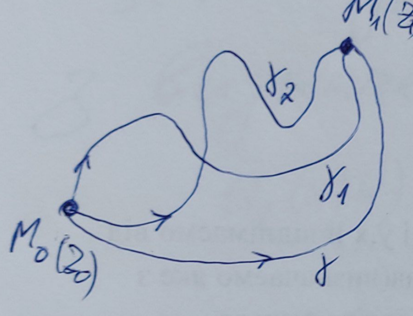
Інтеграл та первісна.

З інтегральної теореми Коші випливає, що інтеграл від аналітичної в однозв'язній області G функції $f(z)$ вздовж будь-яких спрямлеємих кривих γ_1, γ_2 цієї області зі спільним початком і кінцем мають ~~не~~ однакові значення



$$\left(\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma^-} f(z)dz = 0 \right.$$

$\Rightarrow$ інтеграли залежать тільки від початкової і кінцевої точок кривої:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz .$$

Зафіксуємо т. z_0 і розглянемо функцію

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi .$$

<u>Теорема (Морера).</u> Нехай $f(z)$ — неперервна на області G функція, для якої інтеграли вздовж будь-яких спрямляємих кривих $\gamma_1, \gamma_2 \subset G$ зі спільним початком і кінцем співпадають.

Тоді функція $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \quad (\forall z_0 \in G)$

є аналітичною в області G, причому

$$F'(z) = f(z).$$

Доведення. (спрощене). Позначимо $u_1(x;y)$, $v_1(x;y)$ – дійсну і уявну частини $F(z) = u_1(x;y) + i\,v_1(x;y)$.

$f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$; $z_0 = x_0 + iy_0$; $z = x + iy$ і з визначення інтеграла (стор. 13) $\Longrightarrow$

$$u_1(x;y) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} u\,dx - v\,dy;$$

$$v_1(x;y) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} v\,dx + u\,dy.$$

Тоді з властивостей криволінійних інтегралів $\mathrm{II}^{\text{го}}$ роду $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u(x;y) = \dfrac{\partial v_1}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -v(x;y) = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x}; \end{cases} \Longrightarrow$$

умови Коші-Рімана на G виконані $\Longrightarrow$ $F(z)$ аналітична на G функція і $F'(z) = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + i\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = u + iv = f(z)$, щ.т.д.

<u>Визначення</u>. Функція $\Phi(z)$ – аналітична на обл. G називається <u>первісною</u> відносно $f(z)$ на G, якщо

$$\Phi'(z) = f(z) \quad \forall z \in G.$$

<u>Зауваження</u>. Оскільки похідна аналітичної на G функції теж аналітична $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(z)$ аналітична на G.

<u>Твердження</u>. Якщо $\Phi(z)$ – первісна аналітичної на G функції $f(z)$, то $\exists C$ – const:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + C.$$

<u>Доведення</u>. Позначимо $w(z) = \Phi(z) - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$.

Тоді для $w(z) = \tilde{u} + i\tilde{v}$ маємо:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{на } G \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tilde{u}(x;y) = c_1;\ \tilde{v}(x;y) = c_2;\ c_1, c_2$ – const,

$w(z) = c_1 + ic_2 = C$ – const на G і

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi + C, \quad \text{щ.т.д.}$$

<u>Наслідок</u>. Поклавши $z = z_0$ в цьому рівнянню, отримуємо: $\Phi(z_0) = \int_{z_0}^{z_0} f(\xi)\,d\xi + C = C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0) \text{ – формула}$$

Ньютона-Лейбниця. Справедливі також формули інтегрування за частинами і заміна змінної.