} f_5 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon\}$. **6.38** Для $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0}, \bar{6}\}$, $\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$, $\mathbb{Z}_{12}$; для інших аналогічно. **6.42** 1. Фактор-група $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0;1)\}$ (операція «+» переноситься стандартним чином), класи еквівалентності $A_\alpha = \{\alpha + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 2. $\{\{a > 0\}, \{a < 0\}\}$. 3. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = \alpha\}$. 4. $\{A_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in [0;1)\}$, $A_{\alpha\beta} = \{(\alpha + m) + (\beta + n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. 5. $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}$, $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg z = \alpha\}$. 6. $\{A_\alpha \mid \alpha > 0\}$, $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = \alpha\}$. 7. $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0; \frac{\pi}{2})\}$, $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg \alpha \in \{\alpha + \frac{\pi k}{2} \mid k = 0, 1, 2, 3\}\}$. 8. $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0; \frac{2\pi}{n})\}$, $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg \alpha \in \{\alpha + \frac{2\pi k}{n} \mid k = 0, \ldots, n-1\}\}$. 9. $\{A_\alpha \mid \alpha \neq 0\}$, $A_\alpha = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = \alpha\}$. 10. $\{A_\alpha \mid \alpha > 0\}$, $A_\alpha = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid |\det A| = \alpha\}$. 11. $H = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, $\{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}\}$. 12–13. Аналогічно. 14. $\{\{\varepsilon, \varphi_1, \varphi_2\}, \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}\}$. 15. $\{A_n, S_n \setminus A_n\}$. 16. $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$. 17. $\{A_{cd} \mid c, d \in \mathbb{R}\}$, $A_{cd} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. 18. $\{\{\pm 1, \pm i\}, \{\pm j, \pm k\}\}$. **6.43** 1. Ізоморфна групі п. 29 задачі 6.1, $f\colon a \mapsto \{a\}$. 2. $\langle \mathbb{Z}_2, + \rangle$, $f(\{a > 0\}) = \bar{0}$, $f(\{a < 0\}) = \bar{1}$. 3. $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, $f\colon z \mapsto \operatorname{Im} z$. 4. $\langle [0;1) \times [0;1), * \rangle$, $(a, b) * (c, d) = (\{a + c\}, \{b + d\})$, $f\colon a + bi \mapsto (\{a\}, \{b\})$. 5. Ізоморфна групі п. 29 задачі 6.1, $f\colon z \mapsto \frac{\arg z}{2\pi}$. 6. $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, $f\colon z \mapsto |z|$. 7–8. Ізоморфна групі п. 29 задачі 6.1. 9. $\langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, $f\colon A \mapsto \det A$. 10. $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$, $f\colon A \mapsto |\det A|$. 11. $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$, $f(\{\bar{0}, \bar{3}\}) = \bar{0}$, $f(\{\bar{1}, \bar{4}\}) = \bar{1}$, $f(\{\bar{2}, \bar{5}\}) = \bar{2}$. 12–13. Аналогічно. 14–15. $\langle \mathbb{Z}_2, + \rangle$, $f\colon \sigma \mapsto \varkappa(\sigma)$. 16. $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$, $f(k) = \overline{k \bmod n}$. 17. $\langle \mathbb{R}^2, + \rangle$, $f\colon a + bi + cj + dk \mapsto (c, d)$. 18. $\langle \mathbb{Z}_2, + \rangle$, $f(\{\pm 1, \pm i\}) = \bar{0}$, $f(\{\pm j, \pm k\}) = \bar{1}$. **6.44** Наприклад, $G = \left\langle \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{smallmatrix}\right) \mid a_1 a_2 \neq 0 \right\}, \cdot \right\rangle$, $f\colon \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ b & a_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Елементи теорії кілець

7.1 1), 8), 14)–15) Ні; інші так. **7.2** Всі, крім 13), 18)–19) комутативні. **7.3** 4), 23)–24) кільце без одиниці; 17) містить одиницю $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, якщо R містить одиницю; 2)–3), 5)–12) 1; 13), 16), 18)–19) I; 20), 22) $1 = 1(x)$; 21) $\bar{1}$. **7.5** $f\colon \left(\begin{smallmatrix}a&b\\-b&a\end{smallmatrix}\right) \mapsto a + bi$, $f\colon \left(\begin{smallmatrix}a&b\\2b&a\end{smallmatrix}\right) \mapsto a + b\sqrt{2}$. **7.6** 1) Ні; 2) так. **7.7** $n^2 = km$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$. **7.8** Так. **7.9** Ні. **7.10** c. **7.12** Так. **7.13** 1) $\{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$; 2) нема; 3) $\{\bar{k} \mid k = 1, \ldots, 47,\ \text{НСД}(48, k) > 1\}$; 4) $\{\bar{k} \mid k = 1, \ldots, n-1,\ \text{НСД}(n, k) > 1\}$. **7.15** 1) Так; 2) ні. **7.16** 3) $\{\pm 1\}$; 5) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; 6) $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; 10) $\{\pm 1, \pm i\}$; 13) $\langle GL(n, \mathbb{R}), +, \cdot\rangle$; 20) $\{\pm 1(x)\}$; 21) $\{\bar{k} \mid\ \text{НСД}(n, k) = 1\}$; 22) $\{f \in C[a; b] \mid f(x) \neq 0\}$. **7.17** 1) $\{\bar{1}, \bar{5}\}$, циклічна; 2) $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$, циклічна; 3) $\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$, не циклічна; 4) $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$, не циклічна. **7.18** Лише тривіальні ідеали. **7.19** 1. $\{2^A \cap S \mid A \in S\}$. **7.20** 2. Факторкільце $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ (операції «$+$» та «$\cdot$» переносяться стандартним чином), класи еквівалентності $A_\alpha = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(a) = \alpha\}$. 3. $p(\cdot) \mapsto p(a)$. **7.21** 2. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, $A_\alpha = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(i) = \alpha\}$. 3. $p(\cdot) \mapsto p(i)$. **7.22** 2. $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, $A_\alpha = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a}) = \alpha\}$. 3. $p(\cdot) \mapsto p(\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a})$. **7.23** 2. $\{A_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $A_{\alpha\beta} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(a) = \alpha, p(b) = \beta\}$. 3. $p(\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} p(a) & 0 \\ 0 & p(b) \end{pmatrix}$. **7.24** 2. $\{A_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $A_{\alpha\beta} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(a) = \alpha, p'(a) = \beta\}$. 3. $p(\cdot) \mapsto \begin{pmatrix} p(a) & p'(a) \\ 0 & p(a) \end{pmatrix}$. **7.25** 1–2) Ні. **7.29** 1. $R[S_2] = \langle\{a_1\varepsilon + a_2\tau \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}, +, \cdot\rangle$, де $(a_1\varepsilon + a_2\tau) + (b_1\varepsilon + b_2\tau) = (a_1 + b_1)\varepsilon + (a_2 + b_2)\tau$, $(a_1\varepsilon + a_2\tau) \cdot (b_1\varepsilon + b_2\tau) = (a_1b_1 + a_2b_2)\varepsilon + (a_1b_2 + a_2b_1)\tau$; інші аналогічно. 2. $(R[S_2])^* = \{a_1\varepsilon + a_2\tau \mid |a_1| \neq |a_2|\}$; $(R[A_3])^* = \{a_0\varepsilon + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \mid (a_0 + a_1 + a_2 \neq 0) \wedge \neg(a_0 = a_1 = a_2)\}$.

Частково впорядковані множини

8.1 4), 5), 7), 9) Ні; 1)–3), 6), 8), 10) так. **8.3** 1) Рис. 12.32, 2)–3) аналогічно. **8.4** 1) Нескінченна кількість непорівняних між собою елементів; 2) наприклад, $\langle\mathbb{N} \cup \{a\}, \leqslant\rangle$ за умови, що a не порівняний з жодним натуральним числом; 3) наприклад, ЧВМ, дуальна до ЧВМ п. 2; 4) наприклад, $\langle\mathbb{Z} \cup \{a\}, \leqslant\rangle$; 5) наприклад, $\langle(0; 1), \leqslant\rangle$; 6) множина з непорівняних між собою елементів. **8.5** Для 72 рис. 12.33, для інших – аналогічно. **8.7** 2. Рис. 12.34. 3. $\sup A = (\max(m_1, n_1), \max(m_2, n_2))$, $\inf A = (\min(m_1, n_1), \min(m_2, n_2))$. 4. $\{(m_1, n_1) \mid (m_1 - m)(n_1 - n) < 0\}$. 5. Вказівка: «смуги» п. 4 мають скінченну ширину. **8.8** 1–4. Аналогічно. 5. Ні.

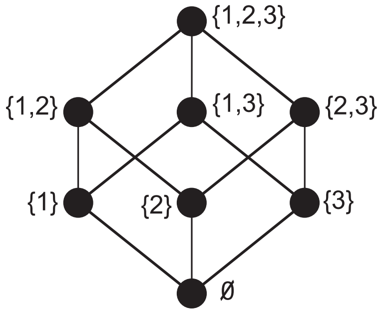

Рис. 12.32

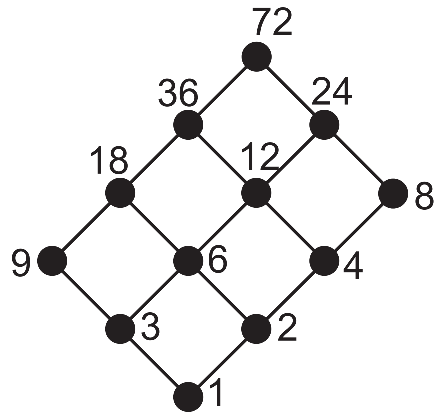

Рис. 12.33

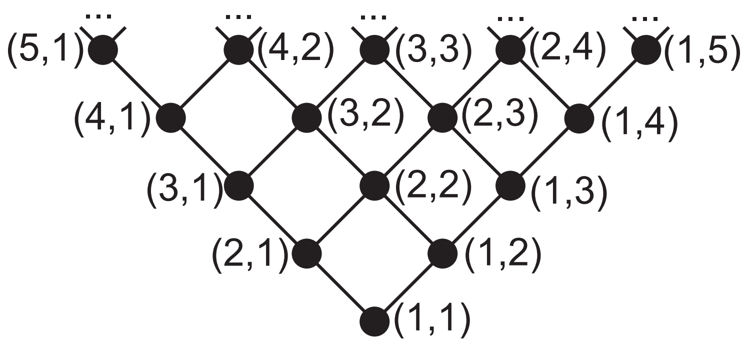

Рис. 12.34

Решітки

9.2 Наприклад, $\langle [0;1], \max, \min \rangle$. **9.3** 1)–4) Так. **9.5** Для 72 див. рис. 12.33; елементи 1, 8, 9, 72 мають доповнення 72, 9, 8, 1 відповідно; інші – аналогічно. **9.6** 1. Ні. 2. $n = 36$ – ні, інші – так. 3. $n = 40$ – недистрибутивна, немодулярна, не доповнена решітка; елементи 40, 8, 5, 1 мають доповнення 1, 5, 8, 40 відповідно; для інших n – аналогічно. **9.9** 1) дистрибутивна; модулярна; обмежена; доповнена тоді й тільки тоді, коли $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, де всі p_i – прості числа; 2) дистрибутивна; модулярна; обмежена знизу і необмежена зверху; 3) дистрибутивна; модулярна; обмежена знизу і необмежена зверху; 4) недистрибутивна; модулярна; обмежена; доповнена. **9.10** 1) Решітка; недистрибутивна; немодулярна; не доповнена; пари взаємодоповнених елементів: a та h, b та e, b та f, c та g, e та g, f та g; 2) решітка; недистрибутивна; немодулярна; не доповнена; пари взаємодоповнених елементів: a та g, b та c, b та f, c та

e, c та f; для інших ЧВМ аналогічно. **9.11** 6. **9.12** Див., наприклад, рис. 12.35. **9.13** $1 \Leftrightarrow 2$ і визначає дистрибутивну решітку; $1 \not\Leftarrow 3$ (наприклад, N_5). **9.14** 1. Ні, не існує $\sup\{\{1\},\{2\}\}$. 2. Решітка; недистрибутивна, немодулярна; не доповнена; елементи $\{1,2,3,4\}$, $\varnothing$ мають доповнення $\varnothing$, $\{1,2,3,4\}$ відповідно. 3. Решітка; недистрибутивна; немодулярна; не доповнена; доповнення – аналогічно. **9.18** Решітка; $\dim X \geqslant 2$ – недистрибутивна, $\dim X = 0, 1$ – дистрибутивна; модулярна; доповнена. **9.19** 1. $\langle \mathbb{Z}_{18}, +\rangle$: решітка підгруп ізоморфна решітці дільників числа 18, дистрибутивна, модулярна, доповнена; $\langle \mathbb{Z}_{36}, +\rangle$ аналогічно. 2. $\langle S_3, \circ\rangle$: решітка підгруп (див. рис. 12.36) – недистрибутивна, модулярна, доповнена; решітка нормальних дільників(див. рис. 12.37) – дистрибутивна, модулярна, доповнена; $\langle S_4, \circ\rangle$, вказівка: решітка підгруп немодулярна, решітка нормальних дільників модулярна.

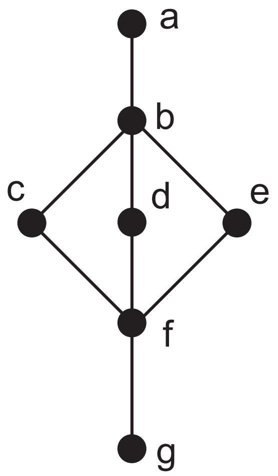

Рис. 12.35

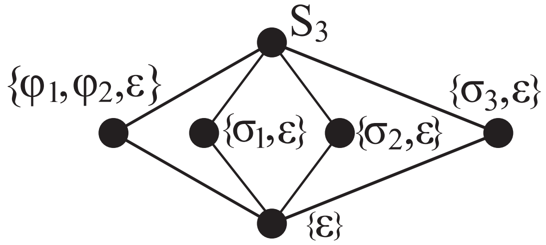

Рис. 12.36

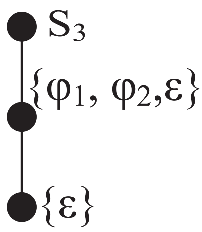

Рис. 12.37

Булеві алгебри

10.3 1) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, атоми $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; 2) $\{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4, 5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}$, атоми $\{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$; 3) $\{\varnothing, \{1,5\}, \{2,4\}, \{3\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3, 4,5\}\}$, атоми $\{\{1,5\}, \{2,4\}, \{3\}\}$. **10.4** Не існує. **10.5** 1) $x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$; 2) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$; 3) наприклад, $x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3$; 4) наприклад, $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$ або $x_1 \vee \bar{x}_3$; 5) наприклад, $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2$; 6) наприклад, $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4$; 7) наприклад, $\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3$. **10.6** 1) $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$; 2) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$; 3)

$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$; 4) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$; 5) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$. **10.7** 1) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$; 2) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$; 3) $x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$; 4) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$. **10.8** 1) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; 2) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; 3) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$; 4) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$. **10.9** 1) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$, $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; 2) $x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; 3) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$, $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; 4) 0, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$; 5) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$, $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; 6) $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$; 7) $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$; 8) $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; 9) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$; 10) $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$; 11) $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$, $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$; 12) $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$, $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$. **10.10** 1) $2^n - n - 1$; 2) $n+1$; 3) $2^n - 1$; 4) $2^{n-1} + 2$. **10.11** 1) $2^n \cdot k + 2^m \cdot l - kl$; 2) kl. **10.12** 1) $\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_3 x_4$; 2) $x_1 \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4$;

3) $x_1+x_2+x_3+x_4$; 4) $\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2x_3x_4+x_1\bar{x}_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$. **10.13** 1) $x_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3$; 2) $x_1+\bar{x}_2\bar{x}_3$; 3) $x_1x_2+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3$; 4) $x_1x_2x_3+x_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$. **10.14** Вказівка: простими імплікантами є всі кон'юнкти скороченої ДНФ. 1. Скорочена ДНФ $x_1+\bar{x}_2$ є тупиковою; всі прості імпліканти ядрові. 2. Скорочена ДНФ $\bar{x}_2+x_1\bar{x}_3$ є тупиковою; всі прості імпліканти ядрові. 3. Скорочена ДНФ $x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$ є тупиковою; всі прості імпліканти ядрові. 4. Скорочена ДНФ $\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_2+\bar{x}_3$ є тупиковою; всі прості імпліканти ядрові. 5. Скорочена ДНФ $\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_3$, тупикові $T_1=\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2$, $T_2=\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_3$; ядрові імпліканти $\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3$. 6. Скорочена ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_3+\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3+x_1x_2+x_2x_3$, тупикові $T_1=x_1x_2+\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_3$, $T_2=x_1\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2+x_2x_3$, $T_3=x_1x_2+x_1\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_3$, $T_4=x_1x_2+x_2x_3+\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2$, $T_5=x_2x_3+\bar{x}_1x_3+x_1\bar{x}_3+\bar{x}_2\bar{x}_3$; ядрових імплікант нема. 7. Скорочена ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, тупикові $T_1=\bar{x}_1\bar{x}_2+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3x_4$, $T_2=\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, $T_3=\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $T_4=\bar{x}_1\bar{x}_2+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$; ядрова імпліканта $\bar{x}_1\bar{x}_2$. 8. Скорочена ДНФ $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$, тупикові $T_1=x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, $T_2=x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $T_3=x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$; ядрові імпліканти $x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$. 9. Скорочена ДНФ $x_1x_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+x_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$, тупикові $T_1=x_1x_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $T_2=x_1x_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$, $T_3=x_1x_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+x_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $T_4=x_1x_3x_4+\bar{x}_1x_3\bar{x}_4+x_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$; ядрові імпліканти $x_1x_3x_4$, $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$. 10. Скорочена ДНФ $x_1\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_3$, тупикові $T_1=x_1\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3$, $T_2=x_1\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_2\bar{x}_3x_4+x_2x_3\bar{x}_4$, $T_3=x_1\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_4+\bar{x}_1x_2x_3$, $T_4=x_1\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_2x_3\bar{x}_4$; ядрові імпліканти $x_1\bar{x}_4$, $\bar{x}_1x_3x_4$. 11. Скорочена ДНФ $\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3x_4+x_1x_2x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1x_3\bar{x}_4+x_2x_3$, тупикові $T_1=\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_2x_3$, $T_2=\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_3\bar{x}_4+x_2x_3$, $T_3=\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1x_2x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_2x_3$, $T_4=\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1x_2x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_3\bar{x}_4$, $T_5=\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3x_4+x_1x_2x_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1x_3\bar{x}_4$; ядрові імпліканти $\bar{x}_1x_3x_4$, $\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$. 12. Скорочена ДНФ $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_4$, тупикові $T_1=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_2x_3x_4+x_1\bar{x}_4$, $T_2=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_4$, $T_3=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+$

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_4+x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_4$, $T_4=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+x_2x_3x_4+x_1x_2x_3$, $T_5=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1\bar{x}_4$, $T_6=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_4$, $T_7=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+x_1x_2x_3$, $T_8=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1\bar{x}_4$, $T_9=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_4$, $T_{10}=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_1x_2x_3$, $T_{11}=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1\bar{x}_4$, $T_{12}=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_3x_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_1x_2x_3$; ядрова імпліканта $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. **10.15** 1) Скорочена ДНФ $x_3x_4+x_1x_2x_3+\bar{x}_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2x_4$, тупикова $x_1x_2x_3+\bar{x}_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2x_4$; всі прості імпліканти, крім x_3x_4, ядрові; 2) скорочена ДНФ $\bar{x}_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$, тупикові $T_1=\bar{x}_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, $T_2=\bar{x}_1x_2x_4+\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2x_4+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$; ядрові імпліканти $\bar{x}_1x_2x_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$, $x_1\bar{x}_2x_4$; 3) скорочена ДНФ $\bar{x}_1x_2+\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3+x_2x_4+x_2\bar{x}_3$, тупикова $\bar{x}_1x_2+\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_1\bar{x}_3+x_2x_4$, ядрові імпліканти $\bar{x}_1x_2$, $\bar{x}_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_3$, x_2x_4. **10.17** Скорочена ДНФ $x_1x_4+\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3$ є тупиковою; всі прості імпліканти ядрові. **10.18** 1.

Булеві функції та функціональна повнота

11.1 1.

x_1	x_2	$x_2 \downarrow x_2$	$x_1 \vert x_2$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

. 2. 1) $x_1\wedge x_2=(x_1\downarrow x_1)\downarrow(x_2\downarrow x_2)$, $x_1\vee x_2=(x_1\downarrow x_2)\downarrow(x_1\downarrow x_2)$, $\bar{x}=x\downarrow x$; 2) $x_1\wedge x_2=(x_1|x_2)|(x_1|x_2)$, $x_1\vee x_2=(x_1|x_1)|(x_2|x_2)$, $\bar{x}=x|x$. **11.2** 1) $\{x_1,\bar{x}_1,x_2,\bar{x}_2\}$; 2) $\{0,x_1,x_2,x_1\oplus x_2\}$; 3) $\{0,1,x_1,x_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2\}$; 4) $\{x_1,x_2,x_1\wedge x_2\}$. **11.3** 1) $\{x,\bar{x}\}$; 2) $\{x,\bar{x},0,1\}$; 3) $\{x,x_1\vee x_2,x_1\vee x_2\vee x_3,\ldots\}$; 4) P_2. **11.4** 1) $x\to 0$; 2) $((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y))\downarrow(x\downarrow y)$; 3) $x\oplus(x\oplus x)$; 4) $x_1\leftrightarrow(x_2\leftrightarrow x_3)$. **11.5** 1), 3), 5) Так; 2), 4) ні. **11.8** Польський запис: 1) $\vee\ \wedge\ x\ y\ \oplus\ y\ z$; 2) $+\ x\ y$; 3) $\cdot\ x\ -\ y\ 2$; 4) $\cdot\ +\ x\ 5\ -\ y\ 1$; 5) $\cdot\ \hat{}\ x\ 2\ \hat{}\ +\ 1\ y\ 3$, де «^» позначає операцію піднесення до степеня, наприклад, $x\hat{}y=x^y$; 6) $-\ \exp\ -\ \cdot\ 3\ x\ \hat{}\ x\ 2\ 1$, де $\exp(x)=e^x$. Обернений польський запис: 1) $x\ y\ \wedge\ y\ z\ \oplus\ \vee$; 2) $x\ y\ +$; 3) $x\ y\ 2\ -\ \cdot$; 4) $x\ 5\ +\ y\ 1\ -\ \cdot$; 5) $x\ 2\ \hat{}\ 1\ y\ +\ 3\ \hat{}\ \cdot$, 6) $3\ x\ \cdot\ x\ 2\ \hat{}\ -\ \exp\ 1\ -$. **11.9** 1) $(x\oplus y)\oplus z$; 2) $(x\vee y)\wedge(z\downarrow x)$. **11.10** 1), 3), 4), 8) Так; 2), 5–7) ні. **11.11** 1) (0100); 2) (1010 0101); 3) (1001 0110). **11.12** 1), 3), 5–8) Так; 2), 4) ні. **11.13** 1) $0=f(x,x,\bar{x})$, $1=\overline{f(x,x,\bar{x})}$; 2) $0=\overline{f(x,\bar{x},\bar{x})}$, $1=f(x,\bar{x},\bar{x})$; 3) $0=\overline{f(x,\bar{x},\bar{x})}$, $1=f(x,\bar{x},\bar{x})$; 4) $0=f(x,\bar{x},x,x)$, $1=\overline{f(x,\bar{x},x,x)}$. **11.14**

2) $0 = f(x, \bar{x})$, $1 = \overline{f(x, \bar{x})}$; 4) $0 = f(x, x, x)$, $1 = \overline{f(x, x, x)}$. **11.15** 1) $x \oplus y \oplus xy$; 2) $1 \oplus x$; 3) $1 \oplus x \oplus xy$; 4) $1 \oplus x \oplus y$; 5) $1 \oplus xy \oplus xyz$; 6) $1 \oplus xz \oplus xyz$; 7) $z \oplus xy \oplus xyz$; 8) $y \oplus xz$; 9) $x \oplus y \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$; 10) $1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus yz \oplus xyz$; 11) $1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus t$. Лінійні функції 2), 4), 11). **11.16** 1) $x \oplus y$; 2) 0; 3) $1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus yz$; 4) $x \oplus y \oplus z$; 5) $x \oplus y \oplus z$; 6) $x \oplus xyz$; 7) $1 \oplus x \oplus xy$; 8) $1 \oplus x \oplus y \oplus z$; 9) $1 \oplus x \oplus z$; 10) $1 \oplus x \oplus z \oplus xy$; 11) $1 \oplus x \oplus z \oplus xy \oplus xt \oplus yt \oplus xyt$; 12) $1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus t$. Лінійні функції 1–2), 4–5), 8–9), 12). **11.17** 1) $\overline{f(x, \bar{y})}$; 2) $\overline{f(\bar{x}, \bar{y})}$; 3) $f(\bar{x}, \bar{y}, 0)$; 4) $\overline{f(x, \bar{y}, \bar{y}, 0)}$. **11.18** 1), 4), 6–7) Ні; 2–3), 5), 8) так. **11.19** 1–2), 4–6), 7) Так; 3), 5), 8) ні. **11.20** 1) (010), (110); 2) (100), (110); 3) (110), (111); 4) (011), (010); 5) (1110), (1111); 6) (0000), (0001). **11.21** 1) $f(x, 1)$; 2) $f(0, x)$; 3) $f(x, 0, 1)$; 4) $f(x, 1, 0)$; 5) $f(x, 1, 1, 1)$; 6) $f(0, 0, 0, x)$. **11.22** 1) $\bar{x} = f(x, 1)$; 4) $\bar{x} = f(0, x, 1)$; 6) $\bar{x} = f(x, 0, 1)$; 7) $\bar{x} = f(0, 0, 1, x)$. **11.24** 1. f_1 при непарних n; f_2 при $n = 4k - 1$, де $k \in \mathbb{N}$; f_3 при $n = 3$; f_4 при непарних n. 2. f_1 при парних n; f_2 при $n = 4k$ або $n = 4k + 1$, де $k \in \mathbb{N}$. 3. f_1 при $n = 1$; f_2 при $n = 2$ або $n = 3$. **11.25** $T_0^* = T_1$, $T_1^* = T_0$, $M^* = M$, $S^* = S$, $L^* = L$. **11.27** 1. 2^{2^n}. 2. $2^{2^n - 1}$. 3. $2^{2^n - 1}$. 4. $2^{2^{n-1}}$. 5. 2^{n+1}. **11.28** 1. $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$. Жодна. 2. $\{\alpha \oplus x, \alpha \oplus y, \alpha \oplus z, \alpha \oplus m(x, y, z), \alpha \oplus m(\bar{x}, y, z), \alpha \oplus m(x, \bar{y}, z), \alpha \oplus m(x, y, \bar{z}), \alpha \oplus x \oplus y \oplus z\}$, де $\alpha \in \{0, 1\}$, $m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. 3. $\{0, 1, x, \bar{x}, y, \bar{y}, x \oplus y, x \leftrightarrow y\}$. **11.30** 1–3) Ні. **11.31** 1–2), 4), 6–7) Повний; 3), 5), 8) неповний. **11.32** 1–2), 4) Неповний; 3) повний. **11.33** 1), 4) Повний; 2), 3) неповний.

Список літератури

1. Мендельсон Э. Введение к математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320 с.

2. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 224 с.

3. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. – 3-е изд. перераб. – М.: Физматлит, 2005. – 416 с.

4. Винберг Э.Б. Курс алгебры. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002. – 544 с.

5. Сборник задач по алгебре / Под. ред. Кострикина А.И.: Учебник для вузов. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Физматлит, 2001. – 464 с.

6. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – М.: Наука, 1970. – 148 с.

7. Таран Т.А., Мыценко Н.А., Темникова Е.Л. Сборник задач по дискретной математике. – К.: Просвіта, 2001. – 61 с.

8. Биркгоф Г. Теория решёток. – М.: Наука, 1984. – 568 с.

9. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.

10. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. – М.: Физматлит, 2000. – 128 с.

11. Донской В.И. Дискретная математика. – Симферополь: «СОНАТ». – 2000. – 360 с.

12. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.

13. Наймарк М.А. Теория представлений групп. – М.: Наука, 1976. – 559 с.

14. Гуров С.И. Булевы алгебры, упорядоченные множества, решётки: определения, свойства, примеры. – 2-е изд. – М.: URSS: ЛИБРОКОМ, 2013. – 352 с.

15. Спекторський І.Я. Навчальний посібник з дисципліни «Дискретна математика». Алгебра висловлень, теорія множин, теорія відношень, елементи комбінаторики, теорія графів, елементи теорії груп та кілець. – К.: НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2002. – 120 с.

16. Спекторський І.Я., Стусь О.В. Навчальний посібник з дисципліни «Дискретна математика». Частково впорядковані множини, решітки, булеві алгебри. – К.: НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2009. – 136 с.