РГР з теми „Статистика"

студента групи ДА-92
Насікана Дмитра Юрійовича
Варіант Б11 (111)

Вхідні дані: (варіант 111)

-3.35	-4.19	-4.58	-4.15	-3.16	-3.54	-4.51	-3.73	-3.67	-3.39
-1.07	-3.42	3.12	-2.68	-3.39	0.18	-4.37	-1.3	3.18	-3.92
-3.41	-4.16	-0.45	0.63	-4.59	-3.14	-3.48	-4.45	-2.06	-1.97
-3.97	-4.3	-4.61	-3.43	-4.44	0.22	1.65	-4.12	-2.85	-1.01
-4.37	-4.06	-4.17	-3.45	-4.19	-3.44	-4.29	-2.69	-3.82	-0.06
-2.44	-2.7	-4.17	-4.5	-3.42	-3.88	0.71	-3.98	-4.06	-1.46
-2.07	-3.98	-3.66	-4.19	-4.01	-4.45	-0.43	-1.78	-4.16	-3.69
-1.27	-4.5	4.72	-1.02	-2.53	-3.82	-4.41	-2.33	-0.86	2.28
-2.54	11.08	2.29	-1.95	-3.81	-2.84	-4.33	-2.86	-1.65	-3.06
-3.11	-3.15	-3.6	-1.24	-4.35	-3.65	-3.5	-3.64	-4.07	-3.79

1) Провести первинний аналіз вибірки: поб. статистичний ряд (для неперер. - інтервальний), емпіричну ф-цію розподілу (для неперер. - інтервальну), її графік, полігон частот (для дискр.) або гістограму (неперер.).

Побудуємо інтервальний статистичний ряд, так як дані є неперервними:

Для зручності побудови ряду побудуємо спочатку варіаційний ряд:

-4.61	-4.37	-4.17	-3.98	-3.67	-3.43	-3.11	-2.44	-1.27	0.22
-4.59	-4.37	-4.16	-3.97	-3.66	-3.42	-3.06	-2.33	-1.24	0.63
-4.58	-4.35	-4.16	-3.92	-3.65	-3.42	-2.86	-2.07	-1.07	0.71
-4.51	-4.33	-4.15	-3.88	-3.64	-3.41	-2.85	-2.06	-1.02	1.65
-4.5	-4.3	-4.12	-3.82	-3.6	-3.39	-2.84	-1.97	-1.01	2.28
-4.5	-4.29	-4.07	-3.82	-3.54	-3.39	-2.7	-1.95	-0.86	2.29
-4.45	-4.19	-4.06	-3.81	-3.5	-3.35	-2.69	-1.78	-0.45	3.12
-4.45	-4.19	-4.06	-3.79	-3.48	-3.16	-2.68	-1.65	-0.43	3.18
-4.44	-4.19	-4.01	-3.73	-3.45	-3.15	-2.54	-1.46	-0.06	4.72
-4.41	-4.17	-3.98	-3.69	-3.44	-3.14	-2.53	-1.3	0.18	11.08

Тепер побудуємо статистичний ряд: ③

Параметри вибірки:

Об'єм вибірки - 100

Найменший ел. - -4.61

Найбільший ел. - 11.08

Розмах - найб - найм = 15.69

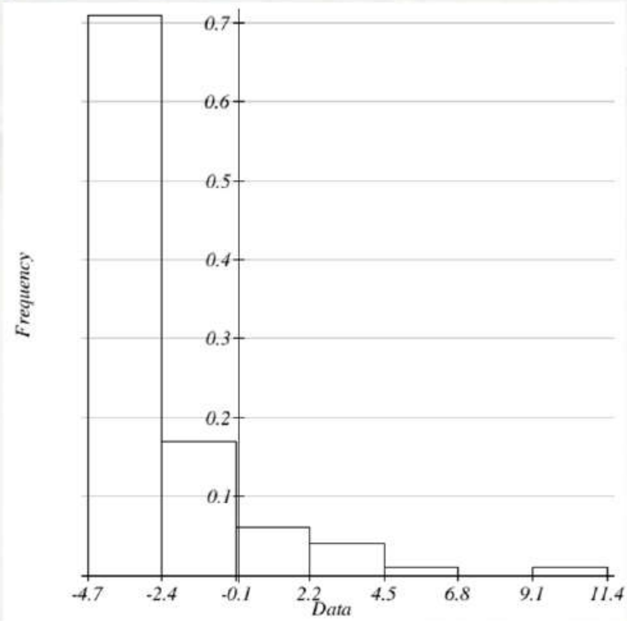
К-сть класів - 1 + [$\log_2$ об'єм вибірки] = 7

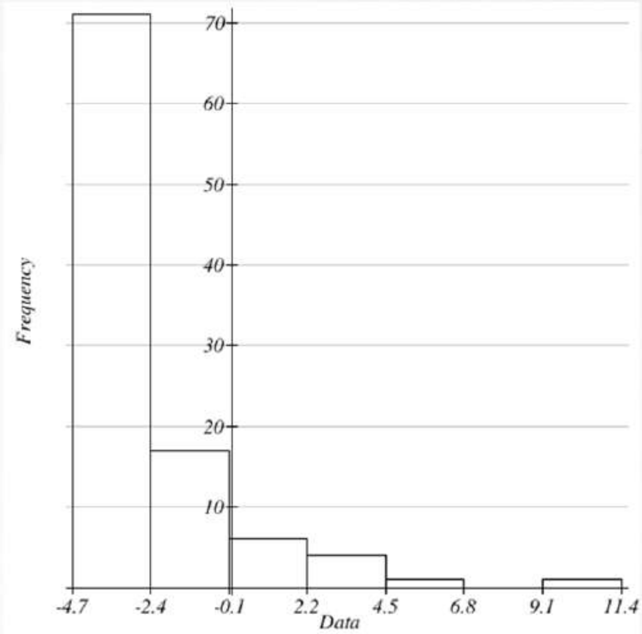
Ширина класу - $\frac{\text{Розмах}}{\text{к-сть класів}}$ = 2.3

Отриманий інтерв. статист. ряд:

Класи (інтервали)	Частоти	Комулятивні частоти	Відносні частоти	Комулятивні відносні частоти	Середина класу
[-4.7;-2.4)	71	71	0.71	0.71	-3.55
[-2.4;-0.1)	17	88	0.17	0.88	-1.25
[-0.1;2.2)	6	94	0.06	0.94	1.05
[2.2; 4.5)	4	98	0.04	0.98	3.35
[4.5;6.8)	1	99	0.01	0.99	5.56
[6.8;9.1)	0	99	0	0.99	7.95
[9.1;11.4)	1	100	0.01	1	10.25

Побудуємо гістограми відносних та абс. частот, відкладаючи по осі OX межі інтервалів, а по OY відносні та абс. частоти відповідно.





Як бачимо, набір даних має викид, значення якого – 11.08, який дещо спотворює гістограми. Побудуємо розбиття на класи ..., не враховуючи викид, але останній замінимо відкритим, щоб значення попало в клас .

Тепер побудуємо статистичний ряд:

Параметри вибірки:

Об'єм вибірки – 100

Найменший ел. – -4.61

Найбільший ел. – 4.72 (не враховуючи викиду)

Розмах – найб – найм = 9.33 (не враховуючи викиду)

К-сть класів – $1 + [\log_2$ об'єм вибірки$]$ = 7

Ширина класу – $\dfrac{\text{Розмах}}{\text{к-сть класів}}$ = 1.5

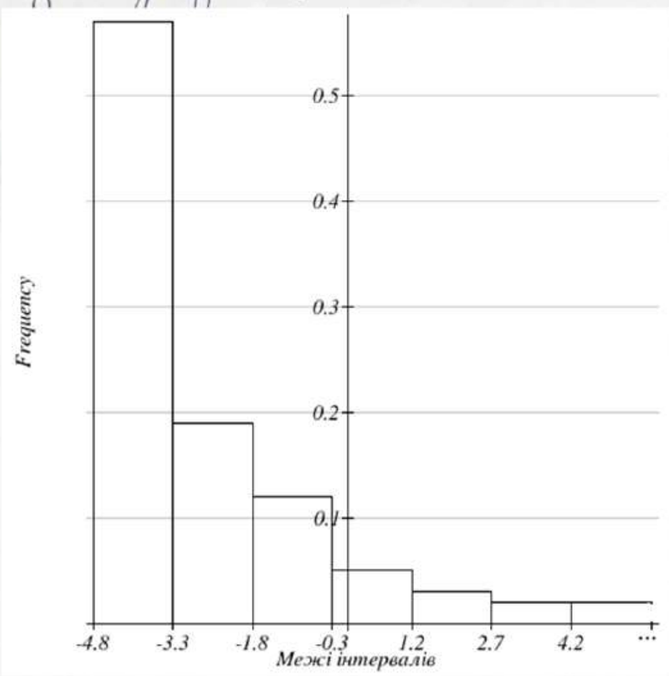
Отриманий інтерв. статист. ряд:

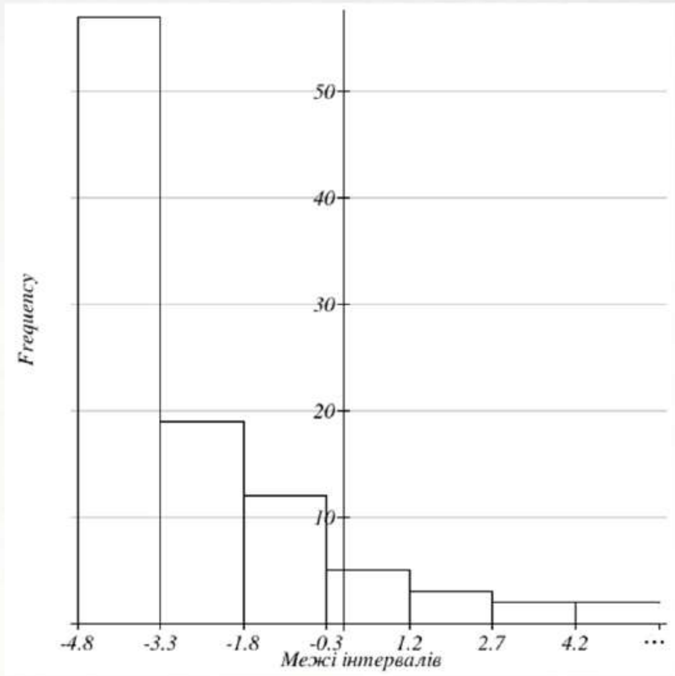
Класи (інтервали)	Частоти	Комулятивні частоти	Відносні частоти	Комулятивні відносні частоти	Середина класу
[-4.8;-3.3)	57	57	0.57	0.57	-4.05
[-3.3;-1.8)	19	76	0.19	0.76	-2.55
[-1.8;-0.3)	12	88	0.12	0.88	-1.05
[-0.3; 1.2)	5	93	0.05	0.93	0.45
[1.2;2.7)	3	96	0.03	0.96	1.95
[2.7;4.2)	2	98	0.02	0.98	3.45
[4.2; …	2	100	0.02	1	-

↑

(відкритий клас)

Побудуємо гістограми відносних та абс. частот, відкладаючи по осі OX межі інтервалів, а по OY відносні та абс. частоти відповідно.

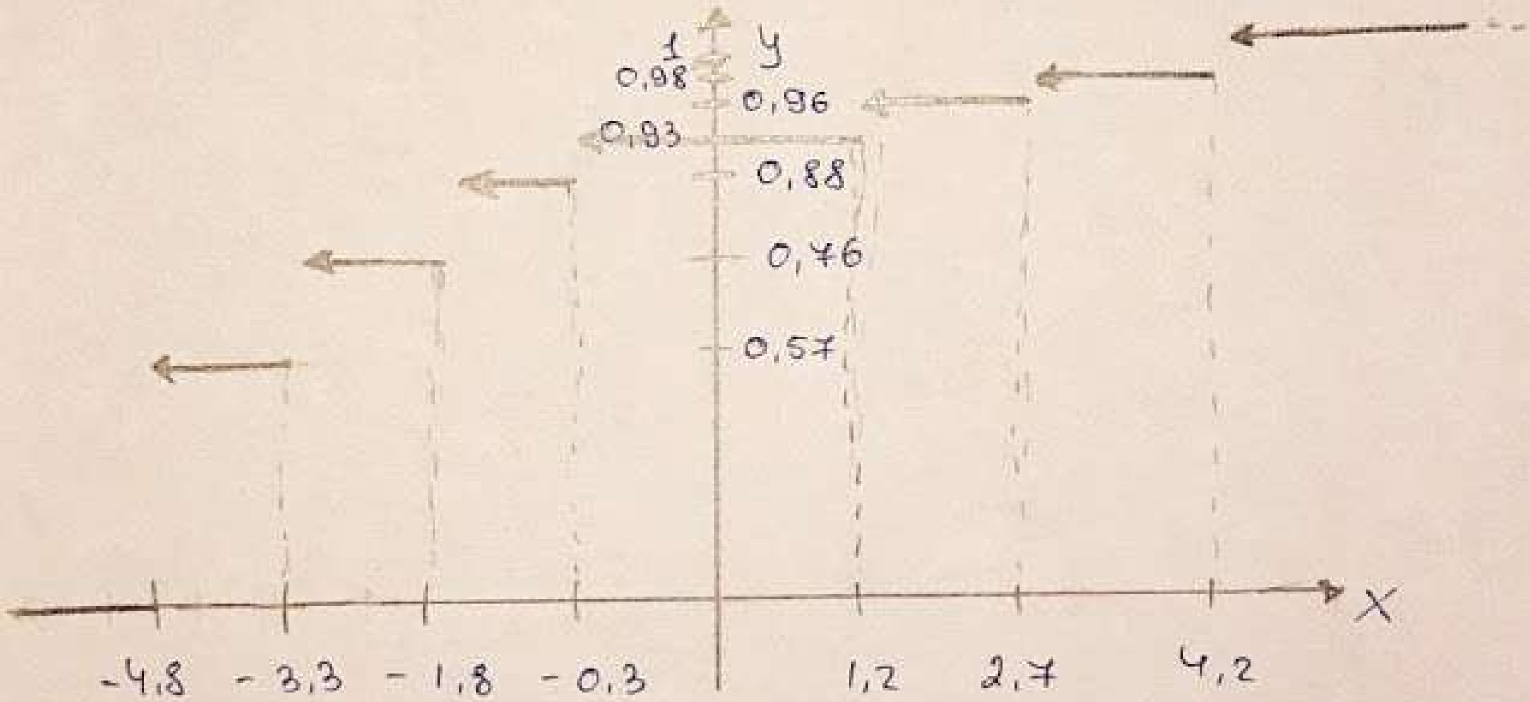




Тепер гістограма має кращий вигляд.

На основі отриманих даних побудуємо емпіричну ф-цію розподілу та її графік, використовуючи останній под. стат. ряд.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4{,}8 \\ 0{,}57, & -4{,}8 < x \le -3{,}3 \\ 0{,}76 & -3{,}3 < x \le -1{,}8 \\ 0{,}88 & -1{,}8 < x \le -0{,}3 \\ 0{,}93 & -0{,}3 < x \le 1{,}2 \\ 0{,}96 & 1{,}2 < x \le 2{,}7 \\ 0{,}98 & 2{,}7 < x \le 4{,}2 \\ 1, & x > 4{,}2 \end{cases}$$



2) Знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та виправлену вибіркову дисперсію.

Знайдемо вибіркове середнє, що визн. за ф-лою $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$

$$\overline{\xi} = \frac{-260,25}{100} = -2,6025$$

Знайдемо вибіркову дисперсію, яка визн. за ф-лою $D_{\xi}^{**} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{\xi})^2$

$$D_{\xi}^{**} = 5,6327$$

Знайдемо виправлену вибіркову дисперсію, яка визн. за формулою $D_{\xi}^{***} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{\xi})^2$

$$D_{\xi}^{***} = 5,6896$$

3) Обґрунтувати та висунути гіпотезу про розп. ген. сукупності.

Якщо подивитися на гістограми з пункту 1, то можна помітити, що вони нагадують щільність експоненційного розподілу із зсувом. Більшість зн. вибірки розташовані ~~з лівого~~ по лівому краю області визн.

4) Перевірити гіпотезу за кр. Пірсона χ^2 на рівні знач. $\alpha = 0,05$.

Це параметри a та γ візьмемо знач., що були обчислені у пункті 5 при знах. оцінок a^*, γ^* за ММ.

$a^* = -4,61$

$\gamma^* = 2,0075$

Отже, припустимо, що дана ~~вибі~~ ген. сукупність розподілена з такою щільністю:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2,0075} e^{-\frac{x+4,61}{2,0075}}, & x \geq -4,61 \\ 0, & x < -4,61 \end{cases}$$

Знайдемо χ^2, користуючись розбиттям на інтервали з п. 1.

Класи (інтервали)	Частоти	Теоретичні імовірності
[-4.8;-3.3)	57	
[-3.3;-1.8)	19	
[-1.8;-0.3)	12	
[-0.3; 1.2)	5	
[1.2;2.7)	3	
[2.7;4.2)	2	
[4.2; …	2	

Знайдемо теор. імов. для кожного інтервалу.

Для знах. імов. на інтервалі з табл. $[a; b)$, скорист. властивістю $P\{a < \xi < b\} = \int_a^b f_\xi(x)\,dx$.

Таким чином, маємо:

Definite integral:

$$\int_{-4.8}^{-3.3} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.578554$$

Definite integral:

$$\int_{-3.3}^{-1.8} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.274056$$

Definite integral:

$$\int_{-1.8}^{-0.3} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.129818$$

Definite integral:

$$\int_{-0.3}^{1.2} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.0614939$$

Definite integral:

$$\int_{1.2}^{2.7} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.0291292$$

Definite integral:

$$\int_{2.7}^{4.2} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.0137982$$

Definite integral:

$$\int_{4.2}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x+4.61}{2.0075}\right)}{2.0075}\,dx = 0.0124188$$

Класи (інтервали)	Частоти	Теоретичні імовірності	npi
[-4.8;-3.3)	57	0.5785	57.85
[-3.3;-1.8)	19	0.2741	27.41
[-1.8;-0.3)	12	0.1298	12.98
[-0.3; 1.2)	5	0.0615	6.15
[1.2;2.7)	3	0.0291	2.91
[2.7;4.2)	2	0.0138	1.38
[4.2; ...	2	0.01242	1.242

Як бачимо, не для всіх інтервалів вик. $np_i \geq 10$, тому об'єднаємо їх:

Класи (інтервали)	Частоти	Теоретичні імовірності	npi
[-4.8;-3.3)	57	0.5785	57.85
[-3.3;-1.8)	19	0.2741	27.41
[-1.8;-0.3)	12	0.1298	12.98
[-0.3; ...	12	0.1168	11.68

Тепер можемо знайти χ^2 за ф-лою:

$$\chi^2_n=\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}=\frac{(57-57,85)^2}{57,85}+\frac{(19-27,41)^2}{27,41}+$$

$$+\frac{(12-12,98)^2}{12,98}+\frac{(12-11,68)^2}{11,68}=2,87872$$

$m=4$
$r=2$
$\alpha=0,05$

Разом з табл., $\chi^2_{\alpha;m-r-1}=\chi^2_{0,05;1}=3,84$

Як бачимо, нерівність $\chi^2_n \leq \chi^2_{\alpha,m-r-1}$:

$2,87872 \leq 3,84$ виконується, тому приймаємо гіпотезу про те, що ген. сукупн. розподілена за експ. законом зі зміщенням з парам. $a^*=-4,61$, $\lambda^*=2,0075$.

5) Методом моментів та методом макс. правдоподібності знайти оцінки параметрів розподілу.

Оцінемо параметри нашого розподілу методом моментів:

$$\begin{cases} D_\xi = D_\xi^{**} \\ E_\xi = \bar{\xi} \end{cases}$$

Так як для зсунутого експоненційного розп. D_ξ та E_ξ в умові немає, то знайдемо їх корист. зсп. ф-цією:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x-a}{\gamma}}\,dx = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{a} 0\,dx +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_{a}^{+\infty} x e^{-\frac{x-a}{\gamma}}\,dx = \left\{\begin{aligned} & t = \frac{x-a}{\gamma} \\ & dt = \frac{1}{\gamma}dx \\ & dx = \gamma\,dt \\ & x = +\infty \Rightarrow t = +\infty \\ & x = a \Rightarrow t = 0 \\ & x = t\gamma + a \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\gamma}\int_{0}^{+\infty}(t\gamma + a)e^{-t}(\gamma)dt =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\cdot\gamma^2\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\,dt + \frac{1}{\gamma}\gamma a\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left\{\begin{aligned} & \text{Інт. 1:} \\ & u = t \\ & du = dt \\ & dv = e^{-t},\ v = \int e^{-t}dt = -e^{-t} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \gamma\left(-te^{-t}\Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt\right) + a\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt = -\gamma\lim_{A\to\infty} te^{-t}\Big|_{0}^{A} -$$

$$-\gamma \lim_{A\to+\infty} e^{-t}\Big|_0^A - a\lim_{A\to+\infty} e^{-t}\Big|_0^A = -\gamma \lim_{A\to-\infty}\left(\overset{\nearrow 0}{\frac{A}{e^A}} - 0\right) -$$

$$-\gamma\lim_{A\to+\infty}\left(\underset{\downarrow\ 0}{e^{-A}} - e^0\right) - a\lim_{A\to+\infty}\left(\underset{\downarrow\ 0}{e^{-A}} - e^0\right) = 0 - \gamma\cdot(-1) -$$

$$-a(-1) = \gamma + a$$

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - (E_\xi)^2 = \frac{1}{\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x-a}{\gamma}}\,dx - (E_\xi)^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \frac{1}{\gamma}\int_{a}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x-a}{\gamma}}\,dx - (a+\gamma)^2 =$$

Використ. програмні засоби для знах. інт.

Definite integral:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x-a}{g}\right) x^2}{g}\,dx = a^2 + 2ag + 2g^2 \text{ for } \mathrm{Re}(g) > 0$$

$$= a^2 + 2a\gamma + 2\gamma^2 - (a^2 + 2a\gamma + \gamma^2) = \cancel{a^2} + \cancel{2a\gamma} + 2\gamma^2 - \cancel{a^2} -$$
$$- \cancel{2a\gamma} - \gamma^2 = \gamma^2$$

Отже, отримали такі числ. хар:

$$D_\xi = \gamma^2, \quad E_\xi = a + \gamma$$

Підставимо їх у рівн, що складене за м. моментів.

$$\begin{cases} \gamma^{*2} = D_{\xi}^{**} \\ a^* + \gamma^* = \bar{\xi} \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^{*2} = 5,6327 \\ a^* + \gamma^* = -2,6025 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^* = \sqrt{5,6327} = 2,3733 \\ a^* = -2,6025 - \gamma^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma^* = 2,3733 \\ a^* = -4,9758 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma^* = \sqrt{D_{\xi}^{**}} \\ a^* = \bar{\xi} - \gamma^* \end{cases}$$

Знайдемо оцінки параметрів методом макс. правдоподібності:

ф-ція правдопод. – $L(x_1, \dots, x_n, \gamma, a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

$$L(x_1, \dots, x_n, \gamma, a) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x_i - a}{\gamma}} \right)$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x_i - a}{\gamma}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln\gamma + \ln e^{-\frac{x_i - a}{\gamma}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln\gamma - \frac{x_i - a}{\gamma} \right) = -n\ln\gamma - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - a}{\gamma} =$$

$$= -n\ln\gamma - \frac{1}{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a) \right) = -n\ln\gamma - \frac{1}{\gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na \right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = -\frac{n}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na \right)$$

$$-\frac{n}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right)=0$$

$$-\frac{n\gamma}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right)=0$$

$$\gamma^* \neq 0, \quad -n\gamma+\sum_{i=1}^{n} x_i - na = 0$$

$$\gamma^* = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$\gamma^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a = \bar{\xi} - a$$

При максимізації по a:

$$L(x_1,\dots,x_n,a,\gamma)=\prod_{i=1}^{n}\begin{cases}\frac{1}{\gamma}e^{-\frac{x_i-a}{\gamma}}, & x_i \geq a\\ 0, & x_i < a\end{cases}$$ – набуває найб. знач., якщо всі $x_i \geq a$ =>

$$\Rightarrow a^* = \min_{i=\overline{1,n}} x_i$$

Отже, вик. ММП, маємо:

$$\begin{cases}\gamma^* = \bar{\xi} - \min\limits_{i=\overline{1,n}} x_i = -2,6025+4,61=2.0075\\ a^* = \min\limits_{i=\overline{1,n}} x_i = -4.61\end{cases}$$

б) Для кожного параметру кращу з цих оцінок перевірити на (асимптот.) незміщеність, конзистентність та ефективність.

Будемо перевіряти оцінки, що знайдені за ММП, так як вони зазв. краще.

Незміщеність:

$a^* = \min\limits_{i=\overline{1,n}} x_i$, x_i - незал. однаково розп. зі щільн.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{x-a}{\gamma}} & x \geq a \\ 0 & , x < a \end{cases}$$

тоді можна скористатись ф-лою, що була виведена на лекції у розділі „ф-ції від вип. велич."

$$f_{min}(x) = n(1 - F_\xi(x))^{n-1} \cdot f_\xi(x)$$

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\gamma}\int\limits_{a}^{x} e^{-\frac{x-a}{\gamma}}\,dx = \begin{Bmatrix} t = \frac{x-a}{\gamma} \\ dt = \frac{1}{\gamma}dx \\ dx = \gamma\,dt \\ x = x \Rightarrow t = \frac{x-a}{\gamma} \\ x = a \Rightarrow t = 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\gamma\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\gamma}} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{\frac{x-a}{\gamma}} = -e^{-\frac{x-a}{\gamma}} + 1 = 1 - e^{-\frac{x-a}{\gamma}}$$

$$f_{min}(x) = n(1 - 1 + e^{-\frac{x-a}{\gamma}})^{n-1}\frac{1}{\gamma}e^{-\frac{x-a}{\gamma}} = \frac{n}{\gamma}e^{-\frac{(x-a)(n-1)}{\gamma}} \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{x-a}{\gamma}} = \frac{n}{\gamma}e^{-\frac{(x-a)(n-1)-x+a}{\gamma}} = \frac{n}{\gamma}\exp\left(\frac{-xn + \cancel{x} + an - \cancel{a} - \cancel{x} + \cancel{a}}{\gamma}\right) = \frac{n}{\gamma}\exp\left(\frac{-xn+an}{\gamma}\right),\ x \geq a;\ f_{min}(x) = 0, x < a.$$

Для перевірки на незм. знайдемо $E f_{min}$

$$E f_{min} = \frac{n}{\gamma}\int\limits_{a}^{+\infty} x\exp\left(\frac{-xn+an}{\gamma}\right)dx = \begin{cases} x = u \\ du = dx \\ dv = \exp\left(\frac{-xn+an}{\gamma}\right) \end{cases}$$

$$v=\int \exp\left(-\frac{xn+an}{\gamma}\right)dx=\left\{\begin{aligned} t&=-\frac{xn+an}{\gamma}\\ dt&=-\frac{n}{\gamma}dx\\ dx&=-\frac{\gamma}{n}dt\end{aligned}\right\}=\int -\frac{\gamma}{n}e^{t}dt=$$

$$=-\frac{\gamma}{n}e^{t}=-\frac{\gamma}{n}e^{-\frac{xn+an}{\gamma}}$$

знаходимо

$$=\frac{n}{\gamma}\left(-\frac{\gamma}{n}xe^{-\frac{xn+an}{\gamma}}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\frac{\gamma}{n}e^{-\frac{xn+an}{\gamma}}dx\right)=$$

$$=-\frac{xe^{\frac{an}{\gamma}}}{e^{\frac{xn}{\gamma}}}\Big|_a^{+\infty}+\left(-\frac{\gamma}{n}e^{-\frac{xn+an}{\gamma}}\right)\Big|_a^{+\infty}=$$

$$=-\left(\lim_{A\to+\infty}\underbrace{\frac{Ae^{\frac{an}{\gamma}}}{e^{\frac{An}{\gamma}}}}_{\to 0,\ \gamma>0}-ae^{\frac{-an+an}{\gamma}}\right)-\frac{\gamma}{n}\left(\lim_{A\to+\infty}\underbrace{\frac{e^{\frac{an}{\gamma}}}{e^{\frac{An}{\gamma}}}}_{\to 0,\ \gamma>0}-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{-an+an}{\gamma}}\right)=a-\frac{\gamma}{n}(0-1)=a+\frac{\gamma}{n}.$$

Перевіряємо умову $Ea^*=a$.

$a+\frac{\gamma}{n}\neq a$ – як бачимо, незміщеність відсутня, але:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a+\underbrace{\frac{\gamma}{n}}_{\to 0}\right)=a$, тому оцінка a^* є асимп. незміщенною.

Тепер перев. незміщеність для $\gamma^* = \bar{\xi} - a$, (18)
вважаючи, що a - відомий параметр.

$\gamma^* = \bar{\xi} - a$

одн. розподілені

$$E\gamma^* = E(\bar{\xi} - a) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - a = \frac{1}{n} E(nx) - a =$$

$$= Ex - a = a + \gamma - a = \gamma$$

$Ex = E\xi$ - знах. раніше

$\gamma = \gamma$, отже, γ - незміщена оцінка.

<u>Конесистентність</u>:
Перевіримо оцінку a^*, користуючись лемою,
що була розглянута на лекції:
Якщо a^* - асимпт. незм. і $Da^* \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, то a^* - конесистентна.

Знайдемо Da^*:

$$E(a^*)^2 = E(\min_{\overline{1,n}} x_i)^2 = \int_a^{+\infty} \frac{n}{\gamma} \exp\left(\frac{-xn + an}{\gamma}\right) \cdot x^2 dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = e^{\frac{-xn}{\gamma}} \\ v = -\frac{\gamma}{n} e^{-\frac{nx}{\gamma}} \end{array}\right.$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{\gamma}} \exp\left(\frac{an}{\gamma}\right)\left(-x^2 \frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{n}} e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Big|_a^{+\infty} + 2\frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{n}} \int_a^{+\infty} x e^{-\frac{nx}{\gamma}} dx\right) =$$

$$= e^{\frac{an}{\gamma}}\left(-\frac{x^2}{e^{\frac{nx}{\gamma}}}\Big|_a^{+\infty} + 2\int_a^{+\infty} x e^{-\frac{nx}{\gamma}} dx\right) = \left\{\begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{-\frac{nx}{\gamma}},\ v = -\frac{\gamma}{n} e^{-\frac{nx}{\gamma}} \end{array}\right\} =$$

$$e^{\frac{an}{\gamma}}\left(\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A^2}{e^{\frac{nA}{\gamma}}}\right)^{=0}+a^2e^{-\frac{na}{\gamma}}+2\left(-\frac{\gamma}{n}xe^{-\frac{nx}{\gamma}}\Big|_a^{+\infty}+\int_a^{+\infty}\frac{\gamma}{n}e^{-\frac{nx}{\gamma}}dx\right)\right)=$$

$$=a^2e^{\left(-\frac{na}{\gamma}+\frac{na}{\gamma}\right)}+2e^{\frac{an}{\gamma}}\left(-\frac{\gamma}{n}\lim_{A\to+\infty}\left(Ae^{-\frac{nA}{\gamma}}\right)^{=0}+\frac{\gamma}{n}ae^{-\frac{na}{\gamma}}-\frac{\gamma^2}{n^2}e^{-\frac{nx}{\gamma}}\Big|_a^{+\infty}\right)=$$

$$=a^2+2\frac{\gamma}{n}a-\frac{\gamma^2}{n^2}2e^{\frac{an}{\gamma}}\left(\lim_{A\to+\infty}e^{-\frac{nA}{\gamma}}{}^{=0}-e^{-\frac{na}{\gamma}}\right)=a^2+2\frac{\gamma}{n}a+$$

$$+2\frac{\gamma^2}{n^2}\ \#$$

$$Da^*=E(a^*)^2-(Ea^*)^2=a^2+2\frac{\gamma}{n}a+2\frac{\gamma^2}{n^2}-\left(a+\frac{\gamma}{n}\right)^2=$$

$$=a^2+2\frac{\gamma}{n}a+2\frac{\gamma^2}{n^2}-a^2-2\frac{\gamma}{n}a-\frac{\gamma^2}{n^2}=\frac{\gamma^2}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}Da^*=\lim_{n\to+\infty}\frac{\gamma^2}{n^2}=0.$$

Умови леми виконані => оцінка a^* є консистентною.

Перевіримо тепер оцінку γ^*:

$$\gamma^*=\bar{\xi}-a=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}-a\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{ЗВЧ}}Ex-a=\gamma+a-a=\gamma$$

знах. раніше

Отже, γ^* консистентна.

Перевіримо на ефективність оцінку γ^*.

Раніше було знайдено, що $\frac{\partial \ln L}{\partial\gamma}=-\frac{n}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot$

$$\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-na\right)=-\frac{n}{\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-a\right)=$$

$$= -\frac{n}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} n(\bar{\xi} - a) = \left\{ \gamma^* = \bar{\xi} - a \right\} = -\frac{n}{\gamma} + \frac{n}{\gamma^2}\gamma^* =$$

$$= \frac{n}{\gamma^2}(-\gamma + \gamma^*) = \frac{n}{\gamma^2}(\gamma^* - \gamma)$$

Отже, ф-ція $\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}$ можна записати як

$C(n, \gamma)(\gamma^* - \gamma) = \frac{n}{\gamma^2}(\gamma^* - \gamma)$, тому γ^* – ефективна оцінка.

7) Побудувати довірчий інтервал для парам. розподілу, надійністю 0,95. Можна не буд. для a в $Exp(a, \gamma)$.

Побудуємо довірчий інтервал для γ^*.

$$\frac{\gamma^* - E\gamma^*}{\sqrt{D\gamma^*}} = \left\{ \begin{array}{l} E\gamma^* = \gamma \\ D\gamma^* = D\bar{\xi} - Da = D\Big(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{\text{одн. розп.}}\Big) - 0 = \\ = \frac{1}{n^2} n \underbrace{D\xi}_{\substack{\text{знайдено} \\ \text{раніше (ММ)}}} = \frac{1}{n}\gamma^2 \end{array} \right\} = \frac{\bar{\xi} - a - \gamma}{\sqrt{\gamma^2/n}} =$$

$$= \frac{\bar{\xi} - a - \gamma}{\gamma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - a - \gamma)}{\gamma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - a)}{\gamma} - \sqrt{n}$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{\gamma}-\sqrt{n} \sim N(0;1)$$

$$P\left\{-x_{0,95}<\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{\gamma}-\sqrt{n}<x_{0,95}\right\}=0,95$$

$$2\Phi_0(x_{0,95})=0,95$$

$$\Phi_0(x_{0,95})=0,475 \Rightarrow x_{0,95}=1,96$$

Отже,

$$-1,96<\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{\gamma}-\sqrt{n}<1,96$$

$$-1,96+\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{\gamma}<1,96+\sqrt{n}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}-1,96}{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}<\dfrac{1}{\gamma}<\dfrac{1,96+\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)} \\ \sqrt{n}(\bar{\xi}-a)>0 \end{cases}$$

$$, n>0,$$

$\uparrow$ завжди

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}-1,96}{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}>\dfrac{1}{\gamma}>\dfrac{1,96+\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)} \\ \bar{\xi}-a<0 \end{cases} \rightarrow \bar{\xi}<a, \quad a^*=\min x_i$$

$\rightarrow$ неможливо.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{\sqrt{n}-1{,}96} < \gamma < \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{1{,}96+\sqrt{n}}$$

Отже, отр. довірчий інтервал:

$$\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{\sqrt{n}-1{,}96};\ \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}-a)}{1{,}96+\sqrt{n}}\right)$$