<u>*Лабораторна робота № 5*</u>

Методи чисельного рішення розріджених і великих систем лінійних рівнянь

Мета роботи: отримання практичних навичок в чисельному рішенні систем лінійних рівнянь з стрічковими матрицями і рішення великих розріджених систем рівнянь методом визначальних величин. Визначення можливості застосування засобів стандартних пакетів для отримання результатів.

Короткі теоретичні відомості

5.1. Рівняння з стрічковими матрицями

5.1.1. Спрощений LU–розклад

Застосування формул *LU*–розкладу істотно спрощується для окремих випадків спеціальних матриць коефіцієнтів розріджених систем рівнянь. Наприклад, тридіагональної матриці

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \beta_2 & 1 & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & 1 & \\ & & & & \beta_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

є добутком дводіагональних матриць L і U, для яких

$$\alpha_1 = a_1; \quad \beta_k = \frac{b_k}{\alpha_{k-1}}; \quad \alpha_k = a_k - \beta_k c_{k-1}; \quad k = 2,3,...,n. \tag{5.1}$$

Неважко бачити, що з урахуванням формул (5.1) рішення систем $Ax = d$ дуже спрощуються:

$$y_1 = d_1, \quad y_i = d_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = \overline{2,n}; \tag{5.2}$$

$$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{1}{\alpha_i}(y_i - c_i x_{i+1}), i = \overline{n-1,1}, \tag{5.3}$$

де d_i – компоненти вектора правої частини розв'язуваної системи.

Оцінимо загальну складність розв'язку системи рівнянь з тридіагональною матрицею. Формули (5.1) *LU*–розкладу містять всього три арифметичні операції (дві з яких операції множення/ділення), а формули (5.2), (5.3) — п'ять операцій (три з яких – операції множення/ділення), що припадають на кожний крок обчислення однієї невідомої x_i. Отже, на відміну від методу Гауса, функція складності розглянутого алгоритму лінійно залежить від розміру розв'язуваної задачі n.

5.1.2. Метод прогонки

Ефективним для розв'язку лінійних систем рівнянь із стрічковими матрицями є також *метод прогонки*. Розглянемо його застосування на тому ж прикладі тридіагональної системи, яка розв'язувалася раніше *LU*–розкладанням (5.1). Запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} a_1x_1 + c_1x_2 = d_1, \\ b_2x_1 + a_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ b_3x_2 + a_3x_3 + c_3x_4 = d_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_nx_{n-1} + a_nx_n = d_n. \end{cases} \tag{5.4}$$

Розв'яжемо систему (5.4), виконавши аналог прямого ходу Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - w_1x_2 = v_1 \Rightarrow x_1 - (-\dfrac{c_1}{a_1})x_2 = \dfrac{d_1}{a_1}, \\ x_2 - w_2x_3 = v_2 \Rightarrow x_2 - (-\dfrac{c_2}{a_2 + b_2w_1})x_3 = \dfrac{d_2 - b_2v_1}{a_2 + b_2w_1}, \\ x_3 - w_3x_4 = v_3 \Rightarrow x_3 - (-\dfrac{c_3}{a_3 + b_3w_2})x_4 = \dfrac{d_3 - b_3v_2}{a_3 + b_3w_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = v_n. \end{cases} \tag{5.5}$$

де прогоночні коефіцієнти визначаються за наступними рекурентними співвідношеннями, які одержуємо з розв'язку системи (5.5):

$$\begin{aligned} w_i &= -\frac{c_i}{b_iw_{i-1} + a_i}, i = 2,3,\dots.n-1; \\ v_i &= \frac{d_i - b_iv_{i-1}}{b_iw_{i-1} + a_i}, i = 2,3,\dots.n. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Знаходження прогоночних коефіцієнтів за формулою (5.6) з урахуванням початкових значень $w_1 = (-c_1/a_1), v_1 = d_1/a_1$ називають *прямим ходом* методу прогону. Після цього з формули (5.5) визначають значення невідомих:

$$x_n = v_n, x_i = w_ix_{i+1} + v_i, i = n-1,\dots.,1. \tag{5.7}$$

Обчислення за формулою (5.7) називають *зворотним ходом* методу прогонки. Основний час обчислень використовується на визначення прогоночних коефіцієнтів за формулою (5.7), які вимагають виконання 8 операцій на кожну пару коефіцієнтів, з яких тільки 5 належать до довгих операцій множення і ділення.

Приклад 5.1

Вирішити методом прогонки систему лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & 1 & 5 & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{vmatrix}.$$

Знайдемо прогоночні коефіцієнти , скориставшись формулами (5.7) і враховуючи значення елементів діагоналей матриці: головної :a = [2 3 4 5 3], верхньої c = [1 1 1 1 0] , нижньої діагоналей b = [0 1 1 1 1], а також вектор правої частини d = [1 - 1 2 - 3 2]^t. Послідовно обчислимо:

$$w_1 = (-\frac{c_1}{a_1}) = -\frac{1}{2}, \quad v_1 = \frac{d_1}{a_1} = \frac{1}{2};$$

$$w_2 = -\frac{c_2}{b_2 w_1 + a_2} = \frac{1}{-1/2 + 3} = -\frac{2}{5}; \quad v_2 = \frac{d_2 - b_2 v_1}{b_2 w_1 + a_2} = \frac{-1 - 1/2}{-1/2 + 3} = -\frac{3}{5};$$

$$w_3 = -\frac{c_3}{b_3 w_2 + a_3} = \frac{1}{-2/5 + 4} = -\frac{5}{18}; \quad v_3 = \frac{d_3 - b_3 v_2}{b_3 w_2 + a_3} = \frac{2 + 3/5}{-2/5 + 4} = \frac{13}{18};$$

$$w_4 = -\frac{c_4}{b_4 w_3 + a_4} = \frac{1}{-5/18 + 5} = -\frac{18}{85}; \quad v_4 = \frac{d_4 - b_4 v_3}{b_4 w_3 + a_4} = \frac{-3 - 13/18}{-5/18 + 5} = -\frac{67}{85};$$

$$w_5 = -\frac{c_5}{b_5 w_4 + a_5} = \frac{0}{-18/85 + 2} = 0; \quad v_5 = \frac{d_5 - b_5 v_4}{b_5 w_4 + a_5} = \frac{2 + 67/81}{-18/85 + 3} = \frac{237}{237} = 1.$$

Тепер використаємо формулу (5.7) і послідовно знаходимо:

$$x_5 = v_5 = 1;$$

$$x_4 = -w_4 x_5 + v_4 = -\frac{18}{85} - \frac{67}{85} = -\frac{85}{85} = -1;$$

$$x_3 = w_3 x_4 + v_3 = \frac{5}{18} + \frac{13}{18} = \frac{18}{18} = 1;$$

$$x_2 = w_2 x_3 + v_2 = -\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{5}{5} = -1;$$

$$x_1 = w_1 x_2 + v_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Програма рішення цього прикладу на мові пакета *Mathematica* виглядає так:

```
a = {2, 3, 4, 5, 3};
c = {1, 1, 1, 1, 0};
b = {0, 1, 1, 1, 1};
d = {1, -1, 2, -3, 2};
n = 5;
W = Array[w, n];
V = Array[v, n];
w[1] = -(c[[1]]/a[[1]]);
```

```
v[1] = d[[1]]/a[[1]];
Do[w[i] = -(c[[i]]/(b[[i]]*w[i - 1] + a[[i]]));
v[i] = (d[[i]] - b[[i]]*v[i - 1])/(b[[i]]*w[i - 1] + a[[i]]),
{i,2,n}];
X = Array[x, n];
x[n] = v[n];
For[i = (n - 1), i > 0, i--, x[i] = w[i]*x[i + 1] + v[i]]
 Table[x[i],{i,5}]

{1, -1, 1, -1, 1}
```

Метод визначальних величин

Зростання розмірності систем лінійних (або лінеаризованих) рівнянь приводить до зниження ефективності прямих методів їх рішення, які розглядалися у попередніх параграфах, тому що час рішення суттєво зростає, навіть для випадку кодованих розріджених систем. Суттєво зменшити трудомісткість вирішення систем з розрідженими матрицями дозволяє застосування підходів *діакоптики*, на основі яких рішення великих систем рівнянь отримують за частинами. Якщо система лінійних рівнянь великої розмірності *nxn* має розріджену матрицю коефіцієнтів, то її можна привести до блочно–діагональної форми з обрамленням і сформувати допоміжну систему рівнянь значно меншої розмірності *mxm*, яка визначить вектор X_2 так званих *визначальних* величини, або змінних зв’язку, рис.5.1.

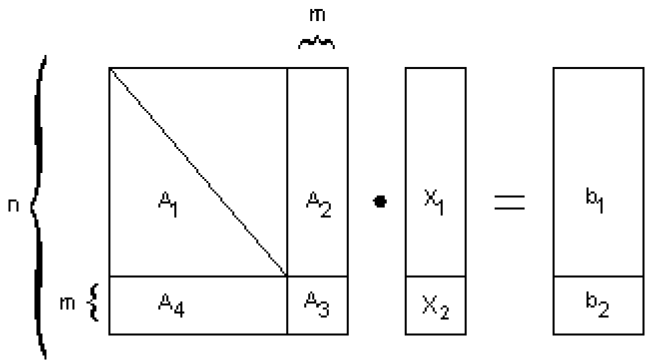

Рис. 5.1. Система рівнянь з блочно–діагональною матрицею з обрамленням

$$A^{*}X_2 = b^{*}. \qquad (5.8)$$

Алгоритм логічного сортування для пошуку визначальних величин містить такі кроки:

Крок 1. Визначити рядок вхідної матриці з мінімальним числом змінних *k* (ненульових елементів (НЕ)).

Крок 2. Якщо таких рядків декілька, то вибрати рядок, число НЕ якого в стовпцях, які визначаються *k* змінними, максимальне. При цьому (*k* - 1) змінні будуть належати до визначальних величин, а змінна *k* розраховується з вибраного рівняння пізніше.

Крок 3 Вибрані змінні *k* виключити з подальшого розгляду, перейти до наступного рядка.

Приклад 5.2

Перетворимо задану матрицю до блочно-діагональної форми з обрамленням:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
X & X & X & & & & \\
X & X & & & X & & \\
X & & X & X & X & & \\
 & & X & X & X & X & \\
 & & X & X & X & & \\
X & & & X & & X & \\
 & & & & X & & X
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ (3) - \textit{кількість НЕ} \\ (3) \\ (4) \\ (4) \\ (3) \\ (3) \\ (2) \end{array}$$

Побудуємо допоміжну таблицю, де в стовпцях будемо відмічати нові номери рядків $N_н$ (рівнянь), їх старі номери N_c, складові вектора X_1 і складові вектора змінних зв'язку X_2. Починаючи з сьомого рядка, який містить найменшу кількість ненульових елементів, заповнюємо таблицю:

$N_н$	N_c	X_1	X_2
1	7	7	5
2	2	1	2
3	1	3	
4	5	4	
5	6	6	
6	4		
7	3		

Примітки

- як змінну зв'язку доцільно обирати змінну, у стовпчику якої найбільше ненульових елементів;

- значення змінних X_1 і X_2 у стовпчиках таблиці не можуть повторюватись;

- у кожному рядку матриці може бути лише одна змінна зв'язку.

Після упорядкування згідно послідовності компонентів векторів X_1 та X_2 отримуємо:

$$\begin{array}{c} \\ 7 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 7 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|cc}
X & & & & & & \\
 & X & & & & & X \\
 & X & X & & & X & \\
 & & X & X & & & X \\
 & X & & X & X & & \\
\overline{} & \overline{} & \overline{X} & \overline{X} & \overline{X} & \overline{} & \overline{X} \\
 & X & X & X & & & X
\end{array}\right]
\end{array}$$

отримаємо упорядковані рівняння з обрамленням, в яке увійшли змінні 2 і 5.

Для формування допоміжної системи рівнянь розмірності mxm, яка визначить вектор X_2 визначальних величин, запишемо матричне рівняння $A = \hat{A}$

$+ CD + D^t D$ виділивши в структурі отриманої блочно–діагональної матриці з обрамленням складові, показані на рис. 5.2.

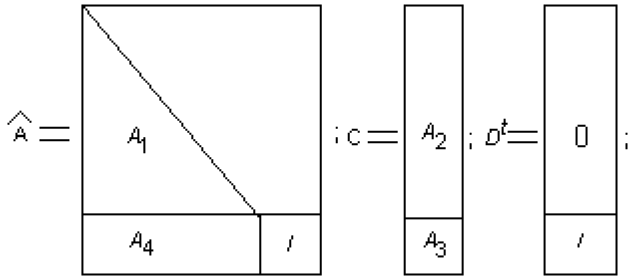

Рис. 5.2. Складові блочно–діагональної матриці з обрамленням

Тепер, використовуючи трикутну матрицю $\hat{A}$, $m + 1$ разів (m – розмірність вектора X_2) розв'язуємо систему:

$$\hat{A}X^{j} = b^{j}, j = \overline{0,m}, \tag{5.9}$$

де $b^j|_{j=0} = b$, $b^j|_{j=1,m} = C^j$ (j–й стовпчик матриці C).

Матриця A^* і вектор b^* правої частини рівняння (5.8) набираються по стовпцям з отриманих рішень рівняння (5.10), використовуючи матрицю-маску D:

$$A^* = [DX^{(1)}, DX^{(2)}, \ldots, DX^{(m)}] = [X_2^{(1)}, \ldots, X_2^{(m)}], \tag{5.10}$$

$$b^* = DX^{(0)} = X_2^{(0)}.$$

Необхідно мати на увазі, що формула(5.10) може *паралельно обчислюватися* на багатопроцесорних комп'ютерах, що і реалізовано на практиці в потужних програмах моделювання інтегральних схем.

Після рішення рівняння (5.8) і знаходження вектора визначальних величин X_2 змінні вектора X_1 визначаються з рівняння, матриця якого має блочно–діагональну форму з обрамленням:

$$X_{1i} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{1,ij} X_j - \sum_{r=1}^{m} A_{2,ir} X_{2r}, \tag{5.11}$$

де A_{1ij}, A_{2ij} елементи матриць A_1 *і* A_2 відповідно.

Приклад 5.3.

Користуючись методом визначальних величин, вирішити систему рівнянь:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Після упорядкування зводимо систему до блочно-діагональної форми з обрамленням:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \to AX = b_0.$$

Визначальною змінною буде тільки змінна x_2.

Матриця A_1 має вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Систему на основі матриці A_1 необхідно вирішити двічі, використовуючи вхідний вектор правої частини b_0=[2,1,3,0,0,1]^T і стовпчик 6 матриці C, c_6 = [2,1,0,0,0,1]^T в пакеті *Mathematica:*

```
A1={{1,0,0,0,0,0},{0,2,0,0,0,0},{0,2,2,0,0,0},{1,0,0,1,0,0},{1,3,0
,0,2,0},{0,0,4,2,0,1}};
b0={2,1,3,0,0,1};
b={2,1,0,0,0,1};
X=LinearSolve[A1,b0]

{2, 1/2, 1, -2, -7/4, 1}

X[[6]]

1

X1=LinearSolve[A1,b]

{2, 1/2, -1/2, -2, -7/4, 7}

X1[[6]]

7

x2= X[[6]]/X1[[6]]

1/7
```

Тобто допоміжна система рівнянь для визначальних величини (5.8) містить тільки одне рівняння X[[6]]· x_2= X1[[6]] , звідки x_2=1/7. Інші змінні розраховуються згідно з формулою (5.11):

$$x_1 = 2 - 2x_2 = 12/7; \quad x_4 = \frac{1 - x_2}{2} = 3/7; \quad x_6 = \frac{3 - 2x_4}{2} = 15/14;$$

$$x_5 = -x_1 = -12/7; \quad x_3 = \frac{-x_1 - 3x_4}{2} = -3/2.$$

Перевіримо рішення з допомогою пакета *Mathematica*:

```
A={{1,0,0,0,0,2},{0,2,0,0,0,1},{0,2,2,0,0,0},{1,0,0,1,0,0},{1,3,0,
0,2,0},{0,0,4,2,0,1}};
X={12/7, 3/7, 15/14, -12/7, -3/2, 1/7};
A.X-b0

{0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Засоби пакета *Mathematica* для рішення розріджених систем лінійних рівнянь

У пакеті Mathematica передбачена також окрема процедура обробки розріджених матриць. Для системи рівнянь, розглянутої в прикладі 5.1, отримуємо:

```
s=SparseArray[{{1,1}->2,{1,2}->1,{2,1}->1,{2,2}->3,{2,3}->1,{3,2}-
>1,{3,3}->4,{3,4}->1,{4,3}->1,{4,4}->5,{4,5}->1,{5,4}->1,{5,5}-
>3}];
d={1,-1,2,-3,2};
M=Normal[s];
X=LinearSolve[M,d]

{1, -1, 1, -1, 1}
```

Порядок виконання роботи

1. Обрати варіант завдання згідно зі списком групи.
2. Запрограмувати на мові пакету Mathematica рішення заданої системи рівнянь шостого порядку методом спрощеного *LU*–розкладу (5.1)-(5.3) і впевнетися, що ненульова структура розрідженої матриці не змінються.
3. Корстуючись функцією `LinearSolve` пакету Mathematica вирішити ту ж систему рівнянь шостого порпядку і порівняти результати з отриманими в пункті 2.
4. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica для формул метода прогонки (5.4)-(5.7), знайти рішення заданої системи рівнянь шостого порпядку методом прогонки і порівняти результати з отриманими в пункті 3.
5. Привести задану систему рівнянь до блочно-діагональної форми за зразком, наведеним у прикладі 5.2, і знайти визначальні величини для вашого прикладу.
6. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти рішення системи рівнянь шостого порпядку методом визначальних величин (5.8)-(5.11) і порівняти результати з отриманими в пункті 3.
7. Користуючись стандартними операторами пакету Mathematica, знайти

рішення заданої системи рівнянь, користуючись вбудованою процедурою обробки розріджених матриць

8. Скласти звіт з отриманих результатів і математичних формул використаних методів по кожному пункту завдання, давши оцінку порівняльної точності отриманих рішень різними методами.

Варіанти завдань з трьох діагональною матриєю 6-го порядку

№	Компоненти діагоналі $\boldsymbol{b_i}$	Компоненти діагоналі $\boldsymbol{a_i}$	Компоненти діагоналі $\boldsymbol{c_i}$	Вектор правої частини **d**=[ ]^t
1	2	3	1	2, -2, -6, -4, 2, 5
2	2	3	1	2, 0, 0, 0, 0, -1
3	2	3	1	-2, 2, 6, 4, -2, -5
4	2	3	1	-2, 0, 0, 0, 0, 1
5	2	3	1	4, 6, 4, -2, -6, -5
6	1	3	2	1, -4, -6, -2, 4, 4
7	1	3	2	-1, 4, 6, 2, -4, -4
8	1	3	2	1, 0, 0, 0, 0, -2
9	1	3	2	-1, 0, 0, 0, 0, 2
10	1	3	2	5, 6, 2, -4, -6, -4
11	3	4	2	2, -3, -9, -5, 3, 7
12	3	4	2	2, 1, -1, 1, -1, -1
13	3	4	2	-2, 3, 9, 5, -3, -7
14	3	4	2	-2, -1, 1, 1, 1, 1
15	3	4	2	-6, -9, -5, 3, 9, 7
16	2	4	3	7, 9, 3, -5, -9, -6
17	2	4	3	1, 1, -1, 1, -1, -2
18	2	4	3	-1, -1, 1, -1, 1, 2
19	2	4	3	7, 3, -5, -9, -3, 2
20	2	4	3	-7, -3, 5, 9, 3, -2
21	3	4	1	-5, -8, -6, 2, 8, 7
22	3	4	1	-3, 0, 0, 0, 0, 1
23	3	4	1	5, 8, 6, -2, -8, -7
24	3	4	1	5, 6, -2, -8, -6, 1
25	3	4	1	-5, -6, 2, 8, 6, -1