10.12) Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$$

Знайдемо множину значень x, при яких даний ряд збігається користуючись радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 1}{\sqrt[n]{3n}}\,|(x-2)^3|}{\underset{\to 1}{\sqrt[n]{(5n-8)^3}}} = |(x-2)^3|$$

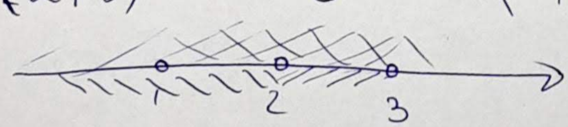
За ознакою, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд збігається.

$|(x-2)^3| < 1$

$|x-2| < 1$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+2 < 1 \\ x < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

$(2;3) \cup (1,2)$



Отже, ряд збігається для $x \in (1,3)$ (абсолютно)

Перев. збіжн. ряду в точках $x=1$, $x=3$.

$x=1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n(-1)^{3n}}{(5n-8)^3}$$

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{3n(-1)^{3n}}{(5n-8)^3}\right| =$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}$$

$$a_n = \frac{3n}{(5n-8)^3}$$

Порівняємо цей ряд з рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Видно, що $\frac{3n}{(5n-8)^3} \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходиться

Отже, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}$ - сходиться (за ознакою порівняння) Отже, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n(-1)^{3n}}{(5n-8)^3}$ - сх. абсолютно

$x = 3$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}$ - сходиться (досліджено вище),

Отже, ряд сходиться, коли $x \in [1, 3]$.

9.12) Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 1/n)^n \cdot 4^{n^2/x}$$

Перевіримо, чи збігається ряд, використовуючи радикальний ознаку Коші.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(2+1/n)^n \cdot 4^{n^2/x}|} = \lim\limits_{n\to\infty} (2+1/n) \cdot 4^{n/x}$. Видно, що

$\lim\limits_{n\to\infty} (2 + 1/n) \cdot 4^{n/x} = 0$, тільки коли $x < 0$.

Коли $x = 0$, то утв. ділення на нуль.

Отже, область збіжності ряду: $x \in (-\infty, 0)$. (досліджено за радикальною ознакою Коші.

11.12) Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\frac{n}{\cos x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n/\cos x}}$$

Дослідимо ряд на збіжність, вик. радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{e^{n/\cos x}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1}}{e^{\frac{1}{\cos x}}} = \frac{1}{e^{1/\cos x}}$$

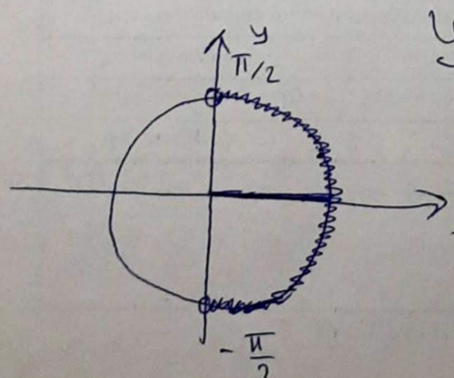
Щоб ряд сходився, необхідно, щоб вик. умова:

$$\frac{1}{e^{1/\cos x}} < 1 \qquad 1 < e^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$e^{\frac{1}{\cos x}} > 1 \qquad e^{\frac{1}{\cos x}} > e^{0}$$

$$\frac{1}{\cos x} > 0 \qquad \cos x > 0$$

$\cos x > 0 \Rightarrow x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2\pi n,\ n \in Z$



У точках $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, утв. ділення на нуль.

Отже, область збіжності ряду $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

12.12) Знайти суму ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{n-1}}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n+1}$ 4

Нехай $y = (1-x^2)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}$

Знайдемо радіус збіжн: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} =$

$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \to 1} = 1$ Отже, на проміжку $(-1, 1)$, ряд

має скінченну суму.

Позначимо суму $S(y)$.

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}$$

$$(y \cdot S(y))' = \frac{y}{1-y}$$

$$\int_0^y (y \cdot S(y))' dy = \int_0^y \frac{y}{1-y} dy$$

$z = 1-y$

$dz = -dy$

$y = 1-z$

$y = y \Rightarrow z = 1-y$

$y = 0 \Rightarrow z = 1$

$$\rightarrow y S(y) \Big|_0^y = -\int_1^{1-y} \frac{1-z}{z} dz$$

$$y S(y) = -\left(\int_1^{1-y} \frac{1}{z} dz - \int_1^{1-y} dz \right) =$$

$$= -(\ln|1-y| - \ln|1| - (1-y-1)) = -(\ln|1-y| + y)$$

$S(y) = -\frac{\ln|1-y| - y}{y} = -\frac{\ln|1-y|}{y} - 1$ Після заміни отр:

$$S(x) = -\frac{\ln|1-1+x^2|}{1-x^2} - 1 = -\frac{\ln(x^2)}{1-x^2} - 1$$

13.12) Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{6n}$$

Знайдемо область збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n x^{6n}} = \lim_{n\to\infty} \overset{\to 1}{\sqrt[n]{n}} \cdot x^6 = x^6.$$

Щоб ряд збіг., повинна вик. умова $x^6 < 1$

$|x| < 1$

Дослідимо збіжн. у т. $x = \pm 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (\pm 1)^{6n} = \sum_{n=1} n$$ ← розходиться (не вик. необх. умова збіжності ряду)

Отже, можемо обчислити суму ряду при $x \in (-1, 1)$.

Нехай $x^6 = y$, тоді $\sum_{n=1} n y^n$

Позначимо суму ряду $S(y)$.

$$S(y)=\sum_{n=1}^{\infty} n y^n \; \Big| : y$$

$$\frac{S(y)}{y}=\sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1}$$

$$\int \frac{S(y)}{y}dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int n y^{n-1}dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n} y^n}{\cancel{n-1+1}}=\frac{y}{1-y}.$$

$$\left(\int \frac{S(y)}{y}dy\right)'=\left(\frac{y}{1-y}\right)'$$

$$\frac{S(y)}{y}=\frac{(1-y)+y}{(1-y)^2} \quad \Big| \quad \frac{S(y)}{y}=\frac{1}{(1-y)^2}$$

$$S(y)=\frac{y}{(1-y)^2}$$

Після зворотньої заміни маємо:

$$S(x)=\frac{x^6}{(1-x^6)^2} \quad \text{Отже} \quad \sum_{n=1} n x^{6n}=\begin{cases}\dfrac{x^6}{(1-x^6)^2}, & |x|<1\\ \varnothing, & |x|\geq 1\end{cases}$$

12.12) Доповнення:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^2)^{n-1}}{n}=\begin{cases}-\dfrac{\ln(x^2)}{1-x^2}-1, & |x|<1\\ \varnothing, & |x|\geq 1\end{cases}$$

14.12) Розкласти ф-цію в ряд Тейлора по степенях x.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$$

Відп: розкл. в ряд ф-ції $(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}+\dots,\quad |x|<1$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{1-\frac{3x}{16}}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{1-3x/16}}$$

Нехай $t=-3x/16$, $\alpha=-1/4$:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{3x}{16}}}=(1+t)^{-1/4}=1-\frac{1}{4}t+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{2}t^2+$$

$$+\frac{-1/4(-1/4-1)(-1/4-2)}{6}t^3+\dots=1-\frac{1}{4}t+\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}}{2}t^2+$$

$$+\frac{-1/4\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}}{6}t^3+\dots=1+\frac{1}{4}\frac{3}{16}x+\frac{5}{32}\cdot\frac{3^2}{16^2}x^2+\frac{45}{64\cdot6}\frac{\cdot3^3}{16^3}x^3+\dots=$$

$$=1+\frac{3x}{64}+\frac{45}{256\cdot32}x^2+\frac{45\cdot27}{64\cdot6\cdot4096}x^3+\dots$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3x}{64}+\frac{45}{8129}x^2+\frac{45\cdot27}{384\cdot4096}x^3+\dots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{128}x+\frac{45}{2\cdot8129}x^2+\frac{45\cdot27}{2\cdot384\cdot4096}x^3+\dots)$$

15.12) Обчислити інтеграли з точністю до 0,001

$$\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$$

Використаємо розклад ф-ції e^{-x} у ряд Маклорена:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots$$

$$1-e^{-x}=1-1+\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\dots$$

$$\frac{1-e^{-x}}{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}-\dots$$

Тоді:

$$I=\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx=\int_0^{0,2}\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right)dx = x\Big|_0^{0,2}-\frac{x^2}{2\cdot 2!}\Big|_0^{0,2}+\frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^{0,2}\dots=0,2-\frac{0,04}{4}+\frac{0,008}{18}-\dots$$

Отриманий ряд задовільняє теорему Лейбниця:

$a_n=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$, $0,2>0,01>\frac{0,008}{18}>\dots$, а

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}=0.$$

Маємо, що $0,2>0,001$; $0,01>0,001$; а $\frac{0,008}{18}<0,001$.

Тоді $I=0,2-\frac{0,04}{2}+\left[\frac{0,008}{18}-\dots\right]=\Sigma_1$ → Ряд Лейбниця

За наслідком з т. Лейбниця, сума ряду Σ_1 менша за його перший член. Його перший член $\frac{0,008}{18}<0,001$,

Отже, $I=0,2-0,01=0,19$