В. Д. Кряквин

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Пособие к решению задач
и
большая коллекция вариантов заданий

УДК 000.0.00
ББК 00.000.0-000.0
К00

Кряквин В. Д.
К43 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. Пособие к решению задач. и большая коллекция вариантов заданий — М.: Вузовская книга, 2004. — 519 с.: ил.

ISBN 5-9500-0000-0

Учебное пособие содержит справочные сведения и примеры решения задач основных типов по разделам "Линейные и евклидовы пространства"и "Конечномерные линейные операторы в линейных и евклидовых пространствах"курсов «Линейная алгебра», «Алгебра», «Геометрия и алгебра» для вузов. Приведено значительное количество задач и упражнений для самостоятельного решения, которые могут быть использованы как для аудиторной работы, так и для индивидуальных заданий.

Для студентов и преподавателей вузов.

ББК 00.000.0-000.0

ISBN 0-0000-0000-0

ВВЕДЕНИЕ

> В умозрительных рассуждениях отсутствует опыт, без которого ни в чем не может быть достоверности.
> *Леонардо да Винчи.*

Пособие предназначено для студентов, впервые знакомящихся с учебным курсом «Линейная алгебра», и содержит стандартные задачи разделов «Метод последовательных исключений неизвестных(метод Гаусса)»(глава 1), «Линейные пространства»(глава 2), «Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах»(глава 3), «Спектральная теория конечномерных линейных операторов и ее приложения»(глава 4), «Евклидовы пространства»(глава 5), «Линейные операторы в конечномерных евклидовых пространствах»(глава 6), «Квадратичные формы»(глава 7). Каждая глава разбита на параграфы, которые организованы следующим образом. Сначала приводятся справочные материалы по теме, потом даются подробные решения стандартных задач. В конце каждой главы имеется 5-6 вариантов по каждой задаче для решения в аудитории или для самостоятельных упражнений. Пособие создавалось, в основном, по двум причинам. С одной стороны, оно предоставляет изучающему предмет возможность разобраться самостоятельно в алгоритмах решения задач линейной алгебры. С другой стороны, пособие содержит значительное количество заданий, которые могут быть использованы при всех формах обучения. При этом некоторая часть самостоятельной работы может быть реализована с использованием индивидуальных заданий. Для этого в приложении собраны варианты заданий в количестве, достаточном для одной учебной группы. Все задания снабжены ответами. Следует отметить, что большинство предлагаемых заданий (за исключением тех, где необходима нормировка) «решается в целых числах». Приведенные в пособии алгоритмы преследуют учебные цели и рассчитаны на «модельные» задачи, которые можно решить вручную, без использования вспомогательных средств. Несмотря на то, что пособие рассчитано на первоначальное знакомство с предметом, автор не видит никакой возможности запретить использовать пособие в своей работе подготовленными читателями, в частности преподавателями вузов, в том числе начинающими.

Некоторые части пособия издавались в Ростовском государственном университете в виде методических указаний и прошли апробацию на практических занятиях на механико-математическом факультете. Изложение материала в пособии во многом (главы 2 – 5 и частично 6) ориентировано на учебник [12]. Я выражаю благодарность его авторам доценту А. В. Козаку и профессору В. С. Пилиди, чьими идеями, советами, пожеланиями и замечаниями (невероятно тактичными) я воспользовался. Конструктивные замечания и предложения всех сотрудников кафедры алгебры и дискретной математики Ростовского госуниверситета способствовали улучшению текста пособия. Декан механико-математического факультета РГУ Я. М. Ерусалимский и зам. декана И. А. Чернявская всячески укрепляли боевой дух автора. Особая благодарность родным и близким, все это вытерпевшим, и студентам механико-математического факультета РГУ, посещавшим занятия, несмотря на отчаянный холод в аудиториях зимой и чудную погоду за окном весной. Я также благодарен всем, кто по мере своих сил не мешал мне на рабочем месте заниматься посторонней работой, кто улучшал текст пособия разными советами и деловыми замечаниями.

Я должен заверить читателя, что все верные определения, факты и алгоритмы заимствованы из литературы, далеко не полный список которой приведен в конце данного издания. При этом, несмотря на все мои усилия, внутренние и внешние причины могли послужить источником некоторого числа ошибок. Их автор заранее приносит свои извинения и будет признателен за любую конструктивную критику и указание на описки и опечатки. Со мной можно связаться по электронной почте. Мой e-mail: vadkr@math.rsu.ru .

Обозначения.

> ...Хотя есть отсталые ученые, которые используют устаревшие обозначения, и наоборот — передовые ученые, которые выдумывают свои новые обозначения. Но я буду придерживаться наиболее общепринятых обозначений. *Из записи лекции А. А. Кириллова "Метод орбит и конечные группы", 28.12.1997 г.*

$\forall$ — любой, для любого, для всех.
$\exists$ — существует, найдется.
$\in$ — принадлежит (является элементом), напр., $x \in M$ — элемент x принадлежит множеству M.
$M_1 \subset M$ — множество M_1 является частью множества M (его подмножеством).
$\emptyset$ — пустое множество.
$M_1 \cup M_2$ — объединение множеств M_1 и M_2 (множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств M_1 или M_2).
$M_1 \cap M_2$ — пересечение множеств M_1 и M_2 (множество всех элементов, принадлежащих и множеству M_1 и множеству M_2).
$M_1 \setminus M_2$ — разность множеств M_1 и M_2 (подмножество всех элементов множества M_1, не принадлежащих множеству M_2).
$\mathbb{N}$ — множество (полугруппа) натуральных чисел.
$\mathbb{Z}$ — множество (кольцо) целых чисел.
$\mathbb{Q}$ — множество (поле) рациональных чисел.
$\mathbb{R}$ — множество (поле) вещественных чисел.
$\mathbb{C}$ — множество (поле) компле́ксных чисел.
$\mathbb{F}$ — одно из множеств (полей) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
Для любого компле́ксного числа $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\Re z$ — действительная часть компле́ксного числа $z = x + iy$: $\Re z = x$;
$\Im z$ — мнимая часть компле́ксного числа $z = x + iy$: $\Im z = y$;
$|z|$ — модуль (абсолютная величина) компле́ксного (вещественного) числа z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
$\arg z$ — аргумент компле́ксного числа $z \neq 0$: $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, $\cos(\arg z) = x/|z|$, $\sin(\arg z) = y/|z|$.
Линейное пространство и его подпространства будем обозначать буквой $\mathbb{V}$, возможно с индексами.
$\dim \mathbb{V}$ — размерность линейного пространства $\mathbb{V}$.
$\mathbb{E}$ — евклидово (вещественное) пространство.
$\mathbb{U}$ — унитарное (комплексное) пространство.
Векторы линейного пространства обозначаются жирными латинскими буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,...,$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ возможно с индексами.

Числа (скаляры) обозначаются либо греческими буквами, может быть с индексами, или нежирными латинскими буквами с индексами.
Матрицы будут обозначаться большими латинскими буквами следующего начертания: A, B, ..., Z.
$|\mathsf{A}|$ — определитель матрицы A.
$\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — диагональная матрица с элементами α_1, α_2, ..., α_n на диагонали.
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ — линейное пространство всех вектор-столбцов с $n(\in \mathbb{N})$ вещественными, соответственно комплéксными, элементами.
$\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ — линейное пространство всех многочленов от одной неизвестной x с вещественными, соответственно комплéксными, коэффициентами.
$\deg f$ — степень многочлена f.
$\mathbb{R}[x]_n$, $\mathbb{C}[x]_n$ — линейное пространство всех многочленов от одной неизвестной x с вещественными, соответственно комплéксными, коэффициентами и степени не больше $n(\in \mathbb{N} \cup \{0\})$.
$\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ — линейное пространство всех матриц порядка $n(\in \mathbb{N})$ с вещественными, соответственно комплéксными, элементами.
V_3 (V_2) — линейное пространство всех векторов в пространстве (на плоскости).
$\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ — линейная оболочка, порожденная системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_n$).
$\operatorname{Spec} A$ — спектр линейного оператора A или его матрицы.
$\operatorname{rang} A$ — ранг линейного оператора A или его матрицы.
$\operatorname{tr} A$ — след линейного оператора A или его матрицы.
$\operatorname{im} A$ — образ линейного оператора A.
$\ker A$ — ядро (ноль-пространство) линейного оператора A.
$\det A$ или $|A|$ — определитель линейного оператора A или его матрицы.

...в Поднебесной повсеместно еще встречаются люди, путающие иероглифы при чтении и письме. *Фихиро. Письмо императору (эпоха Тань).*

Греческий алфавит

A α	B β	Γ γ	Δ δ	E ϵ (ε)	Z ζ
альфа	бета	гамма	дельта	эпсилон	дзета
H η	Θ θ (ϑ)	I ι	K κ	Λ λ	M μ
эта	тэта	йота	каппа	ламбда	мю
N ν	Ξ ξ	O o	Π π (ϖ)	P ρ (ϱ)	Σ σ (ς)
ню	кси	омикрон	пи	ро	сигма
T τ	Υ υ	Φ ϕ (φ)	X χ	Ψ ψ	Ω ω
тау	ипсилон	фи	хи	пси	омега

Латинский алфавит

A, a,	B, b,	C, c,	D, d,	E, e,	F, f,	G, g,
а	бэ	цэ	дэ	э	эф	гэ
H, h,	I, i,	J, j,	K, k,	L, l,	M, m,	N, n,
ха	и	йота	ка	эль	эм	эн
O, o,	P, p,	Q, q,	R, r,	S, s,	T, t,	U, u,
о	пэ	ку	эр	эс	тэ	у
V, v,	X, x,	Y, y,	Z, z			
вэ	икс	ипсилон	зэта			

Французский алфавит (Современный латинский алфавит)

A, a,	B, b,	C, c,	D, d,	E, e,	F, f,	G, g,
а	бэ	сэ	дэ	э, ө	эф	жэ
H, h,	I, i,	J, j,	K, k,	L, l,	M, m,	N, n,
аш	и	жи	ка	эль	эм	эн
O, o,	P, p,	Q, q,	R, r,	S, s,	T, t,	U, u,
о	пэ	кю	эр	эс	тэ	ю
V, v,	W, w,	X, x,	Y, y,	Z, z		
вэ	дубль вэ	икс	игрек	зэд		

ГЛАВА 1
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Метод последовательных исключений неизвестных

> — Мы сами знаем, что она не имеет решения, — сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. — Мы хотим знать, как ее решать.
> ...Бессмыслица — искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступить с задачей, которая решения не имеет. *А. Стругацкий, Б. Стругацкий «Понедельник начинается в субботу».*

Многие задачи, рассматриваемые здесь (и не только здесь), сводятся в конце концов к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Система уравнений состоит из m уравнений, $1 \le m < \infty$ (обратите внимание, что система может состоять и из одного уравнения) и n неизвестных x_1, x_2, ..., x_n, $1 \le n < \infty$. Элементы $a_{i,j}$ называются коэффициентами, а элемент b_i — свободным членом i - го уравнения системы. Нас, в основном, будут интересовать решения системы уравнений, то есть такие упорядоченные наборы чисел x_1, x_2, ..., x_n, которые при подстановке их во все уравнения системы превращают последние в числовые равенства. Кроме того, интересны условия, при которых решение системы уравнений существует и, тем более, единственно. Поэтому будем различать следующие возможные случаи. Возможно, что система линейных алгебраических уравнений имеет хотя бы одно решение (иными словами, не менее одного решения). В этом случае она называется совместной. Если же система линейных алгебраических уравнений не имеет ни одного решения, то она называется несовместной. Любая система уравнений либо совместна, либо несовместна. Если совместная система линейных уравнений имеет <u>только</u> одно решение, то она называется определенной, если более одного решения — неопределенной.

Для решения системы линейных уравнений мы используем метод последовательных исключений неизвестных (метод Гаусса)[1]. Метод последовательных исключений (метод Гаусса) основан на элементарных преобразованиях системы линейных уравнений. Обычно выделяют три вида элементарных преобразований. Это

1) перемена местами двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля;

3) прибавление к левой и правой частям одного уравнения соответственно левой и правой частей другого уравнения, умноженных на одно и то же произвольное число.

Система линейных уравнений, полученная с помощью элементарных преобразований, равносильна исходной системе уравнений. Вместо того, чтобы выписывать систему линейных уравнений, будем использовать ее расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Она состоит из основной матрицы (или просто матрицы) системы уравнений

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

элементами которой являются коэффициенты системы уравнений, и столбца свободных членов. Так как неизвестные упорядочены, то любая система линейных уравнений имеет однозначно определенную расширенную матрицу. И наоборот, по каждой расширенной матрице однозначно восстанавливается ее система линейных уравнений. Таким образом, расширенную матрицу можно рассматривать как краткую запись системы линейных алгебраических уравнений. Если ввести вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец свободных членов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

[1]точнее один из его вариантов, который обычно (а может быть, иногда) называется схемой Жордана (см.[4]).

то тогда систему уравнений можно записать в следующей матричной форме: $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. В этом матричном уравнении слева стоит (матричное) произведение матрицы A на вектор $\mathbf{x}$. Если все свободные члены равны нулю: $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, то система линейных уравнений называется однородной. Однородная система уравнений совместна, так как имеет, по крайней мере, тривиальное (нулевое) частное решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. В расширенной матрице однородной системы уравнений столбец свободных членов (состоящий из одних нулей) обычно опускается, так что расширенная матрица по внешнему виду совпадает с основной.

Элементарным преобразованиям системы уравнений отвечают соответствующие элементарные преобразования ее расширенной матрицы. Для этих преобразований будем обозначать через $C_i \bigtimes C_j$ перемену местами i - й и j - й строк расширенной матрицы, через αC_i — умножение i - й строки расширенной матрицы на число $\alpha \neq 0$ и через $C_i + \alpha C_j$ — прибавление к i - й строке j - й строки, умноженной на число α. Если α является рациональным числом $\alpha = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, то αC_i и $C_i + \alpha C_j$ иногда будем записывать как aC_i/b и $C_i + aC_j/b$ соответственно. Кроме того, для сокращения записи будем вычеркивать уравнение системы со всеми нулевыми коэффициентами и нулевым свободным членом, а C_i* будет обозначать вычеркивание соответствующей (i — й) нулевой строки расширенной матрицы.

Теперь попробуем разобраться в самом методе последовательных исключений неизвестных. Основная идея состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований систему уравнений привести к такой эквивалентной системе уравнений, решение которой легко найти. Эту последнюю систему уравнений (и ее матрицу), будем называть приведенной[2]. Удобнее дать определение приведенной матрицы. Будем ненулевой элемент основной матрицы системы уравнений называть ведущим элементом, если все остальные элементы, стоящие в том же столбце, равны нулю. Глядя на основную матрицу, ведущий элемент легко распознать. В столбце это единственный ненулевой элемент. Строка основной матрицы системы уравнений (и соответствующее уравнение) называется приведенной, если она содержит хотя бы один ведущий элемент. В строке таких ненулевых элементов может быть несколько. Тогда из них выбирается один (и только один) ведущий элемент. Наконец, основная матрица (и соответствующая ей система уравнений) называется приведенной, если ее любая ненулевая строка является приведенной.

[2]Это название, к сожалению, не является общеупотребительным.

Система уравнений со следующей расширенной матрицей является приведенной (ведущие элементы подчеркнуты)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \underline{1} & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -\underline{2} & 0 & -1 \\ \underline{1} & 0 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Для того, чтобы получить с помощью элементарных преобразований приведенную систему уравнений, будем поступать следующим образом. Выбираем произвольное уравнение, имеющее хотя бы один ненулевой коэффициент. Это значит, что соответствующая строка основной матрицы является ненулевой. Если это уравнение приведено, то выбираем другое уравнение. Если же нет, то в этом уравнении выбираем ненулевой коэффициент и называем его ведущим элементом. Затем умножаем по очереди это уравнение на подходящие числа с тем, чтобы после прибавления полученных уравнений к остальным уравнениям системы получить нулевые коэффициенты при той же неизвестной, при которой стоит ведущий элемент. В результате этих преобразований выбранное уравнение становится приведенным. Перебирая таким образом все уравнения, получаем приведенную систему, эквивалентную исходной[3].

Пусть приведенная система содержит уравнение, все коэффициенты и свободный член которого равны нулю. Тогда это уравнение можно вычеркнуть из системы.

Если приведенная система содержит уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_i,$$

все коэффициенты которого равны нулю, а свободный член b_i отличен от нуля, то любой набор чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n обращает левую часть уравнения в ноль, что не равно правой части. Значит уравнение не имеет решения, поэтому и система, содержащая это уравнение, несовместна.

Пусть теперь каждое уравнение приведенной системы содержит хотя бы один ненулевой коэффициент. Тогда в любом уравнение есть ведущий элемент. Таких ведущих элементов в каждом уравнении мо-

[3] Отличие этого варианта метода последовательных исключений неизвестных от остальных заключается в том, что исключение очередной неизвестной происходит сразу во всех уравнениях и, следовательно, нет обратного хода или обратной подстановки. Основным его достоинством по сравнению с другими вариантами метода Гаусса является его бо́льшая регулярность. Несмотря на то, что этот метод требует несколько больше арифметических операций, чем другие варианты, общая простота алгоритма приводит при вычислениях "вручную"в среднем к сокращению времени решения системы линейных уравнений за счет сокращения чисто технической работы по переписыванию расширенных матриц.

жет быть и несколько, но выбрать нужно ровно один (их будем подчеркивать в расширенной матрице). Неизвестные системы уравнений, стоящие при этих ведущих элементах называются главными (или зависимыми), остальные неизвестные называются свободными (или независимыми). Выбранных нами ведущих элементов столько же, сколько и главных неизвестных (и столько же, сколько уравнений). Возможно два случая. Количество уравнений приведенной системы равно числу всех неизвестных и меньше числа всех неизвестных. Если число уравнений (равное числу главных неизвестных) равно числу всех неизвестных, то свободных неизвестных нет и в каждом уравнении присутствует только одна неизвестная с ненулевым коэффициентом (ведущим элементом). Это уравнения вида $a_{i,j}x_j = b_i$. Они легко решаются $x_j = b_i/a_{i,j}$, так как $a_{i,j} \neq 0$. Таким образом в этом случае система уравнений имеет, причем единственное решение. Это значит, что система уравнений является определенной. Пусть теперь число уравнений меньше числа всех неизвестных. В этом случае имеются свободные неизвестные. Перенесем все слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правые части уравнений. Тогда слева останутся лишь главные неизвестные, по одному в каждом уравнении. Все они легко выражаются через слагаемые, стоящие справа. В этом случае система уравнений имеет более одного решения [4]. Свободные неизвестные могут принимать любые значения, главные неизвестные выражаются через свободные. Так получаем множество всех решений. Чтобы получить какое-нибудь частное решение, нужно выбрать конкретные значения свободных неизвестных и после этого вычислить значения главных неизвестных.

Имеются критерии совместности и определенности систем уравнений. В этих критериях используется понятие ранга матрицы. Поэтому они сформулированы далее в соответствующем разделе (см. стр. 80).

Рассмотрим теперь метод последовательных исключений неизвестных для решения систем уравнений на конкретных примерах. Ведущие элементы системы уравнений, с помощью которых проводится исключение неизвестных, будут подчеркиваться в расширенной матрице. Знак $\sim$, стоящий между расширенными матрицами, означает, что соответствующие системы линейных уравнений равносильны.

[4] Конечно, если неизвестные ищутся во множестве всех действительных или компле́ксных чисел, то система уравнений будет иметь бесконечно много решений.

<u>Пример</u> 1 Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 11. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \underline{3} & -2 & 5 & 5 \\ -6 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & 11 \end{array}\right).$$

Удобно в качестве ведущего выбрать, например, первый элемент в первой строке (этот элемент подчеркнут). Вообще-то ведущим элементом может быть выбран любой ненулевой элемент основной матрицы системы уравнений. Но при вычислениях "вручную"для системы линейных уравнений с целыми коэффициентами ведущими желательно выбирать те элементы, которые являются делителями всех элементов столбца, в котором выбран ведущий элемент. Часто ведущими выбираются элементы, равные ± 1. С помощью элементарных преобразований сделаем все остальные элементы в первом столбце равными нулю. Для этого нужно ко второму уравнению прибавить первое, умноженное на 2, и к третьему уравнению прибавить первое, умноженное на -1. Этим элементарным преобразованиям системы уравнений отвечают следующие элементарные преобразования расширенной матрицы: $C_2 + 2C_1$, $C_3 - C_1$. После этих преобразований система уравнений будет иметь расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & \underline{5} & 8 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

В каждой ненулевой строке основной матрицы ведущий элемент выбирается только один раз. Выберем теперь ведущий элемент во второй строке и третьем столбце. Можно, конечно, ведущий элемент выбрать и во втором столбце. Наш выбор ведущего элемента продиктован желанием уменьшить объем вычислений. Вычтем из первого и из третьего уравнений второе, то есть выполним элементарные преобразования $C_1 - C_2$ и $C_3 - C_2$. Тогда получим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -\underline{2} & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Ведущий элемент еще не выбирался только в третьей строке, где только элемент основной матрицы, стоящий во втором столбце, отличен от нуля. Значит, только этот элемент можно взять в качестве ведущего. С помощью него сделаем все остальные элементы второго столбца равными нулю. Для этого выполним элементарное преобразование $C_2 - C_3$. Тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Ведущий элемент выбирался в каждой ненулевой строке. Значит, все строки приведены, а, следовательно, и система линейных уравнений имеет приведенную форму. Восстановим ее по расширенной матрице

$$\begin{cases} 3x_1 = -3, \\ 5x_3 = 10, \\ -2x_2 = -2. \end{cases}$$

Отсюда легко находим решение системы линейных уравнений: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Это решение можно записать как вектор-столбец $\mathbf{x} = (-1, 1, 2)^\tau$. Можно поступить и иначе. Если мы переставим строки расширенной матрицы и умножим их на множители так, чтобы основная матрица стала единичной, то столбец свободных членов совпадет с решением

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1/3 \\ C_2/(-2)}}{\underset{C_3/5}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

В итоге получаем то же решение, что и выше.

Пример 2 Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений и выполним приводящие к решению элементарные преобразования. Выберем в качестве ведущего элемента единицу, стоящую в третьей строке и четвертом столбце. Можно, конечно, было бы выбрать и какую-нибудь другую единицу, минус единицу или любой ненулевой элемент. Выбор именно этого элемента продиктован желанием уменьшить вычисления.

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & \underline{1} & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) & \begin{array}{c} C_1 + 2C_3 \\ C_2 - C_3 \\ \\ C_4 - C_3 \end{array} \end{array}.$$

После указанных элементарных преобразований расширенная матрица примет следующий вид. Последнюю строку можно разделить на три

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ C_4/3 \end{array}.$$

Теперь в четвертой строке удобно выбрать ведущий элемент

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\underline{1} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 - 2C_4 \\ C_3 + C_4 \\ \\ \end{array}.$$

Ведущие элементы еще не выбирались в первой и второй строках. В первой строке в отличие от второй строки нет удобного элемента. Из двух ненулевых элементов второй строки к меньшим вычислениям (быть может) приведет выбор ведущего элемента в третьем столбце.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 5C_2 \\ \\ \\ C_4 - C_2 \end{array}.$$

После сокращения первой строки на три

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_1/3 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

в первой строке можно взять последний ведущий элемент.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 - C_1 \\ C_3 + C_1 \\ \\ \end{array}.$$

В итоге получаем приведенную матрицу системы уравнений

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Отсюда легко находим решение системы линейных уравнений. Из первого уравнения $x_1 = 1$, из второго — $x_3 = 0$, из третьего — $x_4 = -1$, из четвертого — $x_2 = 2$. Это решение можно записать как вектор-столбец $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)^\tau$.

Пример 3 Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5=1,\\ x_1+x_3-x_4+x_5=2,\\ 3x_1+x_2+x_3+5x_5=4,\\ 2x_1+x_2+x_4+4x_5=3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений и выполним необходимые элементарные преобразования

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \underline{1} & -1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ C_3-C_1 \\ C_4-C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1\\ \underline{1} & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1-C_2 \\ \sim \\ C_3-C_2 \\ C_4-2C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Четвертая строка расширенной матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5=-1$, которое не имеет решений. Значит, система линейных уравнений несовместна.

Пример 4 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1-x_2-x_3-3x_4=1,\\ 5x_1-x_2+5x_3+3x_4=3,\\ 5x_1-x_2-7x_3-9x_4=-1, \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы уравнений и выполним необходимые элементарные преобразования

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -\underline{1} & -1 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 5 & 3 & 3\\ 5 & -1 & -7 & -9 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2-C_1 \\ \sim \\ C_3-C_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2/2 \\ \sim \\ C_3/2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 3 & \underline{3} & 1\\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1+C_2 \\ \sim \\ C_3+C_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

После элементарных преобразований система уравнений примет следующий вид

$$\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=2,\\ 3x_3+3x_4=1. \end{cases}$$

Главные неизвестные — x_2, x_4. Это те неизвестные, которые соответствуют ведущим элементам. Остальные неизвестные — свободные. Тогда неизвестные x_1, x_3 — свободные. Выбор главных неизвестных, вообще говоря, зависит от выбора ведущих элементов при решении. В нашем случае можно было бы главными неизвестными выбрать, например, x_1, x_4. Но выбор уже сделан. Тогда выразим главные неизвестные через свободные из уравнений последней системы

$$\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 2x_3 - 2, \\ x_4 = \frac{1}{3} - x_3. \end{cases} \tag{1.1}$$

Подчеркнем еще раз, что здесь главные неизвестные (стоят в (1.1) слева от знака равенства) выражены через свободные (и только свободные) неизвестные (стоят в (1.1) справа от знака равенства). Свободные неизвестные могут принимать любые значения во множестве вещественных (рациональных, комплексных) чисел (или всех элементов произвольного поля), в зависимости от того, какое ищется решение. Например, если нужно найти все вещественные решения системы уравнений, то свободные неизвестные могут принимать любые вещественные значения. Общее решение (то есть множество всех решений) системы линейных уравнений тогда можно записать в виде

$$\left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 5x_1 + 2x_3 - 2 \\ x_3 \\ \frac{1}{3} - x_3 \end{pmatrix},\ x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Это множество можно записать более красиво, если положить $x_1 = \alpha$, $x_3 = \beta$. Тогда общее решение запишется в следующем виде

$$\left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5\alpha + 2\beta - 2 \\ \beta \\ \frac{1}{3} - \beta \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

В дальнейшем мы не всегда будем (чаще не будем) выписывать общее решение в виде множества, как это сделали только что, а лишь будем указывать зависимость главных неизвестных от свободных, как в (1.1). Частное решение можно получить, если взять конкретные значения свободных неизвестных и по ним вычислить значения главных неизвестных. Например, если $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$, то $x_2 = -2$ и $x_4 = 1/3$. Таким образом, частное решение можно записать в виде $(0, -2, 0, 1/3)^\tau$. Если же взять $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$, то $x_2 = 0$ и $x_4 = -2/3$ и другое частное решение имеет вид $(0, 0, 1, -2/3)^\tau$.

<u>Пример</u> 5 Исследовать следующие системы уравнений и найти их общие решения в зависимости от значений параметра λ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - \lambda^2 x_2 + 4x_3 - 7x_4 = \lambda - 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 2, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Начнем с первой системы уравнений. Для нее запишем расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований попытаемся найти ее решение. При этом постараемся, насколько это возможно, исключение неизвестных проводить в тех столбцах, где нет параметра. Таким образом,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -\lambda^2 & 4 & -7 & \lambda-6 \\ 1 & 3 & -\underline{1} & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{C_2+4C_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 12-\lambda^2 & 0 & 9 & \lambda+6 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right) \underset{2C_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 12-\lambda^2 & 0 & 9 & \lambda+6 \\ 2 & 6 & -2 & 8 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2-3C_1 \\ \sim \\ C_3-C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9-\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda-3 \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right). \qquad (1.2)$$

Ведущие элементы еще не выбирались только во второй строке. Слева от черты ненулевым элементом в этой строке может быть лишь $9-\lambda^2$. Поэтому рассмотрим случаи, когда этот элемент равен нулю и отличен от нуля. Нулю он равен при $\lambda = \pm 3$. Пусть сначала $\lambda = -3$. Тогда расширенная матрица (1.2) примет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Вторая строка указывает, что в этом случае система уравнений несовместна (то есть не имеет ни одного частного решения). Если $\lambda = 3$, то система будет иметь следующую расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\underline{2} & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Сама же система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 3, \\ 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$$

Тогда ее общее решение можно записать в виде

$$x_1 = \frac{3 - x_2 - 3x_4}{2}, \quad x_3 = \frac{5x_2 + 5x_4 - 3}{2}, \quad \forall\, x_2, x_4 \in \mathbb{F}.$$

Пусть теперь $\lambda^2 \neq 9$, тогда вторую строку в (1.2) можно разделить на $9-\lambda^2$ и выполнить оставшиеся элементарные преобразования

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{3+\lambda} \\ 0 & 5 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1-C_2 \\ \sim \\ C_3-5C_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & 0 & 0 & 3 & 3+\frac{1}{3+\lambda} \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -\frac{1}{3+\lambda} \\ 0 & 5 & -\underline{2} & 5 & 3+\frac{5}{3+\lambda} \end{array}\right).$$

Мы получили систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1+3x_4=\frac{10+3\lambda}{3+\lambda}, \\ x_2=-\frac{1}{3+\lambda}, \\ -2x_3+5x_4=\frac{14+3\lambda}{3+\lambda}, \end{cases}$$
тогда общее решение можно записать в виде
$$x_1=\frac{10+3\lambda}{6+2\lambda}-\frac{3}{2}x_4, \quad x_2=-\frac{1}{3+\lambda}, \quad x_3=\frac{5}{2}x_4-\frac{14+3\lambda}{6+2\lambda}, \quad \forall x_4\in\mathbb{F}.$$
В итоге получен следующий ответ. При $\lambda=-3$ система уравнений несовместна. Если $\lambda\neq-3$, то система уравнений совместна и неопределенна, причем при $\lambda=3$ ее общее решение можно записать в виде
$$x_1=\frac{3-x_2-3x_4}{2}, \quad x_3=\frac{5x_2+5x_4-3}{2}, \quad \forall\, x_2,x_4\in\mathbb{F},$$
а в остальных случаях — в виде
$$x_1=\frac{10+3\lambda}{6+2\lambda}-\frac{3}{2}x_4, \quad x_2=-\frac{1}{3+\lambda}, \quad x_3=\frac{5}{2}x_4-\frac{14+3\lambda}{6+2\lambda}, \quad \forall x_4\in\mathbb{F}.$$

Займемся теперь второй системой уравнений. Запишем ее расширенную матрицу и затем прибавим к третьей строке сумму первой и второй строк. Это, очевидно, можно представить следующим образом
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{C_3+C_1+C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 2+\lambda & 2+\lambda & 2+\lambda & 0 \end{array}\right). \qquad (1.3)$$
Из вида третьей строки нетрудно заключить, что необходимо рассмотреть два случая: $2+\lambda=0$ и $2+\lambda\neq0$.

Пусть $2+\lambda=0$, то есть $\lambda=-2$. Подставим это значение λ в (1.3) и найдем решение соответствующей системы уравнений
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{C_2-C_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{C_2/3}{\overset{C_1+C_2/3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & -1 & 1 & 1/3 \end{array}\right).$$
Таким образом, мы получили равносильную исходной систему, состоящую из двух уравнений $x_1-x_3=\frac{4}{3}$, $-x_2+x_3=\frac{1}{3}$. Значит, общее решение можно записать в виде $x_1=x_3+\frac{4}{3}$, $x_2=x_3-\frac{1}{3}$, $\forall\, x_3$.

Пусть теперь $2+\lambda\neq0$, то есть $\lambda\neq-2$. Тогда третью строку расширенной матрицы (1.3) можно разделить на ненулевую величину $2+\lambda$ и полученную строку вычесть из первых двух. Выполним эти элементарные преобразования, тогда
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{C_2-C_3}{\overset{C_1-C_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right). \qquad (1.4)$$
Если $\lambda=1$, то расширенная матрица (1.4) примет следующий вид
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Первые две строки указывают, что система уравнений несовместна (не имеет ни одного частного решения).

Если же $\lambda \neq 1$, то первые две строки расширенной матрицы (1.4) можно разделить на ненулевую величину $\lambda - 1$. Тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\lambda-1} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{C_3 - C_1 - C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\lambda-1} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{\lambda-1} \end{array}\right).$$

Отсюда получаем, что система уравнений имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{3}{1-\lambda}, \quad x_2 = \frac{2}{\lambda-1}, \quad x_3 = \frac{1}{\lambda-1}.$$

Осталось записать ответ. При $(\lambda+2)(\lambda-1) \neq 0$ система уравнений совместна и, более того, определенна, то есть имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{3}{1-\lambda}, \quad x_2 = \frac{2}{\lambda-1}, \quad x_3 = \frac{1}{\lambda-1}.$$

При $\lambda = 1$ система уравнений несовместна. При $\lambda = -2$ система уравнений совместна и неопределенна, иными словами имеет более одного решения

$$x_1 = x_3 + \frac{4}{3}, \quad x_2 = x_3 - \frac{1}{3}, \quad \forall\, x_3 \in \mathbb{F}.$$

Рассмотрим вопрос о решении нескольких систем линейных уравнений с общей основной матрицей: $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \ldots$, $A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$. Так как основная матрица одна и та же, то при решении каждой из указанных систем уравнений будут выполняться одни и те же элементарные преобразования. Но тогда можно попытаться их выполнить одновременно для всех систем уравнений. Для этого построим новую расширенную матрицу, у которой справа от черты по очереди выписаны все столбцы свободных членов (они также отделены друг от друга вертикальными линиями)

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mk} \end{array}\right).$$

После преобразования основной матрицы можно выписать решение каждой системы уравнений отдельно, используя соответствующий столбец свободных членов. Если удается преобразовать основную матрицу к единичной, то на месте столбца свободных членов будет стоять решение соответствующей системы уравнений. Вертикальные линии, отделяющие столбцы свободных членов друг от друга, обычно только подразумеваются.

<u>Пример</u> 6 Для каждой из трех систем уравнений найти ее решение

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7, \\ 5x_1 + 3x_2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3, \\ 5x_1 + 3x_2 = -5, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Так как основная матрица всех систем линейных уравнений одна и та же, то можно записать общую расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 3 & 4 & 7 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 8 & -5 & 7 \end{array}\right).$$

Нет удобного ведущего элемента. Выполним подготовительное преобразование $C_1 - C_2$. Тогда (вертикальные линии, отделяющие друг от друга правые части систем уравнений опустим)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} -2 & \underline{1} & -1 & 2 & -5 \\ 5 & 3 & 8 & -5 & 7 \end{array}\right) \underset{C_2 - 3C_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 11 & 0 & 11 & -11 & 22 \end{array}\right) \underset{C_2/11}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ \underline{1} & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 + 2C_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 \times C_2} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Осталось выписать решения систем уравнений. Для первой системы линейных уравнений $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, для второй системы уравнений $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и для третьей системы $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

Только что решенную задачу следует отличать от следующей.

<u>Пример</u> 7 Найти все решения, удовлетворяющие двум системам уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 6x_5 = 11. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ является решением обеих систем линейных уравнений тогда и только тогда, когда он является решением системы уравнений, составленной из всех уравнений обеих исходных систем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 6x_5 = 11. \end{cases}$$

Найдем ее решение

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & \underline{1} & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 6 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_4 - 3C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & \underline{1} & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \\ C_4 - 4C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 9 & -9 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ C_3 * \\ C_4/9 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 0 & 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1+3C_3 \\ \sim \\ C_2+C_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Восстановим по расширенной матрице соответствующую ей систему уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 4, \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

Главные неизвестные — x_2, x_3, x_4, так как ведущие элементы выбирались во втором, третьем и четвертом столбцах. Остальные неизвестные x_1, x_5 являются свободными. Выразим главные неизвестные из уравнений последней системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 = 4 - x_1 - 2x_5, \\ x_3 = 2 - x_5, \\ x_4 = -1 + x_1 + x_5. \end{cases}$$

Здесь свободные неизвестные могут принимать любые значения. Тогда все решения задаются равенством

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 4 - x_1 - 2x_5 \\ 2 - x_5 \\ x_1 + x_5 - 1 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad x_1, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Матричные уравнения

> ...Все это начало ростовской деятельности мне кажется почти фантастическим. И тогда же я понял — читать лекции куда легче, чем сдавать по ним экзамен!
> *Н. Н. Моисеев «Как далеко до завтрашнего дня».*

Рассмотрим теперь решение матричных уравнений. Будем рассматривать матричные уравнения трех типов:

$$\text{I) } \mathsf{AX} = \mathsf{B}, \qquad \text{II) } \mathsf{XA} = \mathsf{B}, \qquad \text{III) } \mathsf{AXB} = \mathsf{C}.$$

Здесь матрицы A, B, C заданы, матрица X неизвестна и размеры всех матриц таковы, что их можно умножать[5] в указанном порядке и можно говорить о равенстве в уравнениях.

[5] Вы, конечно, помните, как умножаются матрицы. Для того, чтобы получить элемент произведения матриц, стоящий в i – й строке и j – м столбце, нужно взять i – ю строку левой матрицы и j – й столбец правой матрицы. Последовательно каждый элемент i – ой строки левой матрицы умножается на соответствующий (то

Рассмотрим сначала матричное уравнение I). Пусть матрица A имеет размеры $m \times n$, матрица X имеет размеры $n \times k$. Тогда матрица B должна иметь размеры $m \times k$. Обозначим через X^1, X^2,… X^k столбцы матрицы X и через B^1, B^2,… B^k столбцы матрицы B. Тогда по правилу умножения матриц произведение матрицы A на вектор-столбец X^1 даст вектор-столбец B^1, произведение матрицы A на вектор-столбец X^2 даст вектор-столбец B^2 и так далее, произведение матрицы A на любой вектор-столбец X^i даст соответствующий вектор-столбец B^i. Значит, решение матричного уравнения $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$ равносильно решению набора из k систем линейных уравнений $\mathsf{AX}^1 = \mathsf{B}^1$, $\mathsf{AX}^2 = \mathsf{B}^2, \ldots, \mathsf{AX}^k = \mathsf{B}^k$, решением каждой из которых является соответствующий столбец искомой матрицы. Так как основная матрица любой системы уравнений из этого набора одна и та же, то можно решать все системы одновременно. Для этого запишем расширенную матрицу матричного уравнения, где в качестве столбца свободных членов возьмем все столбцы матрицы B, то есть справа от черты вместо столбца свободных членов следует записать матрицу B. После того, как основную матрицу приведем к нужной форме, можно выписывать решение для каждого столбца искомой матрицы. При этом, если основная матрица преобразована к единичной, то на месте столбцов матрицы B будут стоять столбцы матрицы X. Но все столбцы вместе дадут искомую матрицу X. Значит, в этом случае справа от черты будет стоять решение матричного уравнения.

<u>Пример</u> 8 Решить матричные уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Для первого матричного уравнения запишем расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований попытаемся основную матрицу привести к единичной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 2C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 & 2 & -5 \\ 0 & -\underline{1} & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 2C_3 \\ \sim \\ C_2 - C_3 \end{array}$$

есть стоящий на такой же позиции от начала) элемент j – го столбца и полученные произведения элементов складываются. Полученное число и есть искомый элемент (о, ужас, только один), стоящий в i – й строке и j – м столбце произведения.

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&3&8&-1&4\\0&0&-4&-12&4&-4\\0&-1&1&2&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}C_2/(-4)\\ \sim\\ -C_3\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&3&8&-1&4\\0&0&\underline{1}&3&-1&1\\0&1&-1&-2&2&1\end{array}\right)\begin{array}{c}C_1-3C_2\\ \sim\\ C_3+C_2\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&-1&2&1\\0&0&1&3&-1&1\\0&1&0&1&1&2\end{array}\right)\underset{C_3\leftrightarrow C_2}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|rrr}1&0&0&-1&2&1\\0&1&0&1&1&2\\0&0&1&3&-1&1\end{array}\right).$$

Отсюда решение первого матричного уравнения

$$\mathsf{X}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&1&2\\3&-1&1\end{pmatrix}.$$

Для второго матричного уравнения

$$\left(\begin{array}{rrr|rr}\underline{1}&-1&-2&0&1\\1&-2&-2&-1&-1\\2&-3&-4&-1&0\end{array}\right)\begin{array}{c}C_2-C_1\\ \sim\\ C_3-2C_1\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rr}1&-1&-2&0&1\\0&-\underline{1}&0&-1&-2\\0&-1&0&-1&-2\end{array}\right)\begin{array}{c}C_1-C_2\\ \sim\\ C_3-C_2\end{array}\left(\begin{array}{rrr|rr}1&0&-2&1&3\\0&-1&0&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Для того, чтобы найти все решения, будем искать решения для каждого столбца отдельно. Пусть искомая матрица

$$\mathsf{X}=\begin{pmatrix}x_1&x_4\\x_2&x_5\\x_3&x_6\end{pmatrix}.$$

Тогда первый столбец этой матрицы является решением системы уравнений со столбцом свободных членов, совпадающим с первым столбцом матрицы B. Из последней расширенной матрицы

$$\begin{cases}x_1-2x_3=1,\\-x_2=-1,\end{cases}\quad\text{и отсюда}\quad\begin{cases}x_1=1+2x_3,\\x_2=1.\end{cases}$$

Аналогично, для второго столбца

$$\begin{cases}x_4-2x_6=3,\\-x_5=-2,\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x_4=3+2x_6,\\x_5=2.\end{cases}$$

Чтобы ответ выглядел более привлекательно, положим $x_3=\alpha$, $x_6=\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Тогда $x_1=1+2\alpha$ и $x_4=3+2\beta$. Если все элементы подставить в матрицу X, то получим

$$\mathsf{X}=\begin{pmatrix}1+2\alpha&3+2\beta\\1&2\\\alpha&\beta\end{pmatrix},\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Займемся теперь матричным уравнением II). Для того, чтобы решить матричное уравнение $\mathsf{XA}=\mathsf{B}$, протранспонируем это равенство. Получим равносильное равенство $\mathsf{A}^\tau\mathsf{X}^\tau=\mathsf{B}^\tau$. Решение этого матричного уравнения находится изложенным в I) методом.

Пример 9 Решить матричное уравнение

$$\mathsf{X}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. После транспонирования матричное уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\mathsf{X}^\tau = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем расширенную матрицу последнего уравнения и с помощью элементарных преобразований попытаемся основную матрицу привести к единичной

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} \underline{1} & 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -1 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Можно последнюю строку умножить на $1/2$, но не хочется лишний раз переписывать расширенную матрицу. Сделаем сразу два элементарных преобразования: разделим последнюю строку на 2 и затем прибавим к ней первую строку. Кроме того, ко второй строке прибавим первую строку. Тогда

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -\underline{1} & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1+2C_2 \\ \sim \\ C_3+C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1-C_3/2 \\ -C_2 \\ C_3/2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$\mathsf{X}^\tau = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и, значит,} \quad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно заняться решением матричного уравнения III). Для того, чтобы решить это матричное уравнение, обозначим $\mathsf{Y} = \mathsf{XB}$. Тогда матричное уравнение $\mathsf{AY} = \mathsf{C}$ для неизвестной матрицы Y решается изложенным в I) методом. После того, как эта матрица найдена, можно решить матричное уравнение $\mathsf{XB} = \mathsf{Y}$ изложенным в II) методом.

Пример 10 Решить матричные уравнения

а). $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\mathsf{X}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix};$$

б). $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. а). Решим сначала матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$
Запишем ее расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований попытаемся основную матрицу привести к единичной
$$\left(\begin{array}{rrr|rr} \underline{1} & -1 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2/(-2) \\ \sim \\ C_3/4 \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 + 2C_3 \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$
Таким образом,
$$\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Запишем расширенную матрицу этого матричного уравнения
$$\mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$
при этом нужно не забыть протранспонировать матрицы
$$\left(\begin{array}{rr|rrr} -\underline{1} & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rr|rrr} -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rr|rrr} -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -C_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$
Отсюда
$$\mathsf{X}^{\tau} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
б). Найдем сначала решение уравнения
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$
Для этого запишем расширенную матрицу и выполним необходимые элементарные преобразования
$$\left(\begin{array}{rr|rr} \underline{1} & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ C_2 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Если
$$\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix},$$

то первый столбец этой матрицы удовлетворяет системе уравнений с расширенной матрицей
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Сама же система уравнений легко восстанавливается по этой расширенной матрице и содержит по существу одно уравнение (так как вторая строка расширенной матрицы нулевая): $y_1+y_2=3$. Отсюда $y_1=3-y_2$, $y_2\in\mathbb{R}$. Заменим y_2, исключительно для красоты, на α. Тогда $y_1=3-\alpha$, $y_2=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Со вторым столбцом матрицы Y поступим точно также. Он удовлетворяет системе уравнений с расширенной матрицей
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Отсюда $y_3+y_4=0$ и, значит, $y_3=-y_4$, $y_4\in\mathbb{R}$. Заменим y_4 на ξ, тогда $y_3=-\xi$, $y_4=\xi$, $\xi\in\mathbb{R}$. Следовательно, решение уравнения (1.5) имеет вид
$$\mathsf{Y}=\begin{pmatrix} 3-\alpha & -\xi \\ \alpha & \xi \end{pmatrix}, \qquad \alpha,\xi\in\mathbb{R}.$$
Теперь можно решать матричное уравнение
$$\mathsf{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-\alpha & -\xi \\ \alpha & \xi \end{pmatrix}.$$
Для того, чтобы решить это матричное уравнение, нужно сначала перейти к транспонированному уравнению
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathsf{X}=\begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha \\ -\xi & \xi \end{pmatrix}.$$
Расширенная матрица последнего матричного уравнения имеет вид
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & -\xi & \xi \end{array}\right).$$
Если $\xi\neq 0$, то нет решений. В противном случае расширенная матрица принимает вид
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Пусть матрица
$$\mathsf{X}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$
тогда
$$\mathsf{X}^\tau=\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$
и первый столбец матрицы X^τ удовлетворяет системе уравнений с расширенной матрицей
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

а второй столбец матрицы X^τ —

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда для элементов первого столбца матрицы X^τ имеет место соотношение $x_1+0x_2 = 3-\alpha$. Общее решение можно записать в виде $x_1 = 3-\alpha$, $x_2 \in \mathbb{R}$. Обозначим $x_2 = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Для элементов второго столбца матрицы X^τ получаем соотношение $x_3 + 0x_4 = \alpha$. Общее решение имеет вид $x_3 = \alpha$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Обозначим $x_4 = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда можно записать общее решение матричного уравнения

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3-\alpha & \beta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Обратная матрица

> Кто же из нас понимает, что делает? Если б мы понимали, мы бы, вероятно,никогда ничего не делали.
> *Бернард Шоу «Пигмалион».*

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполняются равенства $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{E}$, $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{E}$. Обратная матрица существует не для всякой матрицы A. Если обратная матрица для матрицы A существует, то матрица A называется обратимой, в противном случае — необратимой. На самом деле обратная матрица единственным образом определяется равенством $\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{E}$. Значит, обратная матрицы является решением матричного уравнения $\mathsf{AX} = \mathsf{E}$, если решение существует, и матрица A необратима, если матричное уравнение $\mathsf{AX} = \mathsf{E}$ не имеет решения. Очевидно, что это матричное уравнение является частным случаем уравнения $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$, рассмотренного выше в I), и может быть решено изложенным там методом.

<u>Пример</u> 11 Найти обратную матрицу для каждой из матриц

$$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Найдем решение матричного уравнения $\mathsf{A}_1\mathsf{X} = \mathsf{E}$. Запишем его расширенную матрицу и преобразуем основную матрицу к единичной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -\underline{1} & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 + 3C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Во второй или третьей строках нет подходящего ведущего элемента, который бы делил все элементы содержащего его столбца. Выполним преобразование $C_2 + C_3$. Заметим, что это преобразование не меняет элементы третьего столбца. Тогда

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & \underline{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 3C_2 \\ \sim \\ C_3 + 3C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -5 & 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 5C_3 \\ \sim \\ C_2 - 2C_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & -1 & 3 & 9 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -C_1 \\ \sim \\ C_1 \leftrightarrow C_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -9 & -17 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$\mathsf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & -7 \\ -3 & -9 & -17 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A_2 поступаем точно так же

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \underline{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 2C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -\underline{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 2C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 9 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя строка расширенной матрицы указывает, что решений нет. Значит, матрица A_2 необратима.

Метод Г. Крамера

> Учение без размышления бесполезно, но и размышление без учения опасно. *Конфуций.*

Пусть основная матрица системы линейных алгебраических уравнений является квадратной. Метод Г. Крамера основан на следующем утверждении. Система уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ является определенной (то есть имеющей, причем единственное решение) тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю. Если $|\mathsf{A}| \neq 0$, то решение системы уравнений можно найти по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|\mathsf{A}|}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|\mathsf{A}|}, \ \dots \ , \quad x_n = \frac{\Delta_n}{|\mathsf{A}|},$$

где определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots \ , \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

получены из определителя матрицы A заменой столбца с соответствующим номером на столбец свободных членов. Если определитель основной матрицы равен нулю, то система уравнений или несовместна или неопределенна.

Пример 12 С помощью метода Г. Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} -x + 4y = 9, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель основной матрицы системы уравнений

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = 7.$$

так как $|\mathsf{A}| \neq 0$, то система имеет единственное решение. Для того, чтобы найти x, y, вычислим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 20 = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 9 = -14.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{|\mathsf{A}|} = \frac{7}{-7} = -1, \quad y = \frac{\Delta_2}{|\mathsf{A}|} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Пример 13 С помощью метода Г. Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} (-2+i)x + (1-i)y = -5 - 2i, \\ -(1+i)x + (-1+3i)y = 1 + i. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель основной матрицы системы уравнений

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} -2+i & 1-i \\ -1-i & -1+3i \end{vmatrix} = (-2+i)(-1+3i) - (1-i)(-1-i) =$$

$$= -1 - 7i + 2 = 1 - 7i.$$

Так как $|\mathsf{A}| \neq 0$, то система имеет единственное решение. Найдем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5-2i & 1-i \\ 1+i & -1+3i \end{vmatrix} = (-5-2i)(-1+3i) - (1-i)(1+i) =$$

$$= 11 - 13i - 2 = 9 - 13i,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2+i & -5-2i \\ -1-i & 1+i \end{vmatrix} = (-2+i)(1+i) - (-1-i)(-5-2i) =$$

$$= -3 - i - 3 - 7i = -6 - 8i.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{|\mathsf{A}|} = \frac{9-13i}{1-7i} = \frac{(9-13i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)} = \frac{100+50i}{50} = 2+i,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{|\mathsf{A}|} = \frac{-6-8i}{1-7i} = \frac{(-6-8i)(1+7i)}{(1-7i)(1+7i)} = \frac{50-50i}{50} = 1-i.$$

<u>Пример</u> 14 С помощью метода Г. Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Найдем определитель основной матрицы системы уравнений

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4.$$

так как $|\mathsf{A}| \neq 0$, то система имеет единственное решение. Для того, чтобы найти x_1, x_2, x_3, вычислим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|\mathsf{A}|} = \frac{4}{-4} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|\mathsf{A}|} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|\mathsf{A}|} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

Метод Крамера часто используется при теоретических построениях и исследованиях. Практическая же ценность метода Крамера мала, так как этот метод не всегда применим и требует большого объема вычислений, существенно больше, чем метод последовательных исключений. Это заметно уже для систем уравнений третьего порядка.

Задания

Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед! *Айвен Нивен.*

1. Решить следующие системы уравнений.

a). $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

b). $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

c). $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

d). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

e). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

f). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

g). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

h). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$

i). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

j). $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

k). $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3, \\ 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$

l). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

m). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = -3, \\ -2x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$

n). $\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

o). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 9x_4 - 3x_5 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 - x_5 = -4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

p). $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

q). $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -2. \end{cases}$
r). $\begin{cases} -2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 + 3x_3 + 3x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$

s). $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -2, \\ -2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$
t). $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 5x_4 = -1, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ -x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 1. \end{cases}$

u). $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases}$
v). $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

2. Для следующих матриц второго порядка решить матричное уравнение $\mathsf{X} + \mathsf{AXB} = \mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Для следующих матриц второго порядка решить матричное уравнение $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4&1\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-3&1\\4&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}6&2\\-2&4\end{pmatrix}$.

4. Для следующих матриц второго порядка решить матричное уравнение $\mathsf{AXB}=\mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-4\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}9&-6\\3&6\end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4&2\\-3&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}0&2\\-1&-2\end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-3&-1\\1&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}3&4\\-3&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-6&2\\-9&3\end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-4&-1\\-6&-9\end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&2\\3&-3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-8&8\\-6&-6\end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4&2\\-4&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}2&-6\\3&-9\end{pmatrix}$.

5. Для следующих матриц третьего порядка найти их обратные.

a). $\begin{pmatrix}-4&-2&3\\4&3&-2\\-5&-3&3\end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix}3&-5&3\\3&-4&2\\-2&4&-3\end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix}3&-2&-3\\5&-4&-4\\-4&3&4\end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix}-4&-4&-3\\4&3&3\\3&3&2\end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix}-2&2&3\\3&-2&-2\\-5&3&3\end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix}2&1&4\\-2&-2&4\\3&2&2\end{pmatrix}$.

6. Для следующих матриц четвертого порядка найти их обратные.

a). $\begin{pmatrix}3&3&2&1\\4&3&2&0\\4&3&3&1\\2&2&2&1\end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix}3&2&1&1\\3&3&2&2\\2&3&3&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\4&4&3&1\\2&4&4&1\\2&3&3&1\end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix}2&3&2&1\\3&4&2&1\\2&4&3&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix}2&3&1&0\\3&3&1&1\\4&4&2&1\\3&2&1&1\end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix}-2&-2&2&-3\\2&1&-1&4\\1&-3&1&4\\0&4&4&2\end{pmatrix}$.

7. Решить матричное уравнение $\mathsf{AX}=\mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-3&2&0\\-4&2&-1\end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-1&3&2\\-2&2&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-3&-4&4&3\\-3&1&0&6\\0&4&1&6\end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

8. Решить матричное уравнение $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

9. Решить матричное уравнение $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$

10. Решить матричное уравнение $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}. \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

11. Решить матричное уравнение $\mathsf{AXB} = \mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

12. Решить систему уравнений методом Г.Крамера

a). $\begin{cases} x + 3y = -7, \\ 3x - y = -1. \end{cases}$ b). $\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 4x - 3y = -7. \end{cases}$ c). $\begin{cases} -2x - 3y = 1, \\ x + 4y = -8. \end{cases}$

d). $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + y = 5. \end{cases}$ e). $\begin{cases} x - 2y = -7, \\ -2x - 3y = -7. \end{cases}$ f). $\begin{cases} -3x + y = 6, \\ -2x + 2y = 8. \end{cases}$

13. Решить систему уравнений методом Г.Крамера

a). $\begin{cases} (-1 + 2i)x + (1 + 3i)y = -5 + 5i, \\ (-2 - i)x - (2 + 2i)y = -7 - 9i. \end{cases}$ b). $\begin{cases} (-2 + i)x + (3 + i)y = 5i, \\ -ix + (3 + 2i)y = 4 + 9i. \end{cases}$

c). $\begin{cases} (-1 + i)x + (2 - i)y = 1 + 3i, \\ (-1 - i)x + (3 + 3i)y = -1 + 7i. \end{cases}$ d). $\begin{cases} -2ix + (1 + 2i)y = -3 - 3i, \\ (2 - i)x + (1 - i)y = 7 - 5i. \end{cases}$

e). $\begin{cases} (1 - i)x - (2 - i)y = -3 - 3i, \\ (1 + 2i)x + (2 - 2i)y = 4 + 6i. \end{cases}$ f). $\begin{cases} (3 + 3i)x - (2 - 2i)y = -5 + i, \\ (-1 - i)x + (1 - 2i)y = -1 - i. \end{cases}$

ГЛАВА 2
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение линейного пространства

> По разнообразию и значительности приложений как в математике, так и в механике, физике и технических науках линейная алгебра остается пока первой среди многочисленных ветвей алгебры.
> *А. Г. Курош «Курс высшей алгебры».*

Мы будем, в основном, рассматривать два числовых поля: поле действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$ и поле компле́ксных чисел $\mathbb{C}$. Буквой $\mathbb{F}$ будем обозначать одно из этих полей.

Непустое множество $\mathbb{V}$ называется линейным (или векторным) пространством над полем $\mathbb{F}$, если

I) в $\mathbb{V}$ введена операция сложения, ставящая в соответствие любой паре элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ однозначно определенный элемент из множества $\mathbb{V}$, называемый их суммой и обозначаемый $\mathbf{a} + \mathbf{b}$;

II) введена операция умножения чисел из $\mathbb{F}$ и элементов множества $\mathbb{V}$, ставящая в соответствие любой паре элементов $\alpha \in \mathbb{F}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ однозначно определенный элемент из $\mathbb{V}$, называемый их произведением и обозначаемый $\alpha\mathbf{a}$;

III) введенные операции обладают следующими свойствами

1)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{V}$	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
2)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{V}$	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;
3)	$\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{V}\ \forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}$	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;
4)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}\ \exists\, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$;
5)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \forall \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{F}$	$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$;
6)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \beta \in \mathbb{F}$	$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$;
7)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \beta \in \mathbb{F}$	$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$;
8)	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}$	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Элементы множества $\mathbb{V}$ называются векторами и будут обозначаться жирными латинскими буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\ldots$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, возможно с индексами. Элементы поля $\mathbb{F}$ называются скалярами (или числами для числовых полей) и будут обозначаться либо греческими буквами (иногда без индексов), либо латинскими нежирными буквами с нижними индексами.

Если линейное пространство рассматривается над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то оно называется вещественным линейным (векторным) пространством, если же линейное пространство рассмативается над полем $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то оно называется комплéксным линейным (векторным) пространством.

Таким образом, из определения следует, что векторы можно складывать и умножать на скаляры из поля, над которым рассматривается линейное пространство. Свойства 1)–8) указывают правила, по которым можно выполнять преобразования. Свойства 1) и 2) есть соответственно коммутативность и ассоциативность операции сложения векторов. Элемент $\mathbf{0}$, существование которого указывается в 3), называется нулевым вектором. Нулевой вектор единственен. Элемент $\mathbf{b}$, существование которого для каждого вектора $\mathbf{a}$ постулируется в 4), единственен и называется противоположным к вектору $\mathbf{a}$ и обозначается $-\mathbf{a}$. После введения противоположного вектора можно ввести разность двух произвольных векторов. По определению $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$. Свойство 6) связывают между собой обе операции в линейном пространстве и с операцией сложения скаляров. Свойство 7) связывает операцию умножения вектора на скаляр с операцией умножения скаляров. Свойство 8) указывает на особую роль единицы поля (и не следует из предыдущих свойств и, вообще говоря, не является очевидным).

Следующие элементарные свойства легко получаются из определения линейного пространства.

1) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого $\alpha \in \mathbb{F}$.

2) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$.

3) Если $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то $\alpha = 0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

4) $\alpha(-\mathbf{a}) = (-\alpha)\mathbf{a} = -\alpha\mathbf{a}$ для любых $\alpha \in \mathbb{F}$ и $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$.

5) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ для любого $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$.

6) $\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$ для любых $\alpha \in \mathbb{F}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$.

7) $(\alpha - \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{a}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$.

Некоторые важные примеры линейных пространств:

1. Вещественные пространства V_1, V_2 и V_3. Элементами этих пространств являются геометрические векторы соответственно на прямой, плоскости и в пространстве, начинающиеся в начале координат. Пространства рассматриваются над полем вещественных чисел. Сложение векторов определено по правилу параллелограмма, а умножение на вещественное число α по правилу: если число $\alpha > 0$, то длина вектора умножается на это число и направление остается неизменным, если число $\alpha < 0$, то длина вектора умножается на $|\alpha|$ и направление меняется на противоположное, при $\alpha = 0$ произведение равно нулевому вектору.

2. Вещественное пространство $\mathbb{R}^n$. Это линейное пространство состоит из всех вектор-столбцов с n вещественными элементами. Операции в $\mathbb{R}^n$ введены как обычные матричные операции:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix},$$
$$\alpha\mathbf{x}=\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ называется вещественным арифметическим n – мерным пространством.

Систематически для сокращения записи вектор-столбец $\mathbf{a}$ будет записываться как транспонированный вектор-строка $\mathbf{a}=(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)^\tau$, и знак транспонирования часто будет лишь подразумеваться.

3. Компле́ксное пространство $\mathbb{C}^n$. Это линейное пространство состоит из всех вектор-столбцов с n компле́ксными элементами. Операции сложения векторов и умножения вектора на комплексное число в $\mathbb{C}^n$ введены также, как и в $\mathbb{R}^n$ (по формулам (2.1)). Пространство $\mathbb{C}^n$ называется комплексным арифметическими n – мерным пространством.

4. Множество $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ всех матриц размеров $m\times n$ с вещественными элементами и обычными матричными операциями сложения и умножения на вещественное число

$$\mathsf{A}+\mathsf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$
$$\alpha\mathsf{A}=\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha a_{m1} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

образует вещественное линейное пространство. Для линейного пространства всех квадратных матриц вместо $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ будем использовать обозначение $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Если в предыдущем примере взять матрицы с компле́ксными элементами и допустить умножение матриц на числа из $\mathbb{C}$, то получим

комплéксные линейные пространства $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$.

6. Вещественное (комплéксное) линейное пространство $\mathrm{C}[a,b]$. Это пространство состоит из всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ вещественных (комплéкснозначных) функций с обычными (поточечными) операциями сложения функций и умножения функции на вещественное (комплéксное) число.

7. Вещественное линейное пространство $\mathbb{R}[x]$. Это пространство состоит из всех многочленов от одной неизвестной x с вещественными коэффициентами и обычными операциями сложения многочленов и умножения их на вещественное число. Комплéксное линейное пространство $\mathbb{C}[x]$ определяется аналогично.

8. Вещественное линейное пространство $\mathbb{R}[x]_n$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Это пространство состоит из всех многочленов степени не больше n от одной неизвестной x с вещественными коэффициентами и обычными операциями сложения многочленов и умножения их на вещественное число. Аналогично определяется комплéксное линейное пространство $\mathbb{C}[x]_n$.

9. Линейное пространство, состоящее из одного элемента $\mathbf{0}$. Операции вводятся по правилу $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ и $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$ для любого $\alpha\in\mathbb{F}$. Если взять $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то получим вещественное линейное (векторное) пространство, состоящее из одного элемента. Если же взять $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то получим комплексное линейное (векторное) пространство, состоящее из одного элемента. Эти пространства различны. Этот пример интересен лишь тем, что указывает пространство, состоящее из наименьшего числа элементов.

10. Декомплексификацией (овеществлением) комплексного линейного пространства $\mathbb{V}$ называется вещественное линейное пространство $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$, которое состоит из всех векторов линейного пространства $\mathbb{V}$. Операция сложения в $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ совпадает с операцией сложения в линейном пространстве $\mathbb{V}$. Операция умножения в вещественном линейном пространстве $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ совпадает с операцией умножения в линейном пространстве $\mathbb{V}$ на вещественные числа. Нестрого говоря, умножение на невещественные числа отброшено и оставлено лишь умножение на вещественные числа.

Пример 15 Будет ли каждое из следующих множеств $\mathbb{V}$ с определенными там же операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр являться линейным пространством?

а). Множество $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\,|\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\tau},x_i\in\mathbb{R},x_i>0,i=1,2,\ldots,n\}$ состоит из всех векторов линейного пространства $\mathbb{R}^n$ с положительными элементами. Операции определены также, как и в пространстве $\mathbb{R}^n$;

б). Множество $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, а операции определены иначе: для любых матриц A и B ($\in \mathbb{V}$) с элементами $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ соответственно их сумма $\mathsf{C} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$ есть матрица того же размера с элементами $c_{i,j} = -a_{i,j} - b_{i,j}$, а произведение $\mathsf{D} = \alpha\mathsf{A}$ есть матрица того же размера, что и A, с элементами $d_{i,j} = \alpha a_{i,j}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

в). Множество $\mathbb{V}$ такое же, как и в пункте а), но операции определены следующим образом:

$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1\cdot y_1,\, x_2\cdot y_2,\, \ldots,\, x_n\cdot y_n)^\tau$ и $\alpha\mathbf{x} = (x_1^\alpha,\, x_2^\alpha,\, \ldots,\, x_n^\alpha)^\tau$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

г). Множество $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]_n$, а операции определены так: если $\mathbf{f}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $\mathbf{g}(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$ (старшие коэффициенты не обязаны быть отличными от нуля), то сумма определена также как и в $\mathbb{R}[x]_n$: $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) = (a_0+b_0)x^n+(a_1+b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_n+b_n)$, а вторая операция определена иначе: $(\alpha\mathbf{f})(x) = \alpha a_1x^{n-1} + \alpha a_2x^{n-2} + \cdots + \alpha a_n$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

д). Множество $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$. Операции определены следующим образом: $\forall\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\forall\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{C}^n$ сумма $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 + y_1,\ldots,x_n+y_n)$ и $\forall\alpha \in \mathbb{C}$ произведение $\alpha\mathbf{x} = (\bar\alpha x_1,\ldots,\bar\alpha x_n)$, где $\bar\alpha$ есть компле́ксно сопряженное число к компле́ксному числу α.

Решение. По определению линейного пространства нужно проверить: во-первых, что множество $\mathbb{V}$ не пусто. Во-вторых, что введенные операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр определены корректно, то есть, для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}$ сумма $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ и произведение $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{V}$. В-третьих, что выполняются восемь условий на операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр из поля $\mathbb{F}$, а именно:

$$
\begin{array}{lll}
1) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V},\forall\mathbf{y}\in\mathbb{V} & \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x};\\
2) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V},\forall\mathbf{y}\in\mathbb{V},\forall\mathbf{z}\in\mathbb{V} & (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z});\\
3) & \exists\mathbf{0}\in\mathbb{V}\ \ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V} & \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x};\\
4) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V}\ \ \exists\mathbf{y}\in\mathbb{V} & \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0};\\
5) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V},\forall\mathbf{y}\in\mathbb{V}\ \forall\alpha\in\mathbb{F} & \alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y};\\
6) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V}\ \forall\alpha\in\mathbb{F},\forall\beta\in\mathbb{F} & (\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x};\\
7) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V}\ \forall\alpha\in\mathbb{F},\forall\beta\in\mathbb{F} & (\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x});\\
8) & \forall\mathbf{x}\in\mathbb{V} & 1\mathbf{x}=\mathbf{x}.
\end{array}
$$

Рассмотрим теперь каждую из задач а)-д) отдельно.

а). Множество $\mathbb{V}$ непусто, так как содержит, например, вектор-столбец $(1,1,\ldots,1)^\tau$. Однако, множество $\mathbb{V}$ с данными операциями сложения векторов и умножения на скаляр из поля $\mathbb{R}$ не является линейным пространством, так как операция умножения не определена корректно. Действительно, если $\alpha = -1(\in \mathbb{R})$, $\mathbf{x} = (1,\,1,\,\ldots,\,1)^\tau(\in \mathbb{V})$, то вектор $\alpha\mathbf{x} = (-1,\,-1,\,\ldots,\,-1)^\tau$ не принадлежит $\mathbb{V}$.

б). Очевидно, что множество $\mathbb{V}$ непусто. Легко видеть, что обе операции определены корректно. Далее, так как $-a_{i,j} - b_{i,j} = -b_{i,j} - a_{i,j}$ для $\forall i, j$, то данная операция сложения элементов коммутативна: $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A}$. Проверим ассоциативность операции сложения: так как суммы $\mathsf{D} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$ и $\mathsf{G} = \mathsf{B} + \mathsf{C}$ соответственно состоят из элементов $d_{i,j} = -a_{i,j} - b_{i,j}$ и $g_{i,j} = -b_{i,j} - c_{i,j}$, то матрица $(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C}$ состоит из элементов $-(-a_{i,j} - b_{i,j}) - c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}) - c_{i,j}$ и матрица $\mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C})$ — из элементов $-a_{i,j} - (-b_{i,j} - c_{i,j}) = -a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j}$. Отсюда следует, что равенство $(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C})$ не может выполняться для всех $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C} \in \mathbb{V}$. Так, если A и B — нулевые матрицы, а все элементы матрицы C равны единице, то любой элемент матрицы $(\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C}$ равен -1, а произвольный элемент матрицы $\mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C})$ равен 1. Таким образом, операция сложения не ассоциативна и, следовательно, множество $\mathbb{V}$ с данными операциями не является линейным пространством.

в). Множество $\mathbb{V}$ непусто. Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр определены корректно, так как произведение положительных чисел положительно и положительна (по определению) любая вещественная степень положительного числа. Проверим теперь условия 1)-8).

1). Сложение векторов коммутативно потому, что умножение вещественных чисел обладает этим свойством. Действительно, коммутативность сложения векторов следует из цепочки равенств

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 \cdot y_1,\, x_2 \cdot y_2,\, \ldots,\, x_n \cdot y_n)^\tau = (y_1 \cdot x_1,\, y_2 \cdot x_2,\, \ldots,\, y_n \cdot x_n)^\tau = \mathbf{y}+\mathbf{x}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$.

2). Аналогично проверяется ассоциативность сложения векторов. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = (x_1 \cdot y_1,\, x_2 \cdot y_2,\, \ldots,\, x_n \cdot y_n)^\tau + \mathbf{z} = (x_1 \cdot y_1 \cdot z_1,\, x_2 \cdot y_2 \cdot z_2,\, \ldots$$
$$\ldots,\, x_n \cdot y_n \cdot z_n)^\tau = \mathbf{x} + (y_1 \cdot z_1,\, y_2 \cdot z_2,\, \ldots,\, y_n \cdot z_n)^\tau = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}).$$

3). В качестве ноль-вектора нужно взять вектор $\mathbf{0} = (1,\, 1,\, \ldots,\, 1)^\tau$. Действительно, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (x_1 \cdot 1,\, x_2 \cdot 1,\, \ldots,\, x_n \cdot 1)^\tau = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

4). Для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)^\tau$ противоположным вектором будет вектор $\mathbf{y} = (-\mathbf{x}) = (x_1^{-1},\, x_2^{-1},\, \ldots,\, x_n^{-1})^\tau$, так как

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 \cdot x_1^{-1},\, x_2 \cdot x_2^{-1},\, \ldots,\, x_n \cdot x_n^{-1})^\tau = (1,\, 1,\, \ldots,\, 1)^\tau = \mathbf{0}.$$

5). Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha(x_1 \cdot y_1,\, x_2 \cdot y_2,\, \ldots,\, x_n \cdot y_n)^\tau =$$
$$((x_1 \cdot y_1)^\alpha,\, (x_2 \cdot y_2)^\alpha,\, \ldots,\, (x_n \cdot y_n)^\alpha)^\tau = (x_1^\alpha \cdot y_1^\alpha,\, x_2^\alpha \cdot y_2^\alpha,\, \ldots,\, x_n^\alpha \cdot y_n^\alpha)^\tau =$$
$$= (x_1^\alpha,\, x_2^\alpha,\, \ldots,\, x_n^\alpha)^\tau + (y_1^\alpha,\, y_2^\alpha,\, \ldots,\, y_n^\alpha)^\tau = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}.$$

6). Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha+\beta)\mathbf{x} = (x_1^{\alpha+\beta}, x_2^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta})^\tau = (x_1^\alpha \cdot x_1^\beta, x_2^\alpha \cdot x_2^\beta, \ldots, x_n^\alpha \cdot x_n^\beta)^\tau =$$
$$(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)^\tau + (x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta)^\tau = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}.$$

7). Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = (x_1^{\alpha\beta}, x_2^{\alpha\beta}, \ldots, x_n^{\alpha\beta})^\tau =$$
$$= ((x_1^\beta)^\alpha, (x_2^\beta)^\alpha, \ldots, (x_n^\beta)^\alpha)^\tau = \alpha(x_1^\beta, x_2^\beta, \ldots, x_n^\beta)^\tau = \alpha(\beta\mathbf{x}).$$

8) Наконец, для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ $\quad 1 \cdot \mathbf{x} = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)^\tau = \mathbf{x}$.
Следовательно, данное множество $\mathbb{V}$ с данными операциями сложения векторов и умножения вектора на вещественное число является линейным пространством.

г). Очевидно, что множество $\mathbb{V}$ непусто. Так как для любых многочленов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ степени не выше n и любого $\alpha \in \mathbb{C}$ сумма $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ и произведение $\alpha\mathbf{f}$ являются многочленами с комплексными коэффициентами степени не выше n, то обе операции определены корректно. Нетрудно проверить (проверьте), что условия 1)-7) выполняются для данных операций. Однако, если у многочлена $\mathbf{f}$ старший коэффициент a_0 отличен от нуля, то многочлен $(1 \cdot \mathbf{f})(x) = a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ не равен многочлену $\mathbf{f}(x)$ и, следовательно, условие 8) не выполняется. Таким образом, данное множество $\mathbb{V}$ с данными операциями не является линейным пространством.

д). Множество $\mathbb{V}$ непусто. Так как операция сложения векторов определена так же, как и в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$, то, очевидно, выполняются условия 1) - 4). Проверка условий 5), 6), 8) не составляет труда. Проверим условие 7). С одной стороны

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = (\overline{\alpha\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha\beta}x_n) = (\overline{\alpha}\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha}\overline{\beta}x_n).$$

С другой стороны

$$\alpha(\beta\mathbf{x}) = \alpha(\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\beta}x_n) = (\overline{\alpha}\overline{\beta}x_1, \ldots, \overline{\alpha}\overline{\beta}x_n).$$

Так как правые части равенств равны, то равны и левые части. Значит, условие 7) выполняется и, следовательно, данное множество с введенными операциями является компле́ксным линейным пространством.

Подпространство

*Под*пространство является пространством в отличие от *под*полковника. *(Студенческий фольклер, XX в.)*

Непустое подмножество $\mathbb{V}_1$ линейного пространства $\mathbb{V}$, определенного над полем $\mathbb{F}$, называется его подпространством, если для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}_1$ и любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ вектор $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in \mathbb{V}_1$. Непустое множество $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}_1$ и любого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$ сумма $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{V}_1$ и произведение $\alpha\mathbf{x} \in \mathbb{V}_1$. Непустое множество $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{V}_1$ является линейным пространством относительно операций, введенных в $\mathbb{V}$. Любое подпространство содержит нулевой вектор.

Пример 16 Является ли подпространством

а) линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ подмножество всех верхних треугольных матриц?

б) линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ подмножество всех (не) вырожденных матриц?

в) линейного пространства $\mathbb{R}^n$ подмножество всех вектор-столбцов таких, что $\mathbf{x} = (a, x_2, \ldots, x_n)^\tau$ для некоторого фиксированного числа $a \in \mathbb{R}$?

г) линейного пространства $\mathbb{C}[x]$ подмножество всех многочленов таких, что $f(b) = c$ для фиксированных $b, c \in \mathbb{C}$?

Решение. а). Обозначим через $\mathbb{V}_{\text{а}}$ подмножество всех верхних треугольных матриц. Это подмножество не пусто, так как содержит, например, нулевую матрицу порядка n. Пусть A, B — произвольные верхние треугольные матрицы порядка n. Это значит, что их элементы $a_{ij} = b_{ij} = 0$ для $i > j$. Тогда все элементы матрицы $\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$ с $i > j$ равны нулю для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Значит, $\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} \in \mathbb{V}_{\text{а}}$. Мы получили, что подмножество всех верхних треугольных матриц является подпространством линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Аналогично, нетрудно показать (проверьте!), что подмножество всех нижних треугольных матриц является подпространством линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

б). Обозначим через $\mathbb{V}_{\text{б}}$ подмножество всех невырожденных матриц. Вспомним, что квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля. Значит, подмножество $\mathbb{V}_{\text{б}}$ не пусто, так как содержит единичную матрицу порядка n. Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Это значит, что ее определитель отличен от нуля. Тогда матрица $\mathsf{B} = -\mathsf{A}$ также будет невырожденной, так как $\det \mathsf{B} = (-1)^n \det \mathsf{A} \neq 0$. Таким образом, матрицы $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{V}_{\text{б}}$. Но сумма $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{0}$ не принадлежит $\mathbb{V}_{\text{б}}$ (нулевая матрица является вырожденной). Значит, подмножество всех невырожденных матриц не является подпространством линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Проверку можно провести проще. Так как любое подпространство содержит нулевой элемент линейного пространства, а множество $\mathbb{V}_{\text{б}}$ не содержит нулевую матрицу, то оно не является подпространством. Аналогично, нетрудно показать (проверьте!), что подмножество всех вырожденных матриц при $n > 1$ не является подпространством линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Что будет при $n = 1$?

в). Обозначим $\mathbb{V}_{\text{В}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} = (a, x_2, \ldots, x_n)^\tau, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$ для фиксированного числа a. Пусть $\mathbf{x} = (a, x_2, \ldots, x_n)^\tau, \mathbf{y} = (a, y_2, \ldots, y_n)^\tau \in \mathbb{V}_{\text{В}}$, тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (2a, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^\tau$. Вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{V}_{\text{В}}$ тогда и только тогда, когда $2a = a$. Последнее возможно лишь при $a = 0$. Таким образом, при $a \neq 0$ множество $\mathbb{V}_{\text{В}}$ не является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n$. (Можно проще: при $a \neq 0$ нулевой вектор не принадлежит множеству $\mathbb{V}_{\text{В}}$.) Если же $a = 0$, то для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}_{\text{В}}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathbb{V}_{\text{В}}$. Следовательно, множество $\mathbb{V}_{\text{В}}$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

г) Пусть $\mathbb{V}_{\Gamma} = \{\mathbf{f} \in \mathbb{C}[x] | \mathbf{f}(b) = c\}$ для некоторых фиксированных чисел $b, c \in \mathbb{C}$. Если $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{V}_{\Gamma}$, то $\mathbf{f}(b) = \mathbf{g}(b) = c$. Тогда $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(b) = \mathbf{f}(b) + \mathbf{g}(b) = 2c$. Многочлен $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ будет принадлежать $\mathbb{V}_{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда $2c = c$, что эквивалентно $c = 0$. Таким образом, при $c \neq 0$ множество $\mathbb{V}_{\Gamma}$ не является подпространством линейного пространства $\mathbb{C}[x]$. (Можно проще: при $c \neq 0$ нулевой многочлен не принадлежит множеству $\mathbb{V}_{\Gamma}$.) Если же $c = 0$, то для любых $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{V}_{\Gamma}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ линейная комбинация $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g} \in \mathbb{V}_{\Gamma}$, так как $(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(b) = \alpha\mathbf{f}(b) + \beta\mathbf{g}(b) = \alpha c + \beta c = 0$. Следовательно, $\mathbb{V}_{\Gamma}$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{C}[x]$ тогда и только тогда, когда $c = 0$.

Линейная комбинация

Volunti nihil difficile.[1]
Латинский афоризм.

Под системой векторов будем понимать любую конечную последовательность элементов линейного пространства $\mathbb{V}$. Из этого определения следует, что в системе i) элементы могут повторяться, ii) важен порядок их следования и iii) система содержит конечное число элементов. Так как упорядоченные наборы элементов принято окружать круглыми скобками, то систему векторов будем записывать либо так $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, либо в сокращенном варианте так $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^n$, либо (когда известно о какой системе идет речь и неполная запись не приводит к

[1] Для желающего нет ничего трудного.

недоразумениям) так ($\mathbf{a}$). Чтобы не усложнять запись в случае, когда система векторов указывается явно, круглые скобки будут опускаться, то есть будем писать $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Будем также рассматривать пустую систему, которая, по определению, не содержит ни одного элемента. После вычеркивания некоторых (в том числе всех и ни одного) элементов получается новая система векторов, которая называется подсистемой исходной системы векторов.

Вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ называется линейной комбинацией векторов системы $(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m)$ линейного пространства $\mathbb{V}$, если существуют такие скаляры $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ в поле $\mathbb{F}$, что

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{a}_m.$$

Представление вектора в виде линейной комбинации, вообще говоря, не единственно. Если вектор есть линейная комбинация векторов подсистемы, то он есть линейная комбинация векторов системы. Например, если при $k < m$

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k,$$

то

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k + 0\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + 0\mathbf{a}_m.$$

Любая линейная комбинация векторов подпространства $\mathbb{V}_1$ принадлежит этому подпространству, то есть

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{V}_1,\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}{:}\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k \in \mathbb{V}_1.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{2.3}$$

Из столбцов основной матрицы системы уравнений (2.3) и ее свободных членов можно построить следующие вектор-столбцы

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (2.3) можно записать в виде векторного уравнения

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

или

$$x_1\mathbf{a}^{(1)} + x_2\mathbf{a}^{(2)} + \cdots + x_n\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{b}. \tag{2.4}$$

То, что набор чисел x_1, x_2, …, x_n есть решение системы уравнений (2.3) равносильно тому, что этот же набор есть решение векторного уравнения (2.4), а последнее равносильно тому, что вектор $\mathbf{b}$ представим в виде линейной комбинации векторов системы столбцов $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$,…,$\mathbf{a}^{(n)}$. Значит, система уравнений (2.3) совместна тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{b}$ есть линейная комбинация векторов системы столбцов $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$,…,$\mathbf{a}^{(n)}$. Определенность (то есть единственность решения) система уравнений (2.3) равносильна тому, что представление вектора $\mathbf{b}$ единственно.

Пример 17 . Вычислить линейную комбинацию $\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$ векторов $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1)$.

Решение. Удобно вычислять линейную комбинацию, записав векторы столбцами

$$\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 18 . Найти вектор $\mathbf{x}$ из векторного уравнения $2(\mathbf{a} - 3\mathbf{x}) - 3(\mathbf{b} - \mathbf{x}) = \mathbf{c} - \mathbf{x}$, где $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{c} = (3, -2, -1)$.

Решение. Прежде всего раскроем скобки в исходном уравнении. Тогда

$$2\mathbf{a} - 6\mathbf{x} - 3\mathbf{b} + 3\mathbf{x} = \mathbf{c} - \mathbf{x}$$

и выразим вектор $2\mathbf{x}$

$$2\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

Подставив векторы, стоящие в правой части равенства, получим

$$2\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 19 . Будет ли вектор $\mathbf{b} = (3, 1, 4)$ линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 3)$?

Решение. Вектор $\mathbf{b}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов данной системы, если существуют такие скаляры α_1, α_2, α_3, что имеет место равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

После подстановки элементов в это векторное уравнение, оно "в числах" примет вид

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Векторы слева умножим на соответствующие числа и сложим, тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -3\alpha_3 \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Два векторы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 4. \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений относительно неизвестных α_1, α_2, α_3. Найдем ее решение. Для этого выпишем ее расширенную матрицу и выполним необходимые элементарные преобразования

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 + 2C_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = 2, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \end{cases} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2 + \alpha_3, \\ \alpha_2 = 1 - 2\alpha_3. \end{cases}$$

Эта система уравнений совместна, значит, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов системы $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Чтобы найти коэффициенты линейной комбинации, достаточно найти какое-нибудь частное решение системы уравнений. Данная система уравнений имеет бесконечно много решений. Чтобы найти частное решение, выберем, например, $\alpha_3 = 0$. Тогда $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$. Значит, $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3$.

Замечание. Можно, конечно, выбрать и другое частное решение системы уравнений, положив, например, $\alpha_3 = 1$. Тогда $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = -1$. Отсюда $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. Следовательно, разложение вектора $\mathbf{b}$ в линейную комбинацию не единственно.

Пример 20 . Найти все значения λ, при которых вектор $\mathbf{b} = (1, 5, 1)$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, \lambda)$.

Решение. Вектор $\mathbf{b}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов данной системы, если существуют такие скаляры α_1, α_2, α_3, что имеет место равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

Так же как в предыдущем примере после подстановки векторов "в числах"получим, что последнее матричное уравнение равносильно системе уравнений (заметьте, что она получается по столбцам из элементов векторов)

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +2\alpha_3 & = 1, \\ -\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = 5, \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +\lambda\alpha_3 & = 1. \end{cases}$$

Найдем решение этой системы уравнений. Для этого выпишем ее расширенную матрицу и выполним необходимые элементарные преобразования

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \underline{1} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2/3 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & -2 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что при $\lambda - 3 = 0$ система уравнений несовместна. Значит, при $\lambda = 3$ вектор $\mathbf{b}$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов системы $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Пусть $\lambda \neq 3$. Тогда система уравнений совместна и вектор $\mathbf{b}$ представим в виде линейной комбинации указанных векторов. В том случае, когда нужно найти коэффициенты этой линейной комбинации, необходимо найти и решение системы уравнений. Из последнего уравнения $\alpha_3 = -\frac{2}{\lambda-3}$. Из второго уравнения $\alpha_2 = 2 - \alpha_3$. Тогда $\alpha_2 = 2 + \frac{2}{\lambda-3} = \frac{2\lambda-4}{\lambda-3}$. Из первого уравнения $\alpha_1 = -1 - \alpha_3$. Тогда $\alpha_1 = -1 + \frac{2}{\lambda-3} = \frac{5-\lambda}{\lambda-3}$. Следовательно, при $\lambda \neq 3$

$$\mathbf{b} = \frac{5-\lambda}{\lambda-3}\mathbf{a}_1 + \frac{2\lambda-4}{\lambda-3}\mathbf{a}_2 + \frac{2}{3-\lambda}\mathbf{a}_3.$$

Линейная зависимость и независимость системы векторов

> Чем более читаете, не размышляя, тем более уверяетесь, что много знаете, а чем более размышляете, читая, тем яснее видите, что знаете еще очень мало.
> *Вольтер.*

Система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ линейного пространства $\mathbb{V}$ называется линейно зависимой, если существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Условие того, что не все числа α_i равны нулю, можно записать в виде
$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| \neq 0.$$
Для вещественного линейного пространства последнее условие можно также записать следующим образом
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2 \neq 0.$$
Для произвольного поля $\mathbb{F}$ допустима запись
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \neq (0, 0, \dots, 0).$$
Если система векторов не является линейно зависимой, то она называется линейно независимой. Иными словами, система векторов ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_m$) линейного пространства $\mathbb{V}$ называется линейно независимой, если линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю, то есть
$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \quad : \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0.$$
Значит, система векторов является линейно независимой тогда и только тогда, когда нулевой вектор можно представить в виде линейной комбинации этих векторов только единственным образом, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда нулевой вектор представим в виде линейной комбинации этих векторов неединственным образом, то есть кроме нулевого набора существует еще хотя бы один ненулевой набор коэффициентов, при котором линейная комбинация равна нулевому вектору. Будем считать по определению, что пустая система линейно независима.

Система векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^\tau$, …, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^\tau$ линейно независима в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Система векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)^\tau$, …, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)^\tau$, $i\mathbf{e}_1$, $i\mathbf{e}_2$, …, $i\mathbf{e}_n$ при $i^2 = -1$ линейно зависима в пространстве $\mathbb{C}^n$, но линейно независима в пространстве $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$ (декомплексификация линейного пространства $\mathbb{C}^n$).

Система многочленов $\mathbf{f}_0(x) = 1$, $\mathbf{f}_1(x) = x$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2$, …, $\mathbf{f}_n(x) = x^n$ линейно независима в пространствах $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]_n$, $\mathbb{C}[x]_n$, $\mathrm{C}[a, b]$.

Системы векторов имеют следующие свойства.

1. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Линейно независимая система векторов состоит из ненулевых элементов.

3. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор равен нулю.

4. Система, состоящая из двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы пропорциональны, то есть

либо $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ для некоторого скаляра $\alpha \in \mathbb{F}$, либо $\mathbf{b} = \beta\mathbf{b}$ для некоторого скаляра $\beta \in \mathbb{F}$ (если оба вектора отличны от нуля, то имеют место и первое и второе равенство).

5. При перестановке элементов системы векторов ее линейная зависимость (независимость) не меняется.

6. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее элементов является линейной комбинацией остальных.

7. Система, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

8. Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

9. Если система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ линейно независима, а система $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$, $\mathbf{x}$ линейно зависима, то вектор $\mathbf{x}$ есть линейная комбинация предыдущих векторов системы.

10. Система ненулевых векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее элементов является линейной комбинацией предыдущих.

11. Однородная система уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система столбцов $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, $\ldots\mathbf{a}^{(n)}$ матрицы A линейно зависима.

12. Система столбцов $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, $\ldots\mathbf{a}^{(n)}$ матрицы A линейно независима тогда и только тогда, когда однородная система уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет лишь тривиальное решение.

13. Определитель квадратной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбцы (строки) образуют линейно зависимую систему. Иначе, определитель квадратной матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда ее столбцы (строки) образуют линейно независимую систему.

Пример 21 . Используя определение, выяснить будут ли следующие системы векторов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbb{V}$?

а) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, -2, 3)^\tau$;

б) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 0)^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (2, -2, 1)^\tau$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1)^\tau$;

в) $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]_2$, $\mathbf{f}_1(x) = -x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2-x+2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2+3x+1$;

г) $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$,
$\mathsf{A}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3(x) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

д) $\mathbb{V} = \mathrm{C}[0, 1]$, $\mathbf{f}_1(x) = 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 2^x$, $\mathbf{f}_3(x) = 3^x, \ldots, \mathbf{f}_n(x) = n^x$.

Решение. а). Следуя определению линейной (не)зависимости системы векторов, запишем линейную комбинацию векторов этой системы и выясним при каких значениях коэффициентов она равна нулевому вектору

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3 \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Если существуют α_1, α_2, α_3, не все равные нулю, что для них выполняется равенство (2.5), то система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима. Если же равенство (2.5) выполняется только для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то данная система векторов линейно независима. Подставим векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ в (2.5):

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Выполнив действия над векторами в левой части равенства (2.6), получим, что равны два вектора

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Два вектора равны тогда и только тогда, когда все элементы одного вектора равны соответствующим элементам другого вектора:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0; \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0; \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Мы получили однородную систему уравнений для неизвестных α_1, α_2, α_3. Этой системе уравнений удовлетворяют те и только те α_1, α_2, α_3, которые обращают линейную комбинацию, стоящую в левой части равенства (2.5), в нулевой вектор. Следовательно, линейная зависимость системы векторов равносильна существованию нетривиального решения однородной системы уравнений (2.8). Запишем расширенную матрицу этой системы уравнений (здесь уместно заметить, что эта матрица состоит из вектор-столбцов исходной системы векторов) и найдем ее общее решение (хотя на самом деле нам нужно лишь знать существует ли нетривиальное решение):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & \underline{1} & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_3 \\ \sim \\ \\ C_4 + C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \underline{1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 3C_4 \\ C_2 - C_4 \\ \sim \\ C_3 + C_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \underline{2} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ C_3 + C_1/2 \\ \sim \\ C_4 - C_1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы уравнений единственно и тривиально $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно равенство (2.5) выполняется лишь при нулевых коэффициентах линейной комбинации и, значит, система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно независима.

б). Будем решать так же, как и в предыдущем пункте. Если выполнить все те же действия, то придем к аналогичной (2.8) однородной системе уравнений, которая строится из векторов системы по столбцам

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0; \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ее решение

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_3 \\ \sim \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что однородная система уравнений имеет бесконечно много решений. Среди них есть хотя бы одно нетривиальное. Значит, исходная система векторов линейно зависима.

Если все-таки требуется предъявить ненулевой набор коэффициентов, то нужно найти какое-нибудь частное нетривиальное решение однородной системы уравнений. Общее решение этой однородной системы уравнений можно записать в виде $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\alpha_3 = -\alpha_2$. Положим $\alpha_2 = -1$, тогда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Значит, $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

в). Снова воспользуемся определением линейной (не)зависимости системы векторов. Для этого запишем линейную комбинацию системы многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ и приравняем ее к нулю (нулевому многочлену):

$$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 = 0, \tag{2.9}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Подставим в (2.9) многочлены исходной системы, тогда

$$\alpha_1(-x^2 + 2x + 3) + \alpha_2(x^2 - x + 2) + \alpha_3(2x^2 + 3x + 1) = 0.$$

Если теперь раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (относительно степеней x), то получим

$$(-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)x^2+(2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3)x+(3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)= \\ =0x^2+0x+0.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0, \\ 2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0, \\ 3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Таким образом, равенство (2.9) имеет место тогда и только тогда, когда α_1, α_2, α_3 удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (2.10). Найдем ее общее решение (обратите внимание на то, как составлена матрица системы уравнений из коэффициентов многочленов):

$$\begin{pmatrix} -1 & \underline{1} & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2+C_1 \\ \sim \\ C_3-2C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \underline{1} & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1+C_2 \\ \sim \\ C_3-5C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -\underline{28} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1+7C_3/28 \\ \sim \\ C_2+5C_3/28 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -28 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы уравнений единственно и тривиально $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Следовательно, система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ линейно независима.

г). Запишем линейную комбинацию системы матриц и приравняем ее к нулевой матрице:

$$\alpha_1\mathsf{A}_1+\alpha_2\mathsf{A}_2+\alpha_3\mathsf{A}_3=\mathsf{0}$$

или

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3 & -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы равны тогда и только тогда, когда равны все соответствующие друг другу элементы матриц. Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0, \\ -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3=0, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0, \\ 2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0. \end{cases}$$

Найдем решение этой однородной системы уравнений. Для этого выпишем ее расширенную матрицу и выполним необходимые элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2+C_1 \\ \sim \\ C_3+C_1 \\ C_4+C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2* \\ \sim \\ C_3/2 \\ C_4/3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ \underline{1} & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1-C_2 \\ \sim \\ C_3-C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $-\alpha_2+\alpha_3=0$, $\alpha_1+2\alpha_3=0$. Отсюда $\alpha_2=\alpha_3$, $\alpha_1=-2\alpha_3$. Система уравнений имеет бесконечно много решений. Среди них есть и нетривиальные. Значит, исходная система матриц линейно зависима. Для того, чтобы найти коэффициенты, при которых линейная комбинация обращается в нулевую матрицу, положим $\alpha_3=1$. Тогда $\alpha_2=1$, $\alpha_1=-2$. Значит,

$$-2\mathsf{A}_1+\mathsf{A}_2+\mathsf{A}_3=\mathsf{0}.$$

д). Как обычно, запишем линейную комбинацию системы функций и приравняем ее к нулю (нулевой функции):

$$\alpha_1 1+\alpha_2 2^x+\alpha_3 3^x+\cdots+\alpha_n n^x=0.$$

Это равенство должно выполняться при $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ и любого $x\in[0,1]$. В частности, если для $k=0,1,2,\ldots,n-1$ взять $x=\frac{k}{n}$ $(\in[0,1])$, то

$$\alpha_1 1+\alpha_2 2^{\frac{k}{n}}+\alpha_3 3^{\frac{k}{n}}+\cdots+\alpha_n n^{\frac{k}{n}}=0$$

или в иной форме

$$\alpha_1(\sqrt[n]{1})^k+\alpha_2(\sqrt[n]{2})^k+\alpha_3(\sqrt[n]{3})^k+\cdots+\alpha_n(\sqrt[n]{n})^k=0.$$

Запишем это равенство сначала для $k=0$, потом для $k=1$, и так далее до $k=n-1$. Тогда получим n равенств

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0, \\ \alpha_1(\sqrt[n]{1})^1+\alpha_2(\sqrt[n]{2})^1+\cdots+\alpha_n(\sqrt[n]{n})^1=0, \\ \alpha_1(\sqrt[n]{1})^2+\alpha_2(\sqrt[n]{2})^2+\cdots+\alpha_n(\sqrt[n]{n})^2=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1(\sqrt[n]{1})^{n-1}+\alpha_2(\sqrt[n]{2})^{n-1}+\cdots+\alpha_n(\sqrt[n]{n})^{n-1}=0, \end{array}\right. \tag{2.11}$$

которые можно рассматривать как однородную систему уравнений с неизвестными $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$. Определитель матрицы системы уравнений (2.11)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (\sqrt[n]{1})^1 & (\sqrt[n]{2})^1 & (\sqrt[n]{3})^1 & \ldots & (\sqrt[n]{n})^1 \\ (\sqrt[n]{1})^2 & (\sqrt[n]{2})^2 & (\sqrt[n]{3})^3 & \ldots & (\sqrt[n]{n})^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\sqrt[n]{1})^{n-1} & (\sqrt[n]{2})^{n-1} & (\sqrt[n]{3})^{n-1} & \ldots & (\sqrt[n]{n})^{n-1} \end{vmatrix}$$

является определителем Вандермонда[2] и равен

$$\Delta = \prod_{1\le j<i\le n} (\sqrt[n]{i} - \sqrt[n]{j}).$$

Определитель Δ отличен от нуля, так как $\sqrt[n]{i}$ не равен $\sqrt[n]{j}$ при $i > j$. Поэтому система уравнений (2.11) по следствию[3] из теоремы Крамера имеет лишь тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$. Следовательно, исходная система функций линейно независима.

Полные системы векторов

> Три пути ведут к знанию: путь размышления - это путь самый благородный, путь подражания - это путь самый легкий и путь опыта - это путь самый горький.
> *Конфуций.*

Система векторов линейного пространства $\mathbb{V}$ называется полной, если любой вектор пространства $\mathbb{V}$ можно представить в виде линейной комбинации элементов этой системы. В противном случае система векторов называется неполной.

Система векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^\tau$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^\tau$ является полной в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, так как любой вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ данного пространства представим в виде $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$. Система векторов $\mathbf{f}_0(x) = 1$, $\mathbf{f}_1(x) = x$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2, \ldots, \mathbf{f}_n(x) = x^n$ полна в пространствах $\mathbb{R}[x]_n$ и $\mathbb{C}[x]_n$, так как любой многочлен $\mathbf{h}(x) = \sum_{i=0}^n h_i x^i$ можно переписать в виде линейной комбинации $\mathbf{h}(x) = \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{f}_i(x)$. Эта система векторов не является полной в линейных пространствах $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$, так как многочлен степени большей, чем n нельзя представить в виде линейной комбинации векторов данной системы.

Системы векторов имеют следующие свойства:

1. Система, содержащая полную подсистему, является полной. Иными словами, добавление векторов к полной системе сохраняет ее полноту.

---

[2]Определитель Вадермонда $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$

[3]Однородная система уравнений с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы равен нулю.

2. Любая подсистема неполной системы, является неполной. Иными словами, вычеркивая векторы неполной системы, нельзя получить полную систему.

3. Система векторов останется полной, если в ней вычеркнуть вектор, являющийся линейной комбинацией остальных элементов этой системы.

4. Полнота системы векторов не меняется при перемене местами ее элементов.

Пример 22 . Используя определение, проверить будут ли полными в линейном пространстве $\mathbb{V}$ следующие системы векторов?
а). $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3, 1)^\tau$;
б). $\mathbb{V} = \mathbb{C}^4$, $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3, -2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, -2, 1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 2, -2)^\tau$, $\mathbf{u}_4 = (2, 1, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{u}_5 = (2, 1, 3, -3)^\tau$;
в). $\mathbb{V} = \mathbb{C}[x]_2$, $\mathbf{f}_1(x) = 1 - x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + 3x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3 + 2x - x^2$;
г). $\mathbb{V} = \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$,
$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а). По определению данная система векторов будет полной в пространстве $\mathbb{R}^3$, если любой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ является линейной комбинацией векторов этой системы, то есть существуют α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

После того, как сложим векторы в левой части данного равенства, получим, что равны соответствующие элементы векторов:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x_1, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = x_2, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = x_3. \end{cases} \tag{2.12}$$

Следовательно, система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ будет полной тогда и только тогда, когда система уравнений (2.12) разрешима для любых свободных членов x_1, x_2, x_3. Так как элементарные преобразования обратимы, то всегда можно найти вектор $\mathbf{x}$ такой, что после элементарных преобразований системы уравнений (2.12) все ее свободные члены будут отличны от нуля. Следовательно, система уравнений (2.12) для любых свободных членов будет разрешима тогда и только тогда, основная матрица после преобразования системы уравнений к приведенной форме не содержит нулевой строки. Запишем основную матрицу системы уравнений (2.12) (которая состоит из элементов векторов системы, записанных по столбцам) и преобразуем ее к приведенной форме:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \underline{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 - C_3 \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \underline{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 + 2C_2/3 \\ \sim \\ C_3 - C_2/3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Так как в приведенной форме матрицы системы уравнений (2.13) нет нулевой строки, то система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ является полной в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Замечание. Изложенный алгоритм проверки полноты системы векторов не является самым лучшим, так как требует излишнего числа арифметических операций. Использование понятия ранга приводит к более эффективным алгоритмам (см. решение задачи 39 на стр. 84).

б). По определению система векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}_5$ будет полной в пространстве $\mathbb{C}^4$, если любой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ является линейной комбинацией векторов этой системы, то есть существуют α_1, α_2, α_3, α_4, $\alpha_5 \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^{\tau}.$$

Это равенство имеет место тогда и только тогда, когда коэффициенты $\alpha_1 - \alpha_5$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 = x_1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = x_2, \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + 3\alpha_5 = x_3, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 - 3\alpha_5 = x_4. \end{cases} \tag{2.14}$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, видим, что эта система уравнений разрешима для любых свободных членов тогда и только тогда, когда после преобразования к приведенной форме ее основная матрица не содержит нулевой строки. Проверим это

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 + 2C_1 \\ C_4 - C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \underline{3} & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 6 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & -4 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 - C_2/3 \\ \sim \\ C_3 - 5C_2/3 \\ C_4 + C_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 - 3C_3 \\ C_4 + C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Четвертая строка основной матрицы является нулевой. Значит, система векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}_5$ является неполной.

в). По определению система многочленов $\mathbf{f}_1(x) = 1 - x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + 3x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3 + 2x - x^2$ является полной в линейном пространстве $\mathbb{C}[x]_2$, если для любого многочлена $\mathbf{h}(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2$ существуют такие скаляры α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, что

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1(x) + \alpha_2 \mathbf{f}_2(x) + \alpha_3 \mathbf{f}_3(x) = \mathbf{h}(x).$$

Перепишем это равенство, подставив предварительно все многочлены $\alpha_1(1 - x + 2x^2) + \alpha_2(2 + 3x - 3x^2) + \alpha_3(3 + 2x - x^2) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2$. Приведем подобные слагаемые относительно степеней x, тогда

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) + (-\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3)x + (2\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3)x^2 = \\ = h_0 + h_1 x + h_2 x^2.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = h_0, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = h_1, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = h_2. \end{cases}$$

Эта система уравнений совместна для любых свободных членов тогда и только тогда, когда основная матрица после преобразования к приведенной форме не содержит нулевой строки. Проверим это

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{5} & 5 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_2/5 \\ \sim \\ C_3 + 7C_2/5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как третья строка матрицы нулевая, то система многочленов является неполной.

г) Система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 будет полной, если для любой матрицы

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$$

найдутся такие скаляры α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Если выполнить указанные в левой части этого равенства действия и приравнять соответствующие элементы матриц, то получим, что α_1,

α_2, α_3, α_4 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = x_1, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = x_2, \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = x_3, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = x_4. \end{cases} \tag{2.16}$$

Таким образом, система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 будет полной тогда и только тогда, когда система уравнений (2.16) разрешима для любой правой части, что, как показано в пункте а), эквивалентно тому, что основная матрица системы уравнений в приведенной форме не содержит нулевой строки. Запишем основную матрицу системы уравнений (2.16) (обратите внимание на то, как основная матрица этой системы уравнений построена из элементов матриц A_1, A_2, A_3, A_4) и с помощью метода Гаусса преобразуем ее к приведенной форме:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \sim \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\underline{1} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_2 \\ \sim \\ C_3 + C_2 \\ C_4 + C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \underline{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_4/2 \\ \sim \\ C_3 - C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_3 \\ \sim \\ C_4 - 2C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} \end{pmatrix}.$$

Так как приведенная матрица не содержит нулевой строки, то получаем, что система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 является полной.

Размерность линейного пространства

> У людей, далеких от математики, с многомерным (в первую очередь с четырехмерным) пространством связываются туманные и часто ошибочные представления; в действительности же это понятие является чисто математическим, даже в основном алгебраическим, и служит важным орудием во многих математических исследованиях, а также в физике и механике.
>
> *А. Г. Курош «Курс высшей алгебры».*

Чтобы определить размерность линейного пространства, рассмотрим следующие три случая.

1. В линейном пространстве $\mathbb{V}$ не существует непустых линейно независимых систем векторов. Это возможно лишь тогда, когда $\mathbb{V}$ состоит

из одного нулевого вектора. Тогда по определению размерность пространства $\mathbb{V}$ равна нулю.
2. В линейном пространстве $\mathbb{V}$ существует линейно независимая система, содержащая n векторов, и любая система, содержащая больше векторов, линейно зависима. Тогда размерность пространства $\mathbb{V}$ по определению равна n.
3. В линейном пространстве $\mathbb{V}$ есть линейно независимые системы, содержащие любое число векторов. В этом случае размерность пространства $\mathbb{V}$ равна бесконечности.

Таким образом, размерность линейного пространства по определению равна наибольшему числу векторов в линейно независимых системах векторов этого пространства.

Размерность линейного пространства $\mathbb{V}$ обозначается через $\dim \mathbb{V}$. Если $\dim \mathbb{V} < \infty$, то пространство $\mathbb{V}$ называется конечномерным. Если $\dim \mathbb{V} = \infty$, то пространство $\mathbb{V}$ называется бесконечномерным. Линейное пространство конечномерно тогда и только тогда, когда оно содержит хотя бы одну полную систему и его размерность равна числу векторов в полной линейно независимой системе. Линейное пространство бесконечномерно тогда и только тогда, когда в нем нет полных систем. (Здесь следует напомнить, что система векторов, по определению, содержит конечное число элементов.)

Пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}[x]_n$, $\mathbb{C}[x]_n$, $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ конечномерны и $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$, $\dim \mathbb{R}[x]_n = \dim \mathbb{C}[x]_n = n+1$, $\dim \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \dim \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) = mn$, $\dim \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathsf{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$. Если размерность конечномерного комплексного линейного пространства $\mathbb{V}$ равна n, то размерность его декомплексификации $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ равна $2n$. Пространства $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbf{C}[a,b]$ бесконечномерны.

Базис линейного пространства

Разумеется, хорошая математика красива.
Поль Дж. Коэн

Полная линейно независимая система векторов линейного пространства $\mathbb{V}$ называется базисом этого пространства. Система векторов является базисом линейного пространства тогда и только тогда, когда любой вектор этого пространства можно разложить в линейную комбинацию векторов этой системы, причем единственным образом.

Система векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^\tau$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n =$

$(0, 0, \ldots, 1)^\tau$ является базисом в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. Система векторов $\mathbf{f}_0(x) = 1$, $\mathbf{f}_1(x) = x$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2$, $\ldots$, $\mathbf{f}_n(x) = x^n$ является базисом в пространствах $\mathbb{R}[x]_n$ и $\mathbb{C}[x]_n$. Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве V_3, любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости V_2, любой ненулевой вектор является базисом на прямой V_1.

Базис и размерность линейного пространства имеют следующие свойства.

1. В любом ненулевом конечномерном линейном пространстве существует базис. В пространстве, состоящем из одного нулевого вектора, базисом, по определению, можно считать пустую систему.

2. Если линейное пространство конечномерно и n — его размерность, то любая линейно независимая система, состоящая из n векторов, является базисом этого пространства.

3. Если в линейном пространстве $\mathbb{V}$ есть базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$, $\mathbf{e}_n$, то оно конечномерно и его размерность равна n.

4. Любая система в n – мерном линейном пространстве, $n < \infty$, состоящая из неравного n числа векторов, базисом не является.

5. Любая линейно независимая система векторов конечномерного линейного пространства содержится в некотором базисе этого пространства.

6. Любая полная система векторов содержит базис.

7. Система, состоящая из n векторов пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, является базисом тогда и только тогда, когда определитель, построенный из элементов векторов, записанных со строкам (или по столбцам), отличен от нуля.

Пример 23 . Является ли система векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)^\tau$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Решение. Следуя предыдущему свойству, достаточно вычислить определитель, построенный из элементов векторов, например, по столбцам

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ = \\ C_3 - C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Значит, система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ является базисом пространства $\mathbb{R}^3$.

Пример 24 . Является ли система векторов $\mathbf{a}_1 = (7, 3, 2, -4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (7, 2, -3, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (5, -3, -2, 4)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (4, -6, 9, -9)^\tau$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$.

Решение. Вычислим определитель матрицы A, составленной из элементов векторов, например, по столбцам

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -6 \\ 2 & -3 & -2 & 9 \\ -4 & 3 & 4 & -9 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся особенностями данной матрицы для вычисления ее определителя — прибавим к первому столбцу третий. Тогда

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 12 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ -3 & -2 & 9 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

так как в последней матрице первый столбец пропорционален третьему. Значит, система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ не является базисом.

Пример 25 . Является ли система многочленов $\mathbf{f}_1 = -x^3 + x^2 + x + 1$, $\mathbf{f}_2 = -2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $\mathbf{f}_3 = x^3 + x^2 + x + 2$, $\mathbf{f}_4 = -x^2 + 2x + 1$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_3$.

Решение. Мы не можем пока напрямую применить алгоритм из предыдущего задания потому, что рассматривается отличное от $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ линейное пространство. Но так как любая линейно независимая система, число векторов в которой совпадает с размерностью пространства ($\dim \mathbb{R}[x]_3 = 4$) является базисом в нем, то достаточно проверить ее линейную независимость. Алгоритм проверки дан выше (стр. 52). Можно сразу выписать матрицу из коэффициентов многочленов по столбцам и с помощью метода Гаусса преобразовать ее к приведенной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \underline{1} \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ \sim \\ C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ -\underline{1} & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_4 \\ C_2 - C_4 \\ \sim \\ C_3 + 2C_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -\underline{1} & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_3 \\ C_2 + 3C_3 \\ \sim \\ C_4 - 2C_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{11} & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + 2C_2/11 \\ C_3 - 5C_2/11 \\ \sim \\ C_4 + 9C_2/11 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что однородная система уравнений с такой основной матрицей имеет только тривиальное решение. Значит, система многочленов линейно независима и составляет базис пространства $\mathbb{R}[x]_3$.

Пример 26 . Является ли система матриц $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Решение. Размерность линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ всех матриц второго порядка равна четырем. Матриц в системе тоже четыре. Достаточно проверить линейную независимость. Алгоритм проверки на линейную независимость изложен выше (пример 21). Поэтому сразу выпишем матрицу из элементов матриц системы по столбцам и с помощью метода Гаусса преобразуем ее к приведенной форме

$$\begin{pmatrix} 2 & \underline{1} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 3C_4 \\ \sim \\ C_2 + 3C_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2/4 \\ \sim \\ C_3/3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 & 0 \\ -\underline{1} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + 5C_2 \\ C_3 - C_2 \\ \sim \\ C_4 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений имеет бесконечно много решений, среди которых есть и нетривиальные. Значит, система матриц линейно зависима и, следовательно, базисом не является.

Координаты вектора

Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем. *Анри Пуанкаре.*

Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — базис в n – мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$. Любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ можно представить, причем однозначно, в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Вектор–столбец $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau \in \mathbb{F}^n$ называется координатным вектором вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$, $\mathbf{e}_n$ и обозначается $\mathbf{x}_e$, его элементы x_1, $x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. Для координатных векторов выполняются свойства:

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})_e = \mathbf{x}_e + \mathbf{y}_e$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$;
2. $(\mu\mathbf{x})_e = \mu\mathbf{x}_e$ для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ и $\mu \in \mathbb{F}$.
3. Система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ линейного пространства $\mathbb{V}$ линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система

координатных векторов $(\mathbf{a}_1)_e$, $(\mathbf{a}_2)_e$, ..., $(\mathbf{a}_k)_e$ линейного пространства $\mathbb{F}^n$. Иными словами, система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ линейного пространства $\mathbb{V}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система координатных векторов $(\mathbf{a}_1)_e$, $(\mathbf{a}_2)_e$, ..., $(\mathbf{a}_k)_e$ линейного пространства $\mathbb{F}^n$.

4. Система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$ линейного пространства $\mathbb{V}$ полна тогда и только тогда, когда полна система координатных векторов $(\mathbf{b}_1)_e$, $(\mathbf{b}_2)_e$, ..., $(\mathbf{b}_k)_e$ в линейном пространстве $\mathbb{F}^n$.

5. Система векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_k$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда является базисом система координатных векторов $(\mathbf{u}_1)_e$, $(\mathbf{u}_2)_e$, ..., $(\mathbf{u}_k)_e$ в линейном пространстве $\mathbb{F}^n$.

Отображение $\Phi_e : \mathbb{V} \to \mathbb{F}^n$, действующее по правилу $\Phi_e(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_e$, является биективным. Для этого отображения свойства 1, 2 координатных векторов можно переписать в виде

1. $\Phi_e(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \Phi_e(\mathbf{x}) + \Phi_e(\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$;
2. $\Phi_e(\mu\mathbf{x}) = \mu\Phi_e(\mathbf{x})$ для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ и $\mu \in \mathbb{F}$.

Таким образом, отображение Φ_e является изоморфизмом линейного пространства $\mathbb{V}$ и линейного пространства $\mathbb{F}^n$.

Пример 27 . Проверить, что система векторов $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-4, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (7, 2, 3)^\tau$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\mathbf{x} = (7, 1, 3)^\tau$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\mathbf{y}_e = (-1, 3, 2)^\tau$ найти вектор $\mathbf{y}$.

Решение. Число векторов в системе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равно размерности линейного пространства $\mathbb{R}^3$. Значит, то что эта система векторов является базисом равносильно ее линейной независимости. Но тогда нужно проверить, что из векторного уравнения

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Подставим в это уравнение векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение с неизвестными α_1, α_2, α_3 равносильно однородной системе уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Для нахождения координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}$ нужно из векторного уравнения
$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{x}$$
найти (единственные) неизвестные координаты x_1, x_2, x_3. После подстановки всех векторов получим
$$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}.$$
Это уравнение равносильно системе уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 7,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,\\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases} \tag{2.18}$$
Системы уравнений (2.17) и (2.18) имеют одну и ту же основную матрицу. Эти системы уравнений можно решать одновременно. При этом, как обычно, нулевой столбец свободных членов однородной системы уравнений не записываем (но подразумеваем)
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 7 & 7\\ \underline{1} & -1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 2C_2\\ \sim\\ C_3 + C_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & \underline{1} & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 2C_3\\ \sim\\ C_2 + C_3 \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \underline{13} & 13\\ 1 & 0 & 7 & 5\\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_2 - 7C_1/13\\ C_3 - 5C_1/13\\ C_1/13 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$
Решение неоднородной системы уравнений имеет вид $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Решение однородной системы уравнений (2.17) тривиально $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является базисом и $\mathbf{x}_e = (-2, -1, 1)^\tau$ есть координатный вектор вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

Так как $\mathbf{y}_e = (-1, 3, 2)$, то по определению координатного вектора $\mathbf{y} = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, то есть
$$\mathbf{y} = -\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\13\end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 28 . Проверить, что система матриц $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ является базисом в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ и найти в этом базисе координаты матрицы $\mathsf{X} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$. По известному координатному вектору $\mathsf{Y}_\mathsf{A} = (1, 2, -1, 0)^\tau$ найти матрицу Y.

Решение. Число матриц в системе A_1, A_2, A_3, A_4 равно размерности линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. Значит, достаточно проверить ее линейную независимость, то есть то, что матричное уравнение

$$\alpha_1\mathsf{A}_1 + \alpha_2\mathsf{A}_2 + \alpha_3\mathsf{A}_3 + \alpha_4\mathsf{A}_4 = \mathsf{0}$$

имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. После подстановки матриц в это равенство видим, что это уравнение с неизвестными α_1, α_2, α_3, α_4 равносильно однородной системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

Для нахождения координат матрицы X в базисе A_1, A_2, A_3, A_4 нужно из матричного уравнения

$$x_1\mathsf{A}_1 + x_2\mathsf{A}_2 + x_3\mathsf{A}_3 + x_4\mathsf{A}_4 = \mathsf{X}$$

найти (единственные) неизвестные координаты x_1, x_2, x_3, x_4. Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = -1, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 2, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = -5, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 3. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Системы уравнений (2.19) и (2.20) имеют одну и туже основную матрицу. Эти системы уравнений можно решать одновременно

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \underline{1} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 + C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & \underline{1} & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_4 \\ C_2 - 2C_4 \\ \sim \\ C_3/2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 3C_3 \\ C_2 + 3C_3 \\ \sim \\ C_4 - 2C_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2/(-8) \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 6C_2 \\ \sim \\ C_3 + C_2 \\ C_4 - 4C_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Решение неоднородной системы уравнений имеет вид $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$. Решение однородной системы уравнений (2.19) тривиально $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Следовательно, система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 является базисом и $\mathsf{X}_{\mathsf{A}} = (1, -1, 2, 1)^\tau$ есть координатный вектор матрицы X в этом базисе.

Из того, что $\mathsf{Y}_\mathsf{A} = (1, 2, -1, 0)^\tau$ по определению координатного вектора следует равенство $\mathsf{Y} = \mathsf{A}_1 + 2\mathsf{A}_2 - \mathsf{A}_3 + 0\mathsf{A}_4$, то есть

$$\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 29 . Проверить, что система многочленов $\mathbf{f}_1(x) = 2 + 3x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 + 5x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + 5x + x^2$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ и найти координаты многочлена $\mathbf{g}(x) = -1+6x+x^2$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\mathbf{h}_f = (2, -2, 1)^\tau$ найти многочлен $\mathbf{h}$.

Решение. Число многочленов в системе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ равно размерности линейного пространства $\mathbb{R}[x]_2$. Значит, то что эта система векторов является базисом равносильно ее линейной независимости. Но тогда нужно проверить, что из равенства многочленов

$$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. После подстановки всех многочленов в это равенство получим, что

$$\alpha_1(2 + 3x + x^2) + \alpha_2(3 + 5x + 2x^2) + \alpha_3(-2 + 5x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получим, что это уравнение для неизвестных α_1, α_2, α_3 равносильно однородной системе уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Для нахождения координат многочлена $\mathbf{g}$ в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ нужно из уравнения

$$x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{g}$$

найти (единственные) неизвестные координаты x_1, x_2, x_3. Если теперь подставить все многочлены в это равенство, то получим, что

$$x_1(2 + 3x + x^2) + x_2(3 + 5x + 2x^2) + x_3(-2 + 5x + x^2) = -1 + 6x + x^2.$$

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = -1, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3 = 6, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1. \end{cases} \tag{2.22}$$

Системы уравнений (2.21) и (2.22) имеют одну и ту же основную матрицу. Поэтому обе эти системы уравнений будем решать одновременно

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ \underline{1} & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 2C_3 \\ \sim \\ C_2 - 3C_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -\underline{1} & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \\ C_3 + 2C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1/(-6) \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2-2C_1 \\ \sim \\ C_3-5C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ \sim \\ -C_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Решение неоднородной системы уравнений имеет вид $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Однородная система уравнений (2.21) имеет только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ является базисом и $\mathbf{g}_f = (2, -1, 1)^\tau$ есть координатный вектор многочлена $\mathbf{g}$.

По определению координатного вектора $\mathbf{h}(x) = 2\mathbf{f}_1(x) - 2\mathbf{f}_2(x) + \mathbf{f}_3(x)$, то есть

$$\mathbf{h}(x) = 2(2 + 3x + x^2) - 2(3 + 5x + 2x^2) + (-2 + 5x + x^2) = -4 + x - x^2.$$

<u>Пример</u> 30 . Найти векторы базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, если для векторов $\mathbf{a} = (1, -2, -2)^\tau$, $\mathbf{b} = (2, -1, 3)^\tau$, $\mathbf{c} = (-5, 4, 0)^\tau$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ известны их координатные векторы $\mathbf{a}_e = (1, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1, -1, 1)^\tau$ в этом базисе.

<u>Решение</u>. Допустим, что элементы векторов базиса известны. Составим матрицу X по столбцам из элементов векторов базиса. Тогда по определению координатного вектора так же, как и в (2.18) $\mathsf{X}\mathbf{a}_e = \mathbf{a}$, $\mathsf{X}\mathbf{b}_e = \mathbf{b}$, $\mathsf{X}\mathbf{c}_e = \mathbf{c}$. Эти три матричных равенства можно объединить в одно $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$, где матрицы $\mathsf{A} = (\mathbf{a}_e, \mathbf{b}_e, \mathbf{c}_e)$, $\mathsf{B} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ составлены из указанных векторов по столбцам. Таким образом, мы получили матричное уравнение вида $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$ с неизвестной матрицей X. Чтобы его решить, нужно перейти к равносильному уравнению $\mathsf{A}^\tau\mathsf{X}^\tau = \mathsf{B}^\tau$. Тогда в соответствии с алгоритмом решения такого матричного уравнения получим

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} \underline{1} & 1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2+C_1 \\ \sim \\ C_3-C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 6 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ C_3/2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & \underline{1} & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1+C_3 \\ \sim \\ C_2-C_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2/3 \\ \sim \\ C_3+C_2/3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Основная матрица последней расширенной матрицы равна единичной. Тогда решение матричного уравнения $\mathsf{A}^\tau\mathsf{X}^\tau = \mathsf{B}^\tau$ находится справа от черты,то есть

$$\mathsf{X}^{\tau} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элементы векторов базиса записаны по строкам и,значит, эти векторы оттуда легко извлечь: $\mathbf{e}_1 = (-2, 1, -1)^{\tau}$, $\mathbf{e}_2 = (2, -2, 0)^{\tau}$, $\mathbf{e}_3 = (-1, 1, 1)^{\tau}$.

Матрица перехода. Связь координат вектора в разных базисах.

Образование есть то, что остается после того, когда забывается все, чему нас учили. *Макс фон Лауэ.*

Пусть $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ — базисы в n – мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$.

Матрицей перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ называется матрица $P_{e\to u} \in \mathsf{M}_n(\mathbb{F})$, у которой i– й столбец состоит из координат вектора $\mathbf{u}_i$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Иными словами, столбцы матрицы перехода от первого базиса ко второму состоят из координатных вектор-столбцов векторов второго базиса в первом базисе:

$$P_{e\to u} = \left((\mathbf{u}_1)_e \ (\mathbf{u}_2)_e \ \ldots \ (\mathbf{u}_n)_e\right).$$

Для того, чтобы записать все элементы матрицы перехода, разложим векторы второго базиса в линейные комбинации векторов первого базиса:

$$\begin{array}{l} p_{1,1}\mathbf{e}_1 + p_{2,1}\mathbf{e}_2 + \cdots + p_{n,1}\mathbf{e}_n = \mathbf{u}_1, \\ p_{1,2}\mathbf{e}_1 + p_{2,2}\mathbf{e}_2 + \cdots + p_{n,2}\mathbf{e}_n = \mathbf{u}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{1,n}\mathbf{e}_1 + p_{2,n}\mathbf{e}_2 + \cdots + p_{n,n}\mathbf{e}_n = \mathbf{u}_n. \end{array} \tag{2.23}$$

Записывая коэффициенты линейных комбинаций по столбцам, получим матрицу перехода

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода обладает следующими свойствами:

1. $\mathbf{x}_e = P_{e\to u}\mathbf{x}_u$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$.
2. $P_{e\to e} = \mathsf{E}$ (единичная матрица).

3. $P_{e\to u}P_{u\to v} = P_{e\to v}$.

4. Матрица $P_{e\to u}$ обратима и $P_{e\to u}^{-1} = P_{u\to e}$.

5. Матрица $P_{e\to u}$ невырождена: $|P_{e\to u}| \neq 0$.

6. Пусть $(\mathbf{e})$, $(\mathbf{u})$ — базисы в линейном пространстве $\mathbb{F}^n$ и квадратные матрицы H, G соответственно построены по столбцам из элементов векторов этих базисов, то есть

$$\mathsf{H} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathsf{G} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n).$$

Тогда

$$\mathsf{H}P_{e\to u} = \mathsf{G}. \tag{2.24}$$

Пример 31 . а). Проверить, что системы векторов $\mathbf{e}_1 = (-2,3,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,1)^\tau$ и $\mathbf{u}_1 = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (0,2,3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,1)^\tau$ являются базисами в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

б). Найти матрицу перехода $P_{e\to u}$ от первого базиса ко второму.

в). По известному координатному вектору $\mathbf{a}_u = (2,-1,3)^\tau$ найти координатный вектор $\mathbf{a}_e$.

г). По известному координатному вектору $\mathbf{b}_e = (2,1,-1)^\tau$ найти координатный вектор $\mathbf{b}_u$.

Решение. а). Проверить, что данные системы векторов являются базисами в $\mathbb{R}^3$ можно также, как в заданиях 27 или 23. Но мы эту проверку пока отложим, так как она будет следовать из последующего.

б). Алгоритм вычисления матрицы перехода следует из (2.23). Действительно, первый столбец матрицы перехода $P_{e\to u}$ является решением векторного уравнения $p_{1,1}\mathbf{e}_1 + p_{2,1}\mathbf{e}_2 + p_{3,1}\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1$ с неизвестными $p_{1,1}$, $p_{2,1}$, $p_{3,1}$. Но это векторное уравнение равносильно системе уравнений со следующей расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

где основная матрица системы уравнений составлена по столбцам из элементов векторов базиса ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) и столбец свободных членов составлен из элементов вектора $\mathbf{u}_1$. Аналогично, второй столбец $(p_{1,2}, p_{2,2}, p_{3,2})^\tau$ матрицы перехода $P_{e\to u}$ является решением векторного уравнения $p_{1,2}\mathbf{e}_1 + p_{2,2}\mathbf{e}_2 + p_{3,2}\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_2$, которое равносильно системе уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Точно так же и третий столбец $(p_{1,3}, p_{2,3}, p_{3,3})^\tau$ матрицы перехода $P_{e\to u}$ является решением векторного уравнения $p_{1,3}\mathbf{e}_1 + p_{2,3}\mathbf{e}_2 + p_{3,3}\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3$

и, следовательно, системы уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Эти три системы уравнений можно решать одновременно. Для этого запишем объединенную расширенную матрицу и найдем решение методом последовательных исключений

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & \underline{1} & -1 & 3 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c} C_1+C_3\\ \sim\\ C_2-C_3\end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -\underline{1} & 0 & -3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c} C_2+C_1\\ \sim\\ C_3+C_1\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & -3 & 3 & 2\\ \underline{1} & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -4 & 6 & 3\end{array}\right) \begin{array}{c} -C_1\\ \sim\\ C_3-2C_2\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 \times C_2\\ \sim\\ \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right).$$

Мы преобразовали основную матрицу к единичной. Тогда справа от черты в первом столбце стоит решение первой системы уравнений, то есть первый столбец искомой матрицы перехода. Во втором столбце справа от черты стоит решение второй системы уравнений, то есть второй столбец искомой матрицы перехода, а в третьем — третий столбец искомой матрицы перехода. Значит, справа стоит сама матрица перехода от первого базиса ко второму

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 3 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Кроме того, так как основная матрица, составленная из элементов векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, преобразована к единичной, то эта система векторов является базисом.

Таким образом, для того, чтобы найти матрицу от первого базиса ко второму нужно записать по столбцам в объединенную расширенную матрицу слева от черты векторы первого базиса, справа от черты векторы второго базиса, конечно, учитывая порядок их следования. После того, как основная матрица преобразована по методу Гаусса к единичной, справа от черты будет стоять матрица перехода от первого базиса ко второму. Основная матрица не может быть преобразована к единичной только тогда, когда первая система векторов не является базисом.

в). Можно воспользоваться первым свойством матрицы перехода: $\mathbf{a}_e = P_{e\to u}\mathbf{a}_u$. Значит, чтобы найти $\mathbf{a}_e$ достаточно умножить матрицу

$P_{e\to u}$ на вектор $\mathbf{a}_u$. Тогда

$$\mathbf{a}_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

г). Снова можно воспользоваться первым свойством матрицы перехода: $P_{e\to u}\mathbf{b}_u = \mathbf{b}_e$. Вектор $\mathbf{b}_e$ известен, а вектор $\mathbf{b}_u$ неизвестен. Но тогда это матричное равенство есть система уравнений для неизвестных элементов вектора $\mathbf{b}_u$. Найдем ее решение

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & \underline{1} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 + 2C_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} \underline{1} & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 + 2C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ C_3 - 2C_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, координатный вектор $\mathbf{b}_u = (3, 2, 1)^\tau$. Кроме того, сейчас можно утверждать, что вторая система также является базисом. Действительно, матрица перехода $P_{e\to u}$ с помощью элементарных преобразований получена из матрицы, составленной из векторов второго базиса по столбцам. Здесь же матрица перехода с помощью элементарных преобразований приведена к единичной. В итоге, матрица, составленная из элементов векторов второго базиса, с помощью элементарных преобразований приведена к единичной. Отсюда и следует требуемое.

<u>Пример</u> 32 . Дан базис $\mathbf{e}_1 = (-1, 2, -2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1, -1, 1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2, -2, 1)^\tau$ и матрицы

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти базисы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ такие, что матрицы перехода $P_{e\to u} = \mathsf{A}$ и $P_{v\to e} = \mathsf{B}$.

<u>Решение</u>. Найдем сначала базис $(\mathbf{u})$. Так как $P_{e\to u} = \mathsf{A}$, то по определению матрицы перехода из равенства

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

следует, что $(\mathbf{u}_1)_e = (-1, -1, -1)^\tau$, $(\mathbf{u}_2)_e = (-2, -1, -2)^\tau$, $(\mathbf{u}_3)_e = (2, 1, 1)^\tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{u}_2 &= -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{u}_3 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Осталось подставить векторы базиса $(\mathbf{e})$ и вычислить искомые элементы базиса $(\mathbf{u})$:

$$\mathbf{u}_1 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = -2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если воспользоваться матричным равенством (2.24), то нужно умножить матрицу H, составленную из элементов векторов базиса $(\mathbf{e})$ по столбцам, на матрицу перехода $P_{e\to u}$:

$$\mathsf{H}P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда столбцы полученной матрицы составляют базис $(\mathbf{u})$.

Займемся теперь базисом $(\mathbf{v})$. Нам известны базис $(\mathbf{e})$ и матрица перехода

$$P_{v\to e} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно найти матрицу перехода $P_{e\to v} = (P_{v\to e})^{-1}$ и тогда дальнейшие вычисления проводятся также как и для базиса $(\mathbf{u})$. Но этот путь не самый лучший с вычислительной точки зрения. Лучше воспользоваться матричным равенством (2.24). Пусть матрица

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

построена по столбцам из элементов векторов базиса $(\mathbf{e})$ и аналогично матрица X построена из элементов векторов базиса $(\mathbf{u})$. Тогда имеет место матричное равенство $\mathsf{X}P_{v\to e} = \mathsf{H}$. Будем его рассматривать как матричное уравнение с неизвестной матрицей X. Для того, чтобы найти его решение, нужно сначала протранспонировать это матричное уравнение, а затем записать его расширенную матрицу и выполнить необходимые элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -\underline{1} & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ -\underline{1} & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 - C_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 1 & -4 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \overset{C_1 - C_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Поменяем местами строки расширенной матрицы и, где нужно, умножим на -1. Тогда

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$\mathsf{X}^\tau = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица X состоит из столбцов — векторов базиса $(\mathbf{v})$. Поэтому $\mathbf{v}_1 = (-3, 4, -3)^\tau$, $\mathbf{v}_2 = (3, -5, 5)^\tau$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 0)^\tau$.

Пример 33 . Найти матрицу перехода $P_{e\to u}$, если известны координатные векторы $\mathbf{a}_e = (-4, 6, 4)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1, -5, -1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (2, -5, 4)^\tau$ $\mathbf{a}_u = (-2, -2, 2)^\tau$, $\mathbf{b}_u = (0, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{c}_u = (-3, -1, -1)^\tau$.

. Решение. Воспользуемся свойством 1 матрицы перехода. По этому свойству $\mathbf{a}_e = P_{e\to u}\mathbf{a}_u$, $\mathbf{b}_e = P_{e\to u}\mathbf{b}_u$, $\mathbf{c}_e = P_{e\to u}\mathbf{c}_u$. В эти равенства можно подставить векторы. Тогда

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = P_{e\to u} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = P_{e\to u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = P_{e\to u} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Эти три векторные равенства можно записать как одно матричное равенство

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = P_{e\to u} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

где матрицы составлены из элементов координатных векторов по столбцам. Последнее равенство можно рассматривать как матричное уравнение относительно неизвестной матрицы $\mathsf{X} = P_{e\to u}$. Оно имеет вид $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$, где

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & -5 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

После транспонирования получим равносильное уравнение $\mathsf{A}^\tau \mathsf{X}^\tau = \mathsf{B}^\tau$, которое решается стандартно методом последовательных исключений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 2 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 1 & -5 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & 2 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 2C_2 \\ \sim \\ C_3 + C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\underline{2} & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & 3 & -10 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - 3C_2/2 \\ \sim \\ C_1/(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -\underline{2} & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_3/2 \\ \sim \\ C_3/(-2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, решение матричного уравнения единственно и имеет вид

$$\mathsf{X}^\tau = P^\tau_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось протранспонировать матрицу и выписать ответ:

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 34 . Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{f}_1(x) = 2x+1$, $\mathbf{f}_2(x) = -x^2 - x$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x^2 + 2x + 1$ к базису $\mathbf{g}_1(x) = -6x^2 + 1$, $\mathbf{g}_2(x) = 4x^2 - 4x - 3$, $\mathbf{g}_3(x) = x^2 + x + 1$ линейного пространства $\mathbb{R}[x]_2$.

Решение. Пусть, как обычно, $\mathbf{e}_1(x) = 1$, $\mathbf{e}_2 = x$, $\mathbf{e}_3 = x^2$ есть стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}[x]_2$. В этом базисе легко найти координаты (обратите внимание на порядок их следования) всех данных многочленов: $(\mathbf{f}_1)_e = (1,2,0)^\tau$, $(\mathbf{f}_2)_e = (0,-1,-1)^\tau$, $(\mathbf{f}_3)_e = (1,2,-2)^\tau$, $(\mathbf{g}_1)_e = (1,0,-6)^\tau$, $(\mathbf{g}_2)_e = (-3,-4,4)^\tau$, $(\mathbf{g}_3)_e = (1,1,1)^\tau$. Отсюда, по определению матрицы перехода, не составляет труда выписать следующие две матрицы перехода:

$$P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P_{e\to g} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти две матрицы связаны между собой соотношением $P_{e\to f} P_{f\to g} = P_{e\to g}$ (см. свойство 3 матрицы перехода), которое можно рассматривать как матричное уравнение относительно неизвестной матрицы $P_{f\to g}$. Найдем его решение. Для этого запишем расширенную матрицу и применим метод последовательных исключений

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 2C_1 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -\underline{1} & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{C_3-C_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -C_2 \\ \sim \\ -C_3/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{C_1-C_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Основная матрица преобразована к единичной. Значит, справа от черты стоит решение матричного уравнения

$$P_{f\to g} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 35 . Найти матрицу перехода от базиса $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к базису $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

<u>Решение</u>. Поступим также, как и в предыдущем примере. Пусть $\mathsf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть один из стандартных базисов линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. Тогда данные матрицы в этом базисе будут иметь следующие координатные векторы: $(\mathsf{A}_1)_\mathsf{E} = (-1,2,2,0)^\tau$, $(\mathsf{A}_2)_\mathsf{E} = (-1,1,2,0)^\tau$, $(\mathsf{A}_3)_\mathsf{E} = (-2,2,1,-2)^\tau$, $(\mathsf{A}_4)_\mathsf{E} = (2,0,0,1)^\tau$ и $(\mathsf{B}_1)_\mathsf{E} = (1,-2,0,3)^\tau$, $(\mathsf{B}_2)_\mathsf{E} = (0,-4,-1,1)^\tau$, $(\mathsf{B}_3)_\mathsf{E} = (-3,2,\ -1,-3)^\tau$, $(\mathsf{B}_4)_\mathsf{E} = (4,-2,-6,-2)^\tau$. Но тогда можно записать следующие матрицы перехода

$$P_{\mathsf{E}\to\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathsf{E}\to\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Эти две матрицы связаны между собой соотношением $P_{\mathsf{E}\to\mathsf{A}}P_{\mathsf{A}\to\mathsf{B}} = P_{\mathsf{E}\to\mathsf{B}}$ (свойство 3 матрицы перехода), которое можно рассматривать как матричное уравнение относительно неизвестной матрицы $P_{\mathsf{A}\to\mathsf{B}}$. Найдем решение этого матричного уравнения. Для этого запишем расширенную матрицу для этого матричного уравнения

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} -1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

и с помощью метода последовательных исключений ее основную матрицу можно преобразовать к единичной (проведите необходимые вычисления). Тогда права от черты будет стоять искомое решение

$$P_{\mathsf{A}\to\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг и его приложения

> РАНГ [нем. Rang < фр. rang ряд] —
> 1) степень отличия, чин, звание; для офицеров военно–морского флота установлены звания капитана 1-го, 2-го и 3-го ранга;
> 2) класс, разряд военного судна.
> *(Современный словарь иностранных слов. СПб.: «Дуэт», 1994.)*

Подсистема системы векторов называется максимальной линейно независимой, если она линейно независима и любая другая подсистема, содержащая данную подсистему, линейно зависима. Максимальная линейно независимая подсистема системы векторов, вообще говоря, не единственна, то есть существуют системы векторов, имеющие более одной максимальной линейно независимой подсистемы. Максимальная линейно независимая подсистема системы векторов не может быть расширена добавлением векторов системы, оставаясь ее линейно независимой подсистемой.

Любую линейно независимую подсистему, не являющуюся максимальной, можно расширить (не всегда единственным образом) до максимальной линейно независимой подсистемы системы векторов. Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$ является базисом в линейной оболочке $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме не зависит от ее выбора и называется рангом данной системы. Ранг системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$ будем обозначать $\operatorname{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Ранг системы векторов равен размерности линейной оболочки, порожденной этой системой:

$$\operatorname{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \dim \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Рангом матрицы называется число столбцов в максимальной линейно независимой подсистеме системы всех столбцов этой матрицы. Ранг нулевой матрицы равен нулю. Ранг матрицы равен рангу ее транспонированной матрицы. Ранг матрицы равен числу строк в максимальной линейно независимой подсистеме системы всех строк этой матрицы. Ранг ненулевой матрицы равен порядку наибольшего отличного от нуля минора этой матрицы. Этот минор находится в тех строках и столбцах, которые образуют максимальные линейно независимые подсистемы соответственно системы всех строк и системы всех столбцов матрицы. Он, вообще говоря, неединственен. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее столбцов (строк). Матрица называется ступенчатой, если в каждой ненулевой ее строке есть отличный от нуля элемент (будем его называть ведущим) такой, что в том же столбце, где он стоит, ниже его нет ненулевых элементов. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк.

Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда ранг этой системы совпадает с числом ее векторов.

Система векторов линейного пространства полна тогда и только тогда, когда ранг этой системы равен размерности пространства.

Система векторов является базисом линейного пространства тогда и только тогда, когда ранг системы равен числу ее векторов и равен размерности пространства.

Ранги системы векторов и системы их координатных векторов равны, то есть для любого базиса $(\mathbf{e})$ системы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ и $(\mathbf{u}_1)_e, (\mathbf{u}_2)_e, \ldots, (\mathbf{u}_m)_e$ имеют одинаковые ранги.

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы уравнений равен рангу ее расширенной матрицы[4].

Совместная[5] система линейных алгебраических уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг ее (основной) матрицы равен числу неизвестных. Иначе, совместная система линейных алгебраических уравнений является неопределенной тогда и только тогда, когда ранг ее (основной) матрицы меньше числа неизвестных.

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг ее (основной) матрицы меньше числа неизвестных. Иначе, однородная система линейных алгебраических уравнений имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг ее (основной) матрицы равен числу неизвестных.

[4]Теорема Л. Кронекера и А. Капелли.

[5]то есть выполняются условия из предыдущего предложения

Пример 36 Найти ранги матриц

$$
\text{а).} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{б).} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},
$$

$$
\text{в).} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & -7 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{г).} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Решение. а). Выполним необходимые элементарные преобразования для того, чтобы получить ступенчатую матрицу

$$
\begin{pmatrix} -\underline{1} & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_4 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 - C_2 \\ \sim \\ C_4 - 2C_2 \end{matrix}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} -\underline{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

В результате последняя матрица имеет ступенчатую форму (ведущие элементы подчеркнуты). Эта матрица имеет две ненулевые строки. Значит, ее ранг равен двум. Так как ранг не меняется при элементарных преобразованиях, то ранг исходной матрицы также равен двум.

б). Здесь для того, чтобы получить ступенчатую матрицу достаточно переставить строки так, чтобы вторая строка стала первой, третья — второй и первая — третьей. Тогда

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & \underline{2} \\ \underline{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Эта матрица имеет ступенчатую форму (ведущие элементы подчеркнуты) и три ненулевые строки. Значит ее ранг равен трем. Но тогда ранг исходной матрицы также равен трем.

в). Транспонированная матрица

$$
\begin{pmatrix} 5 & -6 & -\underline{8} & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{9} & 4 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -\underline{7} & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}
$$

имеет ступенчатую форму и три ненулевые строки. Значит, ее ранг равен трем. Поэтому ранг исходной матрицы, совпадающий с рангом транспонированной матрицы, равен трем.

г). У матрицы все строки пропорциональны. Следовательно, после элементарных преобразований $C_2 + 2C_1$, $C_3 - 3C_1$, $C_4 + C_1$ получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет одну ненулевую строку и , значит, ранг исходной матрицы равен одному.

<u>Пример</u> 37 Найти ранг системы векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0, 3, -1, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3, 3, 4, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_5 = (1, -4, 3, 3)^\tau$.

<u>Решение</u>. Ранг системы векторов пространства $\mathbb{F}^n$ совпадает с рангом матрицы, составленной из элементов всех векторов этой системы (все равно как — по строкам или столбцам). Составим матрицу из элементов векторов системы, например, по столбцам, и приведем ее элементарными преобразованиями к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \\ C_4 - C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -\underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + 3C_3 \\ \sim \\ C_4 - 2C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\underline{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатую форму и содержит две ненулевые строки. Значит, ее ранг равен двум. Элементарные преобразования не меняют ранга. Поэтому ранг исходной матрицы равен двум. Но тогда ранг системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$ также равен двум.

<u>Пример</u> 38 Используя понятие ранга матрицы, проверить линейную независимость системы векторов линейного пространства $\mathbb{V}$.

а). $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, -1, -1)^\tau$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

б). $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1, 1)^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -2, 2)^\tau$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, -1, 3)^\tau$, $\mathbf{b}_4 = (1, -3, -2, 4)^\tau$, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$;

в). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 + x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 - x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + 2x - 1$, $\mathbb{V} = \mathbb{C}[x]_2$;

г). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{V} = \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

<u>Решение</u>. а). Достаточно найти ранг системы векторов, который совпадает с рангом матрицы, построенной из элементов векторов по столбцам (или строкам). Поэтому запишем эту матрицу (удобно по строкам) и выполним необходимые элементарные преобразования для того, чтобы получить ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} -\underline{1} & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3+2C_1}{\overset{C_2+C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -\underline{3} & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3-C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -\underline{1} & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -\underline{3} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{2} \end{pmatrix}.$$

Ступенчатая матрица содержит три ненулевые строки. Значит ее ранг как и ранг исходной матрицы равен трем. Следовательно, ранг системы векторов тоже равен трем и совпадает с числом векторов в системе. Поэтому система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно независима.

б). Для данной системы векторов выполним те же вычисления, что и для предыдущей системы

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2-C_1 \\ \sim \\ C_3-2C_1 \\ C_4-C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -\underline{1} & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3+C_2 \\ \sim \\ C_4-C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -\underline{4} & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_4-C_3}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -\underline{1} & 1 \\ 0 & -\underline{4} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы, а значит и системы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ равен трем. Так как ранг меньше числа элементов в системе, то данная система векторов линейно зависима.

в). Ранг системы элементов линейного пространства равен рангу системы координатных векторов этих элементов в каком-нибудь базисе. Удобно в качестве базиса выбрать систему элементов $\mathbf{e}_0(x) = 1$, $\mathbf{e}_1(x) = x$, $\mathbf{e}_2(x) = x^2$. Тогда в этом базисе легко найти координатные векторы элементов $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 + x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 - x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + 2x - 1$, а именно $(\mathbf{f}_1)_e = (-1, 1, 2)^\tau$, $(\mathbf{f}_2)_e = (0, -1, 1)^\tau$, $(\mathbf{f}_3)_e = (-1, 2, 1)^\tau$. Найдем теперь ранг системы координатных векторов $(\mathbf{f}_1)_e$, $(\mathbf{f}_2)_e$, $(\mathbf{f}_3)_e$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -\underline{1} & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3+C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как первые две строки последней матрицы не пропорциональны, то ее ранг не может быть меньше двух. Но первая и третья строки пропорциональны. Поэтому ранг матрицы не может быть равен трем. Остается единственная возможность. Ранг матрицы равен двум. Следовательно и ранг системы элементов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ равен двум, что меньше числа элементов в системе. Значит, эта система линейно зависима.

г). Поступим также, как в предыдущем пункте. А именно, выберем удобный для решения базис линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, например стандартный $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В этом базисе элементы $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, имеют координатные векторы $(\mathsf{A}_1)_e = (-1, 1, 2, 1)^\tau$, $(\mathsf{A}_2)_e = (1, 0, -1, 1)^\tau$, $(\mathsf{A}_3)_e = (1, 2, 1, 1)^\tau$. Найдем ранг этой системы координатных векторов. Для этого составим из элементов векторов матрицу. Здесь удобно расположить векторы по строкам. С помощью элементарных преобразований получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & \underline{1} & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 - 2C_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \underline{1} \\ 3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3 + C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \underline{1} & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \underline{1} \\ \underline{4} & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что ранг матрицы равен трем. Значит, ранг системы A_1, A_2, A_3 тоже равен трем и совпадает с числом элементов в этой системе. Поэтому данная система элементов линейно независима.

Пример 39 Используя понятие ранга матрицы, проверить полноту системы векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -1, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1, -4, 3, 4)^\tau$.

Решение. Достаточно найти ранг системы векторов, который совпадает с рангом матрицы, построенной из элементов векторов по столбцам (или строкам). Поэтому запишем эту матрицу и с помощью элементарных преобразований получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 + C_1 \\ C_4 + 2C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Во второй строке нет удобного для вычислений ведущего элемента. Можно поменять местами вторую и третью строки. А можно ко второй строке прибавить четвертую, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ C_3 - 3C_2 \\ C_4 - 3C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{C_4 - 3C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 2 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ступенчатая матрица имеет три ненулевые строки. Ее ранг равен трем. Он совпадает с рангом исходной матрицы, значит, и с рангом системы векторов. Так как ее ранг меньше размерности пространства $\mathbb{F}^4$, то данная система векторов не является полной.

Пример 40 Используя понятие ранга матрицы, выяснить, является ли базисом в линейном пространстве $\mathbb{V}$ каждая из следующих систем элементов

а). $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$, $\mathbf{a}_1=(1,-2,2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2=(-1,-1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_3=(2,1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4=(1,3,-1,-2)^\tau$;

б). $\mathbb{V}=\mathbb{R}[x]_2$, $\mathbf{f}_1(x)=2x^2+x+1$, $\mathbf{f}_2(x)=x^2-3x+2$, $\mathbf{f}_3(x)=1+2x-x^2$;

в). $\mathbb{V}=\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$,

$\mathsf{B}_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3=\begin{pmatrix}1&4\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}$.

Решение. а). Достаточно найти ранг системы векторов. Он совпадает с рангом матрицы, построенной из элементов векторов по столбцам (или строкам). Поэтому запишем эту матрицу и элементарными преобразованиями приведем ее к матрице, имеющей ступенчатую форму. Для первой системы

$$\begin{pmatrix}1&-\underline{1}&2&1\\-2&-1&1&3\\2&-1&-1&-1\\-3&2&1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}C_2-C_1\\\sim\\C_3-C_1\\C_4+2C_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-3&0&-1&\underline{2}\\1&0&-3&-2\\-1&0&5&0\end{pmatrix}\underset{C_3+C_2}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-3&0&-1&2\\-\underline{2}&0&-4&0\\-1&0&5&0\end{pmatrix}\underset{C_4-C_3/2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-\underline{1}&2&1\\-3&0&-1&\underline{2}\\-\underline{2}&0&-4&0\\0&0&\underline{7}&0\end{pmatrix}.$$

Ступенчатая матрица имеет четыре ненулевые строки. Значит, ранг матрицы равен четырем. Но тогда и ранг исходной матрицы, а вместе с ней и системы векторов, равен четырем. Так как векторов в системе тоже четыре и размерность пространства $\mathbb{R}^4$ равна четырем, то система является базисом.

б). Выберем в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ базис, например, стандартный $\mathbf{e}_0=1$, $\mathbf{e}_1=x$, $\mathbf{e}_2=x^2$. В этом базисе данные многочлены имеют следующие координатные векторы $(\mathbf{f}_1)_e=(1,1,2)^\tau$, $(\mathbf{f}_2)_e=(2,-3,1)^\tau$, $(\mathbf{f}_3)_e=(1,2,-1)^\tau$. Ранги систем $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ и $(\mathbf{f}_1)_e$, $(\mathbf{f}_2)_e$, $(\mathbf{f}_3)_e$ равны. Поэтому будем искать ранг одной из этих систем. Для второй системы его найти проще, причем по стандартной схеме. Следуя этой схеме, запишем матрицу, например, по столбцам из элементов координатных векторов и элементарными преобразованиями получим матрицу, имеющую ступенчатую форму

$$\begin{pmatrix}\underline{1}&2&1\\1&-3&2\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}C_2-C_1\\\sim\\C_3-2C_1\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & \underline{1} \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{C_3+3C_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 \\ 0 & -5 & \underline{1} \\ 0 & -\underline{18} & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица имеет три ненулевые строки. Значит, ранг матрицы, а, следовательно, и системы многочленов равен трем. Так как линейное пространство $\mathbb{R}[x]_2$ имеет размерность тоже равную трем, то система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ является базисом в этом пространстве.

в). Выберем стандартный базис $\mathsf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$. В этом базисе система матриц B_1, B_2, B_3, B_4 имеет координатные векторы $(\mathsf{B}_1)_\mathsf{E} = (1,1,-1,1)^\tau$, $(\mathsf{B}_2)_\mathsf{E} = (1,2,0,1)^\tau$, $(\mathsf{B}_3)_\mathsf{E} = (1,4,2,1)^\tau$, $(\mathsf{B}_4)_\mathsf{E} = (1,1,2,-2)^\tau$. Стандартным путем (как выше) найдем ранг этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2-2C_1 \\ \sim \\ C_4-C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\underline{1} & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3-C_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{C_4+C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 1 & 1 \\ -\underline{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен трем. Значит, ранг системы матриц B_1, B_2, B_3, B_4 также равен трем, что меньше их числа. Поэтому эта система не является базисом.

Пример 41 . а). Найти максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\mathbf{a}_1 = (1,-1,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,-3,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,0,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1,5,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_5 = (1,-5,3,4)^\tau$, $\mathbf{a}_6 = (1,2,-2,-1)^\tau$.

б). Найти максимальную линейно независимую подсистему системы многочленов $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2+x-1$, $\mathbf{f}_3(x) = 4x+11$, $\mathbf{f}_4(x) = x^2+3x+7$, $\mathbf{f}_5(x) = x^2-x-4$.

Решение. а). Запишем матрицу, построенную из данных векторов по столбцам, и с помощью элементарных преобразований получим из нее ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 5 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2+C_1 \\ \sim \\ C_3-C_1 \\ C_4-2C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & -4 & \underline{3} \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ C_3+C_2 \\ C_4+C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & \underline{1} & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_4 - C_3}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & -4 & \underline{3} \\ 0 & -1 & \underline{1} & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущие элементы (они подчеркнуты) ступенчатой матрицы находятся в первом, третьем и шестом столбцах. Им соответствуют векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6$ исходной системы векторов, которые и образуют ее максимальную линейно независимую подсистему. Действительно, если вычеркнуть из матрицы второй, четвертый и пятый столбцы, то ранг матрицы не изменится. Но тогда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_6$, соответствующие оставшимся столбцам, образуют линейно независимую систему. Если же добавить еще хотя бы один вектор из $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$, то получим линейно зависимую систему.

Замечание. Из вида ступенчатой матрицы следует, что максимальными линейно независимыми подсистемами также являются следующие три системы ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$), ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$), ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$). Однако нет оснований утверждать, что это все максимальные линейно независимые подсистемы. Например, подсистема ($\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$) является максимальной линейно независимой (проверьте это).

б). Найдем координатные векторы многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{f}_5$ в базисе $\mathbf{e}_2(x) = x^2$, $\mathbf{e}_1(x) = x$, $\mathbf{e}_0(x) = 1$. Это $(\mathbf{f}_1)_e = (2,2,3)^\tau$, $(\mathbf{f}_2)_e = (3,1,-1)^\tau$, $(\mathbf{f}_3)_e = (0,4,11)^\tau$, $(\mathbf{f}_4)_e = (1,3,7)^\tau$, $(\mathbf{f}_5)_e = (1,-1,-4)^\tau$. Система векторов линейно независима (зависима) тогда и только тогда, когда линейно независима (зависима) система соответствующих координатных векторов в некотором базисе. Поэтому подсистема является максимальной линейно независимой подсистемой системы элементов тогда и только тогда, когда подсистема, состоящая из координатных векторов элементов этой подсистемы, является максимальной линейно независимой подсистемой системы всех координатных векторов системы. То есть, максимальной линейно независимой подсистеме отвечает максимальная линейно независимая подсистема соответствующих координатных векторов. По изложенному в предыдущем пункте алгоритму не составляет особого труда найти максимальную линейно независимую подсистему системы координатных векторов $(\mathbf{f}_1)_e$, $(\mathbf{f}_2)_e$, $(\mathbf{f}_3)_e$, $(\mathbf{f}_4)_e$, $(\mathbf{f}_5)_e$. Составим матрицу из этих координатных векторов по столбцам и с помощью элементарных преобразований получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & \underline{1} \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 11 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 + 4C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & \underline{1} \\ 4 & 4 & 4 & \underline{4} & 0 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Две последние строки пропорциональны и, следовательно, последняя строка станет нулевой после подходящих элементарных преобразований. Значит, ранг матрицы равен двум и два последних столбца образуют максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов. Отсюда следует, что ранг системы многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{f}_5$ также равен двум и многочлены $\mathbf{f}_4(x) = x^2 + 3x + 7$, $\mathbf{f}_5(x) = x^2 - x - 4$ образуют ее максимальную линейно независимую подсистему.

Замечание. Очевидно, что подсистему $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{f}_5$ можно заменить на любую из подсистем $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_5)$, $(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_5)$, $(\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_5)$. Однако нельзя утверждать, что это все максимальные линейно независимые подсистемы. Например, подсистема $(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ также является максимальной линейно независимой подсистемой.

Пример 42 Найти ненулевой минор наибольшего порядка следующих матриц

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Искомый минор расположен в строках, образующих максимальную линейно независимую подсистему системы строк, и в столбцах, образующих максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов. Поэтому можно сначала найти, например, столбцы, образующие максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов. Потом из матрицы, построенной из выделенной системы столбцов, можно выделить систему строк, образующих максимальную линейно независимую подсистему системы строк. Тем самым получим искомый минор. С помощью элементарных преобразований получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} -\underline{1} & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_4 + C_1}{\overset{C_2 + C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_4 - C_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\underline{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к ступенчатой форме. Ведущие элементы подчеркнуты и находятся в первом и во втором столбцах. Значит эти столбцы образуют максимальную подсистему системы всех столбцов матрицы. Теперь нужно выделить максимальную подсистему системы строк. Нет необходимости выделять ее в исходной матрице. Достаточно рассмотреть лишь матрицу, состоящую из столбцов максимальной подсистемы. Для этого запишем ее транспонированную матрицу и элементарными преобразованиями получим ступенчатую

$$\begin{pmatrix} -\underline{1} & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{C_2 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} -\underline{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 \end{pmatrix}$$

Ведущие элементы находятся в первом и третьем столбцах. Значит, первая и третья строки образуют максимальную линейно независимую подсистему системы строк исходной матрицы. Осталось указать этот минор. Это

$$\begin{vmatrix} -\underline{1} & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Читатель может возразить, указав, что из первой ступенчатой матрицы легко найти максимальную линейно независимую подсистему системы строк. Это будут именно те строки, которые останутся ненулевыми в ступенчатой матрице. Действительно, это справедливо, если в процессе преобразования матрицы к ступенчатой форме не произошла перестановка строк. Кроме элементарного преобразования — перестановки строк, это можно сделать и двумя другими элементарными преобразованиями. Для этого можно, например, выполнить следующие действия. Прибавим ко второй строке первую. Далее, вычтем из первой строки (новую) вторую. Если теперь у первой строки поменять знак (то есть умножить на -1), новая первая строка совпадет с первоначальной второй. Теперь осталось новую первую строку вычесть из (новой) второй, чтобы вторая строка совпала с первоначальной первой.Таким образом, первая и вторая строки поменялись местами. В случае, когда исключения при элементарных преобразованиях проводятся строго сверху вниз, то такая перестановка строк невозможна. Проиллюстрируем это на второй матрице. Поменяем местами первую и третью строки и запомним это. Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ -\underline{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 + C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \underline{5} & 0 \\ -\underline{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что ведущие элементы стоят в первом, втором и третьем столбцах. Эти столбцы образуют максимальную линейно независимую подсистему системы всех столбцов матрицы. Эти же ведущие элементы стоят в первой, второй и четвертой строках ступенчатой матрицы. Но первая и третья строки были переставлены. Значит, максимальную линейно независимую подсистему системы строк образуют вторая, третья

и четвертая строки. На пересечении этих строк и столбцов находятся элементы искомого минора. Он имеет вид
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пример 43 Показать, что система векторов $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1, 1, -2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1, 2, -3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2, -3, -2)^\tau$ полна и выделить из нее базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение. Запишем, как обычно, матрицу по столбцам из элементов векторов системы. Для того, чтобы проверить полноту системы достаточно найти ранг этой матрицы. Для того, чтобы выделить базис линейного пространства достаточно выделить максимальную линейно независимую подсистему исходной системы векторов. Эта подсистема и будет базисом. В любом случае нужно элементарными преобразованиями получить ступенчатую матрицу
$$\begin{pmatrix} 2 & -\underline{1} & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_3-2C_1}{\overset{C_2+C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -\underline{1} \\ -5 & 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \underset{C_3-6C_2}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -\underline{1} & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -\underline{1} \\ -\underline{23} & 0 & -23 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ранг матрицы равен трем. Ранг системы векторов также равен трем и, следовательно, совпадает с размерностью линейного пространства $\mathbb{R}^3$. Отсюда получаем, что система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ является полной в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$. Максимальную линейно независимую подсистему образуют, например, векторы $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1, 1, -2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2, -3, -2)^\tau$. Следовательно, эта система векторов есть искомый базис.

Пример 44 . Проверить, что следующие системы векторов линейно независимы и дополнить их до базиса линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

а). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, -2)^\tau$;

б). $\mathbf{b}_1 = (1, -1, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 1, -1)^\tau$;

в). $\mathbf{c} = (2, 3, 0, -4)^\tau$.

Решение. Так как векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ не пропорциональны, то система, состоящая из этих векторов, линейно независима. Алгоритм дополнения линейно независимой системы векторов до базиса состоит в следующем: нужно объединить данную линейно независимую систему векторов с любым базисом (точнее, с любой полной системой), а затем выделить максимальную линейно независимую подсистему, содержащую векторы исходной системы. Выделенная подсистема будет базисом, содержащим исходную систему векторов. Удобнее всего систему векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ объединить со стандартным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ пространства $\mathbb{R}^4$. Запишем матрицу, составленную по столбцам из элементов векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, и элементарными преобразованиями приведем ее к ступенчатой форме. Для того, чтобы максимальная линейно независимая подсистема содержала векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, будем сначала выбирать ведущие элементы в первых двух столбцах, соответствующих этим векторам

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_4 + C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ C_4 + C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый базис образуют векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4$. Очевидно, что вектор $\mathbf{e}_4$ можно заменить вектором $\mathbf{e}_1$ или вектором $\mathbf{e}_3$.

Анализ вышеприведенного алгоритма показывает его избыточную вычислительную сложность. Действительно, если из векторов $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4$ построить по строкам матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{1} & -2 \\ \underline{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix},$$

то видно, что она имеет ступенчатую форму. Тогда ранг системы векторов $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4$ равен четырем и, значит, эта система есть базис. Это наблюдение подсказывает следующий алгоритм решения задачи. Нужно составить матрицу из векторов системы по строкам и элементарными преобразованиями получить матрицу ступенчатой формы. Если ранг матрицы меньше числа ее строк, то система векторов линейно зависима и, следовательно, ее нельзя расширить до базиса. Если же ранг матрицы равен числу ее строк, то к ней нужно дописать по строкам элементы тех векторов стандартного базиса, которые сохраняют ступенчатую форму матрицы и делают матрицу квадратной. Тогда ранг полученной матрицы равен размерности линейного пространства $\mathbb{R}^4$, а ее строки образуют базис этого пространства. Воспользуемся этим алгоритмом при рассмотрении пунктов б) и в).

б). Для дальнейшего удобно составить матрицу по строкам из элементов данных векторов. Найдем ее ранг

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 - C_1}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -\underline{1} \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underset{C_3 - 3C_2}{\sim} \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -\underline{1} \\ 0 & -\underline{3} & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если к исходной системе векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ добавить вектор $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)^\tau$, то при тех же вычислениях вместо предыдущей матрицы мы получим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -\underline{1} \\ 0 & -\underline{3} & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет ступенчатую форму, ее ранг равен четырем, что равно размерности пространства. Значит, система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{e}_3$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

в). Матрица, состоящая из одного вектора $\mathbf{c} = (2,3,0,-4)^\tau$, записанного строкой, имеет ступенчатую форму. Пусть в этой матрице первый элемент является ведущим. Тогда добавим векторы $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)^\tau$. Тогда система векторов $\mathbf{c}$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ есть базис линейного пространства $\mathbb{R}^4$, так как матрица

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & 3 & 0 & -4 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix},$$

построенная по строкам из элементов этих векторов, имеет ранг, равный четырем.

Линейная оболочка

...Был у него, смело могу сказать, один недостаток: он был твердо убежден, что при природном даровании можно играть на скрипке без канифоли. *Козьма Прутков «Опрометчивый Турка или: Приятно ли быть внуком?»*

Множество всех линейных комбинаций векторов системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейного пространства $\mathbb{V}$ называется линейной оболочкой, порожденной этой системой, и обозначается $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Таким образом,

$$\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \{\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}\}.$$

Система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ называется остовом линейной оболочки, порожденной этой системой. Линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{V}$, причем наименьшим, содержащим систему векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$. Размерность линейной оболочки $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ равна рангу системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$. Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ является базисом линейной оболочки $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ полна в линейном пространстве $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда ее линейная оболочка совпадает со всем пространством $\mathbb{V}$.

Пример 45 . Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов
$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1, -1)^\tau, \mathbf{a}_2 = (1, 2, 0, 1)^\tau, \mathbf{a}_3 = (2, 3, -1, 3)^\tau, \mathbf{a}_4 = (-1, 0, 2, -3)^\tau.$

Решение . Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ является базисом линейной оболочки, порожденной этой системой. Найдем такую подсистему. Для этого составим матрицу по столбцам из векторов данной системы и, следуя алгоритму выделения максимальной линейно независимой подсистемы, элементарными преобразованиями приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -\underline{1} \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 + 2C_1 \\ \sim \\ C_4 - 3C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & \underline{3} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 - C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -\underline{1} \\ 1 & 2 & \underline{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Максимальная линейно независимая подсистема состоит, а, следовательно, и базис линейной оболочки, из векторов $\mathbf{a}_3 = (2, 3, -1, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 0, 2, -3)^\tau$ (можно также взять, например, подсистемы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$ или $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$). Кроме того, отсюда получаем, что размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ равна двум.

Фундаментальная система решений

Найдя в сложном простое, поймешь сложное[6]. *Фихиро. Письмо сыну (во время путешествия в Бухару).*

Пусть вектор-столбец $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$ и матрица $\mathsf{A} \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$. Рассмотрим однородную систему уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Она содержит m уравнений и n неизвестных. Общее решение (множество всех решений) образует подпространство пространства $\mathbb{F}^n$. Размерность этого подпространства равна $n - r_{\mathsf{A}}$, где r_{A} — ранг матрицы A. Базис подпространства решений однородной системы уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ называется ее фундаментальной системой решений. Любое частное решение однородной системы уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ есть линейная комбинация векторов фундаментальной системы решений.

Пример 46 Найти фундаментальную систему решений и размерность подпространства решений однородной системы линейных уравнений

$$\text{а).}\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^4;$$

$$\text{б).}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{C}^3; \qquad \text{г).}\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^3.$$

$$\text{в).}\quad 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^4;$$

Решение. а). Найдем общее решение однородной системы уравнений, как обычно, используя метод последовательных исключений

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ C_3 + C_1 \\ C_4 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & \underline{1} & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_2 \\ \sim \\ C_3 - 2C_2 \\ C_4 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & \underline{1} & 0 & 2 \\ -2 & 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Ее общее решение можно записать в виде

$$x_2 = x_1 - 2x_4, \quad x_3 = 2x_1 - x_4, \qquad x_1, x_4 \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

[6] и запутаешься в простом.

Ранг матрицы однородной системы уравнений равен двум. Следовательно, размерность подпространства решений равна $n - r_{\mathsf{A}} = 4 - 2 = 2$. Для того, чтобы найти базис подпространства решений, достаточно выбрать два линейно независимых частных решения системы уравнений. Для этого положим сначала $x_1 = 1$, $x_4 = 0$. Тогда по формулам (2.25) $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Мы получили вектор $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 2, 0)$. Пусть теперь $x_1 = 0$, $x_4 = 1$. Тогда по формулам (2.25) $x_2 = -2$, $x_3 = -1$ и, следовательно, $\mathbf{a}_2 = (0, -2, -1, 1)$. Значит, система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ образует фундаментальную систему решений данной системы уравнений. Чтобы не запутаться, вычисления элементов векторов фундаментальной системы решений можно проводить, используя таблицу, которая строится следующим образом. Сначала начертим заготовку, содержащую в первой строке все неизвестные системы уравнений и в первом столбце — все векторы фундаментальной системы решений

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{a}_1$				
$\mathbf{a}_2$				

.

Остальные клеточки заполняются элементами векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Сначала заполняются столбцы, соответствующие свободным неизвестным по вышеприведенному правилу

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{a}_1$	1			0
$\mathbf{a}_2$	0			1

.

(Конечно, эти столбцы можно заполнять и иначе. Главное — это то, чтобы получилось нужное число линейно независимых решений системы уравнений. Предложенный вариант заполнения — наиболее простой). После этого для каждой строки по формулам (2.25) вычисляются остальные элементы и заносятся в таблицу. В итоге получаем

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0
$\mathbf{a}_2$	0	-2	-1	1

.

б). Начнем с поиска общего решения системы уравнений, используя метод последовательных исключений

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2/2 \\ \sim \\ C_3/3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\underline{1} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$
Ее общее решение можно записать в виде
$$x_2 = -2x_1, \quad x_3 = x_1, \qquad x_1 \in \mathbb{C}. \tag{2.26}$$
Ранг основной матрицы однородной системы уравнений равен двум. Следовательно, размерность подпространства решений равна $n - r_{\mathsf{A}} = 3 - 2 = 1$. Для того, чтобы найти базис подпространства решений, достаточно выбрать одно ненулевое частное решение системы уравнений. Для этого положим $x_1 = 1$. Тогда по формулам (2.26) $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Мы получили вектор $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{a}$.

в). Для системы уравнений, состоящей из одного уравнения, легко найти ее общее решение. Для этого выберем какую-нибудь подходящую неизвестную главной. Здесь удобно главной неизвестной выбрать x_3. Тогда остальные неизвестные будут свободными. Поскольку система уравнений содержит четыре неизвестных и имеется одна главная неизвестная, то остальные три неизвестные x_1, x_2, x_4 будут свободными. Выразим главную неизвестную через свободные
$$x_3 = -3x_1 + 2x_4, \qquad x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}^4. \tag{2.27}$$
Отсутствие неизвестной x_2 в предыдущем равенстве не должно вызывать недоумение, так как его можно переписать в виде $x_3 = -3x_1 + 0x_2 + 2x_4$. Ранг матрицы системы уравнений равен одному. Тогда размерность подпространства решений равна $n - r_{\mathsf{A}} = 4 - 1 = 3$. Значит, фундаментальная система решений содержит три вектора. Чтобы их найти, последовательно положим одно из свободных неизвестных равным единице, а остальные - равными нулю. Из (2.26) получим x_3. Для первого вектора положим $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда из (2.26) получим, $x_3 = -3$. Для второго вектора положим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_4 = 0$. Тогда $x_3 = 0$. Для третьего — $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 1$. Тогда $x_3 = 2$. Эти вычисления удобно проводить, заполняя сначала столбцы таблицы, содержащие свободные неизвестные

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{a}_1$	1	0		0
$\mathbf{a}_2$	0	1		0
$\mathbf{a}_3$	0	0		1

,

а затем, после вычисления, остальные элементы

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mathbf{a}_1$	1	0	-3	0
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	0
$\mathbf{a}_3$	0	0	2	1

.

Система из трех векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -3, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 2, 1)^\tau$ образует базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений и, следовательно, является фундаментальной системой решений.

г). Так же как и выше, найдем общее решение однородной системы уравнений, используя метод последовательных исключений

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -\underline{2} \\ 0 & -\underline{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатую форму, ее ранг равен трем. Значит, подпространство решений имеет размерность $n - r_{\mathsf{A}} = 3 - 3 = 0$. Поэтому это подпространство состоит из одного нулевого вектора. Это, впрочем, видно и непосредственно из того, что система уравнений имеет лишь тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Пример 47 Проверить, являются ли системы векторов
а). $\mathbf{a}_1 = (1, -3, 1, 1, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 3, 1, 1, -1)^\tau$ и
б). $\mathbf{b}_1 = (-1, 0, 1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (1, -3, 1, -1, -1)^\tau$
линейного пространства $\mathbb{R}^5$ фундаментальными системами решений соответственно систем уравнений

$$\text{а).} \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0, \end{aligned} \right. \quad \text{б).} \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Решение. Система векторов ($\mathbf{a}$) линейного пространства $\mathbb{F}^n$ будет фундаментальной системой решений системы уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда каждый вектор системы ($\mathbf{a}$) является решением системы уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, система векторов ($\mathbf{a}$) линейно независима и число векторов в системе ($\mathbf{a}$) равно размерности подпространства решений системы уравнений $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Сначала проверим, будет ли каждый вектор системы ($\mathbf{a}$) являться решением системы уравнений. Для этого достаточно подставить элементы векторов в систему. Проверка показывает, что, действительно, каждый вектор есть решение системы уравнений. Очевидно, что для проверки достаточно убедиться в выполнении матричного равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в котором первая матрица есть основная матрица системы уравнений и вторая матрица составлена по столбцам из элементов всех векторов системы (**a**). Это равенство удобно проверять как "вручную", так и с использованием компьютерных программ "Mathematica", "Matlab", "Maple"и др. Для проверки линейной независимости системы векторов (**a**) достаточно знать ее ранг. Составим матрицу из элементов векторов, например по строкам, и с помощью элементарных преобразований получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -\underline{3} & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_3+C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{3} & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & \underline{1} \\ -\underline{2} & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг матрицы, а значит и системы векторов (**a**), равен трем. Это число совпадает с числом векторов системы (**a**). Поэтому она линейно независима. Для определения размерности подпространства решений системы уравнений достаточно найти ранг ее основной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_2-C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как в последней матрице две последние строки равны, то после вычитания одна из них станет нулевой. Следовательно, ранг матрицы системы уравнений равен двум. Размерность подпространства решений равна $n - \mathrm{rang}(\mathsf{A}) = 5 - 2 = 3$. Это число совпадает с числом векторов системы (**a**). Все три условия, сформулированные в начале решения, выполнены. Значит, система векторов (**a**) является фундаментальной системой решений данной системы уравнений.

б). Не сложная проверка показывает, что

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть оба вектора $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ являются решениями данной системы уравнений. Так как эти векторы не пропорциональны, то они линейно независимы. Осталось найти размерность подпространства решений системы уравнений. Для этого, как обычно, найдем ранг основной матрицы этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \underline{1} & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - 3C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \underline{1} & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 - 2C_2 \\ \sim \\ C_4 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \underline{1} & -1 & 1 \\ -1 & \underline{1} & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что ранг матрицы равен двум. Тогда размерность подпространства решений равна $n - \operatorname{rang}(\mathsf{A}) = 5 - 2 = 3$. Это число не совпадает с числом векторов в системе $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Значит, она не образует фундаментальную систему решений данной системы уравнений.

В качестве приложения рассмотрим следующую задачу.

Пример 48 Найти максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, -2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1, 1, 0, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_5 = (1, 2, -2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_6 = (-2, 0, -1, 7)^\tau$ (то есть базис в подпространстве $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)$) и коэффициенты разложения остальных векторов системы по этому базису.

Решение. Запишем линейную комбинацию векторов системы и приравняем ее нулю

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 + \alpha_4 \mathbf{a}_4 + \alpha_5 \mathbf{a}_5 + \alpha_6 \mathbf{a}_6 = \mathbf{0}. \qquad (2.28)$$

Подставим в это равенство векторы $\mathbf{a}_i$, тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \qquad (2.29)$$

$$+\alpha_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_6 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство (2.29) можно рассматривать как однородную систему уравнений относительно неизвестных α_1, α_2, α_3, α_4, α_5,α_6. Найдем ее фундаментальную систему решений. Для этого сначала найдем общее решение этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & \underline{1} & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ C_4 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \underline{1} & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_4 + 3C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -\underline{1} & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_3 \\ \sim \\ C_4 + C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -1 & -3 \\ 0 & 1 & \underline{1} & 0 & 1 & 2 \\ -\underline{1} & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим прежде всего, что последняя матрица имеет ступенчатую форму. Значит, в соответствии с алгоритмом решения задачи (41) первый, третий и четвертый векторы исходной системы векторов образуют максимальную линейно независимую подсистему. Кроме того, эта матрица есть матрица системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_4 - \alpha_5 - 3\alpha_6 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 + 2\alpha_6 = 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_5 - \alpha_6 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы, а следовательно и равносильной ей системы уравнений (2.29), имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 - 2\alpha_5 - \alpha_6, \\ \alpha_3 = -\alpha_2 - \alpha_5 - 2\alpha_6, \\ \alpha_4 = \alpha_5 + 3\alpha_6, \qquad\qquad \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6 \in \mathbb{F}. \end{cases}$$

Теперь нетрудно найти фундаментальную систему решений этой системы уравнений. Для этого сначала заполним столбцы таблицы, содержащие свободные неизвестные,

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
	1			0	0
	0			1	0
	0			0	1

.

После этого для каждой строки вычисляем остальные неизвестные

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
-2	1	-1	0	0	0
-2	0	-1	1	1	0
-1	0	-2	3	0	1

.

Для того, чтобы найти разложение вектора $\mathbf{a}_2$ по векторам базиса $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$,подставим первое решение $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 0$ фундаментальной системы решений в равенство (2.28). Тогда это равенство примет вид

$$-2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$$

Выразим из этого равенства вектор $\mathbf{a}_2$, не входящий в максимальную линейно независимую подсистему $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$

$$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3.$$

Для того, чтобы найти разложение вектора $\mathbf{a}_5$ по векторам базиса $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, подставим второе решение $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 1$, $\alpha_6 = 0$ фундаментальной системы решений в равенство (2.28). Тогда это равенство примет вид

$$-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 = \mathbf{0}.$$

Из этого равенства можно выразить вектор $\mathbf{a}_5$ в виде линейной комбинации векторов максимальной линейно независимой подсистемы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$
$$\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4.$$
Аналогично для третьего решения $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_6 = 1$ фундаментальной системы решений равенство (2.28) имеет вид
$$-\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3 + 3\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_6 = \mathbf{0}.$$
Для того, чтобы найти разложение вектора $\mathbf{a}_6$ по векторам базиса $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, из этого равенства осталось выразить вектор $\mathbf{a}_6$. Тогда получим искомое разложение
$$\mathbf{a}_6 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_4.$$

Переход от линейной оболочки к подпространству решений однородной системы уравнений

> Знать много и не выставлять себя знающим есть нравственная высота. Знать мало и выставлять себя знающим есть болезнь. Только понимая эту болезнь, мы можем избавиться от нее. *Лао-Цзы*

Основной способ задания подпространства в линейном пространстве использует понятие линейной оболочки. В линейном пространстве $\mathbb{F}^n$ подпространство можно также задавать с помощью однородной системы линейных уравнений. Поэтому желательно уметь переходить от одного способа задания подпространства к другому. Если подпространство задано с помощью однородной системы уравнений, то фундаментальная система решений порождает линейную оболочку, совпадающую с исходным подпространством. Эта задача решалась в предыдущем разделе. Наоборот, если подпространство есть линейная оболочка, порожденная некоторой системой векторов пространства $\mathbb{F}^n$, то в некоторых случаях нужно (или полезно) задать это подпространство с помощью однородной системы уравнений. Так как все равносильные между собой системы уравнений имеют одно и то же общее решение, то, очевидно, что они задают одно и то же подпространство решений. Значит, задающая подпространство однородная система уравнений находится не однозначно. Далее будут рассмотрены три алгоритма нахождения однородной системы уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Начнем традиционно, с первого. Вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau \in \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ тогда и только тогда, когда этот вектор является линейной комбинацией векторов системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Иными словами, вектор $\mathbf{x} \in \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ тогда и только тогда, когда существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ такие, что

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k. \tag{2.30}$$

Пусть $\mathbf{a}_i = (a_{1,i}, a_{2,i}, \ldots, a_{n,i})^\tau$ для $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда равенство (2.30) можно записать в виде

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Векторное равенство (2.31) можно рассматривать как систему уравнений для неизвестных α_1, α_2, ..., α_k. Расширенная матрица этой системы уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k} & x_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k} & x_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,k} & x_n \end{array}\right). \tag{2.32}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{x} \in \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений (2.32). С помощью элементарных преобразований основную матрицу системы уравнений (2.32) можно привести к ступенчатому виду. Так как при этом столбец свободных членов также преобразуется, то в правой части системы уравнений вместо элементов x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, будут стоять линейные комбинации этих элементов с некоторыми числовыми коэффициентами. По теореме Кронекера-Капелли[7] система уравнений имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы уравнений совпадает с рангом расширенной матрицы. Пусть основная матрица системы уравнений имеет ступенчатую форму и все ее нулевые строки расположены ниже ненулевых. Тогда расширенную матрицу системы уравнений можно записать в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\text{Ненулевые строки}} & c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + \cdots + c_{1,n}x_n \\ \multicolumn{4}{c|}{\text{ступенчатой}} & \dotfill \\ \multicolumn{4}{c|}{\text{матрицы}} & c_{p,1}x_1 + c_{p,2}x_2 + \cdots + c_{p,n}x_n \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{p+1,1}x_1 + c_{p+1,2}x_2 + \cdots + c_{p+1,n}x_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{n,1}x_1 + c_{n,2}x_2 + \cdots + c_{n,n}x_n \end{array}\right). \tag{2.33}$$

[7] Система уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы системы.

Если основная матрица системы уравнений с расширенной матрицей (2.33) содержит $n-p$ нулевых строк, то векторное уравнение (2.31) имеет решение тогда и только тогда, когда элементы в правой части, соответствующие нулевым строкам основной матрицы, равны нулю:

$$\begin{cases} c_{p+1,1}x_1 + c_{p+1,2}x_2 + \cdots + c_{p+1,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n,1}x_1 + c_{n,2}x_2 + \cdots + c_{n,n}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{x} \in \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ тогда и только тогда, когда его элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют однородной системе уравнений (2.34). Следовательно, система уравнений (2.34) является искомой. Если же основная матрица системы уравнений (2.33) имеет ранг, равный n, то линейная оболочка совпадает со всем пространством $\mathbb{F}^n$, которое можно задать однородной системой уравнений с нулевой матрицей

$$\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\tau \mid \mathsf{O}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Изложенный выше алгоритм можно несколько модифицировать. Заметим, что элементы x_1, x_2, $\dots$, x_n вектора $\mathbf{x}$, стоящие в правой части расширенной матрицы (2.33) можно опустить, оставив лишь коэффициенты

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p,1} & c_{p,2} & \cdots & c_{p,n} \\ c_{p+1,1} & c_{p+1,2} & \cdots & c_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда расширенная матрица (2.32) в модифицированной записи имеет справа вместо вектора $\mathbf{x}$ единичную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,k} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right). \tag{2.35}$$

После приведения основной матрицы в (2.35) к ступенчатому виду, строки в правой части, соответствующие нулевым строкам основной матрицы, образуют строки матрицы искомой однородной системы уравнений.

Данная задача имеет еще один алгоритм решения. В отличие от других здесь изложенных алгоритмов, этот алгоритм является "строчным", то есть матрица составляется по строкам из элементов векторов.

Рассмотрим систему векторов $\mathbf{a}_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n})^\tau, \dots, \mathbf{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})^\tau$, порождающую линейную оболочку

$$\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k).$$

Для удобства здесь применена другая нумерация для элементов векторов по сравнению с нумерацией в (2.31). Составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \cdots + a_{1,n}y_n = 0, \\ a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \cdots + a_{2,n}y_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k,1}y_1 + a_{k,2}y_2 + \cdots + a_{k,n}y_n = 0, \end{cases}, \tag{2.36}$$

у которой коэффициенты первого уравнения состоят из элементов вектора $\mathbf{a}_1$, коэффициенты второго уравнения - из элементов вектора $\mathbf{a}_2$ и т. д. Для системы уравнений (2.36) можно найти фундаментальную систему решений $\mathbf{b}_1 = (b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,n})^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,n})^\tau$, ..., $\mathbf{b}_p = (b_{p,1}, b_{p,2}, \ldots, b_{p,n})^\tau$. Если $p > 0$, то из элементов этих векторов "по строкам"построим систему уравнений

$$\begin{cases} b_{1,1}x_1 + b_{1,2}x_2 + \cdots + b_{1,n}x_n = 0, \\ b_{2,1}x_1 + b_{2,2}x_2 + \cdots + b_{2,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{p,1}x_1 + b_{p,2}x_2 + \cdots + b_{p,n}x_n = 0. \end{cases}, \tag{2.37}$$

Если же фундаментальная система решений не содержит ни одного вектора ($p = 0$), то запишем однородную систему уравнений с нулевой матрицей. Таким образом, система уравнений (2.37) всегда может быть построена. Эта система уравнений является искомой, то есть ее подпространство решений совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$. Действительно, так как любой вектор $\mathbf{b}_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$ фундаментальной системы решений удовлетворяет системе уравнений (2.36), то, подставляя $\mathbf{b}_j$ в i –е уравнение системы (2.36), получим тождество

$$a_{i,1}b_{j,1} + a_{i,2}b_{j,2} + \cdots + a_{i,n}b_{j,n} = 0$$

для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $j = 1, 2, \ldots, p$. Это тождество можно переписать в виде

$$b_{j,1}a_{i,1} + b_{j,2}a_{i,2} + \cdots + b_{j,n}a_{i,n} = 0,$$

из которого следует, что вектор $\mathbf{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})^\tau$ является решением системы уравнений (2.37). Значит, вектор $\mathbf{a}_i$ принадлежит подпространству решений системы уравнений (2.37) для любого i. Тогда и любая линейная комбинация этих векторов принадлежит этому подпространству. Следовательно, линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ содержится в подпространстве решений системы уравнений (2.37). То, что на самом деле эти подпространства равны, следует из равенства их размерностей. Действительно, с одной стороны размерность линейной оболочки $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ равна рангу системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, который в свою очередь равен рангу r_{A} матрицы системы уравнений (2.36). С другой стороны, размерность подпространства решений системы уравнений (2.37) равна $n - r_{\mathsf{B}}$, где r_{B} — ранг матрицы системы уравнений (2.37). Матрица B составлена из элементов векторов фундаментальной системы решений $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_p$. Так как эта система линейно независима, то ранг матрицы B равен p. Тогда размерность подпространств решений системы уравнений (2.37) равна $n - p$. Кроме того, система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_p$ является фундаментальной системой решений системы уравнений (2.36). Значит, $p = n - r_{\mathsf{A}}$. Отсюда $r_{\mathsf{A}} = n - p$, то есть размерности рассматриваемых подпространств равны, что и требовалось доказать.

Пример 49 Найти однородную систему линейных алгебраических уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$, порожденной системой векторов

а). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 4, 2)^\tau$;

б). $\mathbf{a} = (1, 2, 1, -3)^\tau$;

в). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_1 = (1, 5, 0, 3)^\tau$.

Решение. а). Следуя первому алгоритму, изложенному выше, составим основную матрицу системы уравнений (2.32) из элементов исходных векторов, записав их по столбцам, и приведем ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & \underline{1} & 1 & x_1 \\ -1 & 0 & -3 & x_2 \\ 2 & 1 & 4 & x_3 \\ 0 & -1 & 2 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 + C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -\underline{1} & 0 & -3 & x_2 \\ 1 & 0 & 3 & x_3 - x_1 \\ 1 & 0 & 3 & x_4 + x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 + C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & \underline{1} & 1 & x_1 \\ -\underline{1} & 0 & -3 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_1 + x_2 \end{array}\right).$$

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

является искомой.

б). Воспользуемся модифицированным алгоритмом для поиска однородной системы уравнений. Запишем расширенную матрицу (2.35) системы уравнений и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{r|rrrr} \underline{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 2C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \\ C_4 + 3C_1 \end{array} \left(\begin{array}{r|rrrr} \underline{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем, что матрица искомой системы уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

является искомой.

в). Воспользуемся третьим алгоритмом из изложенных выше. Запишем матрицу системы уравнений (2.36) из элементов векторов по строкам и найдем ее общее решение методом последовательных исключений $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_1 = (1, 5, 0, 3)^\tau$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ \underline{1} & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 - 2C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1/2 \\ \sim \\ C_2/3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & \underline{1} & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Мы получили матрицу системы уравнений

$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Главными неизвестными являются x_1 и x_3, значит, x_2 и x_4 — свободные неизвестные. Выразим главные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = -5x_2 - 3x_4, \\ x_3 = 3x_2 + x_4. \end{cases} \tag{2.38}$$

Найдем теперь фундаментальную систему решений. Эта система должна содержать два частных решения. Для первого из них, полагая $x_2 = 1$ и $x_4 = 0$, получим по формулам (2.38), что $x_1 = -5$ и $x_3 = 3$. Для второго частного решения возьмем $x_2 = 0$ и $x_4 = 1$. Тогда по формулам (2.38) $x_1 = -3$ и $x_3 = 1$. Таким образом, фундаментальная система решений состоит из векторов $\mathbf{a}_1 = (-5, 1, 3, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 0, 1, 1)^\tau$. Элементы найденных векторов берутся в качестве коэффициентов искомой системы уравнений. Тогда она имеет вид

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Ничто не мешает нам поменять знак в каждом из уравнений для того, чтобы искомая система уравнений имела следующий более опрятный вид

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Сумма и пересечение подпространств

If you steal from one author, it's plagiarism; if you steal from many, it's research.[8]
Wilson Mizner. The Legendary Mizners (1953).

Пусть $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ — подпространства линейного пространства $\mathbb{V}$. Тогда пересечение этих подпространств $\mathbb{V}_3 = \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ является подпространством пространства $\mathbb{V}$. Если $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ есть подпространства линейного пространства $\mathbb{F}^n$, то они могут быть заданы как подпространства решений однородных систем уравнений

$$\mathbb{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

и

$$\mathbb{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \begin{cases} b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{q1}x_1 + \dots + b_{qn}x_n = 0 \end{cases} \right\}.$$

Тогда пересечение этих подпространств есть подпространство решений однородной системы, содержащей все уравнения однородных систем, задающих подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Иными словами

$$\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = 0, \\ b_{11}x_1 + \dots + b_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{q1}x_1 + \dots + b_{qn}x_n = 0 \end{cases} \right\}.$$

Объединение подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ является подпространством тогда и только тогда, когда $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2$ или $\mathbb{V}_2 \subset \mathbb{V}_1$ и, следовательно, подпространством в общем случае не является.

Суммой подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ называется множество всех векторов вида $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, где $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{V}_1$ и $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{V}_2$. Сумма подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ является подпространством и обозначается $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$.

Пусть $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ — конечномерные подпространства линейного пространства $\mathbb{V}$ ($\dim \mathbb{V} \le \infty$). Тогда сумма и пересечение этих подпространств конечномерны и

$$\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2 - \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2). \qquad (2.39)$$

[8] Если ты украл у одного автора, то это плагиат; если же ты украл у многих, то это научная работа.

Если $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ — подпространства конечномерного линейного пространства $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$, то $\dim \mathbb{V} \geq \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2$. Если же $\dim \mathbb{V} < \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2$, то $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Если подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ заданы как линейные оболочки, то есть $\mathbb{V}_1 = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$, $\mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$, то

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k). \tag{2.40}$$

Это становится очевидным, если заметить, что любой вектор суммы $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{V}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{V}_2$. Так как подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ заданы как линейные оболочки, порожденные соответственно системами векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ и $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_k$, то по определению линейной оболочки векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ являются линейными комбинациями $\mathbf{x}_1 = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{a}_m$ и $\mathbf{x}_2 = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \beta_k\mathbf{b}_k$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$. Следовательно, вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{a}_m + \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \beta_k\mathbf{b}_k$, что и доказывает равенство подпространств.

Сумма подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ называется прямой суммой, если любой ее элемент $\mathbf{a}$ ($\in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$) представим в виде суммы $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ векторов $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{V}_1$ и $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{V}_2$ единственным образом. Прямая сумма подпространств является особым случаем суммы подпространств и обозначается $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$ или $\mathbb{V}_1 \dot{+} \mathbb{V}_2$.

Линейное пространство $\mathbb{V}$ является прямой суммой своих подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Конечномерное линейное пространство $\mathbb{V}$ является прямой суммой своих подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ тогда и только тогда, когда $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Пример 50 . Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ (в $\mathbb{R}^5$), если эти подпространства соответственно заданы как

а). линейные оболочки, порожденные системами векторов

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 2, 1, 2), \quad \mathbf{a}_2 = (0, -1, -2, 1, -1), \quad \mathbf{a}_3 = (3, 1, 2, 5, 4)$$

и

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 1, 1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (2, -1, -2, 5, 1);$$

б). подпространства решений однородных систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ \quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ \; 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

в). линейная оболочка, порожденная системой векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, 2, 0)$ и подпространство решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ \ \ 7x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

<u>Решение</u>. а). Из (2.40) следует, что сумма подпространств

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2).$$

Найдем размерность этого подпространства. Для этого запишем матрицу, построенную из вектор-столбцов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, и приведем ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатой форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -\underline{1} & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - 2C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \\ C_5 - C_2 \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \sim \\ C_4 - 2C_1 \\ C_5 - C_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 1 & 0 & -1 \\ \underline{1} & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Последняя матрица в (2.42) имеет ступенчатую форму и ее ранг равен трем. Следовательно, $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = 3$. Для того, чтобы найти размерность пересечения подпространств, найдем размерности подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Сначала запишем матрицу из векторов-столбцов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и преобразуем ее к ступенчатой форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -\underline{1} & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - 2C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \\ C_5 - C_2 \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 \leftrightarrow C_2 \\ \sim \\ C_4 - 2C_1 \\ C_5 - C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 1 \\ \underline{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Ранг матрицы в (2.43) равен двум и, следовательно, $\dim \mathbb{V}_1 = 2$. Найдем теперь размерность подпространства $\mathbb{V}_2$. Так как векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ не пропорциональны, то система, состоящая из этих векторов, линейно независима и $\dim \mathbb{V}_2 = 2$. Тогда по формуле (2.39) найдем, что

$$\dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) = \dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2 - \dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

<u>Замечание</u>. Матрица в (2.43) составлена из первых трех столбцов матрицы из (2.42). Это позволяет объединить вычисления ранга матриц

(2.42) и (2.43). Нужно только выбирать ведущие элементы во время элементарных преобразований сначала в первых трех столбцах (которые соответствуют векторам системы, порождающей первое подпространство) до тех пор, пока матрица, составленная из первых трех столбцов, не станет ступенчатой, и только после этого в остальных столбцах. В (2.42) вычисления именно так и проведены. Рассматривая всю матрицу, получаем размерность подпространства $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, а рассматривая матрицу, состоящую из первых трех столбцов, получаем размерность подпространства $\mathbb{V}_1$.

Займемся теперь базисами подпространств $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Из (2.42) следует, что базис $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ состоит из векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$. (Базис определяется неоднозначно. Найдите другие базисы). Для того, чтобы найти базис пересечения подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$, найдем однородные системы линейных уравнений, подпространства решений которых совпадают соответственно с $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Для подпространства $\mathbb{V}_1$

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 3 & x_1 \\ 1 & -\underline{1} & 1 & x_2 \\ 2 & -2 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & 5 & x_4 \\ 2 & -1 & 4 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - 2C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \\ C_5 - C_2 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|l} \underline{1} & 0 & 3 & x_1 \\ 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_2 \\ 2 & 0 & 6 & x_4 + x_2 \\ 1 & 0 & 3 & x_5 - x_2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 \times C_2 \\ \sim \\ C_4 - 2C_1 \\ C_5 - C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 3 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 - x_1 \end{array}\right).$$

Следовательно, однородная система уравнений, подпространство решений которой совпадает с $\mathbb{V}_1$, будет иметь вот такой вид

$$\begin{cases} x_3 - 2x_2 = 0, \\ x_4 + x_2 - 2x_1 = 0, \\ x_5 - x_2 - x_1 = 0. \end{cases}$$

Слагаемые в этой системе уравнений можно поменять местами и изменить у них знаки для придания ей более опрятного следующего вида

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

Аналогично для подпространства $\mathbb{V}_2$

$$\left(\begin{array}{rr|l} \underline{1} & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ 1 & -2 & x_3 \\ 1 & 5 & x_4 \\ 1 & 1 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - C_1 \\ C_5 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -\underline{1} & x_2 \\ 0 & -4 & x_3 - x_1 \\ 0 & 3 & x_4 - x_1 \\ 0 & -1 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - 4C_2 \\ \sim \\ C_4 + 3C_2 \\ C_5 - C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & x_3 - x_1 - 4x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 + 3x_2 \\ 0 & 0 & x_5 - x_1 - x_2 \end{array}\right).$$

Отсюда получим однородную систему уравнений, подпространство решений которой совпадает с $\mathbb{V}_2$:

$$\begin{cases} x_3 - x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_4 - x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_5 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

После очевидных преобразований получим, что

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.45}$$

Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ тогда и только тогда, когда он является решением обеих систем уравнений (2.44) и (2.45). Следовательно, пересечение данных подпространств совпадает с подпространством решений следующей однородной системы уравнений, построенной из всех уравнений систем (2.44) и (2.45)

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0. \end{cases} \tag{2.46}$$

Найдем базис в $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Так как $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ совпадает с подпространством решений однородной системы уравнений (2.46), то нужно найти фундаментальную систему решений системы уравнений (2.46). Для этого запишем расширенную матрицу однородной системы уравнений (2.46) и выполним необходимые преобразования

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -\underline{1} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -\underline{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\underline{1} \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 - C_1 \\ \sim \\ C_5 - C_2 \\ C_6 - C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \underline{1} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} C_2 - 2C_4 \\ C_3 - C_4 \\ \sim \\ C_5 + C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -\underline{1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\underline{1} \\ \underline{1} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит система уравнений (2.46) равносильна системе

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0; \\ -5x_2 - x_4 = 0; \\ -x_2 - x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение системы уравнений (2.46) можно записать в виде

$$x_1 = -2x_2, \quad x_3 = 2x_2, \quad x_4 = -5x_2, \quad x_5 = -x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Так как это решение имеет одну свободную неизвестную x_2, то фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{e}$. Найдем его. Для этого положим $x_2 = 1$, тогда $x_1 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -5$, $x_5 = -1$. Значит, $\mathbf{e} = (-2; 1; 2; -5; -1)^\tau$. Таким образом, базис подпространства $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ состоит из одного вектора $\mathbf{e}$.

Замечание. В данном примере базис пересечение подпространств можно было найти, не переходя к задающим подпространства однородным системам уравнений. Этот алгоритм изложен, например, в сборнике задач [17], задача № 1319. По вычислительной сложности он приблизительно такой же, как и используемый здесь.

б) Так как подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ заданы как подпространства решений однородных систем уравнений, то нетрудно найти размерность и базис их пересечения. Действительно, $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ совпадает с подпространством решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

полученной из всех уравнений исходных однородных систем, подпространства решений которых совпадают с $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Найдем фундаментальную систему решений системы уравнений (2.47). Для этого запишем расширенную матрицу системы уравнений (2.47) и с помощью элементарных преобразований найдем ее общее решение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ \underline{1} & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & -2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_2 \\ \sim \\ C_3 - 3C_2 \\ C_4 - 2C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -\underline{2} & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 3C_4 \\ \sim \\ C_2 + 2C_4 \\ C_3 - 4C_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Мы получили приведенную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ \quad -2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Выразим, как обычно, главные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_4 - 5x_5, \\ x_3 = (-x_4 + 3x_5)/2. \end{cases} \tag{2.48}$$

Теперь уже нетрудно найти фундаментальную систему решений. Так как данная система уравнений имеет три свободные неизвестные, то фундаментальная система решений состоит также из трех векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Найдем их, положив $x_2 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ для $\mathbf{a}_1$, $x_2 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$ для $\mathbf{a}_2$ и $x_2 = x_4 = 0$, $x_5 = 2$ для $\mathbf{a}_3$ (для двух последних векторов единицы заменены на двойки для того, чтобы элементы этих векторов были целыми числами). Тогда по формулам (2.48) можно найти первый и третий элементы каждого из векторов

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathbf{a}_1$	1	1	0	0	0
$\mathbf{a}_2$	−4	0	−1	2	0
$\mathbf{a}_3$	−10	0	3	0	2

Итак, мы нашли базис пересечения подпространств $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Он состоит из векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 0, -1, 2, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-10, 0, 3, 0, 2)^\tau$.

Займемся теперь размерностью и базисом суммы подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Для этого найдем сначала базисы в этих подпространствах. Так как эти подпространства заданы как подпространства решений однородных систем уравнений, то нам нужно найти фундаментальные системы решений этих систем уравнений. Запишем, как обычно, расширенную матрицу системы уравнений, подпространство решений которой есть $\mathbb{V}_1$, и с помощью элементарных преобразований найдем ее общее решение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ \underline{1} & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_1 - 2C_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{-C_1/3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \underline{1} & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_2 - 4C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \underline{1} & -3 \\ \underline{1} & -1 & -4 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Мы получили приведенную систему уравнений

$$\begin{cases} \phantom{x_1 - x_2 -{}} 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 11x_5 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 4x_3 - 11x_5, \\ x_4 = -2x_3 + 3x_5, \qquad x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.49}$$

Найдем теперь фундаментальную систему решений. Так как система уравнений (2.49) имеет три свободные неизвестные, то фундаментальная система решений состоит также из трех векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Положив $x_2 = 1$, $x_3 = x_5 = 0$ для $\mathbf{e}_1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_5 = 0$ для $\mathbf{e}_2$ и $x_2 = x_3 = 0$, $x_5 = 1$ для $\mathbf{e}_3$. Тогда по формулам (2.49) можно найти первый и четвертый элементы каждого из векторов

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathbf{e}_1$	1	1	0	0	0
$\mathbf{e}_2$	4	0	1	-2	0
$\mathbf{e}_3$	-11	0	0	3	1

Значит, базис подпространства $\mathbb{V}_1$ состоит из векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 0, 0, 0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (4, 0, 1, -2, 0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-11, 0, 0, 3, 1)^\tau$.

Аналогично найдем базис в $\mathbb{V}_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & -2 & 6 & 7 & \underline{1} \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_1 - 9C_2} \begin{pmatrix} -15 & 15 & -50 & -55 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -C_1/5 \\ 5C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 3 & -\underline{10} & -11 & 0 \\ 10 & -10 & 30 & 35 & 5 \end{pmatrix} \underset{C_2 + 3C_1}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -\underline{10} & -11 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & \underline{5} \end{pmatrix}.$$

Мы получили приведенную систему уравнений

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - 10x_3 - 11x_4 = 0, \\ \phantom{-3x_1 + 3x_2 - {}} x_1 - x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$\begin{cases} x_3 = (-3x_1 + 3x_2 - 11x_4)/10, \\ x_5 = (-x_1 + x_2 - 2x_4)/5, \qquad x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.50}$$

Найдем теперь фундаментальную систему решений $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, положив $x_1 = 10$, $x_2 = x_4 = 0$ для $\mathbf{f}_1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_4 = 0$ для $\mathbf{f}_2$ и $x_1 = x_2 = 0$, $x_4 = 10$ для $\mathbf{f}_3$. Тогда

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathbf{f}_1$	10	0	-3	0	-2
$\mathbf{f}_2$	0	10	3	0	2
$\mathbf{f}_3$	0	0	-11	10	-4

Таким образом, базис подпространства $\mathbb{V}_2$ состоит из векторов $\mathbf{f}_1 = (10, 0, -3, 0, -2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (0, 10, 3, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (0, 0, -11, 10, -4)^\tau$.

Так как сумма подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$. Чтобы найти базис этой линейной оболочки, нужно выделить максимальную линейно независимую подсистему последней системы векторов

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & -11 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -11 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 11 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -3 & 3 & -11 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 + 4C_3 \\ \sim \\ C_4 + 2C_3 \\ C_3 \leftrightarrow C_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 11 & -22 & 22 & -44 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - 11C_5 \\ \sim \\ C_4 - 3C_5 \\ C_5 \leftrightarrow C_3 \end{array} \begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & -11 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -3 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ состоит, например, из векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и, следовательно, последняя система векторов есть базис в сумме подпространств $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ и $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = 3$.

<u>Замечание</u>. Мы получили, что $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)$. Значит, учитывая соотношения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, имеем $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$.

в) Здесь $\mathbb{V}_2$ задано как подпространство решений однородной системы уравнений. Найдем базис этого подпространства. Система уравнений, задающая подпространство является приведенной с главными неизвестными x_2, x_3. Выразим главные неизвестные системы уравнений через свободные

$$\begin{cases} x_2 = 7x_1 - x_4 - 5x_5, \\ x_3 = -7x_1 + 2x_4 + 6x_5, \qquad x_1, x_4, x_5 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.51}$$

Теперь нетрудно найти фундаментальную систему решений. Положим $x_1 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ для $\mathbf{b}_1$, $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ для $\mathbf{b}_2$ и $x_1 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ для $\mathbf{b}_3$. Тогда, вычислив x_2 и x_3 по формулам (2.51), получим

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathbf{b}_1$	1	7	-7	0	0
$\mathbf{b}_2$	0	-1	2	1	0
$\mathbf{b}_3$	0	-5	6	0	1

Значит, система векторов $\mathbf{b}_1 = (1, 7, -7, 0, 0)^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (0, -1, 2, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{b}_3 = (0, -5, 6, 0, 1)^\tau$ является базисом подпространства $\mathbb{V}_2$ и, следовательно, $\dim \mathbb{V}_2 = 3$. Теперь размерность и базис суммы подпространств $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ легко найти, так как $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ и нужно лишь выделить максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$. Для этого запишем по столбцам матрицу из элементов данных векторов и элементарными преобразованиями приведем ее к ступенчатой форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -7 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 7C_1 \\ \sim \\ C_3 + 7C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -6 & 0 & -\underline{1} & -5 \\ 9 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 + 2C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -6 & 0 & -1 & -5 \\ -5 & -6 & 0 & 0 & -4 \\ -9 & -4 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} -C_2 \\ C_3 + 4C_5 \\ \sim \\ C_4 + 5C_5 \\ C_5 \leftrightarrow C_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_4 - 4C_5 \\ \sim \\ C_5 \leftrightarrow C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 & \underline{1} & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ -\underline{1} & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{20} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что ранг матрицы равен пяти. Значит, $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = 5$ и система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ есть базис в $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$.

Найдем теперь базис и размерность пересечения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Для этого сначала построим однородную систему уравнений, подпространство решений которой совпадает с $\mathbb{V}_1$. Следуя алгоритму, изложенному в задаче № 49 (см. стр. 105), запишем по столбцам из элементов векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ следующую расширенную матрицу и элементарными преобразованиями приведем ее основную матрицу к ступенчатой форме

$$\left(\begin{array}{rr|l} \underline{1} & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & -1 & x_3 \\ -2 & 2 & x_4 \\ 1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3-2C_1 \\ \sim \\ C_4+2C_1 \\ C_5-C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & \underline{1} & x_2 \\ 0 & -3 & x_3-2x_1 \\ 0 & 4 & x_4+2x_1 \\ 0 & -1 & x_5-x_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3+3C_2 \\ \sim \\ C_4-4C_2 \\ C_5+C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & x_3-2x_1+3x_2 \\ 0 & 0 & x_4+2x_1-4x_2 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+x_2 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что система уравнений

$$\left(\begin{array}{r} x_3-2x_1+3x_2=0, \\ x_4+2x_1-4x_2=0, \\ x_5-x_1+x_2=0 \end{array}\right. \tag{2.52}$$

является искомой. Теперь оба подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ можно рассматривать как подпространства решений соответствующих однородных систем уравнений (2.52) и (2.41). Теперь для того, чтобы найти пересечение подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ нужно записать однородную систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{r} -2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 2x_1-4x_2+x_4=0, \\ -x_1+x_2+x_5=0, \\ -7x_1+x_2+x_4+5x_5=0, \\ 7x_1+x_3-2x_4-6x_5=0, \end{array}\right. \tag{2.53}$$

полученную из всех уравнений систем (2.52) и (2.41) (при этом неизвестные системы (2.52) были упорядочены). Подпространство решений системы уравнений (2.53) совпадает с $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Для того, чтобы найти базис пересечения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$, найдем фундаментальную систему решений системы уравнений (2.53)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \sim \\ \\ C_5-C_1 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & \underline{1} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 9 & -3 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \sim \\ C_4-C_2 \\ C_5+2C_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\ -9 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 13 & -11 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \sim \\ C_4-5C_3 \\ C_5+6C_3 \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \sim \\ \\ C_5 \leftrightarrow C_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & \underline{1} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 7 & -\underline{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\underline{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг полученной матрицы равен пяти. Значит, система уравнений (2.53) имеет лишь тривиальное решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Следовательно, $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$ и $\dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) = 0$.

Замечание. Так как $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = 5$ и $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 \subset \mathbb{R}^5$, то $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathbb{R}^5$ и в качестве базиса суммы подпространств можно было взять любой базис пространства $\mathbb{R}^5$, например, стандартный. Кроме того, равенство $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$ приводит к тому, что сумма подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ является прямой: $\mathbb{R}^5 = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

Пример 51 . Найти размерность и базис суммы и пересечения подпространств $\mathbb{V}_1 = \ell(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ и $\mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ в $\mathbb{R}[x]_4$, если эти подпространства порождены соответственно системами многочленов $\mathbf{f}_1(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ и $\mathbf{g}_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$, $\mathbf{g}_2(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x + 2$.

Решение. Выберем в пространстве $\mathbb{R}[x]_4$ какой-нибудь базис, например, $\mathbf{e}_0(x) = 1$, $\mathbf{e}_1(x) = x$, $\mathbf{e}_2(x) = x^2$, $\mathbf{e}_3(x) = x^3$, $\mathbf{e}_4(x) = x^4$.Тогда легко можно найти координатные векторы многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$

$$(\mathbf{f}_1)_e = (1, -2, -1, 2, 1)^\tau, \quad (\mathbf{f}_2)_e = (1, 1, 3, 0, 2)^\tau \quad, (\mathbf{f}_3)_e = (0, 3, 4, -2, 1)^\tau,$$
$$(\mathbf{g}_1)_e = (1, 2, -1, -2, 0)^\tau, \quad (\mathbf{g}_2)_e = (2, 3, 2, -2, 2)^\tau.$$

Теперь все вычисления можно провести в этих координатах. Рассмотрим подпространства $\mathbb{V}_1' = \ell((\mathbf{f}_1)_e, (\mathbf{f}_2)_e, (\mathbf{f}_3)_e)$ и $\mathbb{V}_2' = \ell((\mathbf{g}_1)_e, (\mathbf{g}_2)_e)$ в линейном пространстве $\mathbb{R}^5$. Найдем сначала базис и размерность суммы этих подпространств. Для этого построим матрицу из элементов координатных векторов по столбцам и преобразуем ее к ступенчатой форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \underline{1} & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 - 2C_1 \\ C_3 + C_1 \\ \sim \\ C_4 + 2C_1 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 & 0 & -\underline{1} \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 + 4C_2 \\ \sim \\ C_4 + 2C_2 \\ C_5 + 2C_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3/16 \\ \sim \\ C_4/4 \\ C_5/7 \\ \end{array}$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_4 - C_3 \\ C_5 - C_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \underline{1} & 2 \\ -4 & -1 & 3 & 0 & -\underline{1} \\ -\underline{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Ранг матрицы равен трем. Значит, размерность суммы подпространств $\mathbb{V}_1' + \mathbb{V}_2'$ равна трем. Базис в $\mathbb{V}_1' + \mathbb{V}_2'$ образуют первый, четвертый и пятый координатные векторы. Но тогда, система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ есть базис подпространства $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, размерность которого, очевидно, равна трем.

Займемся теперь пересечением подпространств. Используя алгоритм, изложенный выше, не составляет особого труда найти базис пересечения подпространств $\mathbb{V}_1'$ и $\mathbb{V}_2'$. Для этого, сначала нужно найти однородные системы уравнений, подпространства решений которых совпадают с $\mathbb{V}_1'$ и $\mathbb{V}_2'$. Для первого подпространства

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \underline{1} & 0 & x_1 \\ -2 & 1 & 3 & x_2 \\ -1 & 3 & 4 & x_3 \\ 2 & 0 & -2 & x_4 \\ 1 & 2 & 1 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - 3C_1}}{\underset{C_5 - 2C_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \underline{1} & 0 & x_1 \\ -3 & 0 & 3 & x_2 - x_1 \\ -4 & 0 & 4 & x_3 - 3x_1 \\ 2 & 0 & -2 & x_4 \\ -1 & 0 & 1 & x_5 - 2x_1 \end{array}\right) \underset{C_5 \leftrightarrow C_2}{\sim}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ -\underline{1} & 0 & 1 & x_5 - 2x_1 \\ -4 & 0 & 4 & x_3 - 3x_1 \\ 2 & 0 & -2 & x_4 \\ -3 & 0 & 3 & x_2 - x_1 \end{array}\right) \overset{C_3 - 4C_2}{\underset{\substack{C_4 + 2C_2 \\ C_5 - 3C_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \underline{1} & 0 & x_1 \\ -\underline{1} & 0 & 1 & x_5 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 4x_5 + 5x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + 2x_5 - 4x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - 3x_5 + 5x_1 \end{array}\right).
$$

Таким образом, следующая система уравнений

$$
\begin{cases} x_3 - 4x_5 + 5x_1 = 0, \\ x_4 + 2x_5 - 4x_1 = 0, \\ x_2 - 3x_5 + 5x_1 = 0 \end{cases} \tag{2.54}
$$

имеет подпространство решений, совпадающее с подпространством $\mathbb{V}_1'$. Аналогично для второго подпространства

$$
\left(\begin{array}{cc|c} \underline{1} & 2 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ -1 & 2 & x_3 \\ -2 & -2 & x_4 \\ 0 & 2 & x_5 \end{array}\right) \overset{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 + C_1}}{\underset{C_4 + 2C_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -\underline{1} & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 4 & x_3 + x_1 \\ 0 & 2 & x_4 + 2x_1 \\ 0 & 2 & x_5 \end{array}\right) \overset{C_3 + 4C_2}{\underset{\substack{C_4 + 2C_2 \\ C_5 + 2C_2}}{\sim}}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cc|c} \underline{1} & 2 & x_1 \\ 0 & -\underline{1} & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 + x_1 + 4x_2 - 8x_1 \\ 0 & 0 & x_4 + 2x_1 + 2x_2 - 4x_1 \\ 0 & 0 & x_5 + 2x_2 - 4x_1 \end{array}\right)
$$

Таким образом, следующая система уравнений

$$\begin{cases} x_3 + 4x_2 - 7x_1 = 0, \\ x_4 + 2x_2 - 2x_1 = 0, \\ x_5 + 2x_2 - 4x_1 = 0 \end{cases} \tag{2.55}$$

имеет подпространство решений, совпадающее с подпространством $\mathbb{V}_2'$. Тогда пересечение подпространств $\mathbb{V}_1' \cap \mathbb{V}_2'$ совпадает с подпространством решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_3 - 4x_5 + 5x_1 = 0, \\ x_4 + 2x_5 - 4x_1 = 0, \\ x_2 - 3x_5 + 5x_1 = 0, \\ x_3 + 4x_2 - 7x_1 = 0, \\ x_4 + 2x_2 - 2x_1 = 0, \\ x_5 + 2x_2 - 4x_1 = 0, \end{cases}$$

полученной из всех уравнений систем (2.54) и (2.55). Найдем ее общее решение с помощью последовательных исключений

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & \underline{1} & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_2 - C_5}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -7 & 4 & \underline{1} & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_4 \\ C_2/2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 5 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + 4C_2 \\ C_3 + 3C_2 \\ \sim \\ C_6 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1/8 \\ \\ C_3/2 \\ \sim \\ \\ C_6/3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 + 4C_1 \\ C_5 + 2C_1 \\ C_6 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Тогда $x_2 = x_1$, $x_3 = 3x_1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2x_1$, $x_1 \in \mathbb{R}$ и фундаментальная система решений состоит из одного вектора, который можно найти, положив $x_1 = 1$. Тогда $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$. Значит, базис пересечения подпространств $\mathbb{V}_1'$ и $\mathbb{V}_2'$ состоит из одного координатного вектора $(1, 1, 3, 0, 2)^\tau$. По этому координатному вектору находим базис в $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Это многочлен $\mathbf{f}(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2$. Очевидно, что размерность пересечения подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ равна одному.

Пример 52 . Проверить, совпадают ли подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ пространства $\mathbb{R}^4$, если они соответственно заданы как

а). линейные оболочки, порожденные системами векторов

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (1, -1, 3, 2)$$
$$\text{и} \quad \mathbf{b}_1 = (3, 1, 1, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1, -1, 0);$$

б). подпространства решений однородных систем линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

в). линейная оболочка, порожденная системой векторов

$$\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (3, 1, -1, -1), \quad \mathbf{a}_3 = (0, -1, 1, -2)$$

и подпространство решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. а). Конечномерные подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ равны тогда и только тогда, когда размерности этих подпространств равны между собой и равны размерности суммы этих подпространств:

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{V}_1 = \dim \mathbb{V}_2 = \dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2).$$

Значит, достаточно найти размерности этих трех подпространств. Вычисление размерности одного из подпространств можно совместить с вычислением размерности суммы подпространств, если сначала выбирать ведущие элементы в столбцах, отвечающих одному подпространству

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 + 2C_2 \\ \sim \\ C_4 + C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видим, что размерность подпространства $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ равна двум. Первые три столбца отвечают векторам остова подпространства $\mathbb{V}_1$. Так как матрица, состоящая из первых трех столбцов имеет ступенчатую форму, то размерность подпространства $\mathbb{V}_1$ также равна двум. Осталось найти размерность подпространства $\mathbb{V}_2$. Это легко сделать, если заметить, что векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ не пропорциональны и, значит, линейно независимы. Поэтому размерность второго подпространства тоже равна двум. В итоге получаем, что подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ равны.

б). Воспользуемся теперь тем, что подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ равны тогда и только тогда, когда размерности этих подпространств равны между собой и равны размерности пересечения этих подпространств:

$$\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbb{V}_1 = \dim \mathbb{V}_2 = \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2).$$

Найдем размерности подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$. Она равна $4 - r_A$, где r_A есть ранг матрицы системы уравнений, задающей данное подпространство. Для первого подпространства эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как строки матрицы не пропорциональны, то ее ранг равен двум. Значит, размерность первого подпространства равна двум $(4 - 2)$. Для второго подпространства тоже не составляет особого труда найти ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ \underline{1} & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 - 2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как первая и третья строки совпадают, а первая и вторая строки линейно независимы, то ранг матрицы равен двум. Значит, размерность второго подпространства тоже равна двум. Найдем теперь размерность пересечения этих подпространств. Для этого запишем систему уравнений, содержащую все уравнения исходных систем, и найдем ранг ее матрицы

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - C_1 \\ C_5 - 2C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг этой матрицы не равен двум. Значит, размерность пересечения подпространств не равен двум. Поэтому, подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ не равны.

в). Здесь удобно воспользоваться следующим условием. Подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ равны тогда и только тогда, когда их размерности равны и одно из них содержится в другом. Найдем сначала размерности подпространств. Для первого подпространства найдем ранг матрицы, составленной из векторов по строкам (можно по столбцам)

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_2 - 3C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы равен двум. Значит, размерность первого подпространства равна двум. Для второго подпространства найдем ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{-1} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 + C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы уравнений равен двум. Тогда размерность второго подпространства равна двум $(4-2)$. Размерности подпространств совпали. Осталось проверить то, что одно из этих подпространств содержится в другом. Для этого достаточно выяснить, будут ли векторы остова линейной оболочки решениями системы уравнений. Для этого достаточно элементы каждого вектора подставить в систему уравнений. Не сложная проверка показывает, что это действительно так. Ее можно провести, перемножив матрицу системы уравнений на матрицу, составленную по столбцам из всех векторов остова линейной оболочки. Равенство произведения нулевой матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

завершает эту проверку. Таким образом, все условия выполнены и, следовательно, подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ равны.

Пример 53 . Показать, что сумма подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ является прямой и представить вектор $\mathbf{x} = (4, 1, 0, 1)$ (если он принадлежит этой сумме подпространств) в виде суммы $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{V}_1$ и $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{V}_2$, если эти подпространства заданы в $\mathbb{R}^4$ как линейные оболочки, порожденные соответственно системами векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1, 2)^\tau$ и $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1, 1)^\tau$.

Решение. Сумма подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ будет прямой тогда и только тогда, когда пересечение этих подпространств состоит из одного нулевого вектора, то есть имеет равную нулю размерность. Найдем размерность пересечения. Для этого сначала найдем размерности подпространств $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Для определения размерности $\mathbb{V}_1$ запишем матрицу, составленную из элементов векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ например по столбцам, и найдем ее ранг

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \underline{1} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - 2C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если вычеркнуть четвертую строку последней матрицы, то оставшаяся матрица имеет ступенчатую форму и, следовательно, имеет ранг, равный трем. Значит, вся матрица не может иметь ранг, меньший трех. С другой стороны, матрица содержит три столбца. Поэтому ее ранг не может быть больше трех. Осталась единственная возможность: ранг матрицы равен трем. Следовательно, размерность подпространства $\mathbb{V}_1$ равна также трем. Так как подпространство $\mathbb{V}_2$ порождается одним ненулевым вектором, то его размерность равна одному. Найдем теперь размерность суммы этих подпространств

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \underline{1} & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - 2C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - 2C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \underline{1} & 0 \\ -\underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \underline{1} \\ 0 & \underline{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен четырем. Значит, $\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = 4$. Теперь можно найти размерность пересечения подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ по формуле

$$\dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2) = \dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) - \dim \mathbb{V}_1 - \dim \mathbb{V}_2 = 4 - 3 - 1 = 0.$$

Следовательно, пересечение этих подпространств тривиально. Тем самым показано, что сумма подпространств прямая. Разложим теперь вектор $\mathbf{x}$ в линейную комбинацию векторов системы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & \underline{1} & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_3 - C_1 \\ \sim \\ C_4 - 2C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ -\underline{1} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \sim \\ C_4 - C_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \underline{1} & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_3 \\ \sim \\ C_2 - C_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -6 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & -4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & \underline{4} & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 6C_4/4 \\ C_2 + C_4 \\ \sim \\ C_3 - 3C_4/4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_3 = -3$, $-x_1 = -3$, $x_4 = 2$, $4x_2 = -8$. Тогда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 2$. Так как система уравнений совместна, то вектор $\mathbf{x}$

принадлежит $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Построим теперь оба вектора $\mathbf{x}_1 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3 = 3(1,-1,1,1) - 2(-2,-1,1,-1) - 3(1,0,1,2) = (4,-1,-2,-1)$ и $\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{b}_1 = 2(0,1,1,1) = (0,2,2,2)$.

Замечание. Вектор $\mathbf{x}_1$ можно было найти и так: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{x}_2 = (4,1,0,1) - (0,2,2,2) = (4,-1,-2,-1)$.

Задания

Exempla docent.[9]
Латинский афоризм.

14. Докажите, что

a). коммутативность сложения векторов ($\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}\, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{V}\;\; \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$) является следствием остальных условий, наложенных на операции в определении линейного пространства и, следовательно, может быть вычеркнута из определения.

b). восьмое условие ($1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$) не является следствием остальных условий, наложенных на операции в определении линейного пространства.

c). 3 и 4 условия в определении линейного пространства можно заменить на следующее одно условие: для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{V}$ существует единственный элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

d). 1 и 4 условия в определении линейного пространства можно заменить на следующее одно условие: $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}\; 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

e). 3 и 4 условия в определении линейного пространства можно заменить на следующее одно условие: $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{V}\; \forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}\; 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

f). Найдите ошибку в следующем "доказательстве": для любого вектора $\mathbf{a}$ положим $\mathbf{b} = (-1)\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = (1 + (-1))\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Таким образом, условие 4 «следует» из условий 6 и 8.

15. Будет ли множество

a). $\mathbb{V} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) | x_i \in \mathbb{R}\}$ всех вещественных последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

b). $\mathbb{V} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \exists M > 0\, \forall i\, |x_i| < M\}$ всех вещественных ограниченных последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

c). $\mathbb{V} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \forall i\, |x_i| < M\}$ вещественных ограни-

[9] Примеры учат.

ченных (фиксированным) числом $M > 0$ последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

d). $\mathbb{V} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) | x_i \in \mathbb{R}, \forall i \; x_{i+N} = x_i\}$ всех вещественных периодических с периодом $N \in \mathbb{N}$ последовательностей с обычными (поэлементными) операциями сложения и умножения на скаляр являться линейным пространством?

e). всех вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, $a < b$, с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число, являться линейным пространством?

f). всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на множестве всех вещественных чисел и периодических с периодом $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число являться линейным пространством?

g). всех непрерывных периодических вещественнозначных функций, определенных на множестве всех вещественных чисел, с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число являться линейным пространством?

♦ Будет ли каждое из следующих множеств $\mathbb{V}$ с определенными ниже операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр являться линейным пространством? Если нет, то укажите какие условия в определении линейного пространства нарушаются.

16. Множество $\mathbb{V}$ такое же, как и в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть состоит из всех вектор-столбцов с n вещественными элементами. Операция сложения определена также как в $\mathbb{R}^n$, то есть $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$, а операция умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$ определена иначе:

a). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ произведение $\alpha \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

b). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ произведение $\alpha \mathbf{a} = (a_1 \operatorname{sign} \alpha, \dots, a_n \operatorname{sign} \alpha)$;

c). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ произведение $\alpha \mathbf{a} = (0, \dots, 0)$;

d). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ произведение $\alpha \mathbf{a} = (e^{\alpha - 1} a_1, \dots, e^{\alpha - 1} a_n)$;

e). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ произведение $\alpha \mathbf{a} = (|\alpha| a_1, \dots, |\alpha| a_n)$.

17. Множество $\mathbb{V}$ такое же, как и в пространстве $\mathbb{R}^n$, то есть состоит из всех вектор-столбцов с n вещественными элементами. Операция умножения на скаляр определена так же, как в $\mathbb{R}^n$, то есть $\alpha \mathbf{a} = \alpha (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$, а операция сложения определена иначе:

a). $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n, \dots, a_2 + b_2, a_1 + b_1)$;

b). $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$;

c). $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$;

d). $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + 2b_1, \ldots, a_n + 2b_n)$.

18. Множество $\mathbb{V}$ такое же, как и в пространстве $\mathbb{C}^n$. Операция сложения также определена как в $\mathbb{C}^n$, то есть $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$, а операция умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$ определена иначе:

a). $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ произведение $\alpha\mathbf{a} = (\alpha\bar{a}_1, \ldots, \alpha\bar{a}_n)$;

b). $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ произведение $\alpha\mathbf{a} = (\bar{\alpha}\bar{a}_1, \ldots, \bar{\alpha}\bar{a}_n)$;

c). $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ произведение $\alpha\mathbf{a} = (a_1\Re\alpha, \ldots, a_n\Re\alpha)$;

d). $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ произведение $\alpha\mathbf{a} = (a_1\Im\alpha, \ldots, a_n\Im\alpha)$;

e). $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ произведение $\alpha\mathbf{a} = ((\arg\alpha+1)a_1, \ldots, (\arg\alpha+1)a_n)$, $0 \le \arg\alpha < 2\pi$, при $\alpha \neq 0$ и $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

19. Множество $\mathbb{V}$ такое же, как и в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$, $n > 0$. Операция сложения определена так же, как в $\mathbb{R}[x]_n$, то есть $\forall \mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in \mathbb{R}[x]_n$, $\forall \mathbf{g}(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i \in \mathbb{R}[x]_n$ $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) = \sum_{i=0}^{n}(f_i + g_i)x^i$, а операция умножения на скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$ определена иначе:

a). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ произведение $\alpha\mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha f_i x^i$, где $m = \deg\mathbf{f} > 0$ и $\alpha\mathbf{f}(x) = 0$ при $\deg\mathbf{f} = 0$;

b). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ произведение $\alpha\mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^{n}(\alpha + f_i)x^i$;

c). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ произведение $\alpha\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha f_i x^i$;

d). $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ произведение $\alpha\mathbf{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha f_i x^{n-i}$.

20. Будут ли подпространствами линейного пространства $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, следующие множества векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau$?

a). Множество всех векторов, у которых сумма первого и второго элементов неотрицательна: $x_1 + x_2 \ge 0$.

b). Множество всех векторов с рациональными элементами: $\forall i$ $x_i \in \mathbb{Q}$.

c). Множество всех векторов с нулевыми первыми двумя элементами: $x_1 = x_2 = 0$.

d). Множество всех векторов с первым элементом равным квадрату второго: $x_1 = x_2^2$.

e). Множество всех векторов, у которых второй элемент в два раза больше первого: $x_2 = 2x_1$.

f). Множество всех векторов, у которых второй элемент на два больше первого: $x_2 = x_1 + 2$.

g). Множество всех векторов, у которых абсолютные величины первого и второго элементов равны: $|x_1| = |x_2|$.

h). Множество всех векторов, у которых первый элемент равен второму: $x_1 = x_2$.

i). Множество всех векторов, у которых произведение первого и второго элементов неотрицательно: $x_1 x_2 \ge 0$.

21. Будут ли подпространствами линейного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \ge 2$,

следующие множества векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\tau$?

a). Множество всех векторов, у которых действительная часть первого элемента равна его мнимой части: $\Im x_1 = \Re x_1$.

b). Множество всех векторов, у которых первый и второй элементы комплéксно сопряжены: $x_1 = \bar{x}_2$.

c). Множество всех векторов, у которых модули первого и второго элементов равны: $|x_1| = |x_2|$.

d). Множество всех векторов, у которых три вторых элемента равны двум первым: $3x_2 = 2x_1$.

e). Множество всех векторов, у которых действительные части первого и второго элементов равны: $\Re x_1 = \Re x_2$.

f). Множество всех векторов, у которых сумма первого и второго элементов равна нулю: $x_1 + x_2 = 0$.

22. Будут ли подпространствами линейного пространства $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, следующие множества матриц $n-$го порядка $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$?

a). Множество всех трехдиагональных матриц, то есть матриц, у которых $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.

b). Множество всех матриц, квадрат которых равен нулю: $\mathsf{A}^2 = \mathsf{0}$.

c). Множество всех вырожденных матриц: $|\mathsf{A}| = 0$.

d). Множество всех матриц, след которых равен нулю: $\operatorname{tr} \mathsf{A} := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0$.

e). Множество всех матриц, у которых угловые элементы равны: $a_{11} = a_{1n} = a_{n1} = a_{nn}$.

f). Множество всех симметричных (кососимметричных) матриц: $\mathsf{A}^\tau = \mathsf{A}$ ($\mathsf{A}^\tau = -\mathsf{A}$).

23. Будут ли подпространствами линейного пространства $\mathbb{R}[x]_n$, $n \geq 1$, следующие множества многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами?

a). Множество $\mathbb{R}[x]_m$ всех многочленов степени не выше m, $m < n$ с вещественными коэффициентами.

b). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых числа 2 и 3 являются корнями.

c). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых хотя бы одно из чисел 2, 3 было бы корнем.

d). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых число 2 является корнем производной: $f'(2) = 0$.

e). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых $f(0) = f(1)$.
f). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых $f'(0) = 1$.
g). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
h). Множество всех многочленов $f(x)$ степени не выше n с вещественными коэффициентами, для которых $x^n f(\frac{1}{x}) = f(x)$.

24. Для системы векторов
a). $\mathbf{a}_1 = (2,2,-2)$; $\mathbf{a}_2 = (-2,-1,-2)$; $\mathbf{a}_3 = (-3,-1,3)$ вычислить линейную комбинацию $\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.
b). $\mathbf{a}_1 = (1,-1,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,3)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,1,-3)$ вычислить линейную комбинацию $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.
c). $\mathbf{a}_1 = (3,1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,2,3)$ вычислить линейную комбинацию $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$.
d). $\mathbf{a}_1 = (2,2,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,3,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-3,-2)$ вычислить линейную комбинацию $\mathbf{b} = -1\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$.
e). $\mathbf{a}_1 = (-3,3,1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,2,1)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,3)$ вычислить линейную комбинацию $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.
f). $\mathbf{a}_1 = (3,2,2)$, $\mathbf{a}_2 = (3,-3,3)$, $\mathbf{a}_3 = (3,-2,-2)$ вычислить линейную комбинацию $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$.

25. Найти вектор $\mathbf{x}$ из векторного уравнения $\alpha(\mathbf{a}+\beta\mathbf{x})+\gamma(\mathbf{b}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{c} - \mathbf{x}$.
a). $\mathbf{a} = (2,0,-3)$, $\mathbf{b} = (1,3,-1)$, $\mathbf{c} = (3,3,1)$, $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$.
b). $\mathbf{a} = (-1,2,1)$, $\mathbf{b} = (3,-3,0)$, $\mathbf{c} = (1,1,3)$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, $\delta = 1$.
c). $\mathbf{a} = (1,2,0)$, $\mathbf{b} = (0,-1,-1)$, $\mathbf{c} = (3,3,-2)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$.
d). $\mathbf{a} = (-2,1,-1)$, $\mathbf{b} = (-1,2,0)$, $\mathbf{c} = (3,-3,2)$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$.
e). $\mathbf{a} = (2,-3,-1)$, $\mathbf{b} = (-3,-3,3)$, $\mathbf{c} = (1,-1,-1)$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\delta = -1$.
f). $\mathbf{a} = (1,-2,-3)$, $\mathbf{b} = (1,3,-3)$, $\mathbf{c} = (-3,-1,-1)$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = -1$.

26. Будет ли каждый из векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$?
a). $\mathbf{a}_1 = (3,2,3)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-2,0)$, $\mathbf{a}_3 = (-6,4,-3)$, $\mathbf{b}_1 = (-1,-6,-3)$, $\mathbf{b}_2 = (1,-4,-3)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (1,2,0)$, $\mathbf{a}_2 = (1,3,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (0,-1,1)$, $\mathbf{b}_1 = (0,2,-3)$, $\mathbf{b}_2 = (-1,-1,-1)$.

c). $\mathbf{a}_1=(0,-3,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-3,-2,-3)$, $\mathbf{a}_3=(-3,4,-1)$, $\mathbf{b}_1=(3,-1,2)$, $\mathbf{b}_2=(-3,2,-4)$.
d). $\mathbf{a}_1=(-3,-1,1)$, $\mathbf{a}_2=(0,-1,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-9,-1,7)$, $\mathbf{b}_1=(6,1,-4)$, $\mathbf{b}_2=(3,2,-3)$.
e). $\mathbf{a}_1=(1,-1,2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-2,-1)$, $\mathbf{a}_3=(7,1,8)$, $\mathbf{b}_1=(2,1,-2)$, $\mathbf{b}_2=(-5,1,-7)$.
f). $\mathbf{a}_1=(3,-2,-1)$, $\mathbf{a}_2=(2,-1,2)$, $\mathbf{a}_3=(-7,4,-3)$, $\mathbf{b}_1=(-3,3,1)$, $\mathbf{b}_2=(8,-5,0)$.

27. Найти все значения λ, при которых вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.
a). $\mathbf{a}_1=(-2,0,2)$, $\mathbf{a}_2=(\lambda,-1,-4)$, $\mathbf{a}_3=(0,-3,3)$, $\mathbf{b}=(2,3,-1)$.
b). $\mathbf{a}_1=(3,-1,2)$, $\mathbf{a}_2=(\lambda,-1,2)$, $\mathbf{a}_3=(1,3,-1)$, $\mathbf{b}=(4,2,1)$.
c). $\mathbf{a}_1=(4,2,0)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-4,4)$, $\mathbf{a}_3=(-2,2,\lambda)$, $\mathbf{b}=(-8,2,-8)$.
d). $\mathbf{a}_1=(4,1,2)$, $\mathbf{a}_2=(-3,-2,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-1,\lambda,4)$, $\mathbf{b}=(1,0,4)$.
e). $\mathbf{a}_1=(-3,2,2)$, $\mathbf{a}_2=(4,4,-4)$, $\mathbf{a}_3=(0,\lambda,3)$, $\mathbf{b}=(-2,0,2)$.
f). $\mathbf{a}_1=(\lambda,-1,3)$, $\mathbf{a}_2=(-4,3,1)$, $\mathbf{a}_3=(2,-3,-1)$, $\mathbf{b}=(1,3,4)$.

28. Проверить, будут ли следующие системы векторов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.
a). $\mathbf{a}_1=(1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2=(1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3=(-2,-2,3)^\tau$.
b). $\mathbf{a}1=(-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}2=(-1,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}3=(-1,-4,-8)^\tau$.
c). $\mathbf{a}_1=(2,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2=(-2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3=(2,-3,-2)^\tau$.
d). $\mathbf{a}1=(1,0,1)^\tau$, $\mathbf{a}2=(-3,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}3=(9,-4,1)^\tau$.
e). $\mathbf{a}_1=(-1,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2=(-1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3=(-3,-2,-1)^\tau$.
f). $\mathbf{a}1=(0,3,2)^\tau$, $\mathbf{a}2=(-2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a}3=(-2,-7,-4)^\tau$.

29. Проверить, будут ли следующие системы многочленов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$.
a). $\mathbf{f}_1(x)=4x^2-3x+2$, $\mathbf{f}_2(x)=-3x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_3(x)=7x^2-5x-1$.
b). $\mathbf{f}_1(x)=x^2+4x$, $\mathbf{f}_2(x)=2x^2-x+4$, $\mathbf{f}_3(x)=4x^2-4x+1$.
c). $\mathbf{f}_1(x)=4x^2-3x-1$, $\mathbf{f}_2(x)=4x-3$, $\mathbf{f}_3(x)=4x^2+9x-10$.
d). $\mathbf{f}_1(x)=3x-4$, $\mathbf{f}_2(x)=3x^2-2x-3$, $\mathbf{f}_3(x)=x^2+3x+3$.
e). $\mathbf{f}_1(x)=3x^2-3x+1$, $\mathbf{f}_2(x)=4x^2-4x+3$, $\mathbf{f}_3(x)=8x^2-8x+1$.
f). $\mathbf{f}_1(x)=1x^2+4$, $\mathbf{f}_2(x)=2x^2-3x+4$, $\mathbf{f}_3(x)=4x^2-3x$.

30. Проверить, будут ли следующие системы матриц линейно независимыми в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
a). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}-4&-1\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}3&3\\-3&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$.
b). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-3\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}3&0\\1&5\end{pmatrix}$.
c). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}2&-4\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}3&2\\-4&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}-1&4\\1&4\end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

31. Установить линейную независимость следующих систем функций в линейном пространстве всех непрерывных функций на $(0, \infty)$.

a). $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

b). $|x-1|$, $|x-2|$, $|x-3|$.

c). e^x, $\frac{1}{x}$, e^{2x}.

d). $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

e). $|\sin x|$, $|\cos x|$, $|\cos 2x|$.

f). $\frac{x^2+1}{x}$, $\frac{x}{x^2+1}$, 1.

32. Проверить, будут ли следующие системы векторов полными в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

a). $\mathbf{a}_1 = (-1,0,-1)^\tau, \mathbf{a}_2 = (-1,2,0)^\tau, \mathbf{a}_3 = (-3,2,-2)^\tau, \mathbf{a}_4 = (2,-6,-1)^\tau$.

b). $\mathbf{a}_1 = (-3,1,4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,-3,0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4,-2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (0,-2,2)^\tau$.

c). $\mathbf{a}_1 = (0,-1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-6,6,0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-9,7,4)^\tau$.

d). $\mathbf{a}_1 = (3,-1,4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,4,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1,3,-3)^\tau$.

e). $\mathbf{a}_1 = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,0,-4)^\tau$.

f). $\mathbf{a}_1 = (4,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,1,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1,2,-1)^\tau$.

33. В следующих примерах проверить является ли система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

a). $\mathbf{a}_1 = (3,0,-4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,4,4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-4,2)^\tau$.

b). $\mathbf{a}_1 = (2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (6,7,4)^\tau$.

c). $\mathbf{a}_1 = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-6,-5,1)^\tau$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-3,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,4,1)^\tau$.

e). $\mathbf{a}_1 = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-6,-1,-5)^\tau$.

f). $\mathbf{a}_1 = (1,4,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (4,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,4,-3)^\tau$.

34. В следующих примерах проверить является ли система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$.

a). $\mathbf{a}_1 = (-3,-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-3,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-2,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2,3,-2,-2)^\tau$.

b). $\mathbf{a}_1 = (2,0,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,0,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,-1,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2,2,-1,4)^\tau$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-3,1,-3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,2,3,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3,3,1,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1,0,-1,-1)^\tau$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,1,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,1,-3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (6,0,-1,6)^\tau$.

e). $\mathbf{a}_1 = (2,-2,3,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,3,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2,3,-3,1)^\tau$.

f). $\mathbf{a}_1 = (1,-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,2,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,2,0,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 =$

$(-4,-1,4,0)^\tau$.

35. В следующих примерах проверить является ли система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = 1-3x-2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2-4x+x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2+3+2x^2$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = -2+2x+3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = x-2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2+x+5x^2$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = -4+2x-x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4+x+4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3-3x-2x^2$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = -1+2x+x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2-x+x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -7+4x+5x^2$.

e). $\mathbf{f}_1(x) = 3+2x-x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1+2x+2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = x-3x^2$.

f). $\mathbf{f}_1(x) = -2-3x-x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2-x-x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2+3x+2x^2$.

36. В следующих примерах проверить является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

37. В следующих примерах проверить, что система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\mathbf{y}_e$ найти вектор $\mathbf{y}$.

a). $\mathbf{e}_1 = (-2,3,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,-3,4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,0,-3)^\tau$, $\mathbf{x} = (-4,3,-7)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (4,4,3)^\tau$.

b). $\mathbf{e}_1 = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,2)^\tau$, $\mathbf{x} = (-1,-5,-3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (4,-3,-2)^\tau$.

c). $\mathbf{e}_1 = (3,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-3,-1,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{x} = (6,5,-7)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,0,1)^\tau$.

d). $\mathbf{e}_1 = (-3,4,4)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-4,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{x} = (-5,-1,-5)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,2,0)^\tau$.

e). $\mathbf{e}_1 = (1,0,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-4,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{x} = (7,-5,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,-2,-2)^\tau$.

f). $\mathbf{e}_1 = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-3,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,3,2)^\tau$, $\mathbf{x} = (0,-2,4)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,1,2)^\tau$.

38. В следующих примерах проверить, что система матриц A_1, A_2,

A_3, A_4 является базисом в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ и найти в этом базисе координаты матрицы Y. По известному координатному вектору X_A найти матрицу X.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-3, 2, -2 - 2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (4, 0, 12)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, -1, 10)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, 0, 1 - 1)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-2, -1, -1 - 1)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (0, 1, -3 - 1)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

39. В следующих примерах проверить, что система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ и найти координаты многочлена $\mathbf{h}$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\mathbf{g}_f$ найти многочлен $\mathbf{g}$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = 4 + 4x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -3 - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 - x + x^2$, $\mathbf{g}_f = (0, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 5 - 4x + 4x^2$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = -3 + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4 + 4x - 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (-1, 2, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 5 + x$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = 2 + 4x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + 2x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - 2x - x^2$, $\mathbf{g}_f = (0, -1, -2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 2 + 4x^2$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - 2x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 - x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 - x + x^2$, $\mathbf{g}_f = (2, -2, 3)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -1 - x + 2x^2$.

e). $\mathbf{f}_1(x) = 3-x-x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2-2x+x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1-2x$, $\mathbf{g}_f = (-2,-3,4)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 - x + 2x^2$.

f). $\mathbf{f}_1(x) = -3 - 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4 - 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (-3,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 - 5x + 2x^2$.

40. В следующих примерах по элементам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ и их координатным векторам $\mathbf{a}_e$, $\mathbf{b}_e$, $\mathbf{c}_e$ в базисе ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) найти векторы этого базиса.

a). $\mathbf{a}_e = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,1,0)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-3,-3,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (-3,-1,1)^\tau$.

b). $\mathbf{a}_e = (2,-2,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (0,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-3,1,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (-1,3,-1)^\tau$.

c). $\mathbf{a}_e = (3,0,2)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,2,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{b} = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (3,-2,2)^\tau$.

d). $\mathbf{a}_e = (-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-3,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{c} = (-1,0,3)^\tau$.

e). $\mathbf{a}_e = (2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a} = (-1,3,3)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{c} = (3,-2,-1)^\tau$.

f). $\mathbf{a}_e = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{a} = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (1,1,-3)^\tau$, $\mathbf{c} = (0,3,-1)^\tau$.

41. В следующих примерах проверить, что системы векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ являются базисами в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода $P_{e\to u}$ от первого базиса ко второму. По известным координатам векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в одном базисе найти их координаты в другом базисе.

a). $\mathbf{e}_1 = (2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-3,1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-2,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (-2,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (2,-1,1)^\tau$.

b). $\mathbf{e}_1 = (3,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,3,3)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-3,1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-1,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-2,0)^\tau$.

c). $\mathbf{e}_1 = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,0,2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,-3,3)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,-4,1)^\tau$.

d). $\mathbf{e}_1 = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (2,-2,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (0,3,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (4,-3,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,1,1)^\tau$.

e). $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,0,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2,2,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (3,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,3,3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,-3,0)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-1,3,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (0,3,1)^\tau$.

f). $\mathbf{e}_1 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2,-2,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (3,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,0)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (-4,-4,-5)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,1,1)^\tau$.

42. В следующих примерах даны базисы ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), ($\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$) и матрица A. Найти базисы ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$) и ($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$) такие, что матрицы перехода $P_{e\to u} = \mathsf{A}$ и $P_{f\to g} = \mathsf{A}$.

$$\text{a).}\quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = (-2,2,-1)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (-1,-1,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (2,-1,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (-1,1,0)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (0,1,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (-1,1,2)^\tau; \end{array} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b).}\quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = (-1,1,3)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (-1,1,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (-1,2,3)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (1,-1,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (-1,-2,-1)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (0,-2,2)^\tau; \end{array} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c).}\quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = (-1,0,-2)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (1,-3,-3)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (-1,2,-1)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (3,1,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (1,-2,-1)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (-3,-1,0)^\tau; \end{array} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d).}\quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = (2,2,1)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (-2,2,2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (2,0,-1)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (1,-2,0)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (-1,-1,-2)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (-3,-3,1)^\tau; \end{array} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{e).}\quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = (1,2,-1)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (-2,3,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (2,1,-1)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (3,-1,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (0,-1,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (-2,-1,-3)^\tau; \end{array} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{f).}\quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 = (-1,-1,3)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (-1,-2,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (1,3,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (3,-3,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (0,-2,2)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (1,-3,-3)^\tau; \end{array} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

43. В следующих примерах найти матрицу перехода $P_{e\to u}$, если известны координатные векторы $\mathbf{x}_e$, $\mathbf{y}_e$, $\mathbf{z}_e$ $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{y}_u$, $\mathbf{z}_u$.

a). $\mathbf{x}_e = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (3,2,1)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (0,2,-3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,3,2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-2,3,3)^\tau$.

b). $\mathbf{x}_e = (2,-3,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,3,0)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (3,2,3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (3,3,-1)^\tau$.

c). $\mathbf{x}_e = (2,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,3,1)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (1,-1,-3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (-1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (0,1,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-1,2,-1)^\tau$.

d). $\mathbf{x}_e = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-3,-2,0)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (1,1,-2)^\tau$.

e). $\mathbf{x}_e = (1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (0,-2,3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (3,2,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (2,0,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (1,1,2)^\tau$.

f). $\mathbf{x}_e = (2,-3,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (3,-1,-3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,2,2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (3,-1,-1)^\tau$.

44. В следующих примерах найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ линейного пространства $\mathbb{R}[x]_2$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = 1 + x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - 2x + 2x^2$. $\mathbf{g}_1(x) = -3 - 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 + x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 1 - x - 2x^2$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = -1 - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - x + 3x^2$. $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x - 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 2x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 3 + 2x - 3x^2$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = 1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 - x^2$. $\mathbf{g}_1(x) = -2 - x + x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 - x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -2 - x - x^2$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + x + 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -3 - 2x + x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 1 - 3x - 3x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x + 2x^2$.
e). $\mathbf{f}_1(x) = 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 - x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 + x + 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -3x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 + 2x + x^2$.
f). $\mathbf{f}_1(x) = -1 + 2x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 1 + 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -3 + 2x - x^2$.

45. В следующих примерах найти матрицу перехода от базиса A_1, A_2, A_3, A_4 к базису B_1, B_2, B_3, B_4 линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,
$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,
$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,
$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,
$\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

46. Найти ранг r для каждой из следующих матриц

a). $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 8 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

47. Найти ранг r для каждой из следующих систем векторов

a). $\mathbf{e}_1 = (-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-3,2,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2,-3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-1,-2,-4)^\tau$.

b). $\mathbf{e}_1 = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,-4,4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,6,-6)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2,4,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-1,-2,2)^\tau$.

c). $\mathbf{e}_1 = (2,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,1,4)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (3,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (2,3,4)^\tau$.

d). $\mathbf{e}_1 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (4,4,2)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (1,4,1)^\tau$.

e). $\mathbf{e}_1 = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,-3,3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-1,-3,0)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (4,2,2)^\tau$.

f). $\mathbf{e}_1 = (3,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-4,2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-3,2,3)^\tau$.

48. Используя понятие ранга матрицы, проверить линейную независимость следующих систем векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (-3,1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,0,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (4,0,-1,-1)^\tau$.

b). $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,3,2,-2)^\tau$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-3,-1,1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (5,0,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2,-1,2,-2)^\tau$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-1,-2,0,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,2,1,-1)^\tau$.

e). $\mathbf{a}_1 = (3,2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,1,-3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-2,0,0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,-3,-1,3)^\tau$.

49. Используя понятие ранга матрицы, выяснить, являются ли базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ следующие системы векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (-3,-2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,-3,0,3)^\tau$.

b). $\mathbf{a}_1 = (0,2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,1,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1,2,-2,-2)^\tau$.

c). $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,-2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3,-3,0,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,3,1,3)^\tau$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-3,1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-1,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,0,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,3,0,-3)^\tau$.

e). $\mathbf{a}_1 = (3,2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,0,2,0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,-2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (0,1,1,0)^\tau$.

50. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следу-

ющих систем векторов (вообще говоря, находятся неоднозначно).

a). $\mathbf{a}_1 = (0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,-1,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (0,-2,2,4)$, $\mathbf{a}_4 = (0,2,-2,-4)$, $\mathbf{a}_5 = (1,-2,1,0)$, $\mathbf{a}_6 = (3,-3,0,-6)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (0,3,-1,3)$, $\mathbf{a}_2 = (0,-6,2,-6)$, $\mathbf{a}_3 = (-1,3,-1,1)$, $\mathbf{a}_4 = (-2,3,-1,-1)$, $\mathbf{a}_5 = (2,0,1,-1)$, $\mathbf{a}_6 = (4,-9,4,-6)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (2,2,-2,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (2,2,-2,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,-4,4,4)$, $\mathbf{a}_4 = (2,3,0,-2)$, $\mathbf{a}_5 = (2,3,0,-2)$, $\mathbf{a}_6 = (-4,-5,2,4)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (2,0,0,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,0,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (2,0,1,-4)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,-1,0,-2)$, $\mathbf{a}_5 = (-2,0,2,-2)$, $\mathbf{a}_6 = (5,-1,-1,-6)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-1,2,3,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-2,-3,2)$, $\mathbf{a}_3 = (2,0,1,1)$, $\mathbf{a}_4 = (6,-4,-4,6)$, $\mathbf{a}_5 = (-2,3,2,-1)$, $\mathbf{a}_6 = (3,2,-1,1)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-1,3,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (4,2,-6,2)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,1,-1,1)$, $\mathbf{a}_5 = (1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_6 = (-2,3,0,-1)$.

51. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем многочленов (вообще говоря, находятся неоднозначно).

a). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2 - x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2 + 2x + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + x + 1$, $\mathbf{f}_4(x) = -x^2 + 3x + 1$, $\mathbf{f}_5(x) = -2x^2 + 2x$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + x + 2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x^2 - 2x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = -x^2 + x - 1$, $\mathbf{f}_4(x) = 2x^2 + 4x + 5$, $\mathbf{f}_5(x) = 3x^2 - x - 1$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 + 2x + 2$, $\mathbf{f}_2(x) = -6x^2 - 4x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x^2 + 3x + 1$, $\mathbf{f}_4(x) = -10x^2 + 2x - 2$, $\mathbf{f}_5(x) = -3x^2 - 2x - 2$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 - x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = -x^2 + 3x + 3$, $\mathbf{f}_3(x) = -4x^2 + 4x + 2$, $\mathbf{f}_4(x) = -6x^2 + 2x - 2$, $\mathbf{f}_5(x) = -x^2 + x - 2$.

e). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2 + x - 2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2 - 2x + 4$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - x + 2$, $\mathbf{f}_4(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $\mathbf{f}_5(x) = 10x^2 + 5x - 1$.

f). $\mathbf{f}_1(x) = -2x^2 - x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2 + x + 3$, $\mathbf{f}_3(x) = -3x^2 - 2x + 6$, $\mathbf{f}_4(x) = -3x^2 - x - 3$, $\mathbf{f}_5(x) = -x^2 + 3x + 3$.

52. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем матриц (вообще говоря, находятся неоднозначно).

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_5 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_5 = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_5 = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$.

53. Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной следующими системами векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 4, 4, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 0, -2, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -6, -5, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (-1, 4, 1, -2)$, $\mathbf{a}_6 = (3, 2, 5, -2)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (4, -1, -2, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (-7, 1, 2, -6)$, $\mathbf{a}_4 = (6, -3, -6, 8)$, $\mathbf{a}_5 = (-3, 0, 0, -2)$, $\mathbf{a}_6 = (6, 0, 0, 4)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (4, -3, 3, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 4, -5, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (2, -1, 5, -2)$, $\mathbf{a}_5 = (4, -5, 7, 1)$, $\mathbf{a}_6 = (5, 5, -2, 1)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -3, 0, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -6, -3, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 6, 3, -4)$, $\mathbf{a}_5 = (1, -9, -6, 4)$, $\mathbf{a}_6 = (2, 2, -2, 3)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 5, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, -2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 2, -7, -4)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, -2, 7, 4)$, $\mathbf{a}_5 = (4, 7, 1, -5)$, $\mathbf{a}_6 = (2, 4, 3, -2)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (-3, -2, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 6, 5, 7)$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 3, -3, 2)$, $\mathbf{a}_5 = (-6, -2, 0, 1)$, $\mathbf{a}_6 = (3, 4, 3, 4)$.

54. Найти фундаментальную систему решений и размерность d подпространства решений однородной системы линейных уравнений.

a). $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

b). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

c). $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$

d). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

e). $\begin{cases} 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

f). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

55. Проверить, являются ли системы векторов линейного пространства $\mathbb{R}^5$ фундаментальными системами решений соответствующих си-

стем уравнений

a). $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_4-2x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3+3x_4-x_5=0, \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{a}_1=(4,-7,1,-2,1), \\ \mathbf{a}_2=(-4,3,1,2,-1), \\ \mathbf{a}_3=(1,4,-2,-1,0). \end{matrix}$

b). $\begin{cases} x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=0, \\ x_1-4x_2-3x_3-2x_5=0, \\ x_1-3x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{a}_1=(2,1,-2,-1,2), \\ \mathbf{a}_2=(7,2,-1,-2,1), \\ \mathbf{a}_3=(6,2,-2,-2,2). \end{matrix}$

c). $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+x_2+4x_3-3x_5=0, \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{a}_1=(-6,3,3,3,-3), \\ \mathbf{a}_2=(-7,-5,6,-3,-3), \\ \mathbf{a}_3=(-2,2,6,0,6). \end{matrix}$

d). $\begin{cases} x_1+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1-4x_2-4x_3+4x_4=0, \\ x_1-4x_2-5x_3+5x_4-x_5=0, \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{a}_1=(-2,1,2,4,4), \\ \mathbf{a}_2=(6,7,0,4,-2), \\ \mathbf{a}_3=(4,2,4,4,-4). \end{matrix}$

e). $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4-x_5=0, \\ 3x_2+4x_3-5x_4+x_5=0, \\ 3x_1+5x_3-4x_4-x_5=0, \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{a}_1=(-2,2,3,3,-3), \\ \mathbf{a}_2=(-5,-4,3,0,0), \\ \mathbf{a}_3=(7,2,-6,-3,3). \end{matrix}$

f). $\begin{cases} x_1-x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3+3x_4+2x_5=0. \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{a}_1=(-2,-1,-2,1,-1), \\ \mathbf{a}_2=(-1,1,-1,-1,1), \\ \mathbf{a}_3=(-1,2,-1,-2,2). \end{matrix}$

56. Найти базис в подпространстве $\ell(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6)$, и коэффициенты разложения остальных векторов системы по этому базису.

a). $\mathbf{a}_1=(3,3,-1,5)$, $\mathbf{a}_2=(6,6,-2,10)$, $\mathbf{a}_3=(-3,-3,1,-5)$, $\mathbf{a}_4=(-1,-2,-1,3)$, $\mathbf{a}_5=(-4,-5,0,-2)$, $\mathbf{a}_6=(-7,-8,1,-7)$.

b). $\mathbf{a}_1=(1,0,1,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-3,0,-3,9)$, $\mathbf{a}_3=(0,1,5,2)$, $\mathbf{a}_4=(-1,-2,-11,-1)$, $\mathbf{a}_5=(2,1,7,-4)$, $\mathbf{a}_6=(3,1,8,-7)$.

c). $\mathbf{a}_1=(0,-1,-2,1)$, $\mathbf{a}_2=(0,2,4,-2)$, $\mathbf{a}_3=(1,5,-3,-3)$, $\mathbf{a}_4=(-1,-7,-1,5)$, $\mathbf{a}_5=(-1,-5,3,3)$, $\mathbf{a}_6=(1,7,1,-5)$.

d). $\mathbf{a}_1=(3,-1,-3,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-6,2,6,6)$, $\mathbf{a}_3=(2,1,-3,0)$, $\mathbf{a}_4=(-1,2,0,3)$, $\mathbf{a}_5=(4,2,-6,0)$, $\mathbf{a}_6=(7,1,-9,-3)$.

e). $\mathbf{a}_1=(0,3,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2=(4,2,5,2)$, $\mathbf{a}_3=(-8,-4,-10,-4)$, $\mathbf{a}_4=(8,7,9,3)$, $\mathbf{a}_5=(-4,4,-7,-4)$, $\mathbf{a}_6=(-4,1,-6,-3)$.

f). $\mathbf{a}_1=(4,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-4,-1,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(2,1,1,0)$, $\mathbf{a}_4=(2,0,-2,-1)$, $\mathbf{a}_5=(2,2,4,1)$, $\mathbf{a}_6=(8,1,-5,-3)$.

57. Найти однородную систему линейных алгебраических уравне-

ний, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$, порожденной следующими системами векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (3, -3, 1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (-6, 6, -2, 6)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 2, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, 1, -2)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 0, 4, -1)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, -3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 0, -3)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -3, -3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 6, 3, -4)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 0, 6, 4)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 2, -3, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -1, -2, 1)$.

58. Найти размерность s и базис суммы следующих двух подпространств $\mathbb{V}_1 = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $\mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ (в $\mathbb{R}^4$), а также размерность d и базис их пересечения.

a). $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, -3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 0, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, -2, -7, 5)$,
$\mathbf{b}_1 = (-5, -2, -1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (8, 2, -1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -2, -5, 4)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, -2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, -3, -2)$,
$\mathbf{b}_1 = (-3, -1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 5, 6)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 2, -8, -8)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -3, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3, -3, -5)$,
$\mathbf{b}_1 = (1, -3, 1, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 5, 1, -5)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 1, -3, -1)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -6, -2, 4)$,
$\mathbf{b}_1 = (-2, -1, 3, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 2, -6, -6)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 3, 1, 3)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 2, -1)$,
$\mathbf{b}_1 = (0, -2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, -2, 1, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 3, -2, 2)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -6, -3, 6)$,
$\mathbf{b}_1 = (1, -3, -1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 5, 2, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (0, -3, 0, 6)$.

59. Для подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ всех решений однородных систем уравнений найти размерность s и базис суммы $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, размерность d и базис пересечения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

a). $\mathbb{V}_1$: $-2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $-x_1 + x_2 - x_4 = 0$.

b). $\mathbb{V}_1$: $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $2x_1 - 6x_3 + 6x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0$.

c). $\mathbb{V}_1$: $3x_1 - 2x_4 = 0$, $6x_1 - 3x_2 - 9x_3 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $9x_1 - 3x_2 - 9x_3 - x_4 = 0$, $4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$.

d). $\mathbb{V}_1$: $9x_1 - 3x_3 = 0$, $6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$, $3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0$.

e). $\mathbb{V}_1$: $-x_1 - x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0$, $x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $-4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0$, $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

f). $\mathbb{V}_1$: $-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0$, $-2x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $4x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0$.

60. Для подпространства $\mathbb{V}_1$, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, и подпространства $\mathbb{V}_2$ всех решений однородной системы уравнений, найти размерность s и базис суммы $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, размерность d и базис пересечения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

a). $\mathbf{a}_1 = (1, -3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -4, 2, -3)$, $4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$, $-x_1 + x_2 - x_4 = 0$.
b). $\mathbf{a}_1 = (3, -3, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, -4, 2, 1)$, $x_1 + x_2 = 0$.
c). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -4, 5, -5)$, $-2x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0$, $-3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-9, 6, -4, 7)$, $-6x_1 + 3x_2 + 18x_3 = 0$, $-4x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0$.
e). $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, -2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -3, -2, -1)$, $2x_1 - 3x_2 = 0$.
f). $\mathbf{a}_1 = (-3, -2, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 5, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 2, -1, 2)$, $-x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$, $-x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0$.

ГЛАВА 3
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Прямота достойна уважения, мой мальчик... Но мир изменчив и противоречив, и идущий по прямой линии достигнет ли цели? *Фихиро.*

Основные определения

Будем по-прежнему рассматривать числовые поля: поле действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$, поле компле́ксных чисел $\mathbb{C}$ и иногда, быть может, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Буквой $\mathbb{F}$ будем обозначать одно из этих полей. Пусть $\mathbb{V}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. Будут использоваться следующие линейные пространства со стандартными операциями сложения векторов и умножения на число: $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}^n$) — линейное пространство всех вектор–столбцов, состоящих из n вещественных (соответственно компле́ксных, рациональных) элементов, причем любое из этих пространств будет обозначаться $\mathbb{F}^n$; $M_n(\mathbb{F})$ — линейное пространство всех квадратных матриц порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$; $\mathbb{F}[x]$ — линейное пространство всех многочленов с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ и от одной неизвестной x; $\mathbb{F}[x]_n$ — подпространство всех многочленов степени не больше n линейного пространства $\mathbb{F}[x]$; $V_3(O)$ ($V_2(O)$) — линейное пространство всех векторов пространства (плоскости) с началом в начале координат.

Отображение A, действующее из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$, называется линейным оператором[1], если для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$

$$A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y}). \tag{3.1}$$

Условие (3.1) характеризует "линейность"отображения A. Значит, линейный оператор — это линейное отображение из линейного пространства в это же линейное пространство. Иногда удобно линейность в определении линейного оператора заменить двумя условиями, которые в совокупности равносильны линейности: отображение $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ является линейным оператором, если и только если для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ и любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), \qquad A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}). \tag{3.2}$$

[1] Чтобы не усложнять изложение, не будем рассматривать операторы, действующие из одного линейного пространства в другое.

Первое условие в (3.2) называется аддитивностью, второе — однородностью отображения A. В теории линейных операторов принято писать $A\mathbf{x}$ вместо $A(\mathbf{x})$ (так же как вместо $\sin(x)$ пишут $\sin x$), и мы будем придерживаться этого правила в тех случаях, когда это не приводит к недоразумению.

Множество всех линейных операторов, действующих из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$ будем обозначать $L(\mathbb{V})$ и будем говорить, что линейный оператор $A \in L(\mathbb{V})$ действует в $\mathbb{V}$ (заметим, что линейные операторы из этого множества имеют традиционное название "линейные преобразования линейного пространства $\mathbb{V}$").

Линейный оператор, переводящий любой вектор в ноль-вектор, называется нулевым оператором или ноль-оператором. Ноль-оператор обычно обозначается символом O. Таким образом, $O\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

Линейный оператор, переводящий любой вектор в этот же вектор, называется единичным оператором. Единичный оператор обычно обозначается символом I. Таким образом, $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

Любой линейный оператор A переводит ноль-вектор в ноль-вектор, то есть $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Пусть $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_m$ — полная система векторов (например базис) линейного пространства $\mathbb{V}$. Для того, чтобы задать линейный оператор A на всем пространстве $\mathbb{V}$ достаточно знать векторы $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{v}_m = A\mathbf{u}_m$. Тогда на произвольном векторе $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{u}_m \in \mathbb{V}$ линейный оператор A задается по формуле $A\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$ (продолжается по линейности).

Пример 54 Будет ли линейным оператором отображение A, действующее в $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ по следующему правилу: для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ его образ $A\mathbf{x}$ получается умножением вещественной квадратной матрицы M порядка n на вектор $\mathbf{x}$, то есть

$$A\mathbf{x} = \mathsf{M} \cdot \mathbf{x}.$$

Решение. Первое, что нужно проверить — это корректность задания отображения. Другими словами, нужно проверить то, что отображение действительно действует из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$. Так как после умножения матрицы M на вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ получается вектор-столбец с n элементами, то действительно отображение A действует из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Далее, линейность отображения A нетрудно проверить, если воспользоваться известными свойствами операций сложения и умножения матриц:

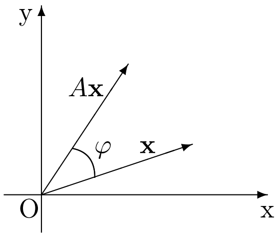
$$\mathsf{A} \cdot (\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{A} \cdot \mathsf{B} + \mathsf{A} \cdot \mathsf{C}, \quad \mathsf{A} \cdot (\alpha\mathsf{B}) = \alpha(\mathsf{A} \cdot \mathsf{B}), \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Тогда

$$A(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \mathsf{M}\cdot(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \mathsf{M}\cdot(\alpha\mathbf{x})+\mathsf{M}\cdot(\beta\mathbf{y}) = \\ = \alpha(\mathsf{M}\cdot\mathbf{x})+\beta(\mathsf{M}\cdot\mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x}+\beta A\mathbf{y}$$

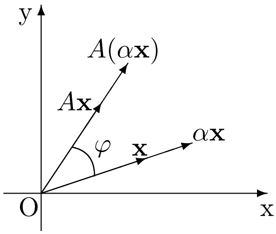
для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, данное отображение является линейным оператором.

Пример 55 Будет ли линейным оператором в $\mathbb{V} = V_2(O)$ отображение, поворачивающее каждый вектор плоскости вокруг начала координат на угол φ (положительное направление — против часовой стрелки).

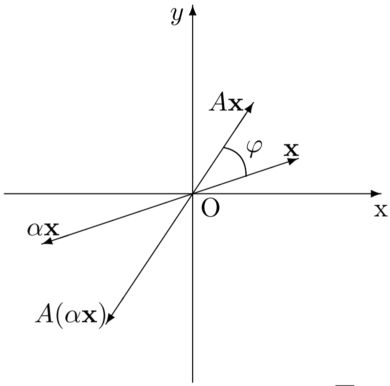


Решение. Очевидно, что отображение действительно действует в линейном пространстве всех векторов плоскости с началом в начале координат. Для данного отображения проще проверить его однородность и аддитивность по отдельности, чем проверять его линейность. Для $\alpha > 0$ векторы

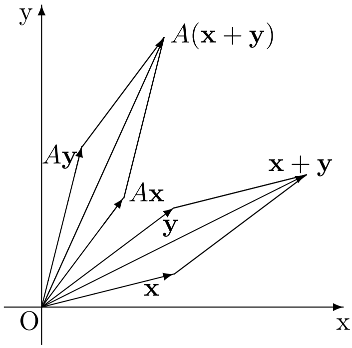
$\mathbf{x}$ и $\alpha\mathbf{x}$ лежат на одном и том же луче, выходящем из начала координат, причем длина второго вектора в α раз больше длины первого вектора (это не значит, что второй вектор всегда больше). После поворота их на угол φ мы получим векторы $A\mathbf{x}$ и



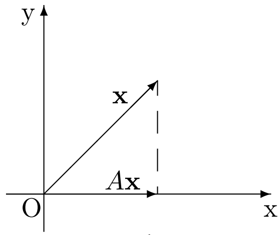
$A(\alpha\mathbf{x})$ соответственно. Они также будут лежать на одном луче, и длина вектора $A(\alpha\mathbf{x})$ будет в α раз больше длины вектора $A\mathbf{x}$. Но это значит, что если последний вектор умножить на α, то получится предыдущий вектор, то есть $\alpha A\mathbf{x} = A(\alpha\mathbf{x})$. Для $\alpha < 0$ векторы $\mathbf{x}$ и $\alpha\mathbf{x}$ лежат на одной и той же прямой, проходящей через начало координат, и направлены в разные стороны, причем длина второго вектора в $|\alpha|$ раз больше длины первого вектора. После поворота их на угол φ мы получим векторы $A\mathbf{x}$ и $A(\alpha\mathbf{x})$ соответственно. Они также будут лежать на одной прямой, направлены в разные стороны, и длина вектора $A(\alpha\mathbf{x})$ в $|\alpha|$ раз больше длины вектора $A\mathbf{x}$. Но это значит, что если последний вектор умножить на α, то получим предыдущий вектор, то есть $\alpha A\mathbf{x} = A(\alpha\mathbf{x})$. При $\alpha = 0$ правая и



левая части проверяемого условия равны нулю и, значит, равны. Покажем теперь, что имеет место равенство $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ (аддитивность отображения). При повороте плоскости не меняются длины отрезков и углы между ними. Значит, при повороте параллелограмм переходит в параллелограмм, при этом диагональ переходит в диагональ. Пусть векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ совпадают со сторонами параллелограмма и $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ — с его диагональю. После поворота стороны параллелограмма соответственно совпадают с $A\mathbf{x}$ и $A\mathbf{y}$ и $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ — с его диагональю. Но по правилу сложения векторов последний вектор



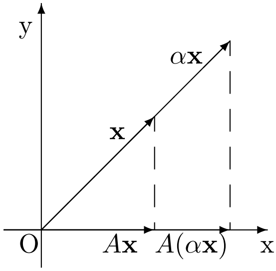
$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x}+A\mathbf{y}$. Следовательно, отображение A является линейным оператором.



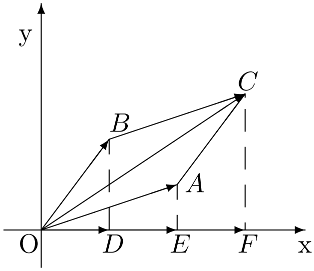
Пример 56 Будет ли линейным оператором в $\mathbb{V} = V_2(O)$ отображение, проектирующее любой вектор плоскости на ось Ox параллельно оси Oy.

Решение. Так же, как и в предыдущем примере, отображение действует в линейном пространстве всех векторов плоскости. Проверим теперь однородность и аддитивность данного отображения.

Однородность отображения следует из теоремы Фалеса, которая утверждает, что параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки. Значит, вектор $A(\alpha\mathbf{x})$ во столько же раз длиннее вектора $A\mathbf{x}$, во сколько раз вектор $\alpha\mathbf{x}$ длиннее вектора $\mathbf{x}$. При этом направление векторов $A(\alpha\mathbf{x})$, $A\mathbf{x}$ так же как и векторов $\alpha\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ совпадают при $\alpha > 0$ и разные при $\alpha < 0$. При $\alpha = 0$ векторы $A(\alpha\mathbf{x})$ и $\alpha A\mathbf{x}$ равны нулю. Следовательно, для всех α и $\mathbf{x}$ верно равенство $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$. Докажем теперь аддитивность отображения.



Пусть $\overrightarrow{OA} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{y}$, тогда $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \overrightarrow{OC}$, $A\mathbf{x} = \overrightarrow{OE}$, $A\mathbf{y} = \overrightarrow{OD}$, $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \overrightarrow{OF}$ и равенство $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ равносильно равенству $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$. Последнее равенство становится очевидным после следующих рассуждений. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны. Значит, равны и их проекции на ось Ox, то есть $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DF}$. Отсюда $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$, что и требовалось доказать. Следовательно, отображение A является линейным оператором.



Пример 57 Будет ли линейным оператором отображение A, действующее в линейном пространстве $\mathbb{V} = \mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов от одной неизвестной x с комплексными коэффициентами и степени не больше 3 по следующему правилу: для любого многочлена $\mathbf{f} \in \mathbb{C}[x]_3$

$$(A\mathbf{f})(x) = \mathbf{f}'''(x) + 2x\mathbf{f}''(x) - \mathbf{f}(x).$$

Решение. Проверим сначала, что отображение действует в линейном пространстве $\mathbb{C}[x]_3$. Для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[x]_3$ его третья производная есть константа и $2xf''(x)$ есть многочлен второй степени. Поэтому $f''' \in \mathbb{C}[x]_3$ и $2xf''(x) \in \mathbb{C}[x]_3$. Тогда $Af \in \mathbb{C}[x]_3$. Линейность данного отображения следует из следующего элементарного свойства производной:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Действительно

$$A(\alpha f+\beta g)=(\alpha f+\beta g)'''+2x(\alpha f+\beta g)''+\alpha f+\beta g=$$
$$\alpha f'''+\beta g'''+2x(\alpha f''+\beta g'')+\alpha f+\beta g=$$
$$\alpha(f'''+2xf''+f)+\beta(g'''+2xg''+g)=\alpha Af+\beta Ag.$$

Следовательно, отображение является линейным оператором.

Пример 58 Будет ли линейным оператором отображение A, действующее в линейном пространстве $\mathbb{V}=M_2(\mathbb{R})$ всех матриц второго порядка с вещественными элементами по следующему правилу: для любой матрицы $\mathsf{X}\in M_2(\mathbb{R})$

$$A(\mathsf{X})=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\mathsf{X}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}+\mathsf{X}.$$

Решение. Произведение и сумма матриц второго порядка будет так же матрицей второго порядка. Значит, отображение действует в линейном пространстве всех матриц второго порядка. Пусть $\mathsf{M}_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{M}_2=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$. Тогда для любых матриц $\mathsf{X},\mathsf{Y}\in M_2(\mathbb{F})$ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$

$$A(\alpha\mathsf{X}+\beta\mathsf{Y})=\mathsf{M}_1\cdot(\alpha\mathsf{X}+\beta\mathsf{Y})\cdot M_2+\alpha\mathsf{X}+\beta\mathsf{Y}=$$
$$=\alpha\mathsf{M}_1\cdot\mathsf{X}\cdot\mathsf{M}_2+\beta\mathsf{M}_1\cdot\mathsf{Y}\cdot\mathsf{M}_2+\alpha\mathsf{X}+\beta\mathsf{Y}=$$
$$=\alpha(\mathsf{M}_1\cdot\mathsf{X}\cdot\mathsf{M}_2+\mathsf{X})+\beta(\mathsf{M}_1\cdot\mathsf{Y}\cdot\mathsf{M}_2+\mathsf{Y})=\alpha A(\mathsf{X})+\beta A(\mathsf{Y}),$$

что и требовалось показать для доказательства линейности отображения. Значит, отображение A является линейным оператором.

Пример 59 Будет ли линейным оператором отображение $A:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$, действующее по правилу: $A\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{a}$.

Решение. Пусть $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Тогда при $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ получим $A\mathbf{0}=\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$. Так как любой линейный оператор нулевой вектор переводит в нулевой вектор, то отображение A не может быть линейным оператором. Если $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, то, очевидно, отображение A, совпадающее с I, будет линейным оператором.

Пример 60 Будет ли линейным оператором отображение $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, действующее по правилу: $A\mathbf{x}=(x_1+x_2^2,x_1-x_2)$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

Решение. Пусть, например, $\alpha=2$, $\mathbf{x}=(1,1)$. Тогда $\alpha\mathbf{x}=(2,2)$, $A\mathbf{x}=(2,2)$, $A(\alpha\mathbf{x})=(6,4)$ и $\alpha(A\mathbf{x})=(4,4)$. Значит, $A(\alpha\mathbf{x})\neq\alpha A\mathbf{x}$ и, следовательно, отображение A не является линейным оператором.

Замечание. Можно рассуждать и так. Так как $\alpha A\mathbf{x}=(\alpha x_1+\alpha x_2^2,\alpha x_1-\alpha x_2)$ и $A(\alpha\mathbf{x})=(\alpha x_1+\alpha^2x_2^2,\alpha x_1-\alpha x_2)$, то хочется написать, что эти векторы не равны. Но то, что эти векторы по–разному записаны, еще не значит, что они не равны. Невыполнение равенства $\alpha A\mathbf{x} = A(\alpha\mathbf{x})$ означает, что существуют такое число $\alpha \in \mathbb{R}$ и такой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, что это равенство не имеет места. Подбором находим, что, например, для $\alpha = -1$, $\mathbf{x} = (0, 1)$ действительно равенство не выполняется.

Действия с линейными операторами

Деятельность — единственный путь к познанию.
Бернард Шоу.

Суммой линейных операторов $A, B \in L(\mathbb{V})$ называется отображение $A + B$, действующее в $\mathbb{V}$ по правилу:

$$(A + B)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{V}.$$

Произведением линейного оператора $A \in L(\mathbb{V})$ на скаляр α из поля $\mathbb{F}$, над которым определено линейное пространство $\mathbb{V}$, называется отображение αA, действующее в $\mathbb{V}$ по правилу:

$$(\alpha A)(\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{V}.$$

Сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на скаляр являются линейными операторами, то есть $A+B, \alpha A \in L(\mathbb{V})$, и удовлетворяют следующим свойствам:

1. $\forall A, B \in L(\mathbb{V}) \quad A + B + B + A$;
2. $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V}) \quad (A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\forall A \in L(\mathbb{V}) \quad A + O = A$;
4. $\forall A \in L(\mathbb{V})\ \exists B \in L(\mathbb{V}) \quad A + B = O$;
5. $\forall A, B \in L(\mathbb{V})\ \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
6. $\forall A \in L(\mathbb{V})\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
7. $\forall A \in L(\mathbb{V})\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
8. $\forall A \in L(\mathbb{V}) \quad 1 \cdot A = A$;

Оператор B из свойства 4 единственен и $B := (-1)A$. Его обычно обозначают $-A$ и называют противоположным к оператору A. С его помощью можно ввести разность операторов по формуле $A - B = A + (-B)$. Из вышеперечисленных свойств следует, что множество $L(\mathbb{V})$ с операциями сложения и умножения на скаляр становится линейным пространством. Если размерность конечномерного линейного пространства $\mathbb{V}$ равна n, то размерность линейного пространства $L(\mathbb{V})$ равна n^2. Линейное пространство $\mathbb{V}$ бесконечномерно тогда и только тогда, когда линейное пространство $L(\mathbb{V})$ бесконечномерно.

Пусть $A, B \in L(\mathbb{V})$. Тогда произведение операторов AB определяется как отображение, действующее в $\mathbb{V}$ и равное композиции операторов:

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{V}.$$

Произведение линейных операторов являются линейным оператором, то есть $AB \in L(\mathbb{V})$. Для произведения линейных операторов имеют место следующие свойства: $\forall A, B, C \in L(\mathbb{V})$

1. $C(A+B) = CA + CB$;
2. $(A+B)C = AC + BC$;
3. $(AB)C = A(BC)$;
4. $AI = A, \quad IA = A$.
5. $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$.

Произведение операторов некоммутативно, то есть существуют линейные операторы $A, B \in L(\mathbb{V})$ такие, что $AB \neq BA$. Значит, $L(\mathbb{V})$ образует некоммутативную алгебру. В этой алгебре для любого оператора можно определить нулевую и любую натуральную степень:
$A^0 := I, \quad A^1 := A, \quad A^2 := AA, \quad A^3 := A^2A, \ldots, A^n := A^{n-1}A, \quad n \in \mathbb{N}$.

Степень линейного оператора удовлетворяет следующим свойствам:
$$A^mA^n = A^nA^m = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = (A^n)^m = A^{mn}.$$

Для любого многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ можно определить новый оператор по формуле
$$f(A) := a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI.$$
Этот оператор $f(A) \in L(\mathbb{V})$. Следует заметить, что, вообще говоря,
$$A^nB^n \neq (AB)^n.$$
Это значит, что существуют такие линейные операторы $A, B \in L(\mathbb{V})$, что имеет место последнее неравенство.

Пример 61 Для операторов A и B, действующих в $\mathbb{R}^2$ по правилам $A\mathbf{x} = (x_1 - x_2; x_1 - x_2)^\tau$, $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, найти операторы: а). $A+B$, б). $A-B$, в). $2A+3B$, г). AB, д). B^2, е). A^n.

Решение. Запишем оба оператора в одинаковой форме. Например, для оператора B можно написать так:
$$B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$
а). Тогда по определению суммы операторов
$$(A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$
Таким образом, $(A+B)\mathbf{x} = (2x_1 - 3x_2; 3x_1 + 2x_2)^\tau$. Этот оператор, конечно, можно записать и в такой форме: $(A+B)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$.

б). По определению разности операторов $(A-B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + (-B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - B\mathbf{x}$. Тогда $(A-B)\mathbf{x} = (x_2; -x_1 - 4x_2)^\tau$ или $(A-B)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$.

в). Вычисления можно провести также, как и в предыдущих пунктах. А можно первый оператор записать как оператор умножения на матрицу

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Тогда

$$(2A + 3B)\mathbf{x} = 2A\mathbf{x} + 3B\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

г). По определению произведения операторов

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Таким образом, если операторы есть операторы умножения слева на некоторые матрицы, то их произведение есть оператор умножения слева на матрицу, равную произведению (в том же порядке) исходных матриц.

д). Так как $B^2 = BB$, то из предыдушего пункта следует, что нужно лишь найти произведение матрицы, задающей оператор, на себя. Проверьте правильность вычисления следующего произведения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

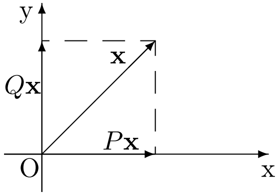
$$B^2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

е). Так как $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, $\ldots$,$A^n = AA^{n-1}$, то достаточно найти n – ю степень матрицы, задающей оператор. Возведем сначала эту матрицу во вторую степень:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что все последующие степени матрицы будут равны нулевой матрице. Оператор умножения на нулевую матрицу есть, очевидно, нулевой оператор. Значит, $A^n = O$ при $n > 1$.

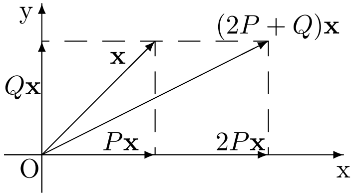
Пример 62 Пусть P — оператор проектирования плоскости (проектирования любого вектора плоскости) на ось Ox параллельно оси Oy, Q — оператор проектирования плоскости на ось Oy параллельно оси Ox. Найти операторы: а) $P + Q$, б) PQ, в) $Q + 2P$, г) $P - Q$, д) P^n, е) Q^n.



Решение. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор плоскости.

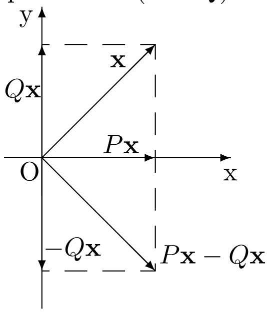
а). Так как $P\mathbf{x} + Q\mathbf{x} = \mathbf{x}$, то сумма операторов P и Q равна единичному оператору: $P + Q = I$.

б). Из того, что $(PQ)\mathbf{x} = P(Q\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, следует, что произведение операторов P и Q равно нулевому оператору: $PQ = O$. Аналогично, $QP = O$.



в). Оператор $2P$ проектирует вектор $\mathbf{x}$ на ось абсцисс и длину полученного вектора увеличивает в два раза. Тогда получаем, что оператор $Q+2P$ действует следующим образом: он растягивает вектор в два раза вдоль оси Ox.

г). Для любого вектора $\mathbf{x}$ имеет место равенство $(P - Q)\mathbf{x} = P\mathbf{x} - Q\mathbf{x}$.



Очевидно, что вектор $P\mathbf{x} - Q\mathbf{x}$ симметричен вектору $\mathbf{x}$ относительно оси Ox. Значит, оператор $P - Q$ есть оператор зеркального отражения относительно оси Ox.

д). Так как $P^2\mathbf{x} = P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$, то $P^2 = P$. Далее получаем $P^3 = PP^2 = PP = P^2 = P$. Аналогично, $P^4 = P$, $P^5 = P$ и так далее. Таким образом, $P^n = P$ для любого натурального n. Нулевая степень любого оператора, по определению, равна единичному оператору. Значит, $P^0 = I$.

е). Аналогично, $Q^n = Q$ для любого натурального n и $Q^0 = I$.

Пример 63 Найти а). $A + B$; б). $2A$; в). AB; г). BA; д). A^3; е). A^n; ж). B^2 для дифференциальных операторов A и B, действующих в пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не больше 3 по формулам $Af = f' - f$, $Bf = f''' + 3f'' - 2f'$.

Решение. Пусть f — произвольный многочлен из $\mathbb{C}[x]_3$.

а). Так как по определению суммы операторов

$$(A + B)f = Af + Bf = f' - f + f''' + 3f'' - 2f',$$

то

$$(A + B)f = f''' + 3f'' - f' - f.$$

б). Так как
$$(2A)f = 2Af = 2(f' - f),$$
то оператор $2A$ действует по правилу:
$$(2A)f = 2f' - 2f.$$

в). По определению произведения операторов
$$(AB)f = A(Bf) = A(f''' + 3f'' - 2f') =$$
$$= (f'''+3f''-2f')' - (f'''+3f''-2f') = f''''+3f'''-2f''-f'''-3f''+2f'.$$
Так как для любого многочлена f степени не больше 3 имеет место равенство $f'''' = 0$, то получаем после упрощения, что
$$(AB)f = 2f''' - 5f'' + 2f'.$$

г). Аналогично,
$$(BA)f = B(Af) = B(f' - f) =$$
$$(f' - f)''' + 3(f' - f)'' - 2(f' - f)' = f'''' - f''' + 3f''' - 3f'' - 2f'' + 2f'.$$
После приведения подобных членов с учетом равенства $f'''' = 0$ получаем, что
$$(BA)f = 2f''' - 5f'' + 2f'.$$
Сравнивая операторы AB и BA, видим, что $AB = BA$.

д). Очевидно, что $A^1 f = f' - f$. Далее,
$$A^2 f = A(Af) = (f' - f)' - (f' - f) = f'' - f' - f' + f.$$
Значит, вторую степень оператора A можно вычислять по формуле $A^2 f = f'' - 2f' + f$. Найдем третью степень оператора A. По определению
$$A^3 f = A(A^2 f) = (f'' - 2f' + f)' - (f'' - 2f' + f) =$$
$$= f''' - 2f'' + f' - f'' + 2f' - f.$$
Тогда
$$A^3 f = f''' - 3f'' + 3f' - f.$$

е). В предыдущем пункте найдены первые три степени оператора A. Полученные формулы наводят на мысль, что в общем случае нужно использовать биномиальные коэффициенты C_n^k. Чтобы не ошибиться в формулировке окончательного результата, найдем еще четвертую степень оператора A:
$$A^4 f = A(A^3 f) = (f''' - 3f'' + 3f' - f)' - (f''' - 3f'' + 3f' - f) =$$
$$= f'''' - 3f''' + 3f'' - f' - f''' + 3f'' - 3f' + f.$$
Значит,
$$A^4 f = -4f''' + 6f'' - 4f' + f,$$

так как производная $f^{(n)}=0$ при любом $n>3$. Анализируя полученные формулы, можно предположить, что в общем случае

$$A^n f=(-1)^n(f-C_n^1 f'+C_n^2 f''-C_n^3 f''').$$

Здесь предполагается, что $C_n^k=0$ при $k>n$. Тогда нетрудно проверить, что формула действительно справедлива при $n=1,2,3,4$. Для доказательства ее в общем случае воспользуемся методом математической индукции. Осталось показать, что, если формула справедлива для степени n, то она справедлива и для степени $n+1$. Найдем A^{n+1}:

$$\begin{aligned} A^{n+1}f&=A(A^n f)=\\ &=(-1)^n(f-C_n^1 f'+C_n^2 f''-C_n^3 f''')'-(-1)^n(f-C_n^1 f'+C_n^2 f''-C_n^3 f''')=\\ &=(-1)^n(f'-C_n^1 f''+C_n^2 f'''-C_n^3 f''''-f+C_n^1 f'-C_n^2 f''+C_n^3 f''')=\\ &=(-1)^n(-f+(1+C_n^1)f'-(C_n^1+C_n^2)f''+(C_n^2+C_n^3)f'''). \end{aligned}$$

Для биномиальных коэффициентов справедливо равенство $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$ (на этом равенстве основан способ вычисления биномиальных коэффициентов с использованием треугольника Паскаля). Так как $C_n^0=1$, то суммы биномиальных коэффициентов во всех скобках можно заменить на один биномиальный коэффициент. Тогда

$$A^{n+1}f=(-1)^{n+1}(f-C_{n+1}^1 f'+C_{n+1}^2 f''-C_{n+1}^3 f'''),$$

что и требовалось доказать.

ж). Так же как в пункте д) находим

$$\begin{aligned} B^2 f&=B(Bf)=(f'''+3f''-2f')'''+3(f'''+3f''-2f')''-2(f'''+3f''-2f')'=\\ &=f^{(6)}+3f^{(5)}-2f''''+3f^{(5)}+9f''''-6f'''-2f''''-6f'''+4f''. \end{aligned}$$

Так как $f^{(n)}=0$ для любого $n>3$, то

$$B^2 f=-12f'''+4f''.$$

Матрица линейного оператора

Не спрашиваете и правильно делаете: воздерживаясь от вопросов, мы тешим себя иллюзией, что когда-нибудь узнаем ответы.
Жозе Сарамаго «Год смерти Рикардо Рейса».

Пусть линейное пространство $\mathbb{V}$ имеет конечную не равную нулю размерность n над полем $\mathbb{F}$ и $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$ — произвольный базис пространства $\mathbb{V}$. Если $A\in L(\mathbb{V})$, то векторы $A\mathbf{e}_1=\mathbf{v}_1, A\mathbf{e}_2=\mathbf{v}_2,\dots,A\mathbf{e}_n=\mathbf{v}_n$ принадлежат пространству $\mathbb{V}$ и могут быть разложены по базису

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_1 &= a_{1,1}\mathbf{e}_1 + a_{2,1}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n,1}\mathbf{e}_n, \\ A\mathbf{e}_2 &= a_{1,2}\mathbf{e}_1 + a_{2,2}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n,2}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\mathbf{e}_n &= a_{1,n}\mathbf{e}_1 + a_{2,n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n,n}\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Квадратная матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

порядка n называется матрицей линейного оператора A в базисе e. Матрица линейного оператора обладает следующими свойствами:

1. Для любого $A \in L(\mathbb{V})$ и любого $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ имеет место равенство

$$(A\mathbf{x})_e = A_e \mathbf{x}_e; \tag{3.4}$$

2. матрица единичного (нулевого) оператора является единичной (нулевой) матрицей:

$$I_e = \mathsf{E}; \quad (O_e = \mathsf{O};) \tag{3.5}$$

3. матрица суммы операторов равна сумме матриц этих операторов:

$$(A + B)_e = A_e + B_e \qquad \forall A, B \in L(\mathbb{V}); \tag{3.6}$$

4. матрица произведения оператора на скаляр равна произведению матрицы оператора на этот скаляр:

$$(\alpha A)_e = \alpha A_e \qquad \forall A \in L(\mathbb{V}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}; \tag{3.7}$$

5. матрица произведения операторов равна произведению матриц этих операторов:

$$(AB)_e = A_e B_e \qquad \forall A, B \in L(\mathbb{V}); \tag{3.8}$$

6. Пусть e и u — базисы пространства $\mathbb{V}$ и $P_{e\to u}$ — матрица перехода от базиса e к базису u. Тогда для любого оператора $A \in L(\mathbb{V})$ имеет место равенство

$$A_u = P_{u\to e} A_e P_{e\to u}. \tag{3.9}$$

Это равенство, ввиду обратимости матрицы перехода, можно записать либо так

$$A_u = P_{e\to u}^{-1} A_e P_{e\to u}, \tag{3.10}$$

либо так

$$P_{e\to u} A_u = A_e P_{e\to u}, \tag{3.11}$$

либо так

$$A_u P_{u\to e} = P_{u\to e} A_e. \tag{3.12}$$

7. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от базиса.

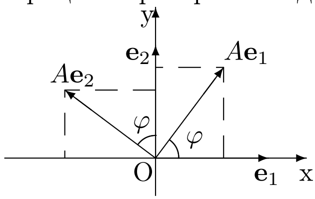
Отображение, каждому линейному оператору $A \in L(\mathbb{V})$ ставящее в соответствие его матрицу A_e в (фиксированном) базисе e, является взаимно однозначным. Если учесть свойства (3.6) и (3.7), то эта биекция (взаимно однозначное отображение) становится изоморфизмом линейных пространств всех линейных операторов, действующих в $\mathbb{V}$, и всех матриц с элементами из $\mathbb{F}$ порядка $n = \dim \mathbb{V} (< \infty)$.

Определителем линейного оператора A, действующего в конечномерном линейном пространстве $\mathbb{V}$, называется определитель его матрицы A_e в каком-нибудь базисе e. Определитель оператора A обозначается $\det A$. Таким образом, по определению $\det A := |A_e|$. Если $\det A = 0$, то линейный оператор A называется вырожденным. В противном случае — невырожденным.

Пример 64 Найти матрицу и определитель линейного оператора поворота плоскости на угол φ вокруг начала координат с положительным направлением против часовой стрелки.

Решение. Пусть векторы e_1, e_2 образуют ортонормированный базис на плоскости. Воспользуемся определением матрицы оператора и найдем ее. Для этого векторы Ae_1, Ae_2 нужно разложить по базису e_1, e_2. Легко видеть, что

$$A\mathbf{e}_1 = \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2,$$
$$A\mathbf{e}_2 = -\sin\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$



Тогда матрица оператора A в базисе e имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ее определитель $|A_e| = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Значит, определитель оператора поворота плоскости на произвольный угол равен 1. Это можно записать так: $\det A = 1$. Определитель оператора не равен нулю, следовательно, оператор A невырожден.

Пример 65 Найти матрицу и определитель линейного оператора A, действующего в трехмерном пространстве всех геометрических векторов по формуле $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, где $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ — некоторый фиксированный вектор и значок $\times$ обозначает векторное произведение двух векторов.

Решение. Выберем в качестве базиса систему, состоящую из векторов $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Тогда в этом базисе вектор $\mathbf{a}$ будет иметь координаты (a_1, a_2, a_3), а векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут иметь соответственно координаты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. По определению, для того, чтобы найти матрицу линейного оператора, нужно подействовать оператором на базисные векторы и полученные векторы разложить в линейную комбинацию базисных векторов. Последовательно

$$A\mathbf{i} = \mathbf{a} \times \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3\mathbf{j} - a_2\mathbf{k},$$

$$A\mathbf{j} = \mathbf{a} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a_3\mathbf{i} + a_1\mathbf{k},$$

$$A\mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}.$$

Мы получили, что

$$\begin{aligned} A\mathbf{i} &= 0\mathbf{i} + a_3\mathbf{j} - a_2\mathbf{k}, \\ A\mathbf{j} &= -a_3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + a_1\mathbf{k}, \\ A\mathbf{k} &= a_2\mathbf{i} + a_1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Записывая в матрицу по столбцам найденные коэффициенты разложения, получим матрицу оператора

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы найти определитель линейного оператора A, достаточно найти определитель его матрицы, что мы и предпримем:

$$|A_e| = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = -a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3 = 0.$$

Следовательно, определитель линейного оператора равен нулю, а сам оператор является вырожденным.

Пример 66 Доказать, что существует единственный линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ и переводящий вектор $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)$ в вектор $\mathbf{b}_1 = (3, 4, 4)$, вектор $\mathbf{a}_2 = (2, -1, -1)$ в вектор $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 4)$ и $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 1)$ в $\mathbf{b}_3 = (2, 2, 2)$. Найти его матрицу в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Решение. Будем вести все вычисления в базисе e, в котором даны координаты всех векторов. Тогда по свойству (3.4) линейный оператор A есть оператор умножения слева на матрицу $\mathsf{M} = A_e$. Если умножить матрицу M на вектор-столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, то получим соответственно векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, то есть $\mathsf{M}\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3$. Запишем векторы

$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ по порядку столбцами в одну матрицу. Полученную матрицу обозначим M_a. Точно также построим матрицу M_b, записав в нее по порядку столбцами векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$. Равенство $\mathsf{M}\cdot\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$ означает, что произведение матрицы M на первый столбец матрицы M_a есть первый столбец матрицы M_b. Аналогично для второго и третьего столбцов. Но эти три равенства означают, что произведение матрицы M на матрицу M_a есть матрица M_b: $\mathsf{M}\cdot\mathsf{M}_a = \mathsf{M}_b$. В последнем равенстве матрицы M_a и M_b известны. Если это матричное уравнение имеет единственное решение M, то и линейный оператор A существует и единственен. Для того, чтобы решить матричное уравнение, протранспонируем его. Тогда M^τ будет решением матричного уравнения $\mathsf{M}_a^\tau \mathsf{X} = \mathsf{M}_b^\tau$ с неизвестной матрицей X. Запишем соответствующую расширенную матрицу и найдем решение

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & \underline{1} & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{C_2+C_3}{\overset{C_1-C_3}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{C_2-2C_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{C_3-2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы найти матрицу линейного оператора, осталось протранспонировать последнюю матрицу. Очевидно, что матрица линейного оператора существует и единственна. Значит, линейный оператор также существует и единственен, и его матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 67 Линейный оператор A в базисе $\mathbf{e}_1 = (-1,-2,-2)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,0,1)$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $\mathbf{u}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{u}_2 = (4,1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (1,-1,0)$.
<u>Решение</u>. Будем искать матрицу A_u оператора A, используя формулу 3.11. Из нее следует, что нужно сначала найти матрицу $P_{e\to u}$ перехода от базиса e к базису u, затем умножить матрицу A_e на найденную

матрицу $P_{e\to u}$ и решить матричное уравнение $P_{e\to u}\mathsf{X} = \mathsf{B}$, где матрица перехода $P_{e\to u}$ известна, матрица $\mathsf{B} = A_e P_{e\to u}$ и неизвестная матрица $\mathsf{X} = A_u$.

По алгоритму нахождения матрицы перехода

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & \underline{1} & 4 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{C_3 - C_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ -\underline{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Когда основная матрица системы приведена к ступенчатой (в частности, к треугольной) форме, для следующего шага метода последовательных исключений ведущий элемент выгоднее выбирать в самой нижней ненулевой строке. Затем, последующие ведущие элементы следует выбирать, двигаясь снизу вверх. Это, как правило, уменьшает число необходимых арифметических операций. (Правда, при вычислениях вручную, это не всегда удобно из-за неудачных элементов матрицы.) Выполним далее следующие элементарные преобразования: прибавим к первой строке третью, умноженную на -1, и прибавим ко второй строке третью, умноженную на -2. Тогда

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{-C_3}{\overset{C_1 - C_2}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Необходимо, чтобы основная матрица системы была приведена к единичной матрице. Для этого осталось поменять строки местами

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь справа от черты в расширенной матрице стоит искомая матрица перехода. Таким образом,

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Умножим теперь матрицу A_e на матрицу $P_{e\to u}$

$$A_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B. \tag{3.14}$$

Осталось решить матричное уравнение $P_{e\to u}\mathsf{X} = \mathsf{B}$. Запишем соответствующую расширенную матрицу и с помощью метода последовательных исключений приведем основную матрицу к единичной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \underline{1} & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{C_2 - 3C_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & \underline{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -8 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{C_3 - C_1}{\overset{C_2 + 2C_1}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\underline{1} & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \sim \\ C_3 + C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Осталось поменять местами строки расширенной матрицы и знак во второй строке. Тогда получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Справа от черты стоит искомая матрица. Таким образом,

$$A_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Может показаться, что формула (3.9) более удобна для вычислений. Однако, если посмотреть, что нужно вычислять, то выяснится следующее. Матрицу перехода нужно находить при использовании любой формулы. Далее, приходится искать либо обратную к матрице перехода, либо решать матричное уравнение. По сложности вычислений эти задачи не сильно отличаются. В алгоритме по формуле (3.11) еще есть одно произведение матриц, а вот в алгоритме по формуле (3.9) вычислять произведение матриц нужно дважды. Таким образом, формула (3.9) менее удобна. Конечно, если даны матрицы большого числа операторов в одном базисе и нужно найти матрицы этих операторов в другом базисе, то формула (3.9) более выгодна для вычислений. Только поэтому рассмотрим и этот алгоритм. Выше в (3.13) была найдена матрица перехода

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти также $P_{u\to e}$. Для этого можно поступить так же, как при вычислении матрицы $P_{e\to u}$. Однако, проще найти обратную матрицу к $P_{e\to u}$. По алгоритму ее вычисления нужно записать расширенную матрицу матричного уравнения $P_{e\to u}\mathsf{X} = \mathsf{E}$ (X — искомая матрица, E — единичная матрица). Основная матрица расширенной матрицы есть $P_{e\to u}$, правая часть — матрица E. Тогда приведем основную матрицу к единичной с помощью элементарных преобразований строк

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \underline{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 3C_3 \\ \sim \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \underline{1} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 + 3C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \\ C_3 + C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Поменяем местами строки расширенной матрицы так, чтобы основная матрица стала единичной
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right).$$
Таким образом, матрица перехода
$$P_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
Осталось перемножить матрицы в указанном порядке. Сначала найдем, например, произведение $A_e P_{e\to u}$. Это произведение у нас уже вычислено выше в (3.14)
$$A_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Осталось эту матрицу умножить слева на матрицу $P_{u\to e}$
$$A_u = P_{u\to e}(A_e P_{e\to u}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
В результате получили ту же матрицу, что и раньше.

Пример 68 Линейный оператор A, действующий в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ всех многочленов степени не больше 2 с вещественными коэффициентами, в базисе $\mathbf{f}_0(x) = 1$, $\mathbf{f}_1(x) = x$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2$ имеет матрицу
$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Найти его матрицу в базисе $\mathbf{g}_0(x) = -2 + x + x^2$, $\mathbf{g}_1(x) = 2x - x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -1 - x + x^2$.

Решение. Очевидно, что каждый вектор базиса g дан в виде разложения в линейную комбинацию по векторам базиса f: $\mathbf{g}_0 = -2\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_1 = 2\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}_2 = -\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$. Тогда, по определению матрицы перехода, коэффициенты в линейных комбинациях есть коэффициенты в столбцах матрицы перехода $P_{f\to g}$. Следовательно, получаем
$$P_{f\to g} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Воспользуемся формулой (3.11)
$$P_{f\to g} A_g = A_f P_{f\to g}.$$

Матрица A_f и матрица перехода $P_{f\to g}$ известны. Найдем их произведение (слева матрица A_f, справа матрица $P_{f\to g}$)

$$A_f P_{f\to g} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathsf{B}.$$

Осталось решить матричное уравнение $P_{f\to g}X = \mathsf{B}$. Запишем соответствующую расширенную матрицу этого матричного уравнения и с помощью метода последовательных исключений приведем основную матрицу к единичной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 7 & -3 \\ 1 & -\underline{1} & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{C_2+2C_3}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -\underline{1} & -1 & -7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 11 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2+C_1 \\ \sim \\ C_3+C_1 \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & -1 & -7 & 4 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1+2C_2 \\ \sim \\ C_3+C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Поменяем местами строки расширенной матрицы и, где необходимо, знаки в них для того, чтобы основная матрица стала единичной

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Значит, искомая матрица найдена и

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 69 Линейный оператор A в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, если $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_3$, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$.

<u>Решение</u>. Так как векторы базиса e разложены по базису u, то сразу можно выписать матрицу перехода от базиса u к базису e:

$$P_{u\to e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае удобно применить формулу (3.12): $A_u P_{u\to e} = P_{u\to e} A_e$. Найдем сначала произведение $P_{u\to e} A_e$:

$$P_{u\to e} A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathsf{B}.$$

Теперь искомую матрицу A_u нужно находить из равенства $A_u P_{u\to e} = \mathsf{B}$. Неизвестная матрица стоит в произведении слева. Для того, чтобы переместить ее на правое место в произведении, протранспонируем последнее равенство. Тогда $P^{\tau}_{u\to e} A^{\tau}_u = \mathsf{B}^{\tau}$. Значит, матрица A^{τ}_u есть решение матричного уравнения $P^{\tau}_{u\to e} \mathsf{X} = \mathsf{B}^{\tau}$. Запишем соответствующую ему расширенную матрицу и найдем решение

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & \underline{1} & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \underset{C_3 - 2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{C_2 - C_3}{\overset{C_1 + 2C_3}{\sim}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{C_2 + C_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Решение матричного уравнения стоит справа от черты. После транспонирования получим искомую матрицу

$$A_u = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 70 Линейный оператор A в базисе $\mathbf{v}_1 = (-2; -3)$, $\mathbf{v}_2 = (1; 1)$ имеет матрицу $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Линейный оператор B в базисе $\mathbf{u}_1 = (4; 5)$, $\mathbf{u}_2 = (3; 4)$ имеет матрицу $B_u = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицы линейных операторов $A + B$ и $2A - B$ в базисе u.

<u>Решение</u>. По свойствам матрицы линейного оператора $(A + B)_u = A_u + B_u$ и $(2A - B)_u = 2A_u - B_u$. Матрица B_u известна. Нужно найти матрицу A_u. Алгоритм ее нахождения можно посмотреть выше в задании № 67. Следуя этому алгоритму, найдем сначала матрицу перехода $P_{v\to u}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & \underline{1} & 5 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 - C_2} \left(\begin{array}{cc|cc} \underline{1} & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \underset{C_2 + 3C_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь нужно найти произведение матриц $A_v P_{v\to u} = \mathsf{B}$:

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решаем теперь матричное уравнение $P_{v\to u}\mathsf{X} = \mathsf{B}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -5 & -2 \\ 2 & \underline{1} & 7 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} \underline{1} & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ C_2 - 2C_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица оператора A в базисе u найдена и

$$A_u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти матрицу суммы операторов

$$(A+B)_u = A_u + B_u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$(2A-B)_u = 2A_u - B_u = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 71 Линейный оператор A в базисе $\mathbf{e}_1 = (2; -1)$, $\mathbf{e}_2 = (1; 1)$ имеет матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найти а). вектор $A\mathbf{x}$, если $\mathbf{x} = (4, 1)$; б). вектор $\mathbf{y}$, если $A\mathbf{y} = (-2, -17)$.

<u>Решение</u>. Найдем сначала вектор $\mathbf{x}_e$. Для этого нужно разложить вектор $\mathbf{x}$ в линейную комбинацию по векторам базиса. Коэффициенты линейной комбинации получим в результате решения системы уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -1 & \underline{1} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \underline{3} & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ C_2 + C_1/3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, то есть $\mathbf{x}_e = (1, 2)$. Для того, чтобы найти вектор $A\mathbf{x}$, найдем сначала его координатный вектор $(A\mathbf{x})_e$, использую формулу $(A\mathbf{x})_e = A_e\mathbf{x}_e$. Тогда

$$A_e\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $(A\mathbf{x})_e = (1, -1)$. Но тогда, зная этот координатный вектор, получим, что

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

б). Найдем в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ координатный вектор элемента $A\mathbf{y} = (-2, -17)$. По стандартному алгоритму

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ -1 & \underline{1} & -17 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \underline{3} & 0 & 15 \\ -1 & 1 & -17 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ C_2 + C_1/3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -12 \end{array}\right).$$

Отсюда $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = -12$. Таким образом, $(A\mathbf{y})_e = (5, -12)$. Так как $A_e\mathbf{y}_e = (A\mathbf{y})_e$, то элементы вектора $\mathbf{y}_e$ являются решением системы уравнений $A_e\mathbf{y}_e = (5, -12)$. Найдем его с помощью метода последовательных исключений

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \underline{1} & 5 \\ 3 & -2 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \sim \\ C_2 + 2C_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 5 \\ \underline{1} & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Отсюда $y_1 = -2$, $y_2 = 3$, то есть $\mathbf{y}_e = (-2, 3)$. Тогда

$$\mathbf{y} = -2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = -2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ядро и образ линейного оператора

Кто не знает, куда направляется, очень удивится, попав не туда. *Марк Твен.*

Ядром (или нуль-пространством) линейного оператора $A \in L(\mathbb{V})$ называется множество всех элементов из $\mathbb{V}$, которые отображаются линейным оператором A в нулевой вектор. Ядро оператора A будем обозначать $\ker A$. Следовательно, по определению

$$\ker A = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{V}, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Образом линейного оператора $A \in L(\mathbb{V})$ называется множество всех элементов $\mathbf{y}$ из $\mathbb{V}$, для которых существует элемент $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$, такой, что $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Образ оператора A будем обозначать $\operatorname{im} A$. Значит, по определению

$$\operatorname{im} A = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{V}, \exists\mathbf{x} \in \mathbb{V}, \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}.$$

То есть, образ оператора A — это множество всех значений отображения A.

Ядро и образ линейного оператора $A \in L(\mathbb{V})$ являются подпространствами пространства $\mathbb{V}$. В частности, ядро и образ линейного оператора содержат нулевой вектор. Для любых линейных операторов $A, B \in L(\mathbb{V})$ имеют место следующие соотношения: для ядра

$$\ker A \subset \ker BA$$

и для образа

$$\operatorname{im} A \supset \operatorname{im} AB.$$

Кроме того,

$$\ker A \subset \ker A^k \text{ и } \operatorname{im} A \supset \operatorname{im} A^k \tag{3.15}$$

для любого натурального числа k. Ядро линейного оператора состоит только из нулевого вектора тогда и только тогда, когда оператор является инъективным[2] отображением. Образ линейного оператора состоит только из нулевого вектора тогда и только тогда, когда оператор является нулевым. Ядро линейного оператора совпадает со всем пространством $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда оператор является нулевым.

[2]Отображение называется инъективным, если для любого вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ или не существует или существует единственный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ такой, что $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Образ линейного оператора совпадает со всем пространством $\mathbb{V}$ тогда и только тогда, когда оператор является сюръективным[3] отображением.

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис линейного конечномерного пространства $\mathbb{V}$. Тогда образ линейного оператора A равен линейной оболочке, порожденной системой векторов $A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n$:

$$\operatorname{im} A = \ell(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n). \tag{3.16}$$

Образ линейно зависимой системы векторов пространства $\mathbb{V}$ является линейно зависимой системой векторов этого пространства. Иными словами, если система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно зависима, то и система векторов $A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_k$ линейно зависима.

Прообраз линейно независимой системы векторов пространства $\mathbb{V}$ является линейно независимой системой векторов этого пространства. Иными словами, если система векторов $A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots, A\mathbf{x}_k$ линейно независима, то и система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независима.

Если пространство $\mathbb{V}$ является конечномерным, то

$$\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = \dim \mathbb{V}. \tag{3.17}$$

Пусть пространство $\mathbb{V}$ конечномерно, $\dim \mathbb{V} = n < \infty$, $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ его подпространства и

$$\dim \mathbb{V}_1 + \dim \mathbb{V}_2 = \dim \mathbb{V}.$$

Тогда существует такой линейный оператор $A \in L(\mathbb{V})$, что $\ker A = \mathbb{V}_1$, $\operatorname{im} A = \mathbb{V}_2$. Этот линейный оператор можно построить так. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ есть базис подпространства $\mathbb{V}_1$ и $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ есть базис подпространства $\mathbb{V}_2$. Дополним первую систему векторов до базиса пространства $\mathbb{V}$. Получим $\mathbf{e}_1$, $\ldots$, $\mathbf{e}_k$, $\mathbf{u}_{k+1}$, $\ldots$, $\mathbf{u}_n$. Линейный оператор достаточно определить на векторах этого базиса. Положим $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$, $\ldots$, $A\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$, $A\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1}$, $\ldots$, $A\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n$. На остальные векторы оператор A продолжается по линейности.

Рангом линейного оператора $A \in L(\mathbb{V})$ называется размерность его образа. Ранг оператора A обозначается $\operatorname{rang}(A)$, а также r_A или $r(A)$. Значит, по определению $\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{im} A$. Если $\operatorname{rang}(A) < \infty$, то линейный оператор A называется конечномерным. Из (3.17) следует, что все операторы $A \in L(\mathbb{V})$ конечномерны, если $\dim \mathbb{V} < \infty$.

Если линейный оператор A действует в конечномерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ и e — некоторый базис в $\mathbb{V}$, то ранг линейного оператора A равен рангу его матрицы в базисе e:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_e). \tag{3.18}$$

[3] Отображение называется сюръективным, если для любого вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ существует хотя бы один (не обязательно единственный) вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ такой, что $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Пример 72 Найти базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ по правилу

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Чему равен ранг линейного оператора?

Решение. Для того, чтобы найти ядро оператора A, нужно решить уравнение $A\mathbf{x} = 0$. Если A есть оператор умножения на матрицу M, то уравнение принимает вид $\mathsf{M} \cdot \mathbf{x} = 0$ и для элементов вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ есть однородная система уравнений. Тогда ядро оператора A совпадает с подпространством решений однородной системы уравнений $\mathsf{M} \cdot \mathbf{x} = 0$. Найдем базис этого подпространства — фундаментальную систему решений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ \underline{3} & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_3 - C_4}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{C_3/3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_3 \\ C_2 - C_3 \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\underline{1} & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \\ C_4 + 2C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что второе уравнение системы имеет вид $-x_3 - 2x_4 = 0$, третье уравнение имеет вид $x_2 + 3x_4 = 0$ и четвертое — $3x_1 - 6x_4 = 0$. Тогда общее решение однородной системы уравнений можно записать в виде $x_1 = 2x_4$, $x_2 = -3x_4$, $x_3 = -2x_4$, $\forall x_4 \in \mathbb{R}$. Всего у данной системы уравнений три главных неизвестных (x_1, x_2, x_3) и, следовательно, одно свободное неизвестное (x_4). Значит, фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{u}$. Чтобы найти его, возьмем $x_4 = 1$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$ и $\mathbf{u} = (2, -3, -2, 1)$. Ядро оператора A теперь можно представить как линейную оболочку, порожденную найденным базисом: $\ker A = \ell(\mathbf{u})$. Для того, чтобы найти базис образа оператора A воспользуемся соотношением (3.16). Из него следует, что, если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ — базис линейного пространства, то линейная оболочка, порожденная системой векторов $A\mathbf{e}_1$, $A\mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_3$, $A\mathbf{e}_4$, совпадает с образом оператора A. Выделив максимальную линейно независимую подсистему системы $A\mathbf{e}_1$, $A\mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_3$, $A\mathbf{e}_4$, получим базис образа оператора A. Удобно в качестве базиса линейного пространства взять стандартный базис $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Умножая последовательно матрицу M на на эти векторы-столбцы, получим, что вектор $A\mathbf{e}_1$ есть первый столбец матрицы M, $A\mathbf{e}_2$, $A\mathbf{e}_3$ и $A\mathbf{e}_4$ — соответственно второй, третий и четвертый столбцы матрицы M. С помощью элементарных преобразований матрица системы уравнений $\mathsf{M}\mathbf{x} = 0$ уже преобразована к ступенчатой. Ведущие элементы находятся в первом, втором и третьем столбцах матрицы. Значит, максимальная линейно независимая подсистема системы столбцов состоит из первого столбца $\mathbf{v}_1 = (0; 0; 3; 3)$, второго столбца $\mathbf{v}_2 = (2; 1; 3; 0)$ и третьего столбца $\mathbf{v}_3 = (-3; -2; -1; 2)$. Это и есть базис образа оператора A. Так как ранг оператора по определению есть размерность образа этого оператора, то $\operatorname{rang}(A) = 3$. Образ оператора можно теперь представить в виде: $\operatorname{im} A = \ell(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Алгоритм нахождения базисов ядра и образа оператора умножения на матрицу, изложенный выше, без труда обобщается на любой линейный оператор, действующий в конечномерном линейном пространстве. Дело в том, что, выбирая какой-нибудь базис e линейного пространства, по свойству (3.4) матрицы линейного оператора мы от оператора A переходим к оператору умножения на матрицу $\mathsf{M} = A_e$. После того, как найдены базисы ядра и образа оператора умножения на матрицу M, по ним находим базисы ядра и образа исходного оператора A такие, что их координатные векторы в базисе e совпадают с векторами базисов ядра и образа оператора умножения на матрицу M. Проиллюстрируем этот алгоритм двумя примерами.

Пример 73 Найти базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathbb{C}[x]_3 \to \mathbb{C}[x]_3$, действующего в линейном пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не выше 3 с комплексными коэффициентами по правилу

$$(Af)(x) = (2 + x)f'''(x) + (1 + x - x^2)f''(x) + 3xf'(x) - 3f(x).$$

Чему равен ранг линейного оператора?

Решение. Выберем какой-нибудь базис в пространстве $\mathbb{C}[x]_3$. Можно, например, взять следующую систему: $125 + 256x$, $-13 + 20501x$, $\pi + x - 2x^2$, $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$. Но все же удобнее взять более простую систему элементов линейного пространства. Возьмем стандартный базис в этом пространстве: $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$, $\mathbf{e}_3 = x^3$ и найдем матрицу оператора A в этом базисе. Для этого подействуем оператором A на базисные элементы:

$$(A\mathbf{e}_0)(x) = (2+x)(1)''' + (1+x-x^2)(1)'' + 3x(1)' - 3\cdot 1 =$$
$$= (2+x)\cdot 0 + (1+x-x^2)\cdot 0 + 3x\cdot 0 - 3\cdot 1 = -3;$$
$$(A\mathbf{e}_1)(x) = (2+x)(x)''' + (1+x-x^2)(x)'' + 3x(x)' - 3x =$$
$$= (2+x)\cdot 0 + (1+x-x^2)\cdot 0 + 3x\cdot 1 - 3\cdot x = 3x - 3x = 0;$$
$$(A\mathbf{e}_2)(x) = (2+x)(x^2)''' + (1+x-x^2)(x^2)'' + 3x(x^2)' - 3x^2 =$$
$$= (2+x)\cdot 0 + (1+x-x^2)\cdot 2 + 3x\cdot 2x - 3\cdot x^2 =$$
$$= 2(1+x-x^2) + 6x^2 - 3x^2 = 2 + 2x + x^2;$$
$$(A\mathbf{e}_3)(x) = (2+x)(x^3)''' + (1+x-x^2)(x^3)'' + 3x(x^3)' - 3x^3 =$$
$$= (2+x)\cdot 6 + (1+x-x^2)\cdot 6x + 3x\cdot 3x^2 - 3x^3 =$$
$$= 12 + 6x + 6x + 6x^2 - 6x^3 + 9x^3 - 3x^3 = 12 + 12x + 6x^2.$$

Разложим полученные элементы по тому же базису:

$$(A\mathbf{e}_0)(x) = -3 = -3\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3;$$
$$(A\mathbf{e}_1)(x) = 0 = 0\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3;$$
$$(A\mathbf{e}_2)(x) = 2 + 2x + x^2 = 2\mathbf{e}_0 + 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3;$$
$$(A\mathbf{e}_3)(x) = 12 + 12x + 6x^2 = 12\mathbf{e}_0 + 12\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3.$$

Тогда матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы найти базис ядра оператора умножения на матрицу, нужно найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $A_e\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. После элементарных преобразований $C_1 - 2C_3$, $C_2 - 2C_3$ система уравнений будет иметь основную матрицу

$$A_e \sim \begin{pmatrix} -\underline{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = 0$, $x_3 = -6x_4$, $\forall x_2, x_4 \in \mathbb{C}$. Пусть $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, тогда $x_1 = x_3 = 0$. Если $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, то $x_1 = 0$, $x_3 = -6$. Значит, мы получили координатные векторы базиса ядра оператора $(\mathbf{u}_1)_e = (0, 1, 0, 0)$, $(\mathbf{u}_2)_e = (0, 0, -6, 1)$. Тогда по координатам этих векторов получаем, что многочлены $\mathbf{u}_1 = x$,

$\mathbf{u}_2 = -6x^2 + x^3$ образуют базис ядра оператора. Максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов матрицы A_e составляют первый и третий (или четвертый) столбцы. Они являются координатными векторами базисных элементов образа оператора: $(\mathbf{v}_1)_e = (-3, 0, 0, 0)$, $(\mathbf{v}_2)_e = (2, 2, 1, 0)$. Тогда базис образа оператора составляют многочлены $\mathbf{v}_1 = -3$, $\mathbf{v}_2 = 2 + 2x + x^2$. Так как размерность образа оператора равна двум, то ранг оператора равен двум. Таким образом, $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\ker A = \ell\left(x; -6x^2 + x^3\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(1; 2x + x^2\right)$.

Пример 74 Найти базисы ядра и образа линейных операторов $A, B : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, действующих по правилам

$$A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}.$$

Чему равен ранг каждого из линейных операторов?

Решение. Выберем базис в линейном пространстве $M_2(\mathbb{R})$. Удобнее всего выбрать стандартный базис

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе найдем матрицу линейного оператора A. Для этого, как обычно, подействуем оператором A на базисные элементы и получившиеся матрицы пространства $M_2(\mathbb{R})$ разложим в линейные комбинации по этому же базису

$$A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4;$$

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4;$$

$$A\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4;$$

$$A\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4.$$

Таким образом, матрица оператора A этом базисе имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Методом последовательных исключений найдем решение системы уравнений $A_e\mathbf{x} = 0$. Для этого выполним следующие элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2 - 4C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2 + 3C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы уравнений можно записать в виде $x_2 = 3x_3$, $x_4 = 4x_3$. Свободными неизвестными являются x_1 и x_3. Если взять $x_1 = 1$ и $x_3 = 0$, то получим вектор $(\mathbf{u}_1)_e = (1, 0, 0, 0)$. При $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ получаем вектор $(\mathbf{u}_2)_e = (0, 3, 1, 4)$. Это координатные векторы базисных элементов ядра оператора. По ним строим сами элементы (то есть матрицы) $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Для того, чтобы найти базис образа оператора A, заметим, что второй и четвертый столбцы (можно второй и третий) образуют максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов. Эти два столбца есть координатные векторы базисных элементов образа оператора. По ним строим сами матрицы $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом,

$$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right), \quad \operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Это значит, что ядро образуют все матрицы вида

$$\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ \beta & 4\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

а образ образуют матрицы вида

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 4\alpha - 3\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

С оператором B поступаем также, как и с оператором A. Найдем сначала образы базисных элементов и эти образы разложим по базису:

$$B\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -4\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4;$$

$$B\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4;$$

$$B\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4;$$

$$B\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= -4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4.$$

Значит, матрица оператора B этом базисе имеет вид

$$B_e = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдем сначала базис ядра оператора B. Для этого нужно решить однородную систему уравнений $B_e\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, точнее, найти ее фундаментальную систему решений. Четвертая строка матрицы B_e пропорциональна третьей, а первые три строки образуют матрицу ступенчатой формы. Тогда из третьей строки (точнее, из третьего уравнения) получаем, что $x_4 = 0$. Второе уравнение теперь дает, что $x_2 = 0$. При этих значениях неизвестных из первого уравнения получаем, что $x_3 = -2x_1$. Главные неизвестные системы уравнений есть x_2, x_3, x_4, тогда свободное неизвестное есть x_1. Если $x_1 = 1$, то $x_3 = -2$. Значит, фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{u}_e = (1, 0, -2, 0)$. По этому координатному вектору и базису e строим матрицу $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Этот элемент образует базис ядра оператора B. Само ядро образуют все матрицы, пропорциональные матрице $\mathbf{u}$.

Для того, чтобы найти базис образа оператора B, заметим, что второй, третий и четвертый столбцы матрицы B_e образуют максимальную линейно независимую подсистему системы всех столбцов этой матрицы. Это следует из того, что в этих столбцах находятся все ведущие элементы. Очевидно, что базисные векторы можно умножить на ненулевые числа и при этом система векторов останется базисом. Обозначим векторы $(\mathbf{v}_1)_e = (2; -1; 0; 0)$, $(\mathbf{v}_2)_e = (1; 0; 0; 0)$, $(\mathbf{v}_3)_e = (2; -2; -2; 3)$, пропорциональные указанным столбцам матрицы B_e. По ним и по базису e построим базис образа оператора B: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Так как размерность образа равна трем, то ранг оператора также равен трем.

Теперь можно описать все элементы ядра и образа оператора B. Все матрицы вида $\alpha\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ составляют ядро. Все матрицы вида $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + 2\gamma & -\alpha - 2\gamma \\ -2\gamma & 3\gamma \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ образуют образ оператора B.

Замечание. Базис подпространства, за исключением тривиального случая, определяется не единственным образом. Значит, можно попытаться выбрать и другой базис, который более просто задает образ оператора. С помощью элементарных преобразований базис можно трансформировать в другой, "более простой"базис образа линейного оператора, например, $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда все матрицы образа и только они имеют вид $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -2\gamma & 3\gamma \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Пример 75 Ядро линейного оператора совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\mathbf{a}_1 = (1; 1; -1; 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1; -1; 1; 0)$, а его образ совпадает с линейной оболочкой, порожденной системой векторов $\mathbf{b}_1 = (1; 0; 1; -1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1; 1; 1; 1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в том же базисе, в каком даны координаты всех векторов.

Решение. Будем вести вычисления в координатах того базиса, в котором даны все векторы. Заметим прежде всего, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно независима и, следовательно, является базисом ядра оператора. Система векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ также линейно независима и, значит, является базисом образа оператора. Если бы это было не так, то не составило бы труда выделить из системы векторов ее максимальную линейно независимую подсистему, дающую базис линейной оболочки. Дополним базис ядра до базиса всего линейного пространства. Это можно сделать бесконечным числом способов. Выберем векторы попроще, например, $\mathbf{a}_3 = (0;1;0;0)$, $\mathbf{a}_4 = (1;0;0;0)$. Пусть M — искомая матрица линейного оператора. Тогда по условию $\mathsf{M}\cdot\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, $\mathsf{M}\cdot\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$. На векторы, не лежащие в ядре, линейный оператор может продолжаться различными способами. Значит, решение задачи, вообще говоря, не единственно. Выберем такой линейный оператор, который вектор $\mathbf{a}_3$ переводит в вектор $\mathbf{b}_1$, а вектор $\mathbf{a}_4$ — в вектор $\mathbf{b}_2$. Тогда $\mathsf{M}\cdot\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_1$, $\mathsf{M}\cdot\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}_2$. Так как теперь известно в какие векторы линейный оператор переводит все векторы базиса линейного пространства, то мы оказываемся в условиях задачи № 66. Воспользуемся алгоритмом решения этой задачи, изложенным на странице 157. Для этого составим расширенную матрицу, основная матрица которой построена из векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, записанных по строкам. Правая часть расширенной матрицы состоит из векторов, в которые оператор переводит векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$, записанные в том же порядке и по строкам:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ \underline{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_3 - C_4\\ C_2 + C_3 - C_4\\ \sim\\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 2 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2\\ \\ \sim\\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Поменяем строки расширенной матрицы так, чтобы основная матрица стала единичной. Тогда справа будет стоять матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Осталось протранспонировать эту матрицу для того, чтобы получить искомую матрицу:

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обратный оператор

В науке задача, надлежащим образом поставленная, более чем наполовину решена. Процесс умственной подготовки, необходимый для выяснения того, что существует определенная задача, часто отнимает больше времени, чем само решение задачи. *Ф. Содди.*[4]

Линейный оператор $A \in L(\mathbb{V})$ называется обратимым, если он взаимно-однозначно[5] отображает линейное пространство $\mathbb{V}$ на себя. Взаимно-однозначность отображения означает, что для любого вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ существует единственный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ такой, что $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Если линейный оператор обратим, то обратное отображение является линейным оператором.

Линейный оператор $A \in L(\mathbb{V})$ обратим тогда и только тогда, когда существует такой линейный оператор $B \in L(\mathbb{V})$, что $BA = AB = I$. Линейный оператор B называется обратным оператором и обозначается A^{-1}. Тогда последнее равенство принимает вид: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Для обратимых линейных операторов имеют место свойства:

1. единичный оператор I обратим и, значит, множество всех обратимых операторов непусто;

2. нуль-оператор O необратим в линейном пространстве $\mathbb{V}$ ненулевой размерности и, значит, множество всех обратимых операторов не совпадает с множеством $L(\mathbb{V})$ всех линейных операторов;

3. если линейные операторы A, B обратимы, то произведение AB обратимо и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

4. если линейный оператор A обратим и $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{F}$, то αA обратим и $(\alpha A)^{-1} = (\alpha)^{-1}A^{-1}$;

5. если линейный оператор A обратим, то обратим обратный к нему линейный оператор A^{-1} и $(A^{-1})^{-1} = A$;

6. Линейный оператор $A \in L(\mathbb{V})$ обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально и образ совпадает со всем пространством:

$$\ker A = \{\mathbf{0}\} \qquad \operatorname{im} A = \mathbb{V}. \tag{3.19}$$

В (3.19) пространство $\mathbb{V}$ может быть и бесконечномерным. Пусть теперь пространство $\mathbb{V}$ конечномерно.

7. Для линейного оператора $A \in L(\mathbb{V})$, $0 < \dim \mathbb{V} < \infty$, следующие условия равносильны:

---

[4] А.Н.Кривомазов. Фредерик Содди. М. Наука. 1978.

[5] взаимно-однозначное отображение часто называют биективным отображением.

а) линейный оператор A обратим;

б) матрица A_e линейного оператора A обратима для некоторого (и тогда любого) базиса e;

в) линейный оператор A невырожден, то есть его определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$;

г) ядро линейного оператора A тривиально: $\ker A = \{\mathbf{0}\}$;

д) линейный оператор A инъективен;

е) линейный оператор A сюръективен;

ё) ранг линейного оператора A равен размерности линейного пространства $\mathbb{V}$: $\operatorname{rang}(A) = \dim \mathbb{V}$;

ж) образ линейного оператора A совпадает с линейным пространством $\mathbb{V}$: $\operatorname{im} A = \mathbb{V}$.

8. Если линейный оператор A обратим, то его обратный оператор в базисе e имеет матрицу, обратную к матрице оператора A в том же базисе:

$$(A^{-1})_e = (A_e)^{-1}. \tag{3.20}$$

Пример 76 Выяснить, будут ли действующие в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ линейные операторы

$$A\mathbf{x} = (-4x_1 - 5x_2 + 2x_3; -3x_1 - 3x_2 + 2x_3; -2x_1 - 2x_2 + x_3),$$

$$B\mathbf{x} = (x_1 + x_2 - x_3; x_1 - x_2 - 3x_3; x_1 + 3x_2 + x_3),$$

$\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$, обратимыми. В случае обратимости найти их обратный оператор.

Решение. В пространстве $\mathbb{R}^3$ выберем базис $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0; 0; 1)$ и найдем матрицу линейного оператора A в этом базисе. Для этого, как обычно, подействуем оператором на базисные векторы и полученные векторы разложим в линейные комбинации базисных векторов

$$A\mathbf{e}_1 = (-4; -3; -2) = -4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,$$

$$A\mathbf{e}_2 = (-5; -3; -2) = -5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,$$

$$A\mathbf{e}_3 = (2; 2; 1) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Тогда матрица оператора A в данном базисе равна

$$A_e = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Внимательный читатель без труда заметит, что эту матрицу можно было найти значительно проще, представив данный оператор в виде умножения на матрицу:

$$A\mathbf{x} = (-4x_1 - 5x_2 + 2x_3; -3x_1 - 3x_2 + 2x_3; -2x_1 - 2x_2 + x_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Равенство (3.20) подсказывает нам, что нужно найти обратную матрицу к A_e. Тогда это будет матрица обратного оператора. Для того, чтобы найти обратную матрицу, нужно решить матричное уравнение $A_e\mathsf{X} = \mathsf{E}$. Здесь A_e — матрица оператора A, E — единичная матрица. Решением матричного уравнения будет обратная матрица $\mathsf{X} = (A_e)^{-1}$. Для того, чтобы решить такое матричное уравнение, нужно записать расширенную матрицу, основная матрица которой совпадает с матрицей A_e, правая часть есть единичная матрица. После приведения с помощью элементарных преобразований основной матрицы к единичной матрица справа будет искомой. Следуя этому алгоритму, имеем

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -4 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & \underline{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 2C_3 \\ \sim \\ C_2 - 2C_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -\underline{1} & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \underset{C_3 + 2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

Для того, чтобы основная матрица стала единичной, осталось первую строку умножить на -1 и поменять местами ее со второй строкой. Тогда справа будет стоять искомая матрица

$$A_e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

По этой матрице осталось восстановить оператор A^{-1}. Это несложно сделать, так как он есть оператор умножения на найденную матрицу

$$A^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Если же оператор A^{-1} нужно представить в том же виде, как и исходный оператор, то достаточно в последнем равенстве перемножить матрицу на вектор $\mathbf{x}$

$$A^{-1}\mathbf{x} = (x_1 + x_2 - 4x_3; -x_1 + 2x_3; 2x_2 - 3x_3).$$

Для оператора B поступаем точно также. Его матрица

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь обратную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{1} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{2} & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ C_3 + C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Так как ранг расширенной матрицы больше ранга основной матрицы, то матричное уравнение не имеет решения. Значит, оператор B необратим.

Пример 77 Для линейного оператора A, действующего по правилу $Af = 2f''' - 2f'' - f' + f$ в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_3$ всех многочленов степени не выше третьей с вещественными коэффициентами, найдите обратный оператор A^{-1}, если он существует, или докажите необратимость этого оператора.

Решение. Рассмотрим три немного отличающихся друг от друга способа решения. 1. Найдем сначала матрицу линейного оператора A в базисе $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$, $\mathbf{e}_3 = x^3$. Для этого найдем образы базисных векторов под действием оператора A:

$$(A\mathbf{e}_0)(x) = 2(1)''' - 2(1)'' - (1)' + 1 = 1,$$

$$(A\mathbf{e}_1)(x) = 2(x)''' - 2(x)'' - (x)' + x = -1 + x,$$

$$(A\mathbf{e}_2)(x) = 2(x^2)''' - 2(x^2)'' - (x^2)' + x^2 = -4 - 2x + x^2,$$

$$(A\mathbf{e}_3)(x) = 2(x^3)''' - 2(x^3)'' - (x^3)' + x^3 = 12 - 12x - 3x^2 + x^3.$$

Разложим полученные элементы по базису e:

$$(A\mathbf{e}_0)(x) = 1 = 1\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3,$$

$$(A\mathbf{e}_1)(x) = -1 + x = -\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3,$$

$$(A\mathbf{e}_2)(x) = -4 - 2x + x^2 = -4\mathbf{e}_0 - 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3,$$

$$(A\mathbf{e}_3)(x) = 12 - 12x - 3x^2 + x^3 = 12\mathbf{e}_0 - 12\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Тогда матрица линейного оператора A в базисе e имеет вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -4 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 12C_4 \\ \sim \\ C_2 + 12C_4 \\ C_3 + 3C_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 4C_3 \\ C_2 + 2C_3 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \sim \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Значит,

$$(A_e)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Так как матрица оператора обратима, то оператор также обратим. Кроме того, $(A^{-1})_e = (A_e)^{-1}$. Значит, мы нашли матрицу обратного оператора A^{-1} в базисе e. Осталось по этой матрице и базису найти сам оператор, представленный в достаточно удобной форме. Попытаемся найти этот оператор в форме $A^{-1}f = af''' + bf'' + cf' + df$ с неопределенными пока коэффициентами $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Если удастся найти обратный оператор в такой форме, то задача будет решена. Если не удастся, то нужно искать его в другой форме. Найдем матрицу этого оператора

$$\begin{aligned} (A^{-1}\mathbf{e}_0)(x) &= a(1)''' + b(1)'' + c(1)' + d = d = \\ &= d\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{-1}\mathbf{e}_1)(x) &= a(x)''' + b(x)'' + c(x)' + dx = c + dx = \\ &= c\mathbf{e}_0 + d\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{-1}\mathbf{e}_2)(x) &= a(x^2)''' + b(x^2)'' + c(x^2)' + dx^2 = 2b + 2cx + dx^2 = \\ &= 2b\mathbf{e}_0 + 2c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^{-1}\mathbf{e}_3)(x) &= a(x^3)''' + b(x^3)'' + c(x^3)' + dx^3 = 6a + 6bx + 3cx^2 + dx^3 = \\ &= 6a\mathbf{e}_0 + 6b\mathbf{e}_1 + 3c\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда матрица линейного оператора A^{-1} в базисе e имеет вид:
$$(A^{-1})_e = \begin{pmatrix} d & c & 2b & 6a \\ 0 & d & 2c & 6b \\ 0 & 0 & d & 3c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$
Сравнивая эту матрицу с матрицей (3.21), видим, что $d = 1$, $c = 1$, $b = 3$ и $a = 3$. Значит, обратный оператор имеет вид
$$A^{-1}f = 3f''' + 3f'' + f' + f.$$

2. При этом способе решения не будем находить матрицу оператора, а для операторов $Af = 2f''' - 2f'' - f' + f$ и $A^{-1}f = af''' + bf'' + cf' + df$ найдем их композицию
$$A(A^{-1}f) = 2(af''' + bf'' + cf' + df)''' - 2(af''' + bf'' + cf' + df)''-$$
$$-(af''' + bf'' + cf' + df)' + af''' + bf'' + cf' + df =$$
$$= 2af'''''' + 2bf''''' + 2cf'''' + 2df''' - 2af''''' - 2bf'''' - 2cf''' - 2df''-$$
$$- af'''' - bf''' - cf'' - df' + af''' + bf'' + cf' + df.$$
В пространстве $\mathbb{R}[x]_3$ любой многочлен имеет степень не больше 3. Значит, все его производные порядка большего чем 3 равны нулю. Тогда $A(A^{-1}f) = 2df''' - 2cf''' - 2df'' - bf''' - cf'' - df' + af''' + bf'' + cf' + df$. Но для этих операторов справедливо равенство $A(A^{-1}f) = f$ для любого f. Следовательно,
$$2df''' - 2cf''' - 2df'' - bf''' - cf'' - df' + af''' + bf'' + cf' + df =$$
$$= (2d - 2c - b + a)f''' + (-2d - c + b)f'' + (-d + c)f' + df = f.$$
Последнее равенство должно выполняться для любого многочлена f. Если многочлен $f = 1$, то это равенство дает $d = 1$. Если многочлен $f = x$, то из этого же равенства $-d + c = 0$, при $f = x^2$ получим $-2d - c + b = 0$ и при $f = x^3$ получим $2d - 2c - b + a = 0$. Отсюда $d = 1$, $c = 1$, $b = 3$, $a = 3$. Мы получили тот же ответ.

3. При этом способе решения не будем искать обратную матрицу исходного оператора. Воспользуемся тем, что произведение матриц взаимно обратных операторов равно единичной матрице: $A_e(A^{-1})_e = \mathsf{E}$. Тогда
$$A_e(A^{-1})_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c & 2b & 6a \\ 0 & d & 2c & 6b \\ 0 & 0 & d & 3c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d & c-d & 2b-2c-4d & 6a-6b-12c+12d \\ 0 & d & 2c-2d & 6b-6c-12d \\ 0 & 0 & d & 3c-3d \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $d = 1$, $c - d = 0$, $2b - 2c - 4d = 0$, $6a - 6b - 12c + 12d = 0$, что приводит к тому же ответу.

Задания

К делу, мозг! *Вильям Шекспир «Гамлет», перевод М.Л.Лозинского.*

♦ Будет ли линейным оператором, действующим в $\mathbb{V}$, каждое из следующих отображений $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$?

61. $\mathbb{V} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех матриц второго порядка с вещественными элементами. Для любой матрицы $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

a). $A(\mathsf{M}) = \det(\mathsf{M}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\det(\mathsf{M}) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$ — определитель матрицы M;

b). $A(\mathsf{M}) = \mathrm{tr}(\mathsf{M}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $\mathrm{tr}(\mathsf{M}) = m_{1,1} + m_{2,2}$ — след матрицы M (сумма всех элементов, стоящих на главной диагонали матрицы M);

c). $A(\mathsf{M}) = \mathrm{rang}(\mathsf{M}) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, где $\mathrm{rang}(\mathsf{M})$ — ранг матрицы M;

d). $A(\mathsf{M}) = m_{1,1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, где $m_{1,1}$ — элемент матрицы M, стоящий в первой строке и первом столбце;

e). $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathsf{M} + \mathsf{M} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

f). $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathsf{M} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \mathsf{M}$;

g). $A(\mathsf{M}) = \det(\mathsf{M}) \cdot \mathsf{M}$, где $\det(\mathsf{M}) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$ — определитель матрицы M;

h). $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{2,2} & m_{2,1} \\ m_{1,2} & m_{1,1} \end{pmatrix}$; i). $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} + m_{2,2} & m_{1,2} + m_{2,1} \\ m_{2,1} - m_{1,2} & m_{2,1} \end{pmatrix}$;

j). $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & 1 \end{pmatrix}$; k). $A(\mathsf{M}) = (m_{1,2} + m_{2,2} - m_{2,1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

l). $A(\mathsf{M}) = \begin{pmatrix} m_{1,1}m_{2,2} & m_{1,2}m_{2,1} \\ m_{2,1}m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$; m). $A(\mathsf{M}) = |m_{1,1}| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

62. $\mathbb{V} = V_3(O)$, то есть линейное пространство, в котором действует отображение, совпадает с линейным пространством всех векторов в пространстве, начало которых находится в начале координат, и стандартными операциями сложения векторов и умножения на число. Для любого вектора $\mathbf{x} \in V_3(O)$ и некоторых фиксированных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3(O)$

a). $A(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ означает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$) ;

b). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{abx})\mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{abx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$);

c). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{abx})(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (здесь $\mathbf{abx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор, равный векторному произведению векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$);

d). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} + \mathbf{x}) \times \mathbf{b}$ (здесь сумма векторов $\mathbf{a}, \mathbf{x}$ векторно умножается на вектор $\mathbf{b}$);

e). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{ax})\mathbf{x}$(здесь $\mathbf{ax}$ означает скалярное произведение двух векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$);

f). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{axx})\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{b}$ (здесь $\mathbf{axx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$ и прибавляется к векторному произведению векторов $\mathbf{b}, \mathbf{x}$) ;

g). $A(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|\mathbf{x}$ (здесь $|\mathbf{x}|$ означает длину вектора, затем это число умножается на вектор $\mathbf{x}$) ;

h). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x}$ (здесь $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{x}$ означает двойное векторное произведение трех векторов) ;

i). $A(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{b} \times \mathbf{x}$ означает векторное произведению векторов) ;

j). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{ax})\mathbf{b}$(здесь $\mathbf{ax}$ означает скалярное произведение двух векторов, затем это число умножается на вектор $\mathbf{b}$);

k). $A(\mathbf{x}) = (\mathbf{abx})(\mathbf{a} \times \mathbf{x})$ (здесь $\mathbf{abx}$ означает смешанное произведение трех векторов, затем это число умножается на вектор, равный векторному произведению векторов $\mathbf{a}, \mathbf{x}$);

l). $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{x}$ (здесь $\mathbf{x} \times \mathbf{x}$ означает векторное произведение вектора $\mathbf{x}$ на себя) ;

m). Сжатие пространства по всем направлениям в два раза (сжатие любого вектора в два раза);

n). Поворот пространства на угол ϕ вокруг оси Ox (Oy, Oz);

o). Ортогональное проектирование пространства на прямую $x = y = z$ (плоскость $x + y + z = 0$);

p). Ортогональное проектирование пространства на плоскость Oxy (Oxz, Oyz);
q). Ортогональное проектирование пространства на ось Ox (Oy, Oz);
r). Зеркальное отражение относительно плоскости Oxy (Oxz, Oyz); относительно оси Ox (Oy, Oz); относительно начала координат.

63. $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]_n$. Для любого многочлена $f(x) = f_0x^n + \cdots + f_n \in \mathbb{R}[x]_n$
a). $A(f) = f' + 3f''$;
b). $A(f) = f - f_0(x^n + 1)$;
c). $A(f) = (x+1)f'')$;
d). $A(f) = f(0)f'$;
e). $A(f) = f(1)(x^{n-1} + 1)$;
f). $A(f) = (f(1) + f(2))f'$.

64. $\mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$. Для любого многочлена $f(x) = f_0x^n + \cdots + f_n \in \mathbb{R}[x]$
a). $A(f) = 3f'' + f' - f$;
b). $A(f) = f'' - f' + 5$;
c). $(Af)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$;
d). $(Af)(x) = f(x+1)$;
e). $(Af)(x) = xf(x)$;
f). $(Af)(x) = (f(x), x^7)$.
В задании f. (f, g) есть наибольший общий делитель многочленов f и g.

65. $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$. Для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$
a). $A(\mathbf{x}) = (x_1; \ldots; x_1)$;
b). $A(\mathbf{x}) = (0; 1; \ldots; 0; 1)$, если n четно и $A(\mathbf{x}) = (0; 1; \ldots; 0)$, если n нечетно;
c). $A(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2; x_2 - x_3; \ldots; x_n - x_1)$;
d). $A(\mathbf{x}) = (x_1/x_n; x_2/x_{n-1}; \ldots; x_n/x_1)$;
e). $A(\mathbf{x}) = (\bar{x}_1; \bar{x}_2; \ldots; \bar{x}_n)$ (здесь $\bar{x}_i$ есть компле́ксно сопряженное к x_i);
f). $A(\mathbf{x}) = 2i\Re\mathbf{x} + 3\Im\mathbf{x}$ (здесь $\Re\mathbf{x}$ и $\Im\mathbf{x}$ означают векторы с вещественными элементами, равными соответственно действительной и мнимой части элементов вектора $\mathbf{x}$).

66. a). Пусть A и B — операторы поворота плоскости на углы $\pi/6$ и $\pi/4$ соответственно. Найти а) $-A$; б) $A+B$; в) AB; г) $A-B$; д) $2A$; е) A^2.
b). Пусть P — оператор проектирования плоскости (проектирования любого вектора плоскости)на ось Ox параллельно оси Oy, Q — оператор проектирования плоскости на ось Oy параллельно оси Ox. Найти а) $I-P$; б) $I-Q$; в) $2P+Q$; г) $-P-Q$; д) $f(P)$, где $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$; е) $f(Q)$, где $f(x) = 2x^6 - x^3 - x^2$.
c). Найти а) $A+B$; б) $-2A$; в) AB; г) BA; д) B^2; е) A^3 для дифференциальных операторов A и B, действующих в пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не больше 3 по формулам: i) $Af = f'' + f'$, $Bf = 2f''' - f' + f$; ii) $Af = f'' + 2f$, $(Bf)(x) = f'''(x) + x^2f''(x) - f(x)$.
d). Для операторов, действующих в $\mathbb{R}^3$, найти а) $A+B$; б) $3A$; в) AB; г) BA; д) A^2; е) B^3, если i) $A\mathbf{x} = (x_1 + x_3; x_1 - x_2 + 2x_3; x_1 - x_2)$, $B\mathbf{x} = (x_1 + x_2 - x_3; x_1 + 2x_2 + 2x_3; x_1 + x_2)$, $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$.

e). Для операторов, действующих в $\mathbb{R}^2$, найти а) $A-B$; б) $2A+3B$; в) AB; г) BA; д) A^2; е) B^3, если $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$.

f). Пусть P — оператор проектирования плоскости (проектирования любого вектора плоскости)на прямую с уравнением $x-2y=0$ параллельно прямой с уравнением $2x-y=0$, Q — оператор проектирования плоскости на прямую с уравнением $2x-y=0$ параллельно прямой с уравнением $x-2y=0$. Найти операторы: а) $P+Q$; б) PQ; в) $Q+2P$; г) $P^4Q^3+Q^5P^6$; д) $-P^2-Q^5$; е) $I-P$.

g). Пусть P_x — оператор ортогонального проектирования пространства (проектирования любого вектора пространства)на ось Ox, P_y — на ось Oy, P_z — на ось Oz. Пусть P_{xy} — оператор ортогонального проектирования пространства (проектирования любого вектора пространства)на плоскость Oxy, P_{xz} — на плоскость Oxz, P_{yz} — на плоскость Oyz. Найти операторы: а) P_x+P_y; б) P_zP_{yz}; в) $P_x+P_y+P_z$; г) $I-P_x$; д) P_y+P_{xz}; е) $P_{xy}+P_{xz}$; ж) $P_{xy}+P_{xz}+P_{yz}$; и) $P_{xy}P_{yz}$.

67. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$

a). $A\mathbf{x} = (-3x_1+3x_2-2x_3; x_1+2x_2-x_3; -x_1-3x_2+2x_3)$;

b). $A\mathbf{x} = (-2x_2-x_3; 3x_1+2x_2+3x_3; x_1+2x_2+2x_3)$;

c). $A\mathbf{x} = (2x_1-x_2+x_3; x_1-3x_2; 2x_1-2x_2+3x_3)$;

d). $A\mathbf{x} = (-2x_1+2x_2+2x_3; 2x_1-3x_2+2x_3; -2x_1+2x_2)$;

e). $A\mathbf{x} = (-x_1+3x_2-3x_3; 3x_1+x_2+3x_3; 3x_2-3x_3)$;

f). $A\mathbf{x} = (x_1-3x_2+2x_3; x_1+x_3; -2x_1+2x_2+2x_3)$.

68. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]_2$

a). $Af = -3f'' + 3f'$; b). $(Af)(x) = f(-2) + f(2)x + f(3)x^2$;

c). $(Af)(x) = f(x+2) + f(0)x + f'(x)$;

d). $(Af)(x) = f(x) + f(2)x + f'(x)$; e). $Af = 2f'' + 3f$.

f). $(Af)(x) = f(x+2) + f(-3)x + f'(x)$;

69. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

a). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; b). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{X}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

c). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; d). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathsf{X}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$;

e). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\mathsf{X}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \mathsf{X}$.

f). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{X} + \mathsf{X}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

70. Доказать, что существует единственный линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ и переводящий вектор $\mathbf{a}_1$ в вектор $\mathbf{b}_1$, вектор $\mathbf{a}_2$ в вектор $\mathbf{b}_2$ и вектор $\mathbf{a}_3$ в вектор $\mathbf{b}_3$. Найти его матрицу в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1; 1; 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1; -1; 1)$;
$\mathbf{b}_1 = (-3; 3; -2)$, $\mathbf{b}_2 = (3; 1; 3)$, $\mathbf{b}_3 = (-2; 0; -2)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (4; 4; -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1; -1; 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0; -1; 1)$;
$\mathbf{b}_1 = (-2; -1; 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-2; 4; 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1; 2; 0)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-3; -2; 0)$, $\mathbf{a}_2 = (4; -2; 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2; -3; 1)$;
$\mathbf{b}_1 = (-1; 1; 3)$, $\mathbf{b}_2 = (4; -3; -3)$, $\mathbf{b}_3 = (3; -2; -1)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-3; 1; -1)$, $\mathbf{a}_2 = (4; -1; 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3; -2; 1)$;
$\mathbf{b}_1 = (-2; 0; -3)$, $\mathbf{b}_2 = (3; 1; 4)$, $\mathbf{b}_3 = (3; -3; 2)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-3; -1; 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-4; 1; 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2; 0; 1)$;
$\mathbf{b}_1 = (2; -4; -4)$, $\mathbf{b}_2 = (-4; -3; 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1; -2; -1)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (3; 2; 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2; 2; 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1; 1; 1)$;
$\mathbf{b}_1 = (-3; -2; -2)$, $\mathbf{b}_2 = (1; -3; -4)$, $\mathbf{b}_3 = (1; -3; -3)$.

71. Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u.

a). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -2; 0)$; $\mathbf{e}_2 = (1; 3; 1)$; $\mathbf{e}_3 = (1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; 1; 1)$; $\mathbf{u}_2 = (3; -3; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (1; -3; 0)$;

b). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -1; 1)$; $\mathbf{e}_2 = (-1; 1; 0)$; $\mathbf{e}_3 = (2; -3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -3; 0)$; $\mathbf{u}_2 = (-1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (3; -4; 2)$;

c). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; 3; 3)$; $\mathbf{e}_2 = (0; 3; 2)$; $\mathbf{e}_3 = (-1; 1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; -3; -3)$; $\mathbf{u}_2 = (-2; 1; 2)$; $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 0)$;

d). $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -2; -2)$; $\mathbf{u}_1 = (1; -3; -3)$; $\mathbf{e}_2 = (2; 3; 2)$; $\mathbf{u}_2 = (-3; -3; -2)$; $\mathbf{e}_3 = (0; 1; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (3; 2; 1)$;

e). $A_e = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; 1; 0)$; $\mathbf{u}_1 = (1; 1; 1)$; $\mathbf{e}_2 = (-2; -2; -1)$; $\mathbf{u}_2 = (2; 4; -1)$; $\mathbf{e}_3 = (2; 3; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (1; 2; 0)$;

f). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-3; 2; 0)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; 1; 1)$; $\mathbf{e}_2 = (2; -3; 2)$; $\mathbf{u}_2 = (-1; -3; 4)$; $\mathbf{e}_3 = (2; -2; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (0; 1; -1)$;

72. Линейный оператор A в базисе $\mathbf{f}_1(x) = 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора A в базисе $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

a). $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + 2x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x + x^2$;

b). $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -3 + x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -2 + x^2$;

c). $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -1 + 2x - 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + x$; $\mathbf{g}_3(x) = 2 - 2x + x^2$;

d). $A_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 2 - 3x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + 3x - x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -2x + x^2$;

e). $A_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 - 2x - x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + 3x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 2x + x^2$;

f). $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x + x^2$;

73. Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u.

a). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

b). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_3$;

c). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

d). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$;

e). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$;

f). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$.

74. Линейный оператор A в базисе v имеет матрицу A_v. Линейный оператор B в базисе u имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов $A+B$ и $A-2B$ в базисе u.

a). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = (-3; -2); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-4; -3); \mathbf{u}_2 = (-1; -1)$;

b). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = (-1; -1); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (3; 2); \mathbf{u}_2 = (4; 3)$;

c). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = (-2; -3); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; -5); \mathbf{u}_2 = (-1; -2)$;

d). $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = (-5; -3); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (4; 3); \mathbf{u}_2 = (-3; -2)$;

e). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = (-1; 2); \mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -3); \mathbf{u}_2 = (-3; 5)$;

f). $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = (-2; -1); \mathbf{e}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; 2); \mathbf{u}_2 = (-1; -1)$.

75. Линейный оператор A в базисе v имеет матрицу A_v, линейный оператор B в базисе u имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов AB и $(A^2 + B)$ в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

a). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{v}_1 = (-5; -3); \mathbf{v}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; -2); \mathbf{u}_2 = (2; 1)$.

b). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{v}_1 = (7; 3); \mathbf{v}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; -1); \mathbf{u}_2 = (4; 1)$.

c). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{v}_1 = (5; 4); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (7; 3); \mathbf{u}_2 = (2; 1)$.

d). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad B_u = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{v}_1 = (3; 1); \mathbf{v}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; -1); \mathbf{u}_2 = (4; 1)$.

e). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (5;4); \mathbf{v}_2 = (1;1);$ $\mathbf{u}_1 = (3;1); \mathbf{u}_2 = (2;1).$

f). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7;-4); \mathbf{v}_2 = (2;1);$ $\mathbf{u}_1 = (5;2); \mathbf{u}_2 = (2;1).$

76. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ по правилу $A\mathbf{x} = \mathsf{M}\mathbf{x}$, где матрица M определена ниже.

a). $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. b). $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. d). $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

77. Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ такого, что для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

a). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

b). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

e). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

g). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

h). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathsf{X}$.

i). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

j). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathsf{X}$.

k). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

l). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

78. Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathbb{C}[x]_3 \to \mathbb{C}[x]_3$, действующего в линейном пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не выше 3 с комплексными коэффициентами по правилу

a). $(Af)(x) = (-3+2x^3)f'''(x)+(3+3x-x^2)f''(x)+(-1-x)f'(x)+f(x)$.
b). $(Af)(x) = (2x + 2x^2)f'''(x) - 2(1 + x)f''(x)$.
c). $(Af)(x) = (1 + x^2)f'''(x) - (2 + x - x^2)f''(x) - (1 + 3x)f'(x) + 3f(x)$.
d). $(Af)(x) = f'''(x) + (-2x + x^2)f''(x) + (2 - 3x)f'(x) + 3f(x)$.
e). $(Af)(x) = (-2x^2 + 2x^3)f'''(x) - 2x^2 f''(x)$.
f). $(Af)(x) = (2x + 2x^3)f'''(x) + (-1 + 2x)f''(x) + (-1 + x)f'(x) - 2f(x)$.

79. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, выяснить их обратимость. В случае их обратимости найти обратные операторы.
a). $A\mathbf{x} = (2x_1 + 2x_2 - 3x_3; -x_2 + 2x_3; -x_1 - x_2 + x_3)$.
b). $A\mathbf{x} = (2x_1 - 2x_2 - x_3; -x_1 - x_2 - x_3; -x_1 + 2x_2 + x_3)$.
c). $A\mathbf{x} = (-2x_1 - 2x_2 + 3x_3; -x_1 - x_2 + 2x_3; -2x_1 - x_2 + x_3)$.
d). $A\mathbf{x} = (x_1 - x_2; -2x_1 - x_2 + 2x_3; -x_1 - x_2 + x_3)$.
e). $A\mathbf{x} = (x_1 - x_2 + 2x_3; x_1 + x_3; -x_1 - x_2 + x_3)$.
f). $A\mathbf{x} = (2x_1 - x_2 - 2x_3; -x_1 + x_2 + 2x_3; -2x_1 + x_3)$.

80. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_3$ всех полиномов степени не выше третьей с вещественными коэффициентами, найдите их обратные операторы A^{-1}, если они существуют, или докажите их необратимость. Линейные операторы действуют по правилу: для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[x]_3$

a). $Af = 2f''' + 2f'' + 2f' + f$. b). $Af = 2f''' + f'' + f' + f$.
c). $Af = f''' - 2f'' - 2f' - f$. d). $Af = f''' + 2f'' - f$.
e). $Af = 2f'' - f$. f). $Af = 2f''' + f'' + f$.

81. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ всех многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами, найдите их обратные операторы A^{-1}, если они существуют, или докажите необратимость этих операторов. Линейные операторы действуют по правилу: для любого многочлена

$f \in \mathbb{R}[x]_2$

a). $Af = f'' - 3f' + f$.
b). $Af = 2f'' - 3f' + f$.
c). $Af = -2f' + f$.
d). $Af = -2f' - f$.
e). $Af = f'' - 2f' + f$.
f). $Af = f'' - 2f' - f$.
g). $Af(x) = (-1 - 2x - 2x^2)f'' + (2 + 2x)f' - f$.
h). $Af(x) = -xf'' + f$.
i). $Af(x) = (2 - 2x^2)f'' + (-2 + 2x)f' - f$.
j). $Af(x) = (1 + 2x^2)f'' + (2 - 2x)f' + f$.
k). $Af(x) = (-1 - 2x - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$.
l). $Af(x) = (1 + x)f'' + f$.

ГЛАВА 4

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Наука всегда оказывается не права. Она никогда не решит вопроса, не поставив при этом десятка новых.
Бернард Шоу.

Собственные значения и собственные векторы.

Всюду в дальнейшем буквой $\mathbb{V}$ будут обозначаться конечномерные линейные (векторные) пространства ненулевой размерности над одним и тем же полем $\mathbb{F}$. Как обычно $\mathbb{F}$ обозначает либо поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел либо поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Размерность пространства $\mathbb{V}$ (и только она) всюду обозначается буквой n, $0 < n = \dim \mathbb{V} < \infty$.

Через $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ будем обозначать линейное пространство всех вектор–столбцов с n вещественными (комплексными) элементами и стандартными операциями сложения векторов и умножения вектора на число. Одно из этих двух пространств будем обозначать через $\mathbb{F}^n$. Для сокращения записи вектор–столбец $\mathbf{v}$ всюду записывается как транспонированный вектор– строка $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\tau$, причем знак транспонирования часто будем лишь подразумевать.

Пусть A — линейный оператор, действующий в векторном пространстве $\mathbb{V}$.

Число α из поля $\mathbb{F}$ называется собственным значением (или собственным числом) линейного оператора A, если существует такой ненулевой вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ ($\mathbf{u} \neq 0$), что $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$. Этот вектор $\mathbf{u}$ называется собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению α.

Множество всех собственных значений оператора A называется его спектром и обозначается $\operatorname{Spec} A$. Число $\lambda \in \mathbb{F}$ принадлежит спектру линейного оператора A тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{4.1}$$

Пусть $\mathsf{A} = A_e$ — матрица оператора A в некотором базисе e, E —

единичная матрица. Тогда

$$\varphi_A(\lambda) := \det(A-\lambda I) = \det(A_e - \lambda \mathsf{E}) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}$$

является многочленом n-ой степени с неизвестной λ и коэффициентами из поля $\mathbb{F}$:

$$\varphi_A(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n$$

и называется характеристическим многочленом линейного оператора A. Его коэффициенты можно найти по формулам:

$$b_0 = (-1)^n;$$
$$b_1 = (-1)^{n-1}(a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n});$$
$$b_2 = (-1)^{n-2} \sum_{0\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{vmatrix} = (-1)^{n-2} \sum_{0\le i<j\le n} \mathsf{M}_{i,j};$$
$$\dots$$
$$b_k = (-1)^{n-k} \sum_{0\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} \mathsf{M}_{i_1,i_2,\dots,i_k};$$
$$\dots$$
$$b_n = \det A_e,$$

где $\mathsf{M}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ есть главный минор порядка k матрицы A с номерами им занимаемых строк и столбцов равными $i_1, i_2, \dots, i_k$ (напомним, что минор называется главным, если номера занимаемых им строк совпадают с номерами столбцов). В частности, отсюда получается следующая формула для характеристического многочлена матрицы третьего порядка

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})\lambda^2 -$$
$$- \left(\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det \mathsf{A}. \tag{4.2}$$

Эта формула удобна для нахождения характеристического многочлена в трехмерном случае. Для остальных размерностей можно выписать аналогичные формулы. Для $n = 1, 2$ такая формула легко получается по определению определителя и, поэтому, нет нужды ее выписывать. При $n > 3$ такие формулы становятся громоздкими и трудоемкими при вычислениях. Поэтому, (при вычислениях вручную) в этих случаях (впрочем, и при $n = 3$) можно воспользоваться свойствами определителей и обычными приемами для их вычисления.

Из (4.1) легко получается следующая замечательная формула для спектра оператора A:

$$\operatorname{Spec} A = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid \ \varphi_A(\lambda) = 0\}.$$

Алгебраической кратностью собственного значения α называется кратность корня α характеристического многочлена $\varphi_A(\lambda)$.

Характеристический многочлен и, следовательно, спектр не зависят от базиса, в котором найдена матрица линейного оператора.

Пусть теперь α — собственное значение линейного оператора A. Тогда, по определению, ненулевой вектор $\mathbf{u}$ будет собственным, если $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ или, что равносильно, $(A - \alpha I)\mathbf{u} = 0$. Отсюда получаем, что подпространство $\ker(A - \alpha I)$ состоит из всех собственных векторов, отвечающих собственному значению α, и нулевого вектора. Это подпространство называется собственным. Его размерность называется геометрической кратностью собственного значения α. Таким образом, для нахождения геометрической кратности собственного значения α нужно найти размерность ядра линейного оператора $(A - \alpha I)$. Часто удобнее находить равную последней размерность подпространства решений однородной системы уравнений $(A_e - \alpha\mathsf{E})\mathbf{x} = 0$. Если найдена фундаментальная система решений этой однородной системы уравнений (заметим, что фундаментальная система решений состоит из собственных векторов), то число векторов в ней равно геометрической кратности собственного значения α. Однако, находить специально фундаментальную систему решений нерационально, так как размерность подпространства решений однородной системы уравнений $(A_e - \alpha\mathsf{E})\mathbf{x} = 0$, а, следовательно, и геометрическая кратность собственного значения α, равна $n - r$, где число r равно рангу матрицы $(A_e - \alpha\mathsf{E})$. Очевидно, что алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения больше нуля и не превосходят размерности линейного пространства. Кроме того, геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Все введенные понятия (собственное значение, собственный вектор, спектр, характеристический многочлен) переносятся с линейного оператора на его матрицу. Отметим также, что определение собственного значения и собственного вектора для операторов, действующих в бесконечномерных линейных пространствах, остается таким же, как и в конечномерном случае. Однако спектр линейного оператора в бесконечномерном случае определяется несколько иначе. Он включает в себя все собственные значения, но может содержать и другие значения.

Пример 78 Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Все вычисления будем вести в том базисе, в котором заданы матрицы линейных операторов. Для того, чтобы найти собственные значения, найдем сначала характеристический многочлен, потом все его корни и из последних отберем те, которые принадлежат полю $\mathbb{F}$. Характеристический многочлен можно найти по определению определителя

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1.$$

Характеристический многочлен не имеет вещественных корней. Значит, если векторное пространство и линейный оператор, действующий в нем, определены над полем вещественных чисел, то собственных значений нет и спектр оператора пуст: $\operatorname{Spec} A = \emptyset$.

Пусть поле $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Тогда характеристический многочлен имеет два комплексных корня $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ и, значит, $\operatorname{Spec} A = \{i, -i\}$.

Теперь, для того, чтобы найти все собственные векторы, отвечающие собственному значению α, нужно найти все нетривиальные решения $x \in \mathbb{C}^2$ системы уравнений $(A_e - \alpha E)x = 0$. Для собственного значения $\alpha = i$

$$A_e - iE = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \overset{C_1+(1-i)C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений можно записать так $x_1 = (-1-i)x_2$ или $x = (-(1+i)x_2, x_2)^\tau$ для $\forall x_2 \in \mathbb{C}$. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $f_1 = (1+i, -1)^\tau$. Тогда, для любого $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ вектор v, имеющий координатный вектор $v_e = \mu(1+i, -1)^\tau$, является собственным для линейного оператора A, причем любой собственный вектор, отвечающий данному собственному значению, можно представить в таком виде. Если e_1, e_2 — базис, в котором дана матрица оператора, то все собственные векторы можно задать формулой $v = \mu(1+i)e_1 - \mu e_2$, $\forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Аналогично, для собственного значения $\alpha = -i$

$$A_e + iE = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} \overset{C_1+(1+i)C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = (-1+i)x_2$ или $x = ((i-1)x_2, x_2)^\tau$ для $\forall x_2 \in \mathbb{C}$. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $f_2 = (i-1, 1)^\tau$. Тогда множество $\{v_e = \mu(i-1, 1)^\tau :$

$\forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ совпадает с множеством всех координатных векторов собственных векторов, отвечающих данному собственному значению. Множество всех собственных векторов можно записать в виде $\{v = \mu(i-1)e_1 + \mu e_2 : \forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

б) Характеристический многочлен можно вычислить по формуле (4.2), которая находится на странице 192:

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (3-3+5)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} \right) \lambda +$$
$$+ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 5.$$

Корень $\lambda_1 = 1$ характеристического многочлена легко угадывается. Можно теперь характеристический многочлен $\varphi_A(\lambda)$ разделить на линейный двучлен $\lambda - 1$, например, используя алгоритм Горнера,

	-1	5	-9	5
1	-1	4	-5	0

Тогда $\varphi_A(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2+4\lambda-5)$. Квадратный трехчлен имеет два комплексных корня $\lambda_2 = 2+i$ и $\lambda_3 = 2-i$. Таким образом, если оператор рассматривается над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, то $\operatorname{Spec} A = \{1\}$. Если поле $\mathbb{F}$ совпадает с полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то $\operatorname{Spec} A = \{1, 2-i, 2+i\}$.

Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Для нахождения собственных векторов нужно найти все нетривиальные решения $x \in \mathbb{R}^3$ системы уравнений $(A_e - \alpha E)x = 0$. Для собственного значения $\alpha = 1$

$$A_e - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 8 & -6 & 4 \end{pmatrix} \underset{C_3-2C_2}{\overset{C_2/2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3+2C_1}{\overset{C_2-2C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_2 = 2x_1$, $x_3 = x_1$ или $x = (x_1, 2x_1, x_1)^\tau$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$. Любое частное нетривиальное решение есть координатный вектор собственного вектора. Пусть $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ и $x_1 = \mu$, тогда $v_e = (\mu, 2\mu, \mu)^\tau = \mu(1,2,1)^\tau$ есть координатный вектор собственного вектора, причем любой собственный вектор можно представить в таком виде.

в) Характеристический многочлен можно искать так

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^3-C^4}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & \lambda-1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_4+C_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3-(1+\lambda)C_1}{=}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ \lambda^2+2 & 4-\lambda & 0 \end{vmatrix} = -(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2+\lambda^2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)(4-\lambda-4+2\lambda-2\lambda^2+\lambda^3) = (\lambda-1)^3\lambda.$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ принадлежат полю $\mathbb{F}$ и, следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{1, 0\}$. Для нахождения собственных векторов нужно найти все нетривиальные решения $x \in \mathbb{F}^4$ системы уравнений $(A_e - \alpha E)x = 0$. Для собственного значения $\alpha = 1$

$$A_e - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \\ \\ C_3 - C_2 \\ C_4 - 2C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ \\ C_4 - 2C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений $x_4 = x_2 - x_3$, $x_1 = -x_2$, $\forall x_2, x_3 \in \mathbb{F}$. Фундаментальная система решений имеет вид $f_1 = (-1, 1, 0, 1)^\tau$, $f_2 = (0, 0, 1, -1)^\tau$. Тогда вектор $v_e = \mu f_1 + \nu f_2$ для $\forall \mu, \nu \in \mathbb{F}$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$, является координатным вектором собственного и любой собственный вектор, отвечающий собственному значению $\alpha = 1$, можно представить в таком виде.

Аналогично, для собственного значения $\alpha = 0$

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ \\ C_4 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_3 \\ \sim \\ \\ C_4 + C_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 - 2C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \\ C_4 - 2C_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений $x_1 = -2x_2$, $x_3 = x_2$, $x_4 = -2x_2$ для $\forall x_2 \in \mathbb{F}$. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $f_3 = (-2, 1, 1, -2)^\tau$. Тогда все собственные векторы u (и только они), отвечающие данному собственному значению, могут быть записаны в виде $u_e = \mu f_3$, $\mu \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Пример 79 Не находя характеристического многочлена, выяснить, являются ли числа 1, 0, -1 собственными значениями линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если да, то найти геометрическую кратность собственного значения.

Решение. По теореме 4.1 достаточно для каждого из чисел $\alpha = 1$, $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ вычислить $\det(A_e - \alpha E)$. Если определитель равен нулю, то данное число является собственным значением, в противном случае — нет. Для $\alpha = 1$

$$\det(A_e - E) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

так как первая строка равна третьей. Значит, число $\alpha = 1$ является собственным значением линейного оператора с данной матрицей. Для того, чтобы определить его геометрическую кратность, достаточно найти ранг матрицы $A_e - E$. Для этого приведем эту матрицу с помощью элементарных преобразований к ступенчатой форме

$$A_e - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{r} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \\ C_4 + C_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатую форму, в которой одна ненулевая строка. Значит, ранг матрицы равен одному и геометрическая кратность собственного значения $\alpha = 1$ равна трем (так как $n - r =$

$4-1=3$). Пусть теперь $\alpha=0$. Тогда

$$\det(A_e-0E)=\det A_e=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{r} \\ = \\ C_3-C_1 \\ C_4+C_1 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{r} C_1+C_2+C_3 \\ = \\ \end{array} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Следовательно, число $\alpha=0$ не является собственным значением данного оператора. Теперь для $\alpha=-1$

$$\det(A_e+E)=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{r} C_2-C_1 \\ = \\ C_3-C_1 \\ C_4+C_1 \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1\\ -4 & 0 & -2 & -2\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} -4 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{r} C_1+C_2+C_3 \\ = \\ \end{array} -\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=16\neq 0.$$

Значит, число $\alpha=-1$ не является собственным значением данного оператора.

Диагональная матрица линейного оператора

> Когда я читаю или когда мне что-то рассказывают, мне почти всегда это кажется очень трудным и практически невозможным понять. Тогда я не могу не задать себе вопрос, а не может ли это быть проще. И в некоторых случаях оказывалось, что это действительно намного проще.
> *Д.Гильберт.*[1]

Матрицы одного и того же линейного оператора в разных базисах могут быть не равными. Если мы хотим с помощью матрицы исследовать свойства линейного оператора или вычислить какие–либо его данные, то обычно это легче сделать в том случае, когда матрица имеет более простую структуру. Диагональные матрицы являются одними из таких матриц. Однако не для любого линейного оператора существует базис, в котором матрица этого оператора диагональна. Основным,

[1] К.Рид. «Гильберт». М. Наука, 1977.

дающим условия, при которых матрица линейного оператора в некотором базисе диагональна, является следующее утверждение. Линейный оператор A в данном базисе имеет диагональную матрицу тогда и только тогда, когда этот базис состоит из собственных векторов оператора A. Линейные операторы, имеющие в некотором базисе диагональную матрицу, называются операторами простой структуры.

Следует заметить, что базис, состоящий из собственных векторов, определяется неоднозначно, а диагональная форма матрицы линейного оператора единственна (если существует) с точностью до порядка расположения элементов на диагонали. Причем, элемент $a_{i,i}$ матрицы, стоящий на главной диагонали, равен собственному значению, которому отвечает i–й собственный вектор базиса.

Следующий критерий устанавливает связь между существованием диагональной матрицы линейного оператора и кратностями (алгебраической и геометрической) его собственных значений. Линейный оператор A имеет в некотором базисе диагональную матрицу тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{F}$ и их геометрические кратности равны алгебраическим.

Во многих случаях полезным бывает достаточное условие «диагонализируемости» матрицы линейного оператора. Если спектр линейного оператора состоит из n $(= \dim \mathbb{V})$ собственных значений, то существует базис, в котором матрица этого оператора диагональна. Обратите внимание, что спектр — это множество, а во множестве элементы не повторяются. Значит здесь условие выполняется лишь в случае, когда все корни характеристического многочлена принадлежат основному полю и являются простыми (то есть имеют кратность, равную единице). Тогда базис, в котором матрица линейного оператора диагональна, состоит из собственных векторов, по одному для каждого собственного значения. Здесь следует учесть, что собственные векторы линейного оператора, отвечающие попарно различным собственным значениям, линейно независимы. Последнее утверждение можно обобщить до следующего. Система, состоящая из линейно независимых подсистем собственных векторов линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям, линейно независима.

Пример 80 Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & -3 \\ 6 & 1 & 6 & 6 \\ -6 & -4 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

Решение. Очевидно, что данная задача равносильна задаче нахождения базиса из собственных векторов.

Нам удобно отождествить линейный оператор с его матрицей в том базисе, в котором она задана по условию задачи и, соответственно, отождествить вектор с его координатным вектором в этом же базисе.

Найдем характеристический многочлен линейного оператора и все корни этого многочлена. Если хотя бы один из этих корней не принадлежит полю $\mathbb{F}$, то линейный оператор не имеет диагональной матрицы. Если все корни принадлежат полю $\mathbb{F}$, то для каждого собственного значения найдем отвечающие ему собственные векторы. Точнее, нужно найти базис соответствующего собственного подпространства. Это равносильно нахождению фундаментальной системы решений системы уравнений $(A-\alpha E)x = 0$. Если геометрическая кратность для каждого собственного значения совпадает с его алгебраической кратностью, то существует базис, в котором матрица оператора диагональна. Объединив все фундаментальные системы решений для разных собственных значений, получим линейно независимую систему векторов и, следовательно, базис. Матрица линейного оператора в этом базисе диагональна.

а) Характеристический многочлен

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 & -3 \\ 6 & 1-\lambda & 6 & 6 \\ -6 & -4 & 1-\lambda & 2 \\ 6 & 4 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2+2C_1}{\underset{C_4+C_3}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 & -3 \\ 2-2\lambda & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^4-C^3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 & 0 \\ 2-2\lambda & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 1-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(1+\lambda)(2+\lambda).$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -2$. Все они принадлежат полю $\mathbb{F}$ и, следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{1, -1, -2\}$. Найдем соответствующие собственные векторы. Для собственного значения $\alpha = 1$ имеем

$$A - E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & -3 \\ 6 & 0 & 6 & 6 \\ -6 & -4 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение $x_2 = (x_4 - 3x_1)/2$, $x_3 = -x_1 - x_4$, $\forall x_1, x_4 \in \mathbb{F}$. Фундаментальная система решений $f_1 = (2, -3, -2, 0)^\tau$, $f_2 = (0, 1, -2, 2)^\tau$. Теперь уже ясно, что есть базис из собственных векторов. Он состоит из двух уже найденных и двух собственных векторов, отвечающих оставшимся двум собственным значениям. В этом базисе матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

если, конечно, собственные векторы в базисе упорядочены в соответствии с расположением собственных значений на диагонали.

Осталось найти эти собственные векторы. Для собственного значения $\alpha = -1$ и матрицы

$$A + E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 6 & 6 \\ -6 & -4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

собственный вектор легко угадать: $f_3 = (0, 0, 1, -1)^\tau$. Для собственного значения $\alpha = -2$ матрица

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 & 6 \\ -6 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1/(-3) \\ (C_2 + 2C_1)/3 \\ \sim \\ C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} \sim \\ C_3 + 4C_2 \\ C_4 + C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + C_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем общее решение системы уравнений $x_2 = -2x_1$, $x_3 = -2x_1$, $x_4 = 2x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{F}$, и последний базисный вектор имеет вид $f_4 = (1, -2, -2, 2)^\tau$.

б) На странице 194 найден спектр линейного оператора с данной матрицей. Если поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то спектр пуст и, следовательно, не существует базиса, в котором оператор имеет диагональную матрицу. Если же поле $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec} A = \{i, -i\}$. Так как спектр состоит из двух собственных значений и это число совпадает с размерностью линейного пространства, в котором действует линейный оператор, то существует базис u, в котором матрица диагональна

$$A_u = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

причем базис состоит из собственных векторов линейного оператора A. На странице 194 эти базисные векторы уже найдены: $u_1 = (1+i, -1)^\tau$, $u_2 = (i-1, 1)^\tau$.

в) Для данной матрицы спектр найден на странице 196 : $\operatorname{Spec} A = \{1, 0\}$. Алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 1$ равна 3, а собственного значения $\alpha = 0$ равна 1. На странице 196 найдены собственные векторы. Оттуда следует, что геометрическая кратность собственного значения $\alpha = 1$ равна 2, что не равно алгебраической кратности. Поэтому не существует базиса, в котором оператор имел бы диагональную матрицу.

Пример 81 Показать, что следующую матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду над полем комплексных чисел путем перехода к новому базису.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристический многочлен данной матрицы, вычисляя его коэффициенты с помощью главных миноров:

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (-1+3-1)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right) \lambda +$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 19\lambda + 2.$$

Выясним кратность корней характеристического многочлена, которые существуют над полем комплексных чисел по «основной теореме алгебры». Для этого найдем наибольший общий делитель характеристического многочлена и его производной

$$\varphi'_A(\lambda) = -3\lambda^2 + 2\lambda + 19.$$

Используя алгоритм Евклида, видим, что наибольший общий делитель равен 1. Значит, характеристический многочлен и его производная являются взаимно простыми. Поэтому все корни характеристического многочлена простые и, используя достаточное условие, получаем, что матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду переходом к другому базису.

Корневые подпространства

> Именно это чувство радостного удивления и отличает всех великих математиков, точно так же как лучших преподавателей математики отличает способность передать его своим ученикам.
>
> *М. Гарднер «Крестики-нолики».*

Пусть α_i — собственное значение оператора A алгебраической кратности k_i. Тогда корневое подпространство, соответствующее этому собственному значению, есть ядро линейного оператора $(A-\alpha_i I)^{k_i}$:

$$\mathbb{K}_i := \ker(A-\alpha_i I)^{k_i}.$$

Корневое подпространство является инвариантным (см. определение на стр. 224) подпространством линейного оператора A. Если характеристический многочлен имеет каноническое разложение над полем $\mathbb{F}$

$$\varphi_A(\lambda) = (\alpha_1-\lambda)^{k_1}(\alpha_2-\lambda)^{k_2}\dots(\alpha_m-\lambda)^{k_m},$$

то пространство $\mathbb{V}$ раскладывается в прямую сумму корневых подпространств

$$\mathbb{V} = \mathbb{K}_1 \oplus \mathbb{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}_m.$$

В этом случае объединение базисов всех корневых подпространств даст базис всего пространства $\mathbb{V}$. В этом базисе матрица линейного оператора A является клеточно–диагональной. Для размерности корневого подпространства имеет место следующее часто применяемое свойство

$$\dim \mathbb{K}_i = k_i.$$

Заметим, что для любого l_i, $0 < l_i \le k_i$ имеет место вложение подпространств $\ker(A-\alpha_i I)^{l_i} \subset \ker(A-\alpha_i I)^{k_i} = \mathbb{K}_i$ (см. свойства на стр. 165). При этом, если для некоторого l_i размерности равны $\dim\ker(A-\alpha_i I)^{l_i} = k_i$, то равны и подпространства $\ker(A-\alpha_i I)^{l_i} = \mathbb{K}_i$ и, следовательно, для нахождения $\mathbb{K}_i$ в этом случае достаточно линейный оператор $A-\alpha_i I$ возвести лишь в l_i степень.

Пример 82 Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

$$\text{а).}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{б).}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Отождествим, как обычно, линейный оператор с его матрицей в данном базисе.

а). Найдем характеристический многочлен линейного оператора

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^1-C^2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2+C_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_4+C_3}{=}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^2-C^3}{=} -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -4 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\lambda^2.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$ принадлежат полю $\mathbb{F}$, следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{0, 2\}$.

Алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 0$ равна 2. Значит, для того, чтобы воспользоваться определением корневого подпространства, нам нужно найти вторую степень линейного оператора $A - \alpha I$:

$$(\mathsf{A} - 0\mathsf{E})^2 = \mathsf{A}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь базис ядра линейного оператора $(A - 0I)^2$. Для этого нужно найти подпространство решений однородной системы уравнений $\mathsf{A}^2\mathbf{x} = 0$. Имеем

$$\mathsf{A}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений можно записать в виде $x_3 = -2x_1 - 2x_2$, $x_4 = 2x_1 + 2x_2$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{F}$. Полагая последовательно $x_1 = 1$, $x_2 = 0$

и $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, получим фундаментальную систему решений $\mathbf{f}_1 = (1, 0, -2, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (0, 1, -2, 2)^\tau$ однородной системы уравнений $\mathsf{A}^2\mathbf{x} = 0$. Значит, система векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ — базис корневого подпространства, соответствующего собственному значению $\alpha = 0$.

Так как алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 2$ равна двум, то, аналогично предыдущему, найдем квадрат линейного оператора $A - 2I$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к нужной форме:

$$(\mathsf{A} - 2\mathsf{E})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = x_4$, $x_2 = 0$, $\forall x_3, x_4 \in \mathbb{F}$, и фундаментальная система решений $\mathbf{f}_3 = (0, 0, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{f}_4 = (1, 0, 0, 1)^\tau$ дает нам базис второго корневого подпространства.

Замечание. Система векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ есть базис пространства $\mathbb{V}$, так как он построен из базисов подпространств, прямая сумма которых равна $\mathbb{V}$. Тогда из равенств

$$A\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2,$$

$$A\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2,$$

$$A\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4,$$

$$A\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\mathbf{f}_3 + 3\mathbf{f}_4$$

получим, что матрица линейного оператора A в этом базисе является клеточно–диагональной и равна

$$A_f = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

б). Найдем характеристический многочлен линейного оператора

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} C_2+C_1 \\ = \\ C_3+C_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{c} C^1-C^2- \\ -C^3 \\ = \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3(1-\lambda).$$

Его корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$ принадлежат полю $\mathbb{F}$, следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{0, 1\}$.

Алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 0$ равна 3. Значит, для того, чтобы воспользоваться определением корневого подпространства, нам нужно найти третью степень линейного оператора $A - \alpha I$. Но сразу возвести в эту степень не так-то просто. Возведем сначала матрицу во вторую степень:

$$(\mathsf{A} - 0\mathsf{E})^2 = \mathsf{A}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если действовать по стандартной схеме, то далее нужно возвести матрицу оператора $A = A - 0I$ в третью степень и найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $\mathsf{A}^3\mathbf{x} = 0$. Однако заметим, что искомое корневое подпространство имеет размерность, равную трем. Это следует из того, что размерность корневого подпространства совпадает с алгебраической кратностью соответствующего собственного значения. Заметим, что ранг матрицы A^2 равен одному. Значит, ядро линейного оператора $(A - 0I)^2$ имеет размерность, равную трем, такую же, как и размерность корневого подпространства $\mathbb{K}_1 = \ker(A - 0I)^3$. Кроме того, из свойств ядер следует, что $\ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{K}_1$. Но тогда подпространство $\ker A^2$ совпадает с корневым подпространством $\mathbb{K}_1$. Поэтому для того, чтобы найти базис корневого подпространства, нужно найти $\ker A^2$, то есть подпространство

решений однородной системы уравнений $\mathsf{A}^2\mathbf{x} = 0$. С помощью элементарных преобразований из основной матрицы этой системы уравнений получим следующую
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Общее решение системы уравнений можно записать в виде $x_4 = 0x_1 - x_2 + 2x_3$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}$. Полагая последовательно $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, затем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, получим фундаментальную систему решений $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{f}_2 = (0,1,0,-1)$, $\mathbf{f}_3 = (0,0,1,2)$ однородной системы уравнений $\mathsf{A}^2\mathbf{x} = 0$. Значит, эта система векторов образует базис корневого подпространства, соответствующего собственному значению $\alpha = 0$.

Так как алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 1$ равна одному, то, по определению, корневое подпространство совпадает с ядром оператора $A - I$. Значит, в этом случае корневое подпространство равно собственному подпространству и имеет размерность, равную одному. Найдем его базис:
$$\mathsf{A} - \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_3 - C_2 \\ \sim \\ C_4 - C_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ \sim \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1 - 3C_3 \\ \sim \\ C_4 - 2C_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = -x_2$, $x_3 = x_2$, $x_4 = 0, \forall x_2 \in \mathbb{F}$, и фундаментальная система решений $\mathbf{f}_4 = (-1,1,1,0)$ есть базис второго корневого подпространства.

Замечание. Система векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ есть базис пространства $\mathbb{V}$, так как он построен из базисов подпространств, прямая сумма которых равна $\mathbb{V}$. Тогда из равенств
$$A\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3,$$

$$A\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3,$$

$$A\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3,$$

$$A\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_4$$

получим, что матрица линейного оператора A в этом базисе является клеточно–диагональной и равна

$$A_f = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Жорданова нормальная форма

> ...Похоже, это очень трудная задача...
> — Да, нелегкая! — с легким раздражением в голосе произнес Конфуций. — Но ведь простым путем добиваются лишь пустых и вредных вещей.
> *Лунь Юй «Беседы и суждения».*

Квадратную матрицу порядка k и вида

$$\mathsf{J}_k(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

будем называть жордановой клеткой порядка k. Так, например, следующие матрицы являются жордановыми клетками соответственно первого, второго, третьего и четвертого порядков

$$\mathsf{J}_1(\alpha) = (\alpha), \qquad \mathsf{J}_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{J}_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{J}_4(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Будем говорить, что матрица имеет жорданову нормальную форму, если она является клеточно–диагональной с жордановыми клетками по главной диагонали

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{J}_{k_1}(\alpha_1) & & & \text{\Large 0} \\ & \mathsf{J}_{k_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \mathsf{J}_{k_m}(\alpha_m) \end{pmatrix},$$

причем числа α_i могут совпадать и жордановы клетки могут иметь одинаковые порядки, $1 \le i \le m$, $1 \le m \le n$. В частности, диагональные матрицы имеют жорданову нормальную форму. У диагональных матриц все жордановы клетки первого порядка. Следующие матрицы дают примеры различных матриц, имеющих жорданову нормальную форму

$$\left(\begin{array}{rr|rrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В этих матрицах жордановы клетки специально выделены линиями.

Пусть характеристический многочлен имеет вид

$$\varphi_A(\lambda) = (\alpha_0 - \lambda)^n.$$

То есть имеется единственный корень кратности n. Тогда этот корень принадлежит полю $\mathbb{F}$ и, значит, спектр состоит из одного собственного значения α_0.

Для нахождения жордановой нормальной формы в этом случае можно применить следующий алгоритм. Заметим прежде всего, что все жордановы клетки на главной диагонали имеют число α_0. Пусть неотрицательное целое число m_1 равно количеству жордановых клеток порядка 1, неотрицательное целое число m_2 равно количеству жордановых клеток порядка 2 и так далее, неотрицательное целое число m_l равно количеству жордановых клеток порядка l в матрице, имеющей жорданову нормальную форму, причем клеток порядка более высокого, чем l нет. Для матрицы $\mathsf{A} - \alpha_0\mathsf{E}$ можно рассмотреть ее h–е степени $(\mathsf{A} - \alpha_0\mathsf{E})^h$. Пусть r_h есть ранг матрицы $(\mathsf{A} - \alpha_0\mathsf{E})^h$ для $h = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1$. Тогда для чисел r_h имеют место следующие строгие неравенства

$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_l \tag{4.3}$$

и равенства

$$r_0 = n, \qquad r_l = r_{l+1} = \cdots = r_n = r_{n+1} = 0. \tag{4.4}$$

Эти ранги единственным образом определяют числа m_h, причем их можно найти по формуле

$$m_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}, \qquad h = 1, 2, \ldots, l. \tag{4.5}$$

Если $r_1 = 0$, то матрица диагональна с собственным числом α_0 на диагонали для матриц любого порядка. Для матриц с небольшими порядками можно рассмотреть все возможные случаи для жордановой нормальной формы. Далее систематизированы все такие случаи в зависимости от рангов r_i для не диагональных матриц порядков 2, 3, 4, 5, 6. Для матриц второго порядка, если $r_1 = 1$, то матрица имеет жорданову нормальную форму вида $\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 \\ 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}$. Других случаев нет. Для матриц третьего порядка есть два варианта не диагональной жордановой нормальной формы

$r_1 = 1$,
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2$,
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Для матриц четвертого порядка есть уже 4 варианта не диагональной жордановой нормальной формы

$r_1 = 1$,
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2, r_2 = 1$,
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2,\ r_2 = 0,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 3,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Следует обратить внимание на то, что для однозначного определения вида жордановой нормальной формы для матриц 4 порядка уже не достаточно только ранга r_1. Если он равен 2, то нужно привлекать r_2.

Для матриц пятого порядка имеется шесть не диагональных вариантов жордановой нормальной формы

$r_1 = 1,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2, r_2 = 0,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2,\ r_2 = 1,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 3, r_2 = 1,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 3, r_2 = 2,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 4,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Для матриц шестого порядка имеется уже десять не диагональных вариантов жордановой нормальной формы

$r_1 = 1,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2, r_2 = 0,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 3, r_2 = 0,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1 = 2, r_2 = 1,$
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

$r_1=3, r_2=1,$
$$\begin{pmatrix}\alpha_0&1&0&0&0&0\\0&\alpha_0&1&0&0&0\\0&0&\alpha_0&0&0&0\\0&0&0&\alpha_0&1&0\\0&0&0&0&\alpha_0&0\\0&0&0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix}.$$

$r_1=4, r_2=2, r_3=0,$
$$\begin{pmatrix}\alpha_0&1&0&0&0&0\\0&\alpha_0&1&0&0&0\\0&0&\alpha_0&0&0&0\\0&0&0&\alpha_0&1&0\\0&0&0&0&\alpha_0&1\\0&0&0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix}.$$

$r_1=3, r_2=2,$
$$\begin{pmatrix}\alpha_0&1&0&0&0&0\\0&\alpha_0&1&0&0&0\\0&0&\alpha_0&1&0&0\\0&0&0&\alpha_0&0&0\\0&0&0&0&\alpha_0&0\\0&0&0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix}.$$

$r_1=4, r_2=2, r_3=1,$
$$\begin{pmatrix}\alpha_0&1&0&0&0&0\\0&\alpha_0&1&0&0&0\\0&0&\alpha_0&1&0&0\\0&0&0&\alpha_0&0&0\\0&0&0&0&\alpha_0&1\\0&0&0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix}.$$

$r_1=4, r_2=3,$
$$\begin{pmatrix}\alpha_0&1&0&0&0&0\\0&\alpha_0&1&0&0&0\\0&0&\alpha_0&1&0&0\\0&0&0&\alpha_0&1&0\\0&0&0&0&\alpha_0&0\\0&0&0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix}.$$

$r_1=5,$
$$\begin{pmatrix}\alpha_0&1&0&0&0&0\\0&\alpha_0&1&0&0&0\\0&0&\alpha_0&1&0&0\\0&0&0&\alpha_0&1&0\\0&0&0&0&\alpha_0&1\\0&0&0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix}.$$

Пример 83 Найти жорданову форму следующих матриц:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}0&6&4&0\\0&4&0&2\\0&-1&2&-1\\1&-3&-2&2\end{pmatrix};\qquad \text{б)}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&0&0\\-1&-1&-1&-2&2&1\\-1&0&-1&-1&2&1\\2&1&1&2&-3&-2\\2&1&-1&1&-2&-1\\-1&0&-1&-1&2&1\end{pmatrix}.$$

Решение. а). Необходимо сначала найти характеристический многочлен

$$\varphi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&6&4&0\\0&4-\lambda&0&2\\0&-1&2-\lambda&-1\\1&-3&-2&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{C_2+2C_3}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda&6&4&0\\0&2-\lambda&4-2\lambda&0\\0&-1&2-\lambda&-1\\1&-3&-2&2-\lambda\end{vmatrix}\underset{C^3-2C^2}{=}\begin{vmatrix}-\lambda&6&-8&0\\0&2-\lambda&0&0\\0&-1&4-\lambda&-1\\1&-3&4&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-8&0\\0&4-\lambda&-1\\1&4&2-\lambda\end{vmatrix}\overset{C_1+\lambda C_3}{=}(2-\lambda)\begin{vmatrix}0&4\lambda-8&\lambda(2-\lambda)\\0&4-\lambda&-1\\1&4&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 4(\lambda-2) & \lambda(2-\lambda) \\ 4-\lambda & -1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} -4 & \lambda \\ 4-\lambda & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)^2(4-4\lambda+\lambda^2) = (2-\lambda)^4.$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет единственный корень $\lambda = 2$ и, следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{2\}$. Тогда

$$\mathsf{A} - 2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг r_1 матрицы $\mathsf{A} - 2\mathsf{E}$ равен 2. Найдем квадрат этой матрицы

$$(\mathsf{A} - 2\mathsf{E})^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -8 & 8 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что ранг последней матрицы $r_2 = 1$. Так как из (4.3) следует, что $r_2 > r_3$, то $r_3 = 0$. Кроме того $r_0 = 4$ и $r_4 = 0$. Тогда

$$m_1 = r_0 - 2r_1 + r_2 = 4 - 4 + 1 = 1;$$
$$m_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 2 - 2 + 0 = 0;$$
$$m_3 = r_2 - 2r_3 + r_4 = 1 - 0 + 0 = 1.$$

Значит, жорданова нормальная форма матрицы имеет одну клетку порядка 1 и одну клетку порядка 3. Теперь уже нетрудно построить и саму матрицу, имеющую жорданову нормальную форму:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Замечание. Конечно, только что полученная жорданова нормальная форма для матриц четвертого порядка в соответствии с проведенной выше систематизацией по рангам $r_1 = 2$ и $r_2 = 1$ однозначно определяется без вычисления чисел m_i.

б). Характеристический многочлен равен

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1-\lambda & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2-\lambda & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

Его можно вычислить, проделав следующие операции. 1. Из шестой строки определителя вычесть третью и затем к третьему столбцу прибавить шестой. В результате последняя строка будет содержать пять нулевых элементов. Определитель следует разложить по этой строке. 2. В получившемся определителе пятого порядка к пятой строке можно прибавить третью строку и вычесть первую. Затем пятый столбец прибавить к первому столбцу и вычесть из третьего столбца. В результате пятая строка будет содержать четыре нулевых элемента. Определитель следует разложить по этой строке. 3. В получившемся определителе четвертого порядка к последней строке можно прибавить вторую строку и затем из второго столбца вычесть четвертый столбец. В результате четвертая строка будет содержать три нулевых элемента. Определитель следует разложить по этой строке. 4. В получившемся определителе третьего порядка из третьей строки можно вычесть вторую строку и затем третий столбец прибавить ко второму столбцу. Дальнейшие действия очевидны. Таким образом, характеристический многочлен имеет единственный корень $\lambda = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{0\}$. Стандартный путем проверяется, что ранг матрицы A равен 4. Ее квадрат

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2, а третья степень матрицы является нулевой матрицей и, следовательно, имеет ранг 0. В результате этих вычислений получили, что $r_1 = 4$, $r_2 = 2$ и $r_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= r_0 - 2r_1 + r_2 = 6 - 8 + 2 = 0; \\ m_2 &= r_1 - 2r_2 + r_3 = 4 - 4 + 0 = 0; \\ m_3 &= r_2 - 2r_3 + r_4 = 2 - 0 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Значит, жорданова нормальная форма матрицы имеет две клетки порядка 3. Теперь уже нетрудно построить и саму матрицу, имеющую жорданову нормальную форму:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В случае, когда характеристический многочлен имеет несколько различных корней, причем все они принадлежат полю $\mathbb{F}$ и, следовательно, являются собственными значениями, для каждого из них можно применить вышеизложенный алгоритм. А именно, пусть k есть алгебраическая кратность собственного значения α и r_h есть ранг матрицы $(\mathsf{A} - \alpha\mathsf{E})^h$ для $h = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1$. Тогда существует такое натуральное l, $0 < l \le k$, что имеют место следующие неравенства (ср. (4.3), (4.4))

$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_l \tag{4.6}$$

и равенства

$$r_0 = n, \qquad r_l = r_{l+1} = r_{l+2} = \cdots = r_k = r_{k+1} = n - k. \tag{4.7}$$

Пусть m_h равно числу жордановых клеток порядка h с собственным значением α на диагонали. Тогда для собственного значения α ранги r_i единственным образом определяют числа m_h по такой же, как и при одноточечном спектре, формуле (см.(4.5))

$$m_h = r_{h-1} - 2r_h + r_{h+1}, \qquad h = 1, 2, \ldots, k. \tag{4.8}$$

Пример 84 Найти жорданову форму матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как обычно, начинаем с нахождения характеристического многочлена (проверьте, выполнив все необходимые вычисления)

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3-\lambda & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2)^2.$$

Он имеет два корня $\lambda = 0$ и $\lambda = -2$, причем их кратности равны двум.

Рассмотрим сначала собственное значение $\alpha = 0$. Легко найти ранг матрицы A:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг r_1 матрицы A равен 3. Так как алгебраическая кратность $k = 2$, то $r_2 = r_3 = n - k = 4 - 2 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= r_0 - 2r_1 + r_2 = 4 - 2\cdot 3 + 2 = 0, \\ m_2 &= r_1 - 2r_2 + r_3 = 3 - 2\cdot 2 + 2 = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, имеется одна клетка порядка 2 с нулем на диагонали.

Аналогично, для собственного значения $\alpha = -2$ легко найти ранг матрицы

$$\mathsf{A} + 2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Он равен двум: $r_1 = 2$. Так как алгебраическая кратность k собственного значения $\alpha = 2$ равна 2, то $r_2 = r_3 = 4 - 2 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= r_0 - 2r_1 + r_2 = 4 - 2 \cdot 2 + 2 = 2, \\ m_2 &= r_1 - 2r_2 + r_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Значит, имеется две клетки порядка 1 с собственным значением $\alpha = -2$ на диагонали. Всё вместе дает следующую матрицу, имеющую жорданову нормальную форму

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Жорданов базис

Недостаточно постичь премудрость, нужно также уметь пользоваться ею. *Цицерон Марк Туллий.*

Существует несколько различных алгоритмов построения жорданова базиса. Здесь будет кратко изложен алгоритм, опубликованный в [12].

Будем говорить, что система векторов S построена по семейству систем векторов $S_1, S_2, \ldots, S_m$, если S получена следующим образом: сначала записаны подряд и в том же порядке все векторы системы S_1, затем подряд и в том же порядке все векторы системы S_2 и так далее и, наконец, подряд и в том же порядке все векторы системы S_m.

Пусть характеристический многочлен имеет вид $\varphi_A(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$. В этом случае жорданов базис есть линейно независимая полная система, построенная по семейству цепочек оператора $A - \alpha I$. Напомним, что система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$ называется цепочкой, если $(A - \alpha I)\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$, $i = 2, \ldots, s$, и $(A - \alpha I)\mathbf{x}_1 = 0$. Из этого определения видно, что последний элемент $\mathbf{x}_s$ цепочки порождает всю цепочку

$$\mathbf{x}_1 = (A - \alpha I)^{s-1}\mathbf{x}_s, \quad \mathbf{x}_2 = (A - \alpha I)^{s-2}\mathbf{x}_s, \ldots, \mathbf{x}_{s-1} = (A - \alpha I)\mathbf{x}_s, \quad \mathbf{x}_s.$$

Матрица линейного оператора A в жордановом базисе имеет жорданову нормальную форму, причем каждой цепочке соответствует жорданова клетка с числом α на главной диагонали и порядка равного длине цепочки.

В дальнейшем часто будет использоваться следующее свойство семейства цепочек. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_m$ есть цепочки векторов оператора $A - \alpha I$. Система S, построенная по семейству цепочек S_1, S_2, $\ldots$, S_m, линейно независима тогда и только тогда, когда первые векторы этих цепочек образуют линейно независимую систему.

Векторы двух цепочек, находящиеся на одинаковых расстояниях от начала, называются соответствующими. Если длина цепочки $|S_i| \le |S_j|$, то у любого вектора цепочки S_i есть соответствующий вектор в цепочке S_j.

Элементарными преобразованиями цепочек (ЭПЦ) называются следующие преобразования:

1) отбрасывание первого вектора цепочки, если он равен нулю;

2) прибавление ко всем элементам цепочки S_i соответствующих элементов цепочки S_j, удовлетворяющей условию $|S_i| \le |S_j|$, $i \ne j$, умноженных на произвольный элемент $\alpha \in \mathbb{F}$. Это ЭПЦ будем обозначать $S_i + \alpha S_j$.

Основные свойства ЭПЦ в следующем:

а) в результате применения ЭПЦ из цепочек снова получаются цепочки;

б) если система S построена по семейству цепочек S_1, S_2, $\ldots$, S_m и система S' построена по семейству цепочек S'_1, $S'_2, \ldots, S'_{m'}$, полученных в результате ЭПЦ из семейства S_1, S_2, $\ldots$, S_m, то линейные оболочки равны $\ell(S) = \ell(S')$. Иными словами, ЭПЦ не меняют полноту системы, построенной из семейства цепочек.

Теперь можно описать сам алгоритм построения жорданова базиса. В конечномерном пространстве $\mathbb{V}$ можно взять любую полную систему векторов. Обычно удобно брать базис. Каждый вектор $\mathbf{e}_i$ полной системы порождает цепочку S_i (у которой этот вектор стоит на последнем месте), $i = 1, 2, \ldots, k$. Получили семейство цепочек S_1, S_2, $\ldots$, S_n. Далее

1) отбрасывая нулевые векторы цепочек (или всю цепочку, если она состоит лишь из нулевых векторов), добьемся того, чтобы все первые векторы цепочек были отличны от нуля;

2) расположим цепочки в порядке убывания их длин:

$$|S_1| \ge |S_2| \ge \cdots \ge |S_k|;$$

3) если первые векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$ полученных цепочек линейно независимы, то система, построенная по семейству данных цепочек, также линейно независима и построение закончено. Если система первых векторов линейно зависима, то один из них является линейной комбинацией предыдущих по свойствам линейно (не)зависимых систем (см. стр. 52)

$$\mathbf{v}_l = \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_{l-1}\mathbf{v}_{l-1}, \qquad l \geq 2, \quad \mu_1, \ldots, \mu_{l-1} \in \mathbb{F}.$$

и с помощью ЭПЦ $S_l - \mu_1 S_1 - \cdots - \mu_{l-1} S_{l-1}$ этот вектор можно сделать нулевым. После этого перейти к пункту 1).

Применение операций 1), 2), 3), 1) к линейно зависимой системе S приводит к отбрасыванию по крайней мере одного вектора. Поэтому после конечного числа шагов мы получим линейно независимую систему. А так как полнота не меняется при ЭПЦ, то система останется полной. Следовательно, это будет базис, состоящий из цепочек, то есть жорданов базис. Здесь следует заметить, что при практическом нахождении жорданова базиса с помощью этого алгоритма иногда удается получить требуемую систему, не доводя преобразований до конца. Это возможно в том случае, когда у полученного семейства цепочек можно найти подсемейство с линейно независимым обьединением и числом векторов, равным размерности пространства.

Если характеристический многочлен над полем $\mathbb{F}$ имеет каноническое разложение

$$\varphi_A(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)^{k_1}(\alpha_2 - \lambda)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (\alpha_p - \lambda)^{k_p}, \qquad \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

то оператор A нужно рассматривать на каждом корневом подпространстве отдельно. Для этого нужно найти какую-нибудь полную систему (обычно базис) в корневом подпространстве. По каждому вектору этой системы построить цепочку. Так как к индуцированному в корневом подпространстве оператору можно применить вышеизложенный алгоритм, то, применяя его, постоим жорданов базис в каждом корневом подпространстве. Объединяя их, получим жорданов базис во всем пространстве.

Пример 85 Линейный оператор A в пространстве $\mathbb{R}^4$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно):

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Характеристический многочлен

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 4-\lambda & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_4 - C_3 + C_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 4-\lambda & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^3 + C^4}{\overset{C^1 - C^4}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4.$$

Таким образом, имеется единственный корень характеристического многочлена $\lambda = 2$. Тогда

$$\mathsf{A} - 2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве полной системы здесь удобно взять стандартный базис пространства $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)^\tau$. Тогда

$$(A-2I)\mathbf{e}_1 = (-3,-4,1,4)^\tau,\ (A-2I)\mathbf{e}_2 = (2,2,0,-2)^\tau,$$
$$(A-2I)\mathbf{e}_3 = (2,3,-1,-3)^\tau,\ (A-2I)\mathbf{e}_4 = (-1,-2,1,2)^\tau.$$

Обратите внимание, что полученные векторы совпадают со столбцами матрицы $\mathsf{A} - 2\mathsf{E}$. Далее

$$(A-2I)^2\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$(A-2I)^2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A-2I)^2\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$(A-2I)^2\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Так как все полученные векторы пропорциональны вектору $(A-2I)\mathbf{e}_2$, образ которого равен нулю, то и $(A-2I)^3\mathbf{e}_i = 0$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Нами построены цепочки векторов

$$\begin{aligned} &S_1: \ (A-2I)^2\mathbf{e}_1, \ (A-2I)\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_1; \\ &S_2: \ (A-2I)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2; \\ &S_3: \ (A-2I)^2\mathbf{e}_3, \ (A-2I)\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_3; \\ &S_4: \ (A-2I)^2\mathbf{e}_4, \ (A-2I)\mathbf{e}_4, \ \mathbf{e}_4. \end{aligned}$$

Теперь, следуя вышеизложенному алгоритму, нужно упорядочить цепочки по длине, а для удобства можно их записать по строкам в следующую матрицу

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

С помощью ЭПЦ будем приводить крайнюю левую матрицу, содержащую все первые элементы цепочек, к ступенчатой форме. После S_2+S_1, S_3-S_1, S_4+2S_1 получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -7 & 2 & 8 & & & & \end{array}\right).$$

После вычеркивания первых нулевых векторов получим (после вычеркивания длины цепочек меняются и в случаи необходимости нужно снова упорядочить цепочки по длине)

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ -6 & -7 & 2 & 8 & & & & & & & & \end{array}\right). \tag{4.9}$$

Левая матрица изменилась. Снова будем приводить ее к ступенчатой форме. После S_2-S_1, S_3+2S_1, S_4-6S_1 получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -8 & 2 & 9 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{array}\right).$$

Снова вычеркнем нулевые векторы

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & -4 & & & & & & & & \\ -7 & -8 & 2 & 9 & & & & & & & & \\ 0 & -1 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{array}\right).$$

После $S_2 + 4S_1$, $S_3 - 7S_1$ матрица примет вид

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & -1 & 2 & 2 & & & & & & & & \\ 0 & -1 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{array}\right).$$

После $S_4 - S_3$ и вычеркивания нулевых векторов получим

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr} -1 & -1 & 0 & 1 & -3 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{array}\right).$$

Левая матрица приведена к ступенчатой форме, следовательно, система, состоящая из первых векторов цепочек, линейно независима. Значит, и вся система векторов линейно независима. Так как ее полнота не изменилась, то осталось записать полученный жорданов базис
$\mathbf{u}_1 = (-1,-1,0,1)^\tau, \mathbf{u}_2 = (-3,-4,1,4)^\tau, \mathbf{u}_3 = (1,0,0,0)^\tau, \mathbf{u}_4 = (0,-1,2,2)^\tau.$
Каждой цепочке длины h соответствует клетка порядка h в жордановой нормальной форме. Наш базис состоит из двух цепочек. Первая цепочка длины 3, вторая — длины 1. Следовательно, матрица оператора в этом базисе имеет две клетки. Первая клетка порядка 3, вторая — порядка 1 (клетки выделены линиями)

$$A_u = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Так как все вычисления проводились в том базисе e, в котором дана матрица оператора, то в этом же базисе даны векторы жорданова базиса $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$. Тогда по определению матрица перехода от первого базиса ко второму имеет вид

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Замечание</u>. Жорданов базис уже можно найти по матрице (4.9). Он состоит из той же цепочки $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ и цепочки, состоящей из одного вектора $\mathbf{v} = (-6,-7,2,8)^\tau$. Так как первые векторы этих двух цепочек линейно независимы, то и система из четырех векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}$ линейно независима. Следовательно, это искомый базис.

б). Характеристический многочлен находим в результате следующих выкладок

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_4}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{C^4 + C^3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 5 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 + (2-\lambda)C_3 \\ = \\ C_2 + C_3 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3-2\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 3-\lambda & 5-\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 3-2\lambda+\lambda^2 \\ 3-\lambda & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(1-\lambda).$$

Мы получили, что характеристический многочлен имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3,4} = 2$. Тогда

$$\mathsf{A} - 2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(\mathsf{A} - 2\mathsf{E})^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Так как ранг матрицы $(\mathsf{A} - 2\mathsf{E})^2$ равен 1, то $\dim\ker(A-2I)^2 = 3$ и совпадает с кратностью корня $\lambda = 2$ характеристического многочлена. Отсюда $\dim\ker(A-2I)^2 = \dim\ker(A-2I)^3$, а так как $\ker(A-2I)^2 \subseteq \ker(A-2I)^3$, то $\ker(A-2I)^2 = \ker(A-2I)^3$. Из (4.10) получаем, что общее решение системы уравнений $(\mathsf{A} - 2\mathsf{E})^2\mathbf{x} = 0$ можно записать в виде $x_2 = 2x_1 - x_3 + 2x_4$, $\forall x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{F}$. Тогда фундаментальная система решений, а, следовательно, и базис корневого подпространства $\ker(A-2I)^3$ есть система векторов

$$\mathbf{f}_1 = (1,2,0,0)^\tau, \quad \mathbf{f}_2 = (0,-1,1,0)^\tau, \quad \mathbf{f}_3 = (0,2,0,1)^\tau.$$

Эти векторы порождают цепочки. Найдем их

$$(A-2I)\mathbf{f}_1 = (2,3,-1,-1)^\tau, (A-2I)\mathbf{f}_2 = 0, (A-2I)\mathbf{f}_3 = (4,6,-2,-2)^\tau,$$

$$(A-2I)^2\mathbf{f}_1 = (A-2I)^2\mathbf{f}_3 = 0.$$

Запишем цепочки векторов в матрицу по строкам, упорядочив по длине

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

Легко видеть, что первые векторы первой (это вектор $(2,3,-1,-1)^\tau$) и третьей (это вектор $(0,-1,1,0)^\tau$) цепочек линейно независимы. Значит, первая и третья цепочки образуют линейно независимую систему

$$\mathbf{u}_1 = (2,3,-1,-1)^\tau, \quad \mathbf{u}_2 = (1,2,0,0)^\tau, \quad \mathbf{u}_3 = (0,1,-1,0)^\tau.$$

Это есть искомый жорданов базис в корневом подпространстве $\ker(A-2I)^3$.

Корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\alpha = 1$, совпадает с собственным подпространством, причем его размерность равна 1. Базис в нем состоит из одного собственного вектора. Его нетрудно найти $\mathbf{u}_4 = (-1,-2,1,1)^\tau$. Добавляя его, получим жорданов базис во всем пространстве $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$. Этот базис состоит из цепочек длин 2 и 1, отвечающих собственному значению $\alpha = 2$ и цепочки длины 1, отвечающей собственному значению $\alpha = 1$. Значит, жорданова нормальная форма будет содержать клетки порядков 2 и 1 с числом 2 на главной диагонали и клетку порядка 1 с числом 1 на главной диагонали

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Матрица перехода имеет вид

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Инвариантные подпространства

> То, что нам все же удалось решить задачу, значит лишь одно: мы что-то не учли.
> *(Следствие из законов Мерфи.)*

Подпространство $\mathbb{U}$ пространства $\mathbb{V}$ называется инвариантным подпространством линейного оператора A, если $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{U}$ вектор $A\mathbf{y} \in \mathbb{U}$. Это значит, что линейный оператор A любой вектор инвариантного подпространства переводит в некоторый вектор этого же подпространства. Можно сказать, что все инвариантное подпространство линейным оператором A переводится в себя. Это обычно записывается формулой $A(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Нулевое подпространство и все пространство являются инвариантными для любого линейного оператора. Не всякое подпространство, инвариантное для одного линейного оператора, будет инвариантным и для другого. Если спектр линейного оператора не пуст, то линейная оболочка, порожденная любым собственным вектором, является инвариантным одномерным подпространством. И наоборот, любое одномерное инвариантное подпространство состоит из собственных векторов и нулевого вектора. Линейная оболочка $\ell(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$ является инвариантным подпространством линейного оператора A тогда и только тогда, когда $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ векторы $A\mathbf{f}_i \in \ell(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$. Сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами этого линейного оператора. Для любого многочлена $f \in \mathbb{F}[x]$ ядро $\ker B$ и образ $\operatorname{im} B$ линейного оператора $B = f(A)$ являются инвариантными подпространствами оператора A, в частности это справедливо для ядра и образа самого оператора A. Кроме того, любое подпространство, содержащееся в ядре $\ker A$, и любое подпространство, содержащее образ $\operatorname{im} A$, являются инвариантными подпространствами линейного оператора A.

Пусть $\mathbb{U}$ является инвариантным подпространством линейного оператора A. Тогда линейный оператор $A_1 : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ называется индуцированным, если $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{U} \quad A_1\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.

Пример 86 Линейный оператор задан в некотором базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ следующей матрицей. Покажите, что линейная оболочка, натянутая на векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, является двумерным инвариантным подпространством и найдите в базисе $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ матрицу индуцированного в этом подпространстве оператора.

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_4$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$.

Решение. Линейная оболочка $\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ будет инвариантным подпространством оператора A тогда и только тогда, когда $A\mathbf{u}_1 \in \ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ и $A\mathbf{u}_2 \in \ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Это и нужно проверить. Все вычисления удобно вести в координатах базиса e.

По условию $(\mathbf{u}_1)_e = (1, 0, 0, -1)^\tau$, $(\mathbf{u}_2)_e = (1, 1, 1, -1)^\tau$. Тогда

$$A_e(\mathbf{u}_1)_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_e(\mathbf{u}_2)_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Теперь проверим, что полученные векторы принадлежат линейной оболочке $\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Для этого достаточно разложить векторы $A\mathbf{u}_1$ и $A\mathbf{u}_2$ в линейную комбинацию векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Пусть $A\mathbf{u}_1 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$. Тогда коэффициенты этой линейной комбинации являются решением системы уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из второго уравнения системы уравнений нетрудно получить, что $\alpha_2 = -1$. Подставляя это значение в первое уравнение видим, что $\alpha_1 = 1$.

Аналогично для $A\mathbf{u}_2 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$. Тогда коэффициенты этой линейной комбинации являются решением системы уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из второго уравнения видно, что $\alpha_2 = 1$. Затем, из первого уравнения получаем, что $\alpha_1 = 2$.

Значит, $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $A\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Это и означает то, что $A\mathbf{u}_1 \in \ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $A\mathbf{u}_2 \in \ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Тем самым доказано, что данное подпространство инвариантно для оператора A. Если A_1 — индуцированный в $\ell(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ оператор, полученный сужением оператора A на это подпространство, то на векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ он действует также, как и оператор A. Следовательно, $A_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $A_1\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Из последних двух равенств и определения матрицы линейного оператора для A_1 его матрица в базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ имеет вид

$$(A_1)_u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен линейного оператора делится на характеристический многочлен им индуцированного (в инвариантном подпространстве) линейного оператора. Это свойство можно применить для нахождения всех инвариантных подпространств линейного оператора.

Пример 87 Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные относительно линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Решение. Как обычно, отождествим линейный оператор A с его матрицей A_e. Если $\mathbb{U}$ есть подпространство трехмерного пространства $\mathbb{V}$, то его размерность $\dim \mathbb{U} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Очевидно, что подпространство $\mathbb{U} = \{0\}$ нулевой размерности является инвариантным подпространством линейного оператора A. Других подпространств нулевой размерности нет.

Одномерное подпространство является инвариантным для A тогда и только тогда, когда оно порождено собственным вектором оператора A. Значит, если будут найдены все собственные векторы, то будут найдены все одномерные инвариантные подпространства. Характеристический многочлен линейного оператора

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (4+0+1)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \lambda +$$

$$+ \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4.$$

Легко заметить корень $\lambda_1 = 1$ характеристического многочлена $\varphi_A(\lambda)$. Если разделить $\varphi_A(\lambda)$ на $\lambda - 1$, например, используя алгоритм Горнера

	-1	5	-8	4
1	-1	4	-4	0

,

то получим $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2$. Отсюда $\operatorname{Spec} A = \{1, 2\}$. Теперь можно найти и соответствующие собственные векторы. Для собственного значения $\alpha = 1$

$$\mathsf{A} - \mathsf{E} = \\ = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 + 2C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_3 = -x_1/2$, $x_2 = x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{F}$ и фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{f}_1 = (2, 2, -1)^\tau$. Тогда любой собственный вектор имеет вид $\mathbf{u} = \mu\mathbf{f}_1$, $\mu \neq 0$.

Для собственного значения $\alpha = 2$

$$\mathsf{A} - 2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение имеет вид $x_1 = x_2 - x_3$, $\forall x_2, x_3 \in \mathbb{F}$, и, следовательно, фундаментальная система решений состоит из следующих двух векторов $\mathbf{f}_2 = (1, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-1, 0, 1)^\tau$. Тогда все собственные векторы $\mathbf{v}$ (и только они) задаются формулой $\mathbf{v} = \mu\mathbf{f}_2 + \nu\mathbf{f}_3 = (\mu - \nu, \mu, \nu)^\tau$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$. Теперь ясно, что любое одномерное инвариантное подпространство $\mathbb{U}$ порождено либо вектором $\mathbf{f}_1$: $\mathbb{U} = \ell(\mathbf{f}_1)$, либо вектором $\mathbf{v}$: $\mathbb{U} = \ell(\mathbf{v})$. Во втором случае получается целое семейство одномерных подпространств, зависящих от параметров μ, ν. Если линейную оболочку, порожденную парой (линейно независимых) векторов $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ отождествить с плоскостью в трехмерном пространстве, то это семейство одномерных подпространств отождествляется с пучком прямых, лежащих в этой плоскости и с центром пучка в начале координат.

Пусть теперь $\mathbb{U}$ — некоторое двумерное инвариантное подпространство. Рассмотрим сужение оператора A на $\mathbb{U}$ и характеристический многочлен $\varphi_{A_1}(\lambda)$ индуцированного в $\mathbb{U}$ оператора A_1. Характеристический многочлен $\varphi_A(\lambda)$ линейного оператора A делится на $\varphi_{A_1}(\lambda)$. Так как $\varphi_A(\lambda)$ найден выше, степень $\deg \varphi_{A_1}(\lambda) = \dim \mathbb{U} = 2$, то $\varphi_{A_1}(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)$ или $\varphi_{A_1}(\lambda) = (2 - \lambda)^2$. В первом случае подпространство $\mathbb{U}$ порождается двумя (линейно независимыми) собственными векторами, отвечающими двум различным собственным значениям. Таким образом, двумерное инвариантное подпространство порождается векторами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{v} = \mu\mathbf{f}_2 + \nu\mathbf{f}_3$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$: $\mathbb{U} = \ell(\mathbf{f}_1, \mathbf{v})$. Это семейство подпространств, зависящих от параметров μ, ν. Во втором случае возможно два варианта: либо есть пара линейно независимых собственных векторов для $\alpha = 2$ либо ее нет. При первой возможности подпространство $\mathbb{U}$ порождается этой парой собственных векторов, причем матрица индуцированного оператора A_1 диагональна в базисе, построенном из этих собственных векторов. При второй возможности не существует диагональной матрицы индуцированного оператора A_1 и, следовательно, подпространство $\mathbb{U}$ порождено цепочкой векторов оператора $A_1 - 2I$ (а следовательно, и оператора $A - 2I$). В данном примере имеет место первая возможность (собственные векторы $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$). Значит, инвариантное подпространство $\mathbb{U}$ есть линейная оболочка, порожденная парой этих векторов: $\mathbb{U} = \ell(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Других двумерных инвариантных подпространств больше нет.

Имеется также единственное трехмерное инвариантное подпространство — это само пространство $\mathbb{V}$. Ответ: $\{0\}$, $\ell(\mathbf{f}_1)$, $\ell(\mathbf{v})$, $\ell(\mathbf{f}_1, \mathbf{v})$, $\ell(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, $\mathbb{V}$.

Пример 88 Найти все подпространства трехмерного пространства, инвариантные относительно двух линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

$$A_e = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B_e = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Как обычно, отождествим линейные операторы A и B с их матрицами A_e и B_e соответственно. Очевидно, что тривиальные подпространства $\{0\}$ и $\mathbb{V}$ искомые. Найдем теперь все нетривиальные инвариантные подпространства линейного оператора A. Его характеристический многочлен

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^3-C^1}{\overset{C^2-C^1}{=}} (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(6-\lambda)^2.$$

Следовательно, $\operatorname{Spec} A = \{3, 6\}$. Теперь можно искать собственные векторы: для первого собственного значения $\alpha = 3$

$$\mathsf{A} - 3\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение имеет вид $x_3 = x_1$, $x_2 = x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{F}$ и фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^\tau$. Тогда множество всех собственных векторов $\mathbf{u}$ задается формулой $\mathbf{u} = \mu\mathbf{a}_1$, $\mu \neq 0$.

Для собственного значения $\alpha = 6$

$$\mathsf{A} - 6\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = -x_2 - x_3$, $\forall x_2, x_3 \in \mathbb{F}$, и фундаментальная система решений состоит из двух векторов: $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 1)^\tau$. Тогда множество всех собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, можно задать формулой $\mathbf{v} = \mu\mathbf{a}_2 + \nu\mathbf{a}_3 = (-\mu - \nu, \mu, \nu)^\tau$ при $|\mu| + |\nu| \neq 0$. Таким образом, любое одномерное инвариантное подпространство порождено либо вектором $\mathbf{a}_1$, либо вектором $\mathbf{v}$, а любое двумерное инвариантное подпространство порождено либо векторами $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, либо векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}$. Далее можно идти, как минимум, по одному из следующих двух сценариев. 1. Найти все нетривиальные инвариантные подпространства второго линейного оператора и выяснить, какие из инвариантных подпространств линейных операторов совпадают. 2. Проверить, какие из инвариантных подпространств первого линейного оператора являются инвариантными и для второго.

1. Пойдем сначала по первому пути. Для этого нужно все выкладки, какие были проведены для первого линейного оператора, повторить для второго линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора B можно найти следующим образом

$$\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -3-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 - 2C_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 3 \\ 14+2\lambda & -7-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C^1 + 2C^2}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -7-\lambda & 0 \\ 15 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-7-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 15 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(\lambda^2 - 4 - 45) = (7+\lambda)^2(7-\lambda).$$

Следовательно, $\operatorname{Spec} B = \{-7, 7\}$. Теперь будем искать собственные векторы. Для собственного значения $\alpha = 7$ $\mathsf{A} - 7\mathsf{E} =$

$$\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ -63 & 0 & 21 \\ 42 & 0 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение имеет вид $x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1$, $\forall x_1 \in \mathbb{F}$ и фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 3)^\tau$. Тогда множество всех собственных векторов задается формулой $\mathbf{x} = \gamma\mathbf{b}_1$, $\gamma \neq 0$.

Для собственного значения $\alpha = -7$

$$\mathsf{A} + 7\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы уравнений имеет вид $x_1 = -2x_2 - 3x_3$, $\forall x_2, x_3 \in \mathbb{F}$, и фундаментальная система решений состоит из двух векторов: $\mathbf{b}_2 = (-2, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{b}_3 = (-3, 0, 1)^\tau$. Тогда множество всех собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, можно задать формулой $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{b}_2 + \beta\mathbf{b}_3 = (-2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta)^\tau$ при $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Здесь ситуация повторяется. Любое одномерное инвариантное подпространство порождено либо вектором $\mathbf{b}_1$, либо вектором $\mathbf{w}$, а любое двумерное инвариантное подпространство порождено либо векторами $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, либо векторами $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{w}$.

Будем теперь искать одномерные подпространства, инвариантные относительно обоих линейных операторов. Для этого переберем все одномерные инвариантные подпространства первого оператора и выясним, какие из них совпадают с одномерными инвариантными подпространствами второго оператора.

а). Одномерные подпространства, порожденные векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$, не совпадают, так как эти векторы не пропорциональны.

б). Если одномерные подпространства, порожденные векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{w}$, совпадают при некоторых α и β, то тогда найдутся такие α и β, что $\mathbf{a}_1 = \alpha\mathbf{b}_2 + \beta\mathbf{b}_3$. Последнее равенство можно рассматривать как неоднородную систему уравнений с неизвестными α и β. Решим ее

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{C_1 + 2C_2 + 3C_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы уравнений равен двум, ранг расширенной матрицы равен трем. Значит, по теореме Кронекера-Капелли система уравнений несовместна. Поэтому здесь искомых подпространств нет.

в). Рассмотрим теперь одномерные подпространства, порожденные векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{b}_1$. Если они совпадают при некоторых μ и ν, то тогда найдутся такие μ и ν, что $\mathbf{b}_1 = \mu\mathbf{a}_2 + \nu\mathbf{a}_3$. Последнее равенство можно рассматривать как неоднородную систему уравнений с неизвестными μ и ν. Решим ее

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{C_1 + C_2 + C_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Система уравнений несовместна. Поэтому здесь искомых подпространств нет.

г). Осталось рассмотреть одномерные подпространства, порожденные векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Если они совпадают, то тогда найдутся такие μ и ν, α и β, что $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Последнее равенство перепишем подробнее

$$\begin{pmatrix} -\mu-\nu \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha-3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$. Тогда из равенства $-\mu-\nu = -2\alpha-3\beta$ после замены получим, что $\alpha = -2\beta$. Это дает нам общее решение $(\beta, -2\beta, \beta)^\tau$, $\beta \neq 0$. Сократив на β, получим вектор $\mathbf{v}_0 = (1, -2, 1)^\tau$, порождающий искомое подпространство. Подводя итоги, видим, что имеется только одно одномерное инвариантное подпространство $\ell(\mathbf{v}_0)$.

Будем теперь искать двумерные подпространства, инвариантные относительно обоих линейных операторов. Для этого точно так же переберем все двумерные инвариантные подпространства первого оператора (это $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$)и выясним, какие из них совпадают с двумерными инвариантными подпространствами второго оператора (это $\ell(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ и $\ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{w})$).

д). Сравним подпространства $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $\ell(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Проверим, принадлежит ли вектор $\mathbf{b}_2$ первому подпространству

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1+C_2+C_3} \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Система уравнений несовместна. Вектор $\mathbf{b}_2$ не принадлежит первому подпространству. Подпространства не совпадают.

е). Сравним подпространства $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $\ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{w})$. Проверим, принадлежит ли вектор $\mathbf{b}_1$ первому подпространству

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1+C_2+C_3} \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Система уравнений несовместна. Вектор $\mathbf{b}_1$ не принадлежит первому подпространству. Подпространства не совпадают.

ё). Сравним подпространства $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$ и $\ell(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Проверим, принадлежит ли вектор $\mathbf{a}_1$ второму подпространству

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1+2C_2+3C_3} \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Система уравнений несовместна. Вектор $\mathbf{a}_1$ не принадлежит второму подпространству. Подпространства не совпадают.

ж). Сравним подпространства $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$ и $\ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{w})$. Так как оба подпространства имеют одинаковую размерность, то достаточно установить, что одно подпространство вложено в другое. Проверим, принадлежит ли вектор $\mathbf{b}_1$ первому подпространству

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\mu-\nu & 1 \\ 1 & \mu & 2 \\ 1 & \nu & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1+C_2+C_3} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 1 & \mu & 2 \\ 1 & \nu & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - C_1/3 \\ \sim \\ C_3 - C_1/3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & \nu & 1 \end{array}\right).$$

Если $\mu \neq 0$, то две последние строки расширенной матрицы не пропорциональны. В этом случае система уравнений несовместна. Если же $\mu = 0$, то система уравнений совместна. Поэтому в этом случае вектор $\mathbf{b}_1$ принадлежит первому подпространству. Кроме того, при $\mu = 0$ вектор $\mathbf{v}$ пропорционален вектору $\mathbf{a}_3$. Тогда вместо вектора $\mathbf{v}$ можно взять вектор $\mathbf{a}_3$. Проверим теперь принадлежность первому подпространству вектора $\mathbf{w}$ хотя бы при каких-нибудь α, β

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & -1 & -2\alpha-3\beta \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1+C_3} \left(\begin{array}{cc|r} 2 & 0 & -2\alpha-2\beta \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \end{array}\right).$$

Для того, чтобы система уравнений была совместной, необходимо, чтобы две первые строки расширенной матрицы были пропорциональны, то есть $-\alpha-\beta = \alpha$. Отсюда $\beta = -2\alpha$. При этом условии система уравнений совместна и, значит, вектор $\mathbf{w} = \alpha(4, 1, -2)^\tau$, $\alpha \neq 0$, принадлежит подпространству $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$. Следовательно, это подпространство является искомым и единственным среди двумерных инвариантных подпространств.

2. Рассмотрим теперь второй способ решения. Он не требует нахождения собственных значений и собственных векторов второго линейного оператора. Займемся сначала одномерными инвариантными подпространствами. Если какой-либо из собственных векторов первого линейного оператора окажется собственным и для второго линейного оператора, то порожденная им линейная оболочка будет искомым подпространством. Из

$$B\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

следует, что вектор $\mathbf{a}_1$ не является собственным для второго линейного оператора и, следовательно, линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_1)$ не будет инвариантным подпространством этого линейного оператора.

Теперь настало время проверить, не является ли вектор $\mathbf{v}$ собственным для второго оператора. Для этого нужно найти

$$B\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mu-\nu \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6\mu+6\nu+2\mu+3\nu \\ -2\mu-2\nu-3\mu+6\nu \\ -3\mu-3\nu+6\mu+2\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\mu+9\nu \\ -5\mu+4\nu \\ 3\mu-\nu \end{pmatrix}. \qquad (4.12)$$

Для того, чтобы ненулевой вектор $\mathbf{v}$ был собственным необходимо и достаточно при некотором γ выполнение равенства

$$\begin{pmatrix} 8\mu+9\nu \\ -5\mu+4\nu \\ 3\mu-\nu \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\mu-\nu \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство векторов равносильно системе равенств

$$\begin{cases} 8\mu+9\nu = \gamma(-\mu-\nu); \\ -5\mu+4\nu = \gamma\mu; \\ 3\mu-\nu = \gamma\nu, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (8+\gamma)\mu+(9+\gamma)\nu = 0; \\ (5+\gamma)\mu-4\nu = 0; \\ 3\mu-(1+\gamma)\nu = 0. \end{cases}$$

Таким образом, то, что вектор $\mathbf{v}$ является собственным для второго оператора равносильно нетривиальной разрешимости последней системы нелинейных уравнений. Из последнего уравнения этой системы $\mu = (1+\gamma)\nu/3$. Подставим его в первые два уравнения. Тогда

$$\begin{cases} (8+\gamma)(1+\gamma)\nu/3+(9+\gamma)\nu = 0; \\ (5+\gamma)(1+\gamma)\nu/3-4\nu = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (8+8\gamma+\gamma+\gamma^2+27+3\gamma)\nu/3 = 0; \\ (5+5\gamma+\gamma+\gamma^2-12)\nu/3 = 0. \end{cases}$$

Если $\nu = 0$, то и $\mu = 0$, что влечет $\mathbf{v} = 0$. Поэтому $\nu \neq 0$ и, следовательно

$$\begin{cases} \gamma^2+12\gamma+35 = 0; \\ \gamma^2+6\gamma-7 = 0. \end{cases}$$

Корни первого квадратного уравнения $\gamma_1 = -5$, $\gamma_2 = -7$. Для второго $\gamma_3 = -7$, $\gamma_4 = -1$. Следовательно, система уравнений имеет решение $\gamma = -7$. Значит, $\mu = (1-7)\nu/3 = -2\nu$ и вектор $\mathbf{v} = (2\nu-\nu, -2\nu, \nu)^\tau = \nu(1,-2,1)^\tau$, $\nu \neq 0$. Таким образом, имеется лишь одно одномерное инвариантное для обоих операторов подпространство и оно совпадает с линейной оболочкой, натянутой на вектор $\mathbf{v}_0 = (1,-2,1)^\tau$.

Двумерными подпространствами инвариантными для первого оператора являются: а) линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$; б) семейство линейных оболочек $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$ для $\mathbf{v} = (-\mu-\nu, \mu, \nu)^\tau$ при $|\mu|+|\nu| \neq 0$. Осталось проверить какие из них являются инвариантными и для второго оператора. Линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ инвариантна для оператора B тогда и только тогда, когда $B\mathbf{a}_2 \in \ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $B\mathbf{a}_3 \in \ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Тогда

$$B\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор принадлежит линейной оболочке $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ тогда и только тогда, когда он является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Но последнее векторное уравнение не имеет решений относительно неизвестных γ, δ. Следовательно, линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ не инвариантна для второго оператора. Во втором случае для фиксированных μ, ν рассуждения аналогичны. Векторы $B\mathbf{a}_1 = (-1, 5, 11)^\tau$ и $B\mathbf{v} = (8\mu + 9\nu, -5\mu + 4\nu, 3\mu - \nu)^\tau$ уже были найдены ранее в (4.11) и (4.12). Теперь нужно выяснить принадлежат ли они линейной оболочке $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$ и при каких μ, ν. Здесь можно воспользоваться алгоритмом разложения вектора $B\mathbf{a}_1$ или $B\mathbf{v}$ в линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}$. Для $B\mathbf{a}_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\mu - \nu & -1 \\ 1 & \mu & 5 \\ 1 & \nu & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & (-\mu - \nu) & -1 \\ 0 & (2\mu + \nu) & 6 \\ 0 & (\mu + 2\nu) & 12 \end{array}\right).$$

По теореме Кронекера-Капелли последняя система совместна тогда и только тогда, когда две последние строки пропорциональны, то есть $(2\mu + \nu)/6 = (\mu + 2\nu)/12$. Отсюда $4\mu + 2\nu = \mu + 2\nu$ и $\mu = 0$. Значит, вектор $\mathbf{v} = \nu(-1, 0, 1)^\tau = \nu\mathbf{a}_3$, $\nu \neq 0$. Таким образом, из семейства подпространств $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{v})$ осталась только линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$, содержащая $B\mathbf{a}_1$. Аналогично проверим принадлежность вектора $B\mathbf{a}_3 = (9, 4, -1)^\tau$ этой линейной оболочке

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

По теореме Кронекера-Капелли система уравнений совместна. Значит, $B\mathbf{a}_3 \in \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$ и линейная оболочка $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$ инвариантна для второго оператора. Ответ: $\{0\}$, $\ell(\mathbf{v}_0)$, $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$, $\mathbb{V}$.

В вещественном линейном пространстве не для всякого линейного оператора имеется инвариантное одномерное подпространство. Например, оператор поворота плоскости на угол, не кратный числу π, не имеет таких подпространств. Однако любой линейный оператор, действующий в конечномерном вещественном линейном пространстве, имеет или одномерное или ("и"не исключается) двумерное инвариантное подпространство. Если спектр линейного оператора не пуст, то линейная оболочка, порожденная собственным вектором даст одномерное инвариантное подпространство (это не значит, что тогда у линейного оператора не может быть двумерного инвариантного подпространства). Если же спектр пуст, то одномерных инвариантных подпространств нет. Зато имеется двумерное инвариантное подпространство. Оно связано с корнем (точнее, с парой комплексно сопряженных корней) характеристического многочлена следующим образом. Пусть $\lambda = \xi + i\eta$ — невещественный ($\eta \neq 0$) корень характеристического многочлена линейного оператора A, действующего в конечномерном вещественном линейном пространстве. Тогда существуют два линейно независимых вектора $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ таких, что

$$A\mathbf{u} = \xi\mathbf{u} - \eta\mathbf{v}, \qquad A\mathbf{v} = \eta\mathbf{u} + \xi\mathbf{v}. \tag{4.13}$$

Векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ найти несложно, если известен невещественный корень характеристического многочлена. Для этого нужно найти матрицу оператора в каком-нибудь базисе и рассмотреть ее как комплексную (вне зависимости от исходного линейного оператора). Тогда невещественный корень характеристического многочлена будет ее собственным значением. Для него можно найти соответствующий собственный вектор матрицы. Разбив последний на действительную и мнимую часть, получим два вещественных вектора, которые и будут искомыми.

<u>Пример</u> 89 Найти все инвариантные подпространства размерностей 1 и 2 для линейного оператора, действующего в линейном вещественном трехмерном пространстве и заданного в некотором базисе матрицей:

$$A_e = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. Найдем, как обычно, характеристический многочлен заданного линейного оператора

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3+C_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -3-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^3-C^2}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & \lambda \\ 0 & -3-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)(-\lambda^2 - 2\lambda - 2).$$

Корни характеристического многочлена легко находятся: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Таким образом, спектр оператора A одноточечный:

$\mathrm{Spec}(A) = \{-3\}$. Так как алгебраическая кратность единственного собственного значения равна одному, то инвариантное одномерное подпространство единственно и порождается соответствующим собственным вектором. Найдем его.

$$A_e + 3\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - 2C_2 \\ \sim C_3 + C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривиальное решение последней системы уравнений легко угадывается: $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 0)$. Это искомый собственный вектор.

Индуцированный в двумерном инвариантном подпространстве линейный оператор имеет характеристический многочлен второй степени. Так как он делит характеристический многочлен исходного оператора, то в этом примере им может быть лишь многочлен $\varphi_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$. Для того, чтобы найти инвариантное подпространство, рассмотрим исходную матрицу как комплексную. Тогда ее спектр будет состоять из трех значений. Найдем собственный вектор этой комплексной матрицы, отвечающий одному из невещественных собственных значений. Например, для $\alpha = -1 - i$ имеем $A_e + (1 + i)\mathsf{E} =$

$$= \begin{pmatrix} -1+i & -1 & -2 \\ -2 & i & -1 \\ 2 & -2 & -1+i \end{pmatrix} \underset{C_3 + C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1+i & -1 & -2 \\ -2 & i & -1 \\ 0 & -2+i & -2+i \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения получаем, что можно взять $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Тогда из второго уравнения $x_1 = (ix_2 - x_3)/2$ и после подстановки в последнее равенство $x_2 = 1, x_3 = -1$ получаем, что $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$. Конечно, лучше было бы взять $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, тогда $x_1 = 1+i$. Значит, имеем собственный вектор $\mathbf{z} = (1 + i, 2, -2)$. Запишем его в виде $\mathbf{z} = (1, 2, -2) + i(1, 0, 0)$, выделив его вещественную и мнимую часть. Тогда линейная оболочка, порожденная двумя последними вещественными векторами $\mathbf{f}_2 = (1, 2, -2)$ и $\mathbf{f}_3 = (1, 0, 0)$, дает двумерное инвариантное подпространство исходного линейного оператора. Ответ. $\ell(\mathbf{f}_1)$, $\ell(\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$.

Минимальный многочлен

Господин Пажес произнес маленький спич и сказал: «Тем, у кого желудок недостаточно крепок, чтобы переварить порцию математики, которой мы с г-ном Коро вас угостим, лучше всего было бы тотчас же уйти. Но если вы любите математику, вам это будет нипочем! Ручаюсь». *Антуан де Сент – Экзюпери. Письмо к матери. Париж, 25 ноября, 1917 г.*

Ненулевой многочлен

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

называется аннулирующим многочленом линейного оператора A, если линейный оператор $f(A)$ является нулевым:

$$f(A) := a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + a_mI = O.$$

Для любого линейного оператора его множество аннулирующих многочленов непусто. В частности характеристический многочлен φ_A линейного оператора A является его аннулирующим многочленом: $\varphi_A(A) = O$[2].

Минимальным многочленом линейного оператора A называется его аннулирующий многочлен наименьшей степени с равным единице старшим коэффициентом. Для любого линейного оператора существует его минимальный многочлен. Этот многочлен единственен и все аннулирующие многочлены линейного оператора делятся на его минимальный многочлен.

Если характеристический многочлен над полем $\mathbb{F}$ имеет каноническое разложение

$$\varphi_A(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)^{k_1}(\alpha_2 - \lambda)^{k_2}\ldots(\alpha_m - \lambda)^{k_m},$$

где $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, $k_i > 0$, то минимальный многочлен имеет вид

$$\mu_A(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)^{l_1}(\alpha_2 - \lambda)^{l_2}\ldots(\alpha_m - \lambda)^{l_m}, \qquad 0 < l_i \leq k_i.$$

Натуральные числа l_i равны наибольшему порядку жордановых клеток с собственным значением α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, на диагонали для данной матрицы. А значит, эти числа l_i удовлетворяют следующим соотношениям (см. (4.3), (4.4))

$$r_{l_i-1} > r_{l_i} \quad \text{и} \quad r_{l_i} = r_{k_i},$$

где r_h есть ранг матрицы $(\mathsf{A} - \alpha_i\mathsf{E})^h$.

Пример 90 Найти минимальный многочлен для каждой из следующих

[2]теорема У.Р.Гамильтона и А.Кэли

матриц:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 & 4\\ 4 & -2 & -4 & 4\\ 3 & -3 & -1 & 3\\ 3 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{б)}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2\\ -3 & 2 & -2 & 6\\ -6 & 2 & 2 & 2\\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение а). Для данной матрицы нетрудно найти ее характеристический многочлен

$$\varphi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & -4 & 4\\ 4 & -2-\lambda & -4 & 4\\ 3 & -3 & -1-\lambda & 3\\ 3 & -3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C^1+C^2\\ =\\ \\ C^4+C^3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & -4 & 0\\ 2-\lambda & -2-\lambda & -4 & 0\\ 0 & -3 & -1-\lambda & 2-\lambda\\ 0 & -3 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2-C^1\\ =\\ C_3-C_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 & -4 & 0\\ 0 & -2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & -3 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4. \quad (4.14)$$

Тогда ранг матрицы

$$\mathsf{A}-2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 4\\ 4 & -4 & -4 & 4\\ 3 & -3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix},$$

легко видеть, равен $r_1 = 1$. Из 4.3 следует, что $r_1 > r_2$. Тогда $r_2 = 0(= r_4)$. Следовательно, минимальный многочлен имеет вид

$$\mu_{\mathsf{A}}(\lambda) = (2-\lambda)^2$$

б). Характеристический многочлен можно получить в результате следующих выкладок

$$\varphi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 0 & 2\\ -3 & 2-\lambda & -2 & 6\\ -6 & 2 & 2-\lambda & 2\\ -3 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C^1+(2+\lambda)C^2\\ =\\ \\ C^4-2C^2 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1-\lambda^2 & 2-\lambda & -2 & 2\lambda+2\\ 2\lambda-2 & 2 & 2-\lambda & -2\\ \lambda-1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1+\lambda & -2 & 2\lambda+2\\ -2 & 2-\lambda & -2\\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{C_1+2C_3}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0\\ -2 & 2-\lambda & -2\\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2\\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - 1)^3.$$

Следовательно, минимальный многочлен имеет вид

$$\mu_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^m, \quad \text{при} \quad 1 \le m \le 3.$$

Осталось определить число m. Для этого найдем ранги r_i. Так как все строки (или столбцы) матрицы $\mathsf{A} - \mathsf{E}$ не пропорциональны, то ее ранг $r_1 > 1$. Значит, придется искать квадрат этой матрицы

$$(\mathsf{A} - \mathsf{E})^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что ранг последней матрицы равен $r_2 = 1$. Так как алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 1$ равна 3 и $n = 4$, то $r_3 = 4 - 3 = 1$. Мы получили $r_1 > r_2 = r_3$. Поэтому, $m = 2$ и минимальный многочлен имеет вид

$$\mu_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2.$$

Подобные матрицы

Учишь вас, учишь, а вы ...

А.И.Олепир,герой Советского Союза, летчик, учивший нас гражданской обороне на мехмате РГУ.

Матрицы A_e и A_u линейного оператора A связаны между собой с помощью матрицы перехода от одного базиса к другому

$$A_u = P_{e\to u}^{-1} A_e P_{e\to u}.$$

Эта формула приводит к следующему определению. Пусть A, B — квадратные матрицы одного и того же порядка с элементами из поля $\mathbb{F}$. Будем матрицы A и B называть подобными над полем $\mathbb{F}$, если существует обратимая матрица R (то есть невырожденная: $\det \mathsf{R} \neq 0$) того же порядка с элементами из поля $\mathbb{F}$ такая, что

$$\mathsf{A} = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{R}.$$

Матрицу R или ее обратную будем называть матрицей, осуществляющей подобие.

То, что матрицы A и B подобны, будем записывать так: $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$. Отметим, что отношение подобия является отношением эквивалентности на множестве всех квадратных матриц одного и того же порядка, так как выполняются следующие свойства

1. отношение подобия рефлексивно: $\forall \mathsf{A} \quad \mathsf{A} \simeq \mathsf{A}$;

2. отношение подобия симметрично: если $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$, то $\mathsf{B} \simeq \mathsf{A}$;

3. отношение подобия транзитивно: если $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$ и $\mathsf{B} \simeq \mathsf{C}$, то $\mathsf{A} \simeq \mathsf{C}$.

Значит множество всех квадратных матриц одного и того же порядка разбивается на непересекающиеся классы подобных между собой матриц. Матрицы A_e и A_u одного оператора подобны и, следовательно, принадлежат одному классу. В каждом таком классе нет других матриц, кроме матриц одного и того же оператора. Точнее, пусть $A \in L(\mathbb{V})$, $\dim \mathbb{V} < \infty$, e — базис в пространстве $\mathbb{V}$ и матрица M подобна матрице A_e. Тогда существует такой базис $\{u\}$ в пространстве $\mathbb{V}$, что $A_u = \mathsf{M}$.

Если $\mathsf{A} \simeq \mathsf{B}$, то $f(\mathsf{A}) \simeq f(\mathsf{B})$ для любого многочлена $f(x)$. В частности, $\mathsf{A}^n \simeq \mathsf{B}^n$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Характеристические многочлены подобных матриц равны. Обратное утверждение неверно, то есть существуют неподобные матрицы, у которых равны их характеристические многочлены.

Имеет место следующий критерий подобия матриц. Пусть характеристические многочлены матриц A и B с элементами из поля $\mathbb{F}$ раскладываются на линейные множители над полем $\mathbb{F}$. Тогда для того, чтобы эти матрицы были подобными над полем $\mathbb{F}$ необходимо и достаточно, чтобы их жордановы нормальные формы совпадали с точностью до порядка следования жордановых клеток.

Если $\mathbb{F}$ есть поле комплексных чисел, то любой многочлен степени $n > 0$ можно разложить на линейные множители. Тогда для того, чтобы две комплексные матрицы были подобны необходимо и достаточно, чтобы их жордановы нормальные формы совпадали с точностью до порядка следования жордановых клеток. Из этого критерия следует, что для проверки подобия комплексных матриц нужно найти и сравнить их жордановы нормальные формы. Последние совпадут с точностью до порядка следования клеток тогда и только тогда, когда совпадут их характеристические многочлены, и для каждого собственного значения α, имеющего алгебраическую кратность k, равны ранги r_h матриц $(\mathsf{A} - \alpha\mathsf{E})^h$ и $(\mathsf{B} - \alpha\mathsf{E})^h$ для всех $h = 1, \ldots, k$.

Пример 91 Выяснить, подобны между собой следующие матрицы:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выясним сначала подобны ли между собой матрицы A и B. Найдем характеристические многочлены этих матриц

$$\varphi_{\mathsf{A}}(\lambda) = (1 - \lambda)^3;$$

$$\varphi_{\mathsf{B}}(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 1\\ 2 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3.$$

Характеристические многочлены матриц A и B совпали. Далее

$$\mathsf{A}-\mathsf{E}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } r_1=r(\mathsf{A}-\mathsf{E})=2;$$

$$\mathsf{B}-\mathsf{E}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ и } r_1=r(\mathsf{B}-\mathsf{E})=2.$$

Для квадратов этих матриц

$$(\mathsf{A}-\mathsf{E})^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

и ранг $r_2=r(\mathsf{A}-\mathsf{E})^2=1$,

$$(\mathsf{B}-\mathsf{E})^2=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

и ранг $r_2=r(\mathsf{B}-\mathsf{E})^2=1$. По теореме Гамильтона-Кели $(\mathsf{A}-\mathsf{E})^3=(\mathsf{B}-\mathsf{E})^3=O$, следовательно, $r_3=0$ для обеих матриц. Так как количество жордановых клеток зависит лишь от найденных рангов, а они совпадают, следовательно, жордановы нормальные формы матриц совпадают с точностью до порядка следования клеток и поэтому матрицы A и B подобны.

Найдем теперь характеристический многочлен матрицы C

$$\varphi_{\mathsf{C}}(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & -1\\ -2 & -\lambda & 1\\ 2 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & -1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 2 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1-\lambda\\ 2 & 1+\lambda & -\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 2 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3.$$

Характеристический многочлен матрицы C такой же, как и у матриц A и B. Далее

$$\mathsf{C}-\mathsf{E}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \text{ и } r_1=r(\mathsf{C}-\mathsf{E})=1.$$

Так как ранг матрицы $\mathsf{C}-\mathsf{E}$ не равен рангу матрицы $\mathsf{A}-\mathsf{E}$ (или $\mathsf{B}-\mathsf{E}$), то матрица C не подобна матрицам A и B.

Пример 92 Выяснить, какие из следующих матриц подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Найти эти диагональные матрицы и матрицы, осуществляющие подобие (для последних матриц нет единственности):

$$\text{а)}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данное задание ничем, по существу, не отличается от задания примера 80. Схема решения следующая. Нужно найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Если последних достаточно для построения базиса всего пространства $\mathbb{F}^n$, то матрица подобна диагональной. Это возможно тогда и только тогда, когда все корни характеристического многочлена принадлежат полю, и их алгебраические кратности совпадают с геометрическими. В этом случае, зная собственные значения и их алгебраические кратности, легко построить диагональную матрицу. Матрица, осуществляющая подобие, состоит из собственных векторов (см. решение ниже).

а). Найдем характеристический многочлен матрицы

$$\varphi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{C^4 - C^2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{C_4 + C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)^2.$$

Таким образом, спектр матрицы состоит из двух чисел 0 и 1. Найдем теперь собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Для собственного значения $\alpha = 0$

$$\mathsf{A} - 0\mathsf{E} = \mathsf{A} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_3 + C_1}{\overset{C_2 + 2C_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система, соответствующая последней расширенной матрице, состоит из уравнений $-x_1-x_2-x_4=0$, $x_1+x_3=0$. Общее решение системы уравнений можно записать в виде $x_2=-x_1-x_4$, $x_3=-x_1$, где x_1, x_4 — свободные неизвестные. Фундаментальную систему решений системы уравнений найдем, если сначала положим $x_1=1$, $x_4=0$, а затем — $x_1=0$, $x_4=1$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид $\mathbf{f}_1=(1,-1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{f}_2=(0,-1,0,1)^\tau$.

Для собственного значения $\alpha=1$

$$\mathsf{A}-\mathsf{E}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-C_4}{\overset{C_2+C_4}{\sim}} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили систему уравнений $2x_1+x_2+x_4=0$, $x_1+x_3+x_4=0$. Общее решение системы уравнений можно записать в виде $x_2=-2x_1-x_4$, $x_3=-x_1-x_4$ со свободными неизвестными x_1, x_4. Снова положим $x_1=1$, $x_4=0$ и $x_1=0$, $x_4=1$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид $\mathbf{f}_3=(1,-2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{f}_4=(0,-1,-1,1)^\tau$.

Геометрические кратности собственных значений совпали с алгебраическими кратностями. Следовательно, исходная матрица подобна диагональной матрице, которая имеет вид

$$\mathsf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица единственна с точностью до порядка следования диагональных элементов.

Подобие матриц A и B означает, что существует обратимая матрица R такая, что $\mathsf{B}=\mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R}$. Найдем матрицу R, осуществляющую подобие. Для этого будем считать, что линейный оператор A в базисе e имеет матрицу $A_e=\mathsf{A}$, а в базисе f — матрицу $A_f=\mathsf{B}$. Так как матрицы подобны, то такой линейный оператор существует. Так как матрицы линейного оператора связаны формулой $A_f=P_{e\to f}^{-1}A_eP_{e\to f}$, то, сравнивая эту формулу с формулой $\mathsf{B}=\mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R}$ легко заметить, что в качестве матрицы R можно взять матрицу перехода $P_{e\to f}$. Матрица перехода состоит из координатных векторов второго базиса в первом, записанных по столбцам. Так как все вычисления велись в координатах первого базиса, то найденные векторы второго базиса совпадают с координатными векторами. Тогда

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б). Для второй матрицы решение ни в чем по существу не отличается от решения, приведенного выше. Найдем характеристический многочлен

$$\varphi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C^3-C^1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+1)^2.$$

Характеристический многочлен имеет корни $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Если мы рассматриваем матрицу над полем рациональных или вещественных чисел, то ее спектр пуст и, следовательно, нет подобной для нее диагональной матрицы.

Рассмотрим матрицу над полем комплексных чисел. Для собственного значения $\alpha_1 = i$

$$\mathsf{A} - i\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -1-i & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1-i & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1-i & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1-(1+i)C_2 \\ \sim \\ C_4-2C_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -2+2i & 2i & 1-i \\ -1 & -1-i & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1-i & -1 \\ 0 & 2+2i & 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{array}{c} C_1+(1-i)C_3 \\ \sim \\ C_2+C_3 \\ C_4-(1+i)C_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-i & -1-i & 0 \\ 0 & 2 & 1-i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = (1-i)x_2-(1+i)x_3$, $x_4 = 2x_2+(1-i)x_3$. Фундаментальную систему решений системы уравнений найдем, если сначала положим $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, а затем — $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Тогда фундаментальная система решений имеет вид $\mathbf{f}_1 = (1-i, 1, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1-i, 0, 1, 1-i)^\tau$.

Аналогично можно найти собственные векторы, отвечающие собственному значению $\alpha_2 = -i$. Однако то, что матрица A состоит из вещественных элементов предоставляет возможность найти собственные векторы быстрее. Пусть $\mathbf{u}$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\alpha_1 = i$, тогда $(\mathsf{A} - i\mathsf{E})\mathbf{u} = 0$. Если взять комплексное сопряженное значение от правой и левой части этого матричного равенства, то получим $(\mathsf{A} + i\mathsf{E})\bar{\mathbf{u}} = 0$, так как вещественные матрицы A и E не изменятся. Значит, вектор $\bar{\mathbf{u}}$ является собственным для собственного значения $\alpha_2 = -i$. Это наблюдение позволяет построить два линейно независимых собственных вектора из векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ с помощью операции комплексного сопряжения: $\mathbf{f}_3 = (1+i, 1, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_4 = (-1+i, 0, 1, 1+i)^\tau$.

Геометрические кратности собственных значений равны двум и совпадают с их алгебраическими кратностями. Следовательно, исходная матрица подобна диагональной, которая имеет вид

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Подобие матриц A и B означает, что существует обратимая матрица R такая, что $\mathsf{B} = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R}$. Найдем матрицу R, осуществляющую подобие. Для этого будем считать, что линейный оператор A в базисе e имеет матрицу $A_e = \mathsf{A}$, а в базисе f — матрицу $A_f = \mathsf{B}$. Так как матрицы подобны, то такой линейный оператор существует. Так как матрицы линейного оператора связаны формулой $A_f = P^{-1}_{e\to f} A_e P_{e\to f}$, то, сравнивая эту формулу с формулой $\mathsf{B} = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{R}$ легко заметить, что в качестве матрицы R можно взять матрицу перехода $P_{e\to f}$. Матрица перехода состоит из координатных векторов второго базиса в первом, записанных по столбцам. Так как все вычисления велись в координатах первого базиса, то найденные векторы второго базиса совпадают с координатными векторами. Тогда

$$\mathsf{R} = \begin{pmatrix} 1-i & -1-i & 1+i & -1+i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1-i & 2 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Пример 93 Выяснить, подобны между собой следующие матрицы:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если подобны, то найти матрицу, осуществляющую подобие.

Решение. Найдем сначала характеристические многочлены матриц:

$$\varphi_{\mathsf{A}}(\lambda) = (-\lambda)^3 + (-1+2+2)(-\lambda)^2 + \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) (-\lambda) + \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3;$$

$$\varphi_{\mathsf{B}}(\lambda) = (-\lambda)^3 + (-2+3+2)(-\lambda)^2 + \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) (-\lambda) + \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3.$$

Характеристический многочлен у обеих матриц один и тот же. Он имеет единственный корень $\lambda_1 = 1$ кратности 3. Будем считать, что матрицы A и B есть соответственно матрицы операторов A и B в базисе $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$: $\mathsf{A} = A_e$, $\mathsf{B} = B_e$. Пусть операторы A и B соответственно в базисах $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ имеют жорданову нормальную форму. Тогда $A_u = P^{-1}_{e\to u} A_e P_{e\to u}$ и $B_v = P^{-1}_{e\to v} B_e P_{e\to v}$. Если матрицы подобны, то можно считать, что $A_u = B_v$. Тогда

$$P^{-1}_{e\to u} A_e P_{e\to u} = P^{-1}_{e\to v} B_e P_{e\to v}.$$

Отсюда

$$A_e = P_{e\to u} P^{-1}_{e\to v} B_e P_{e\to v} P^{-1}_{e\to u}$$

или

$$A_e = (P_{e\to v} P_{u\to e})^{-1} B_e P_{e\to v} P_{u\to e}.$$

Таким образом, если $\mathsf{A} = A_e$, $\mathsf{B} = B_e$ и $\mathsf{A} = \mathsf{R}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{R}$, то можно взять $\mathsf{R} = P_{e\to v} P_{u\to e}$ (матрица R не единственна). Чтобы найти матрицы перехода $P_{e\to v}$ и $P_{u\to e}$ нужно знать жордановы базисы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Этим и займемся. Алгоритм построения жордановых базисов изложен выше (см. стр. 218). Найдем сначала жорданов базис $\mathbf{u}$ для оператора A. Так как

$$\mathsf{A} - \mathsf{E} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

то $(\mathsf{A}-\mathsf{E})\mathbf{e}_1 = (-2,1,-1)$, $(\mathsf{A}-\mathsf{E})\mathbf{e}_2 = (-2,1,-1)$, $(\mathsf{A}-\mathsf{E})\mathbf{e}_3 = (2,-1,1)$. Легко проверить, что $(\mathsf{A}-\mathsf{E})^2\mathbf{e}_i = (0,0,0)$, $i = 1,2,3$. Тогда запишем цепочки векторов по строкам и, следуя алгоритму выделения жорданова базиса, проведем следующие вычисления

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

из векторов второй цепочки вычтем соответствующие векторы первой цепочки, к векторам третьей цепочки прибавим соответствующие векторы первой цепочки, получившиеся нулевые векторы вычеркнем. Тогда

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

Ясно, что первая и вторая цепочки образуют жорданов базис, так как первые векторы цепочек линейно независимы, и число всех векторов совпадает с размерностью линейного пространства. Значит, получаем базис $\mathbf{u}_1 = (-2,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,1,0)$. Тогда матрица перехода

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем в полученном базисе оператор A имеет матрицу

$$A_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

состоящую из двух жордановых клеток второго и первого порядка. Аналогично поступим и для оператора B:

$$\mathsf{B}-\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

то $(\mathsf{B}-\mathsf{E})\mathbf{e}_1 = (-3,-3,3)$, $(\mathsf{B}-\mathsf{E})\mathbf{e}_2 = (2,2,-2)$, $(\mathsf{B}-\mathsf{E})\mathbf{e}_3 = (-1,-1,1)$. Легко проверить, что $(\mathsf{B}-\mathsf{E})^2\mathbf{e}_i = (0,0,0)$, $i = 1,2,3$. Тогда запишем цепочки векторов по строкам (для удобства в обратном порядке) и, следуя алгоритму выделения жорданова базиса, проведем следующие вычисления

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

к векторам второй цепочки прибавим соответствующие векторы первой цепочки, умноженные на 2, из векторов третьей цепочки вычтем

соответствующие векторы первой цепочки, умноженные на 3, получившиеся нулевые векторы вычеркнем. Тогда
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & & & \\ 1 & 0 & -3 & & & \end{array}\right).$$
Ясно, что первая и вторая цепочки образуют жорданов базис, так как первые векторы цепочек линейно независимы, и число всех векторов совпадает с размерностью линейного пространства. Значит, искомый базис имеет вид $\mathbf{v}_1 = (-1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)$. Тогда матрица перехода
$$P_{e\to v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
причем в полученном базисе оператор B имеет матрицу
$$B_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
состоящую из двух жордановых клеток второго и первого порядка. Мы получили, что жордановы нормальные формы матриц A и B совпадают, откуда следует, что матрицы A и B подобны. Чтобы вычислить матрицу R по формуле $\mathsf{R} = P_{e\to v}P_{u\to e}$, нужно знать матрицу $P_{u\to e}$. Ее можно вычислить, найдя обратную к матрице $P_{e\to u}$. Применим стандартный алгоритм. Для этого запишем расширенную матрицу
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
Прибавим ко второй строке третью и из первой вычтем третью, умноженную на 2. Тогда
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
После прибавления к первой строке второй получим
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
Переставим третью строку на первое место и умножим ее на -1 для того, чтобы основная матрица стала единичной
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Значит
$$P_{u\to e}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$
Тогда
$$\mathsf{R}=P_{e\to v}P_{u\to e}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\1&3&0\end{pmatrix}.$$

Задания

Наилучшие правила мышления нельзя получить как-то извне, их нужно выработать так, чтобы они вошли в плоть и кровь и действовали с силой инстинкта. Поэтому для развития мышления действительно полезным является только его упражнение.
Д.Пойя, Г.Сеге.

82. Найти собственные значения и собственные векторы матриц второго порядка, определенных над полем вещественных чисел.

a). $\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$.
d). $\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$.

83. Найти собственные значения и собственные векторы матриц второго порядка, определенных над полем комплексных чисел.

a). $\begin{pmatrix}-2&1\\-1&-2\end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix}-1&1\\-2&1\end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$.
d). $\begin{pmatrix}0&1\\-2&2\end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix}1&-3\\3&1\end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$.
g). $\begin{pmatrix}1-2i&-1\\-1+i&1-i\end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix}1-2i&-1\\-2i&0\end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix}1-2i&-2i\\-2+2i&-1+2i\end{pmatrix}$.
j). $\begin{pmatrix}1-2i&-2i\\1+i&2+i\end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix}1-2i&1\\2-2i&2+i\end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix}1-2i&1+i\\-1+i&-2-2i\end{pmatrix}$.

84. Найти собственные значения и собственные векторы матриц третьего порядка, определенных над полем вещественных чисел.

a). $\begin{pmatrix}-2&1&-2\\2&-2&3\\1&-1&1\end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&1&-2\\1&1&-2\end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

85. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами четвертого порядка.

a). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

86. Не находя характеристического многочлена, выяснить, являются ли числа 1, 0, -1 собственными значениями линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами. Если да, то найти геометрическую кратность этих собственных значений.

a). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

87. Показать, что следующие матрицы линейных операторов в трехмерном вещественном линейном пространстве можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу (базис не единственен).

a). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

88. Показать, что следующие матрицы линейных операторов в четырехмерном вещественном линейном пространстве можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу (базис не единственен).

a). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

89. Показать, что следующие матрицы линейных операторов, действующих в трехмерном комплексном линейном пространстве, можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису.

a). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

90. Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

a). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

91. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц третьего (четвертого, пятого и шестого) порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{R}^6$) задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A третьего порядка (четвертого, пятого и шестого) найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{AQ}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

92. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц четвертого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^4$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A четвертого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{AQ}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

93. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц пятого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^5$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A пятого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
b). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
d). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
f). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
h). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

i). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
j). $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

k). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
l). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

94. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц шестого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^6$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A шестого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. d). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

95. Линейный оператор задан в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 одной из следующих матриц. Покажите, что линейная оболочка, натянутая на векторы u_1, u_2, является двумерным инвариантным подпространством и найдите в базисе u_1, u_2 матрицу индуцированного в этом подпространстве оператора.

a). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3 + 2e_4,$ $u_2 = -e_1 - e_2 + 3e_3 - e_4.$

b). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 - 2e_2 - e_3 + 2e_4,$ $u_2 = e_1 - e_2.$

c). $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 - e_4,$ $u_2 = 2e_1 + e_2 + e_3 - 2e_4.$

96. Найти все инвариантные подпространства размерностей 1 и 2 для линейных операторов, действующих в линейном комплексном трех-

мерном пространстве и заданных в некотором базисе следующими матрицами третьего порядка

a). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

97. Найти все инвариантные подпространства размерностей 1 и 2 для линейных операторов, действующих в линейном вещественном трехмерном пространстве и заданных в некотором базисе следующими матрицами третьего порядка

a). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

98. Найти минимальный многочлен каждой из следующих матриц четвертого порядка:

a). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

99. Выяснить, какие из матриц A, B, C третьего порядка подобны между собой. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

100. Выяснить, подобны ли между собой следующие матрицы четвертого порядка. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

101. Выяснить, какие из следующих матриц второго порядка подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

102. Выяснить, какие из следующих матриц третьего порядка подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

103. Выяснить, какие из следующих матриц четвертого порядка подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел: Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 5
ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Основные определения и факты

> Например, аксиомы n – мерной евклидовой векторной геометрии соблюдаются, если брать в качестве вектора распределение постоянного тока в электрической цепи, состоящей из n проводников, соединенных в некоторых точках разветвления, и принять в качестве квадрата длины вектора джоулево тепло, выделяемое током за единицу времени.
>
> *Г. Вейль «Давид Гильберт и его математические труды»*[1].

Пусть $\mathbb{V}$ — линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Говорят, что в вещественном линейном пространстве $\mathbb{V}$ определено скалярное произведение, если любой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ по некоторому правилу поставлено в соответствие вещественное число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ такое, что для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$;
3) $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Вещественное линейное пространство $\mathbb{V}$, в котором введено скалярное произведение, называется евклидовым. Евклидово пространство будет обозначаться буквой $\mathbb{E}$.

В евклидовом пространстве выполняются свойства

2′) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$;
3′) $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

Равенство 2) называется аддитивностью скалярного произведения по первому сомножителю, равенство 3) есть однородность скалярного произведения по первому сомножителю. Равенства 2′) и 3′) дают соответственно аддитивность и однородность скалярного произведения

[1] К.Рид. «Гильберт». М. Наука, 1977.

по второму сомножителю. Свойства 2) и 3) равносильны следующему условию: для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

2-3) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$;

Аналогичное равенство справедливо и для второго сомножителя. Таким образом, скалярное произведение является симметричной билинейной формой, порождающей (строго) положительно определенную квадратичную форму.

В любом конечномерном вещественном линейном пространстве можно ввести скалярное произведение. Тем самым любое конечномерное вещественное линейное пространство можно превратить в евклидово (вообще говоря, неединственным образом).

Приведем некоторые характерные примеры евклидовых пространств.

1) Если в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ ввести скалярное произведение равенством

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\tau$, то получим евклидово пространство, которое часто обозначается $\mathbb{E}^n$. Все условия определения следуют из того, что данное скалярное произведение есть частный случай скалярного произведения следующего примера.

2) Для любого вектора $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^\tau$ с элементами $w_1 > 0$, $w_2 > 0$, $\ldots$, $w_n > 0$ в $\mathbb{R}^n$ можно определить скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w_1 x_1 y_1 + w_2 x_2 y_2 + \cdots + w_n x_n y_n$$

в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Все условия определения следуют из того, что данное скалярное произведение есть частный случай скалярного произведения следующего примера. С этим скалярным произведением линейное пространство $\mathbb{R}^n$ становится евклидовым. Скалярное произведение предыдущего примера получается как частный случай при $\mathbf{w} = (1, 1, \ldots, 1)^\tau$.

3) Пусть A — квадратная вещественная симметричная матрица порядка n с элементами a_{ij}, все главные угловые миноры которой положительны. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести скалярное произведение равенством

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\tau$. Проверим, что это действительно скалярное произведение. Очевидно, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Коммутативность скалярного произведения следует из того, что у симметричной матрицы A элементы $a_{ij} = a_{ji}$ для любых

i, j:

$$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j y_i = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Аддитивность и однородность скалярного произведения по отношению к первому сомножителю следует из следующих равенств:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i + y_i) z_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} x_i z_j + a_{ij} y_i z_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i z_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i z_j = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

$$(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha x_i) y_j = \alpha \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Чтобы удостовериться в том, что выполняется и последнее условие в определении скалярного произведения, заметим, что квадратичная форма

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

по критерию Сильвестра[2] (строго) положительно определена и, значит, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для любого $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Таким образом, с этим скалярным произведением получим евклидово пространство. Если матрица A диагональна[3] с элементами $a_{ii} = w_i$ на диагонали, то получится скалярное произведение предыдущего примера.

4) В линейном пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с вещественными коэффициентами можно определить скалярное произведение по формуле

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}[x].$$

Условия 1)–4) определения скалярного произведения следуют из элементарных свойств определенного интеграла.

5) В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ всех многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами можно определить скалярное произведение так же, как в предыдущем примере, а можно, например, по формуле

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n$$

[2]Квадратичная форма (строго) положительно определена тогда и только тогда, когда все главные угловые миноры ее матрицы больше нуля.

[3]все элементы $a_{ij} = 0$ при $j \neq i$.

для любых многочленов

$$\mathbf{f}(x) = f_0x^n + f_1x^{n-1} + \cdots + f_n, \quad \mathbf{g}(x) = g_0x^n + g_1x^{n-1} + \cdots + g_n.$$

Проверка условий 1)–4) ничем не отличается от аналогичной проверки в примере 1.

Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ линейно зависимы.

Для скалярных произведений приведенных выше примеров 1, 2, 3, 4 неравенство Коши-Буняковского принимает следующий вид

1. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$;
2. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} w_i y_i^2\right)$;
3. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j\right)$;
4. $\left(\int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_{-1}^{1} \mathbf{f}^2(x)\, dx\right)\left(\int_{-1}^{1} \mathbf{g}^2(x)\, dx\right)$.

Длиной (нормой) вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ называется число

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Для нормы вектора имеют место следующие свойства.

1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$.

2) $\|\mathbf{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ для любого вещественного числа α и любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$.

4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

5) $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

Вектор $\mathbf{x}$ называется нормированным, если его норма $\|\mathbf{x}\| = 1$. Любой ненулевой вектор можно превратить в нормированный (пронормировать), умножив на число $\|\mathbf{x}\|^{-1}$.

Углом между ненулевыми векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ называется число φ, удовлетворяющее условиям

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Угол между ненулевыми векторами единственен. Если хотя бы один из векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ равен нулю, то угол между ними неопределен.

Пример 94 Найти длины векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 0, -1)^\tau$ евклидового пространства $\mathbb{E}^4$ и угол между ними.

Решение. Найдем следующие скалярные произведения

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -3,$$
$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 6,$$
$$(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2 = 6.$$

Тогда длины (нормы) векторов

$$\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)} = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{a}_2\| = \sqrt{(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)} = \sqrt{6}.$$

Для того, чтобы определить угол между векторами, подставим найденные значения в формулу для косинуса этого угла

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{\|\mathbf{a}_1\| \, \|\mathbf{a}_2\|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомый угол

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 95 Найти длины элементов $\mathbf{f}(x) = 3x + 2$, $\mathbf{g}(x) = x + 3$ евклидового пространства всех многочленов со скалярным произведением $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\, dx$ и угол между ними.

Решение. Для данных элементов нетрудно вычислить их скалярное произведение хотя бы с помощью следующей последовательности действий

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{-1}^{1} (3x + 2)(x + 3)\, dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 + 11x + 6)\, dx =$$
$$= \left(x^3 + 11\frac{x^2}{2} + 6x \right)\Bigg|_{-1}^{1} = 1 + \frac{11}{2} + 6 + 1 - \frac{11}{2} + 6 = 14.$$

Для того, чтобы вычислить нормы (длины) элементов, нужно найти следующие скалярные квадраты

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \int_{-1}^{1} (3x + 2)^2\, dx = \frac{(3x + 2)^3}{9}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{125}{9} + \frac{1}{9} = 14,$$
$$(\mathbf{g}, \mathbf{g}) = \int_{-1}^{1} (x + 3)^2\, dx = \frac{(x + 3)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}.$$

Тогда

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \sqrt{14}, \quad \|\mathbf{g}\| = \sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})} = \sqrt{\frac{56}{3}}.$$

Для нахождения косинуса угла между элементами осталось найденные значения подставить в формулу

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{g})}{\|\mathbf{f}\| \, \|\mathbf{g}\|},$$

тогда

$$\cos\varphi = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{\frac{56}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, искомый угол

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Отображение Φ, действующее из евклидового пространства $\mathbb{E}$ в евклидово пространство $\mathbb{E}'$, называется изоморфизмом, если оно является изоморфизмом линейных пространств $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ и сохраняет величину скалярного произведения, то есть отображение взаимно однозначно (биективно) и для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$, любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\Phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\Phi(\mathbf{x}) + \beta\Phi(\mathbf{y})$;
2. $(\Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$;

Два евклидовых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}'$ называются изоморфными, если существует хотя бы один изоморфизм этих евклидовых пространств.

Конечномерные евклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их размерности. Таким образом, если в каком-нибудь n – мерном ($n < \infty$) евклидовом пространстве доказано утверждение, сформулированное с использованием лишь операций сложения векторов, умножения их на числа и скалярного произведения, то это утверждение справедливо и в любом другом n – мерном евклидовом пространстве.

Ортогональность

> Перпендикулярно — 60 градусов;
> мой дорогой сэр, абсолютно перпендикулярно - 65 градусов;
> нависающе - 70 градусов.
> *Классификация углов из английской книги по альпинизму (1860 г.)*[4]

Векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ называются ортогональными, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Будем писать $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, если векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ортогональны. Имеют место следующие свойства ортогональных векторов.

1. Ненулевые векторы ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\pi/2$.

[4]Физики продолжают шутить. Сборник переводов. М., Мир. 1968.

2. Нулевой вектор и только он ортогонален всем векторам евклидового пространства.

3. Если вектор ортогонален самому себе, то он нулевой.

4. Если $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, то $\alpha\mathbf{x} \perp \beta\mathbf{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5. (Обобщение теоремы Пифагора) Если $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, то

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Система векторов называется ортогональной, если любые два вектора этой системы ортогональны. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. Система векторов называется ортонормированной, если она ортогональна и любой ее вектор нормирован. Ортогональную систему ненулевых векторов можно превратить в ортонормированную, если пронормировать каждый ее вектор. Система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$, $\mathbf{e}_k$ ортонормирована тогда и только тогда, когда скалярное произведение

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Если число векторов ортонормированной системы равно размерности конечномерного евклидового пространства, то эта система образует ортонормированный базис. В любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. Координаты вектора $\mathbf{x}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$, $\mathbf{e}_n$ можно вычислить по формуле

$$x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots$, $\mathbf{e}_n$ имеют координатные векторы $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau$ и $\mathbf{y}_e = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\tau$, то

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = (\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e)$$

и

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \|\mathbf{x}_e\|.$$

Квадратная вещественная матрица A называется ортогональной, если ее транспонированная является ее же обратной, то есть $\mathsf{A}^\tau = \mathsf{A}^{-1}$.

Ортогональные матрицы обладают следующими свойствами.

1. Вещественная квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из равенств $\mathsf{A}^\tau \mathsf{A} = \mathsf{E}$, $\mathsf{A}\mathsf{A}^\tau = \mathsf{E}$.

2. Единичная матрица E является ортогональной. Нулевая матрица ортогональной не является.

3. Если матрица A ортогональна , то и транспонированная матрица A^τ ортогональна.

4. Если матрицы A, B ортогональны, то и их произведение AB является ортогональной матрицей.

5. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1.

6. Вещественная квадратная матрица A ортогональна тогда и только тогда, когда все ее строки (столбцы) образуют ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$.

7. Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису является ортогональной.

8. Если матрица перехода от одного базиса к другому ортогональна и один из этих базисов ортонормирован, то и второй базис является ортонормированным.

Пример 96 Проверить, что векторы системы $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 0, 1)^\tau$ попарно ортогональны в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ и дополнить эту систему до ортогонального базиса.

Решение. В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ скалярное произведение вычисляется по формуле $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Легко видеть, что $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$. Значит, система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ортогональна. Найдем какой-нибудь ненулевой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ортогональный каждому вектору системы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Для этого вектора должны выполняться равенства $(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = 0$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) = 0$. Подставим элементы векторов и вычислим скалярные произведения, тогда получим, что вектор $\mathbf{x}$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем какое-нибудь ненулевое частное решение $\mathbf{x} = \mathbf{a}_3$. Пусть $x_1 = 0$, $x_4 = 2$, тогда $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_3 = (0, -1, 2, 2)$ ортогонален векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и, следовательно, система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ортогональна. Продолжим. Найдем какой-нибудь ненулевой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ортогональный каждому вектору системы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Для этого вектора должны выполняться равенства $(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = 0$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) = 0$, $(\mathbf{a}_3, \mathbf{x}) = 0$. Подставим элементы векторов и вычислим скалярные произведения, тогда получим, что вектор $\mathbf{x}$ должен удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы найти какое-нибудь ненулевое частное решение $\mathbf{x} = \mathbf{a}_4$, найдем общее решение. Для этого, как обычно, запишем расширенную матрицу системы и применим метод последовательных исключений

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{C_2 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -\underline{1} & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{C_2 + 2C_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_3 - 2C_2/3}{\overset{C_1 - C_2/3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Мы получили систему уравнений $x_1 - 3x_4 = 0$, $3x_3 + 6x_4 = 0$, $-x_2 - 2x_4 = 0$. Отсюда $x_1 = 3x_4$, $x_3 = -2x_4$, $x_2 = -2x_4$. Положим $x_4 = 1$, тогда $x_1 = 3$, $x_3 = -2$, $x_2 = -2$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_4 = (3, -2, -2, 1)$ ортогонален векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и, следовательно, система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ ортогональна и, более того, является ортогональным базисом евклидового пространства $\mathbb{E}^4$.

Замечание. Можно, конечно, было дополнить систему до (произвольного) базиса линейного пространства $\mathbb{E}^4$, а затем с помощью процесса ортогонализации (см. ниже) получить искомый ортогональный базис.

Пример 97 Дополнить систему векторов

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^\tau, \qquad \mathbf{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^\tau$$

до ортонормированного базиса.

Решение. Оно почти не отличается от предыдущего решения. А именно, считая систему лишь ортогональной, дополним ее до ортогонального базиса, а затем пронормируем каждый вектор. Найдем ненулевой вектор $\mathbf{x} = \mathbf{a}_3$, ортогональный исходным векторам. Он будет частным решением системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0. \end{cases}$$

Эту систему уравнений нужно решить. Точнее, нам необходимо найти одно ненулевое частное решение. Это можно сделать так же, как в предыдущем задании. Однако данная система настольно проста, что не составляет труда угадать это частное решение. Например, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$. Тогда $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1, 0)$. Аналогично, найдем ненулевой вектор $\mathbf{x} = \mathbf{a}_4$, ортогональный векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Он будет частным решением системы

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Здесь тоже нетривиальное частное решение легко угадать. Например, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Тогда $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 0, 1)$. Мы получили ортогональный базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ евклидового пространства $\mathbb{E}^4$. Для того, чтобы получить ортонормированный базис, нужно еще пронормировать векторы этого базиса. Но первые два вектора уже нормированы. Положим тогда $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2$. Для третьего и четвертого векторов $\|\mathbf{a}_3\| = \|\mathbf{a}_4\| = \sqrt{2}$. Тогда

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad \mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{a}_4 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Всё. Система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ есть ортонормированный базис евклидового пространства $\mathbb{E}^4$.

Ортогонализация

> Если вас попросят изобразить обычное пространство, то вы, скорей всего, попытаетесь нарисовать три взаимно перпендикулярные оси.
> *Многие авторы.*

Ортогональную систему векторов можно получить с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. А именно, для любой системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_k$ строится ортогональная система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b}_k$ по следующему правилу. Первый вектор новой системы совпадает с первым вектором старой системы

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1.$$

Второй вектор ищется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha_1 \mathbf{b}_1,$$

где $\alpha_1 = \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$, если $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, и α_1 — любое число, если $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$. Третий вектор искомой системы векторов ищется в виде такой линейной комбинации

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \alpha_2 \mathbf{b}_2,$$

где $\alpha_1 = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$, если $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0}$, и α_1 — любое число, если $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$, $\alpha_2 = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}$, если $\mathbf{b}_2 \neq \mathbf{0}$, и α_2 — любое число, если $\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$. Все следующие векторы ищутся в виде аналогичной линейной комбинации. Так последний вектор находится в виде линейной комбинации

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k - \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \alpha_2 \mathbf{b}_2 - \dots - \alpha_{k-1} \mathbf{b}_{k-1},$$

где $\alpha_i = \frac{(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}$, если $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$, и α_i — любое число, если $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$. Это значение для α_i получается из того, что вектор $\mathbf{b}_i$ ортогонален всем остальным векторам $\mathbf{b}_j$ $(i \neq j)$. Действительно, если скалярно умножить вектор $\mathbf{b}_k$ на вектор $\mathbf{b}_i$, то получим

$$(\mathbf{b}_k, \mathbf{b}_i) = (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i) - \alpha_1(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_i) - \dots - \alpha_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) - \dots - \alpha_{k-1}(\mathbf{b}_{k-1}, \mathbf{b}_i).$$

Из ортогональности системы векторов $(\mathbf{b})$ следует, что все скалярные произведения в последнем равенстве, кроме быть может $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i)$ и $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)$, равны нулю. Тогда

$$0 = (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_i) - \alpha_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i),$$

откуда следует формула для вычисления коэффициентов α_i.

Полученная ортогональная система векторов порождает линейную оболочку, совпадающую с линейной оболочкой, порожденную исходной системой. Точнее, для любого j, $1 \le j \le k$

$$\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_j) = \ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_j).$$

Если система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_k$ линейно независима, то система $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, …, $\mathbf{b}_k$ не содержит нулевого вектора и, следовательно, является ортогональным базисом линейной оболочки $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$. Если $\mathbf{b}_j = 0$, то система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_j$ линейно зависима.

Пример 98 Используя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0, -1, 3, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, 4, -3, 1)^\tau$.

Решение. С помощью процесса ортогонализации построим ортогональную систему векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$. Если она содержит нулевые векторы, то их нужно вычеркнуть. Останется ортогональная система ненулевых векторов. Это и будет искомый базис. Начнем. В соответствии с алгоритмом $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 2, 1)^\tau$. Далее, следующий вектор будем искать в виде $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{b}_1$, где $\alpha = \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$. Найдем α. Так как скалярные произведения $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 7$ и $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 7$, то $\alpha = 1$. Следовательно,

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Третий вектор будем искать в виде $\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \alpha_2 \mathbf{b}_2$, где $\alpha_1 = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}$, $\alpha_2 = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}$. Скалярное произведение $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$ уже подсчитано. Для остальных: $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 7$, $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) =$

$0\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot(-1)+0\cdot 1=-3$, $(\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2)=1^2+0^2+(-1)^2+1^2=3$. Значит, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$. Тогда

$$\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{b}_3$ оказался нулевым. В искомый базис он не входит. Последний вектор, если подойти формально, нужно искать в виде $\mathbf{b}_4=\mathbf{a}_4-\alpha_1\mathbf{b}_1-\alpha_2\mathbf{b}_2-\alpha_3\mathbf{b}_3$, где $\alpha_1=\frac{(\mathbf{a}_4,\mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1)}$, $\alpha_2=\frac{(\mathbf{a}_4,\mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_2)}$ и α_3 может быть произвольным числом. Но на самом деле нет никакого смысла учитывать нулевой вектор. Найдем скалярные произведения: $(\mathbf{a}_4,\mathbf{b}_1)=2\cdot 1+4\cdot(-1)+(-3)\cdot 2+1\cdot 1=-7$, $(\mathbf{a}_4,\mathbf{b}_2)=2\cdot 1+4\cdot 0+(-3)\cdot(-1)+1\cdot 1=6$. Значит, $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=2$. Тогда

$$\mathbf{b}_4=\mathbf{a}_4+\mathbf{b}_1-2\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, система векторов $\mathbf{b}_1=(1,-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{b}_2=(1,0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_4=(1,3,1,0)^\tau$ образует ортогональный базис подпространства.

Ортогональное разложение евклидового пространства

> В самом деле, по совести, мы должны сознаться в существующем у нас врожденном убеждении, что весь мир со всем в нем находящимся создан лишь как необходимое дополнение к нам;. . . *Дж. К. Джером «Первая книжка праздных мыслей праздного человека».*

Будем говорить, что вектор $\mathbf{x}$ ортогонален непустому множеству M в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, если $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ для любого $\mathbf{y}\in M$. Если это так, то будем писать $\mathbf{x}\perp M$. Вектор $\mathbf{x}$ ортогонален линейной оболочке $\ell(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}\perp\mathbf{a}_i$ для всех $i=1,2,\ldots,k$.

Множество всех векторов $\mathbf{x}\in\mathbb{E}$, ортогональных непустому множеству M, называется ортогональным дополнением множества M и обозначается через $M^\perp$. Таким образом, $M^\perp=\{\mathbf{x}\in\mathbb{E}\mid\mathbf{x}\perp M\}$. Множество $M^\perp$ является подпространством евклидового пространства $\mathbb{E}$ и $(M^\perp)^\perp\supset M$. Очевидно, что $M\cap M^\perp=\{\mathbf{0}\}$.

Пример 99 Найти базис ортогонального дополнения подпространства, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,1,0)^\tau$.

Решение. Пусть $\mathbb{V}$ — подпространство, порожденное данной системой векторов: $\mathbb{V} = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Ортогональное дополнение $\mathbb{V}^\perp$ подпространства $\mathbb{V}$ состоит из всех векторов, ортогональных каждому вектору системы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Значит,

$$\mathbb{V}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E} \mid \mathbf{x}\perp\mathbf{a}_1, \mathbf{x}\perp\mathbf{a}_2, \mathbf{x}\perp\mathbf{a}_3\}.$$

По определению векторы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\tau$ и $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,-1)^\tau$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю

$$1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 - 1\cdot x_4 = 0.$$

Аналогично, условие ортогональности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}_2 = (1,2,1,1)^\tau$ имеет вид

$$1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = 0,$$

а векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}_3 = (1,1,1,0)^\tau$ —

$$1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{V}^\perp$ тогда и только тогда, когда его элементы удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Мы получили, что подпространство решений системы уравнений (5) и есть ортогональное дополнение $\mathbb{V}^\perp$. Поэтому, чтобы найти базис подпространства $\mathbb{V}^\perp$, нужно найти базис подпространства решений однородной системы уравнений (5), то есть ее фундаментальную систему решений. Найдем ее

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\underline{1} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_2 + C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_2 - 2C_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \underline{1} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что $x_1 + x_3 - x_4 = 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Тогда общее решение будет иметь вид $x_4 = x_1 + x_3$ и $x_2 = -x_1 - x_3$, $\forall x_1, x_3 \in \mathbb{R}$.

	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
$\mathbf{b}_1$	1	-1	0	1
$\mathbf{b}_2$	0	-1	1	1

Следовательно, $\mathbb{V}^\perp = \ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, где $\mathbf{b}_1 = (1,-1,0,1)^\tau$, $\mathbf{b}_2 = (0,-1,1,1)^\tau$.

Пример 100 Найти однородную систему уравнений, задающую ортогональное дополнение $\mathbb{V}^{\perp}$ подпространства $\mathbb{V}$, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем базис подпространства $\mathbb{V}$. Очевидно, что базисом является фундаментальная система решений данной однородной системы уравнений. Тогда, как обычно, с помощью метода Гаусса найдем общее решение системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 3C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & \underline{1} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} C_1 + 2C_3 \\ \sim \\ C_2 - 2C_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 5 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & \underline{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система уравнений, равносильная исходной, имеет вид $x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_5 = 0$, $3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0$. Ее общее решение можно представить так: $x_1 = -5x_2 + 8x_3 - x_5$, $x_4 = -3x_2 + 5x_3$, $x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}$. Заполним таблицу

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\mathbf{a}_1$	-5	1	0	-3	0
$\mathbf{a}_2$	8	0	1	5	0
$\mathbf{a}_3$	-1	0	0	0	1

,

Значит, векторы $\mathbf{a}_1 = (-5, 1, 0, -3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (8, 0, 1, 5, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)$ порождают подпространство $\mathbb{V}$, иными словами $\mathbb{V} = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. А в предыдущей задаче этот случай рассмотрен. Ортогональное дополнение можно задать системой уравнений, коэффициенты которых суть элементы найденных векторов, то есть

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \\ 8x_1 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Замечание. Можно решать задачу и с помощью другого алгоритма. Введем в рассмотрение три вектора, элементами которых являются коэффициенты уравнений данной системы, а именно $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, -2, 1)^{\tau}$, $\mathbf{a}_2 = (3, 3, -4, -4, 3)^{\tau}$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, -1, -3, 2)^{\tau}$. По условию элементы любого вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^{\tau}$ подпространства $\mathbb{V}$ удовлетворяют заданной системе уравнений. Значит, он ортогонален векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Поэтому последние векторы и, следовательно, их линейная оболочка лежат в ортогональном дополнении $\mathbb{V}^\perp$. Допустим на миг, что ортогональное дополнение $\mathbb{V}^\perp$ не совпадает с линейной оболочкой $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Тогда можно выбрать в $\mathbb{V}^\perp \setminus \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ ненулевой вектор, ортогональный векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и не являющийся решением данной системы уравнений. Это противоречит тому, что общее решение системы уравнений состоит из <u>всех</u> векторов, ортогональных системе $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Значит, $\mathbb{V}^\perp = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Теперь осталось перейти от этой линейной оболочки к заданию подпространства $\mathbb{V}^\perp$ с помощью системы уравнений. Это стандартная задача (см. № 49, стр. 105). Тогда

$$\left(\begin{array}{rrr|l} \underline{1} & 3 & 2 & x_1 \\ -1 & 3 & 1 & x_2 \\ 2 & -4 & -1 & x_3 \\ -2 & -4 & -3 & x_4 \\ 1 & 3 & 2 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 + C_1 \\ C_3 - 2C_1 \\ \sim \\ C_4 + 2C_1 \\ C_5 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & 6 & 3 & x_2 + x_1 \\ 0 & -10 & -5 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 2 & \underline{1} & x_4 + 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} C_2 - 3C_4 \\ \sim \\ C_3 + 5C_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|r} \underline{1} & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 + x_1 - 3(x_4 + 2x_1) \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 + 5(x_4 + 2x_1) \\ 0 & 2 & \underline{1} & x_4 + 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_1 \end{array}\right).$$

Основная матрица преобразована к ступенчатой форме. Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x_2 + x_1 - 3(x_4 + 2x_1) = 0, \\ x_3 - 2x_1 + 5(x_4 + 2x_1) = 0, \\ x_5 - x_1 = 0 \end{cases}$$

является искомой. После несложных преобразований ее можно записать в том же виде, что и выше

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_4 = 0, \\ 8x_1 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{V}$ — конечномерное подпространство евклидового пространства $\mathbb{E}$. Тогда евклидово пространство $\mathbb{E}$ равно прямой сумме подпространства $\mathbb{V}$ и его ортогонального дополнения $\mathbb{V}^\perp$, что можно записать формулой $\mathbb{E} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}^\perp$. Это значит, что любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ можно единственным образом представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{pr} + \mathbf{x}_{ort}$, где $\mathbf{x}_{pr} \in \mathbb{V}$, $\mathbf{x}_{ort} \in \mathbb{V}^\perp$. Слагаемое $\mathbf{x}_{pr}$ называется проекцией вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\mathbb{V}$, а вектор $\mathbf{x}_{ort}$ — ортогональной составляющей. Если известен какой-нибудь ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_k$ подпространства $\mathbb{V}$, то проекцию $\mathbf{x}_{pr}$ можно найти по формуле

$$\mathbf{x}_{pr} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{e}_k,$$

где $\alpha_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, а ортогональную составляющую из соотношения

$$\mathbf{x}_{ort} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr}.$$

Если же подпространство $\mathbb{V} = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$, где система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ не обязательно ортонормирована, то для нахождения проекции и ортогональной составляющей можно применить процесс ортогонализации (и тогда задача сводится к предыдущей) или следующий алгоритм. Так как проекция $\mathbf{x}_{pr} \in \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$, то ее можно записать в виде

$$\mathbf{x}_{pr} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_k\mathbf{a}_k \tag{5.1}$$

с неизвестными пока коэффициентами x_1, x_2, ..., x_k. Ортогональная составляющая $\mathbf{x}_{ort} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr}$ ортогональна подпространству $\mathbb{V}$. Это возможно лишь, если выполняются равенства

$$\begin{array}{l} (\mathbf{a}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr}) = 0, \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr}) = 0. \end{array} \tag{5.2}$$

Подставим (5.1) в (5.2), тогда

$$\begin{array}{l} (\mathbf{a}_1, \mathbf{x} - x_1\mathbf{a}_1 - x_2\mathbf{a}_2 - \dots - x_k\mathbf{a}_k) = 0, \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{x} - x_1\mathbf{a}_1 - x_2\mathbf{a}_2 - \dots - x_k\mathbf{a}_k) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{x} - x_1\mathbf{a}_1 - x_2\mathbf{a}_2 - \dots - x_k\mathbf{a}_k) = 0. \end{array}$$

Воспользовавшись свойствами скалярного произведения, получим

$$\begin{array}{l} (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) - x_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) - x_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - \dots - x_k(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) = 0, \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) - x_1(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) - x_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) - \dots - x_k(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{x}) - x_1(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1) - x_2(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2) - \dots - x_k(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k) = 0. \end{array}$$

А это есть система линейных уравнений для неизвестных x_1, x_2, ..., x_k. Ее можно записать в более привычной форме

$$\begin{cases} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)x_1 + (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)x_2 + \dots + (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k)x_k = (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}), \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)x_1 + (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2)x_2 + \dots + (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k)x_k = (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1)x_1 + (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2)x_2 + \dots + (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k)x_k = (\mathbf{a}_k, \mathbf{x}). \end{cases}$$

Эта система уравнений совместна, так как проекция $\mathbf{x}_{pr}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ существует. Если система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ линейно независима, то система уравнений имеет единственное решение. Если система векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k)$ линейно зависима, то система уравнений имеет бесконечно много решений. После того, как мы найдем какое-нибудь решение системы уравнений можно вычислить проекцию по формуле (5.1) и ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{ort} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr}$.

Пример 101 Найти проекцию вектора $\mathbf{x} = (1, 1, -4, 2)$ на подпространство, натянутое на векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 5, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -2, 3, -1)$ и его ортогональную составляющую.

Решение. Проверим сначала систему векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ на линейную зависимость:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -\underline{1} & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 3C_4 \\ \sim \\ C_3 + 2C_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен двум. Система векторов линейно зависима. Заменим ее на максимальную линейно независимую подсистему, в качестве которой можно взять $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Пусть проекция $\mathbf{x}_{pr} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2$. Найдем следующие скалярные произведения $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 3$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 8$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = 35$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = -2$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) = -19$. Тогда α_1, α_2 есть решение системы уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & -2 \\ 8 & 35 & -19 \end{array}\right).$$

В данном случае решение можно найти с использованием теоремы Крамера. Для этого нужно вычислить три определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 35 \end{vmatrix} = 105 - 64 = 41,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -19 & 35 \end{vmatrix} = -70 + 152 = 82,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -19 \end{vmatrix} = -57 + 16 = -41.$$

Тогда

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1.$$

и

$$\mathbf{x}_{pr} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_{ort} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{pr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Выделять в начале решения максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ необязательно.

Если система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима, то получится система уравнений большего размера, имеющая бесконечно много решений. Решим пример по этой схеме. Сначала нужно найти следующие скалярные произведения $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 3$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 8$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = 2$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = 35$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 19$, $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3) = 15$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = -2$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) = -19$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_3) = -15$.

Если проекция $\mathbf{x}_{pr} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3$, то коэффициенты этой линейной комбинации α_1, α_2, α_3 есть решение системы уравнений с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 2 & -2 \\ 8 & 35 & 19 & -19 \\ 2 & 19 & 15 & -15 \end{array}\right). \tag{5.3}$$

Вычтем из первой строки расширенной матрицы третью для того, чтобы удобнее было проводить следующие элементарные произведения

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -11 & -13 & 13 \\ 8 & 35 & 19 & -19 \\ 2 & 19 & 15 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 8C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -11 & -13 & 13 \\ 0 & 123 & 123 & -123 \\ 0 & 41 & 41 & -41 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2/123 \\ \sim \\ C_3/41 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -11 & -13 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 11C_2 \\ \sim \\ C_3 - C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Мы получили систему уравнений $\alpha_1 - 2\alpha_3 = 2$, $\alpha_2 + \alpha_3 = -1$. Общее решение можно записать в виде $\alpha_1 = 2\alpha_3 + 2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 - 1$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Нам нужно найти какое-нибудь частное решение. Например, пусть $\alpha_3 = 0$. Тогда $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$ и $\mathbf{x}_{pr} = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ как и выше. Внимательный читатель давно уже заметил, что система уравнений (5.3) имеет частное решение $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$. Тогда $\mathbf{x}_{pr} = -\mathbf{a}_3$, что дает тот же результат.

Пример 102 Найти проекцию $\mathbf{x}_{pr}$ вектора $\mathbf{x} = (3, -1, -2, 4)$ на подпространство всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

и его ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{ort}$. Найти угол между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством $\mathbb{V}$. Найти расстояние от вектора $\mathbf{x}$ до подпространства $\mathbb{V}$.

Решение. Сначала найдем проекцию и ортогональную составляющую вектора $\mathbf{x}$. Пусть элементы двух векторов $\mathbf{a}_1 = (2, -1, -1, -1)$ и $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, 1)$ суть коэффициенты соответственно первого и второго уравнения системы, данной по условию . Выше показано, что линейная оболочка, порожденная этой системой векторов, есть ортогональное дополнение к подпространству решений системы уравнений. Поэтому вектор $\mathbf{x}_{ort}$ является проекцией вектора $\mathbf{x}$ на линейную оболочку

$\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, а вектор $\mathbf{x}_{pr}$ — ортогональной составляющей. Вычислим следующие скалярные произведения $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 7$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = -1$, $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = 3$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1) = 5$, $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_2) = 5$. Если $\mathbf{x}_{ort} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2$, то неизвестные коэффициенты этой линейной комбинации являются решением системы уравнений со следующей расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{rr|r} 7 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \underset{C_2 + 3C_1}{\sim} \left(\begin{array}{rr|r} 7 & -1 & 5 \\ 20 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

Из второго уравнения получаем, что $\alpha_1 = 1$. Из первого уравнения $\alpha_2 = 7\alpha_1 - 5 = 7 - 5 = 2$. Значит,

$$\mathbf{x}_{ort} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко найти и проекцию

$$\mathbf{x}_{pr} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{ort} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. По определению угол между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством есть угол между вектором $\mathbf{x}$ и его проекцией $\mathbf{x}_{pr}$ на это подпространство. По формуле для косинуса угла между векторами получаем, что

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{pr})}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{x}_{pr}\|} = \frac{15}{\sqrt{30}\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, угол между векторами, а, следовательно, между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством решений системы уравнений равен $\pi/4$.

3. Расстояние от вектора $\mathbf{x}$ до подпространства равно длине (норме) ортогональной составляющей вектора $\mathbf{x}$. Норма вектора $\mathbf{x}_{ort}$ равна $\sqrt{15}$. Это и есть искомое расстояние.

Определитель Грама

> Голос красоты звучит тихо: он проникает только в самые чуткие уши. *Ф. Ницше.*

Квадратная вещественная матрица вида

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k) \end{pmatrix}$$

называется матрицей Грама системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Определитель этой матрицы называется определителем Грама этой системы векторов и будет обозначаться

$$\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_k) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k) \end{vmatrix}.$$

Определитель Грама обладает следующими свойствами.

1. Определитель Грама $\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) \geqslant 0$.

2. Определитель Грама $\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = 0$ тогда и только тогда, когда система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима.

3. $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k) = \|\mathbf{x}_o\|^2 \Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$, где $\mathbf{x}_o$ есть ортогональная составляющая вектора $\mathbf{x}$ к подпространству $\ell(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

4. Определитель Грама системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ равен квадрату объема k — мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V_k = \sqrt{\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)}.$$

В частности, $\Gamma(\mathbf{a}_1)$ равен квадрату длины вектора $\mathbf{a}_1$; $\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; $\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{\Gamma(\mathbf{a}_1)}, \quad S = \sqrt{\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}, \quad V = \sqrt{\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}.$$

5. Пусть $(\mathbf{e})$ — ортонормированный базис и $(\mathbf{a}_1)_e = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $(\mathbf{a}_2)_e = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$,..., $(\mathbf{a}_n)_e = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$. Тогда

$$\Gamma(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}^2.$$

Поэтому

$$V_n = \mathrm{abs} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где abs в правой части равенства означает, что берется абсолютная величина определителя.

Задания

Осмельтесь мыслить самостоятельно.
Вольтер.

104. В следующих примерах найти длины (нормы) векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и угол между ними в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$.
a). $\mathbf{a} = (3, -2, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, -2, 0)$.
b). $\mathbf{a} = (-1, 3, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (2, -1, -1, 1)$.
c). $\mathbf{a} = (-2, -2, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -3, -1)$.
d). $\mathbf{a} = (-1, 1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, -3, -1, -3)$.
e). $\mathbf{a} = (0, 2, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 1, 1)$. f). $\mathbf{a} = (1, -1, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1, 4)$.

105. В следующих примерах найти длины (нормы) элементов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ и угол между ними в евклидовом пространстве всех многочленов с вещественными коэффициентами
• и скалярным произведением $\int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$.
a). $\mathbf{f}(x) = -x + 1$, $\mathbf{g}(x) = -1$. b). $\mathbf{f}(x) = -x$, $\mathbf{g}(x) = x + 1$.
• и скалярным произведением $\int_{0}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$.
c). $\mathbf{f}(x) = 2x - 1$, $\mathbf{g}(x) = -x + 1$. d). $\mathbf{f}(x) = 1$, $\mathbf{g}(x) = x - 1$.
• и скалярным произведением $\int_{-1}^{0} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$.
e). $\mathbf{f}(x) = -1$, $\mathbf{g}(x) = x$. f). $\mathbf{f}(x) = x + 1$, $\mathbf{g}(x) = -x + 1$.

106. Проверить, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ортогональна в $\mathbb{E}^4$ и дополнить ее до ортогонального базиса (дополнение не единственно).
a). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 2, -2)$. b). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -2, 0)$.
c). $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, 3)$. d). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, -2, 1)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 3)$. f). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, -2)$.

107. Проверить, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ортонормирована в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ и дополнить ее до ортонормированного базиса (дополнение не единственно).
a). $\mathbf{a}_1 = (-1/2; -1/2; 1/2; -1/2)$, $\mathbf{a}_2 = (0; -1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2})$.
b). $\mathbf{a}_1 = (-2/\sqrt{10}; -2/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{5}; 0; 2/\sqrt{5}; 0)$.
c). $\mathbf{a}_1 = (-2/\sqrt{15}; 1/\sqrt{15}; 1/\sqrt{15}; 3/\sqrt{15})$, $\mathbf{a}_2 = (0; -1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-2/\sqrt{10}; 2/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10})$, $\mathbf{a}_2 = 1/\sqrt{10}(2; 2; -1; 1)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (-1/2; -1/2; 1/2; -1/2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1/2; -1/2; -1/2; 1/2)$.
f). $\mathbf{a}_1 = 1/\sqrt{21}(2; -2; 3; 2)$, $\mathbf{a}_2 = 1/\sqrt{7}(-1; 1; 2; -1)$.

108. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки, порожденной системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$.
a). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 3, -4, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 1, -2, 1)$,

$\mathbf{a}_4 = (-1, -3, 2, 1)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 3, -1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, -5, 0)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 3, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 3, 1, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (2, 0, 2, 2)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -2, -1, 2)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 5, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 5, 3, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 4, 0, 1)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 4, 6, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (0, -7, 2, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 1, 4, 2)$.

109. Найти базис (находится неоднозначно) ортогонального дополнения $\mathbb{V}^{\perp}$ подпространства $\mathbb{V}$, порожденного следующими системами векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, -3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 3, 1, -2)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 3, 2, -2)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-3, 3, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (4, -5, 4, -5)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 2, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1, 1)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 3, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, -3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 4, 0, -2)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (0, 4, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3, 3, 0)$.

110. Найти однородную систему уравнений (находится неоднозначно), задающую ортогональное дополнение $\mathbb{V}^{\perp}$ подпространства $\mathbb{V}$, заданного системой уравнений

a). $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$
b). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$

c). $\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$
d). $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$

e). $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$
f). $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$

111. Найти проекцию $\mathbf{x}_{pr}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и его ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{ort}$.

a). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 2, 5)$, $\mathbf{x} = (0, 2, 0, -1)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, -2, 0, 0)$, $\mathbf{x} = (-4, -7, 6, -2)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -3, 7, 2)$, $\mathbf{x} = (-7, 1, 1, 0)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 0, 4)$, $\mathbf{x} = (3, 1, 6, 0)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, -2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 3, -6, -7)$, $\mathbf{x} = (6, 8, 0, -3)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 4, 1, 3)$,

$\mathbf{x} = (-1, 4, -5, 0)$.

112. Найти проекцию $\mathbf{x}_{pr}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство решений следующих систем уравнений и его ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{ort}$.

a). $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (0, 2, 3, 2)$.

b). $\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (2, 2, 4, -1)$.

c). $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (4, 2, -3, -1)$.

d). $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-5, -1, 3, 0)$.

e). $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-3, -2, -1, 0)$.

f). $\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-1, 1, 3, 1)$.

113. Найти угол между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и расстояние от вектора $\mathbf{x}$ до этого подпространства.

a). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, -2, 0)$, $\mathbf{x} = (-2, -1, 3, -2)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x} = (2, 2, 4, -1)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{x} = (-3, -3, 1, -1)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 1, 1)$, $\mathbf{x} = (-1, 1, 5, 1)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 4, 1)$, $\mathbf{x} = (4, 1, 3, -1)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (2, -1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, -2, 1)$, $\mathbf{x} = (-1, 2, 0, -1)$.

ГЛАВА 6
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

> Я всегда презирал Адама за то, что он решился откушать яблока с древа познания, лишь будучи искушен женщиной, которую еще прежде искусил змей. Да я бы перекусал все яблоки на дереве — только отвернись хозяин. *Бернард Шоу.*

Одно из приятных достоинств евклидовых пространств состоит в том, что они имеют ортонормированные базисы. Поэтому возникает задача об исследовании в них матриц линейных операторов. При этом в первую очередь нас будут интересовать операторы, имеющие матрицу как можно более простой структуры. Некоторые из важных классов таких операторов рассмотрены ниже.

Самосопряженные операторы.

Линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, называется самосопряженным, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ выполняется равенство

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y}).$$

Например, нулевой и единичный операторы являются самосопряженными.

Если линейный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, является самосопряженным, то его матрица в любом ортонормированном базисе симметрическая[1]. Если существует ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора симметрическая, то этот оператор самосопряжен.

Важно, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора, действующего в конечномерном евклидовом пространстве, являются вещественными числами. Поэтому все они являются собственными значениями этого самосопряженного оператора.

[1] Квадратная матрица называется симметрической (симметричной), если она совпадает со своей транспонированной, то есть все ее элементы удовлетворяют равенству $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны.

Линейный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, самосопряжен тогда и только тогда, когда в этом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов данного оператора. В этом базисе матрица самосопряженного оператора диагональна. Значит, для любого самосопряженного оператора, действующего в конечномерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора диагональна. Этот базис не единственен.

Сформулированное в предыдущем абзаце утверждение можно переформулировать в матричной форме следующим образом. Для любой симметрической вещественной матрицы A существует ортогональная матрица U такая, что матрица $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{AU}$ диагональна.

Пример 103 Для линейного оператора, имеющего в некотором ортонормированном базисе матрицу

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

найти ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора диагональна.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы A и его корни:

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_2 - C_3}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^3+C^1}{\overset{C^2+C^1}{=}} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Таким образом, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям. Для $\lambda = 0$

$$\mathsf{A} - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна 1, то соответствующее собственное подпространство одномерно и собственный вектор по вышеприведенной матрице легко угадать: это $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -1)$.

Для $\lambda = 1$

$$\mathsf{A} - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае собственный вектор тоже легко увидеть. Это $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1)$.

Для $\lambda = 3$

$$\mathsf{A} - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае собственный вектор «сразу виден только после тщательного подбора». Поэтому пойдем по стандартному пути, решив однородную систему уравнений с данной матрицей. Можно умножить первую строку матрицы на 2 и к ней прибавить вторую и третью строки. Тогда

$$\mathsf{A} - \lambda E \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что собственный вектор имеет вид $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 1)$. Так как векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ отвечают различным собственным значениям, то они попарно ортогональны. Следовательно, они образуют ортогональный базис. Нормируя эти векторы, получим ортонормированный базис. Для этого найдем нормы (длины) этих векторов

$$\|\mathbf{a}_1\| = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{a}_2\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{a}_3\| = \sqrt{6}.$$

Тогда векторы

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{2}} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{a}_3}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

составляют искомый базис. В этом базисе матрица оператора диагональна

$$A_e = \mathrm{diag}(0, 1, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Пример</u> 104 Для линейного оператора, имеющего в некотором ортонормированном базисе матрицу

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

найти ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора диагональна или, что тоже самое, для матрицы A найти ортогональную матрицу U такую, что матрица $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ диагональна.

<u>Решение</u>. Найдем характеристический многочлен матрицы A и его корни:

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ = \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} C^1 + C^2 + C^3 + C^4 \\ = \\ \text{То есть к первому столбцу} \\ \text{прибавим все остальные} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)^3.$$

Корни характеристического многочлена суть 4 и 0. Они принадлежат полю вещественных чисел, следовательно, являются собственными значениями. Найдем для каждого собственного значения соответствующие собственные векторы. Для $\alpha = 0$

$$\mathsf{A} - 0\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и, следовательно, общее решение можно записать в виде $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$, $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Фундаментальная система решений

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	1	0	0
-1	0	1	0
-1	0	0	1

.

Таким образом, получена система собственных векторов $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 0, 1)$. К сожалению эта система векторов не ортогональна. Поэтому ее нужно с помощью процесса ортогонализации преобразовать в ортогональную систему собственных векторов. В соответствии с этим алгоритмом положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$ и

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{b}_1, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}.$$

Скалярные произведения в числителе и знаменателе дроби нетрудно вычислить. Так как $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 1$ и $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) = 2$, то $\alpha = 1/2$. Значит

$$\mathbf{b}_2 = (-1, 0, 1, 0) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

Далее,

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \alpha_1 \mathbf{b}_1 - \alpha_2 \mathbf{b}_2, \quad \text{где} \quad \alpha_1 = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}.$$

Скалярное произведение $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)$ уже вычислено. Кроме того $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1) = 1$, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) = 3/2$, $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2) = 1/2$. Тогда $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = (1/2)/(3/2) = 1/3$ и

$$\mathbf{b}_3 = (-1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0, 0) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Векторы полученной ортогональной системы нужно еще пронормировать. Так как $\|\mathbf{b}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{3/2}$, $\|\mathbf{b}_3\| = 2/\sqrt{3}$, то

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Для $\alpha = 4$

$$\mathsf{A} - 4\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Алгебраическая кратность собственного значения $\alpha = 4$ равна 1. Следовательно, геометрическая кратность (которая не меньше 1 и не больше алгебраической кратности) тоже равна 1. Отсюда следует, что фундаментальная система решений содержит лишь один вектор. Его можно найти как обычно, решая систему уравнений методом последовательных исключений. Но иногда он виден сразу, как в этом случае. Вектор $\mathbf{b}_4 = (1, 1, 1, 1)$, очевидно, удовлетворяет системе уравнений. Его норма $\|\mathbf{b}_4\| = 2$. Тогда вектор $\mathbf{u}_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ последний в искомом ортонормированном базисе. Будем считать, что матрица A есть матрица линейного оператора A в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$: $A_e = \mathsf{A}$. Тогда матрица оператора A в базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ диагональна с собственными значениями на диагонали (порядок следования собственных значений соответствует порядку следования их собственных векторов в базисе)

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы оператора связаны формулой

$$A_u = P^{-1}_{e\to u} A_e P_{e\to u}.$$

Матрицу перехода $P_{e\to u}$ легко найти. По определению она состоит (по столбцам) из координатных векторов второго базиса в первом. Элементы векторов второго базиса совпадают с координатами этих векторов в стандартном базисе. Поэтому эта матрица перехода состоит по столбцам из элементов векторов базиса $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$:

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица $\mathsf{U} = P_{e\to u}$. Она удовлетворяет соотношению $A_u = \mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ и, следовательно, является искомой. Ее обратную матрицу легко найти. Так как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной, то ее обратная по определению совпадает с транспонированной

$$\mathsf{U}^{-1} = \mathsf{U}^{\tau} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сопряженные и нормальные операторы.

> ...математическое образование есть благо, на которое имеет право каждое человеческое существо, каковы бы ни были его национальность, пол, положение и деятельность ... *XIX Международная конференция по народному образованию, созванная ЮНЕСКО и БИЕ.*[2]

Оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, называется сопряженным к линейному оператору A и обозначается

[2]Математическое просвещение, вып.I. М.:Гостехиздат, 1957.

A^*, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ имеет место равенство $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^*\mathbf{y})$.

Сопряженный оператор A^* существует, линеен и единственен для любого линейного оператора A.
Для любых линейных операторов A и B и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ имеют место следующие равенства:

а) $(A^*)^* = A$;
б) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$;
в) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
г) $(AB)^* = B^* A^*$.

Если линейный оператор A обратим, то и его сопряженный оператор обратим и верно равенство $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Линейный оператор A является самосопряженным тогда и только тогда, когда $A = A^*$.

Матрица $(A^*)_e$ сопряженного оператора A^* в любом ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ является транспонированной[3] к матрице A_e линейного оператора A: $(A^*)_e = (A_e)^\tau$. Если матрица B_e линейного оператора B в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ является транспонированной к матрице A_e линейного оператора A, то $B = A^*$. Характеристические многочлены (и, следовательно, спектры) линейного оператора и его сопряженного оператора совпадают.

Если подпространство $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ является инвариантным для линейного оператора A, то ортогональное дополнение $\mathbb{V}^\perp$ инвариантно для сопряженного оператора A^*.

Линейный оператор A называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным оператором: $AA^* = A^*A$.

Линейный оператор, действующий в конечномерном вещественном евклидовом пространстве, нормален, если существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора коммутирует со своей транспонированной. Если же линейный оператор нормален, то его матрица в <u>любом</u> ортонормированном базисе коммутирует со своей транспонированной. Любой самосопряженный оператор является нормальным. Однако множество нормальных операторов шире (при $n > 1$) множества самосопряженных операторов.

Ортогональное дополнение к собственному вектору нормального оператора является инвариантным подпространством для этого оператора.

Собственные векторы нормального оператора, отвечающие его различным собственным значениям, ортогональны. Если невещественное

[3] Матрица называется транспонированной к матрице A и обозначается A^τ, если каждый ее элемент $a^\tau_{i,j}$ равен элементу $a_{j,i}$ матрицы A.

число $\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ является корнем характеристического многочлена нормального оператора A, то существует ортонормированная система векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ такая, что

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u}-\beta\mathbf{v},\\ A\mathbf{v} &= \beta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ортогональное дополнение к двумерному подпространству $\ell(\mathbf{u},\mathbf{v})$ является инвариантным для нормального оператора A.

Пример 105 Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Решение. Достаточно проверить равенство $\mathsf{A}\mathsf{A}^\tau=\mathsf{A}^\tau\mathsf{A}$

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^\tau=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}^\tau\mathsf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Мы получили одинаковые произведения. Значит, линейный оператор с такой матрицей является нормальным.

Линейный оператор, действующий в конечномерном вещественном евклидовом пространстве, нормален тогда и только тогда, когда в этом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица данного оператора имеет блочно-диагональный вид с блоками порядка 1 или 2

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{O} & \\ & & a_k & & & \\ & & & T_1 & & \\ & \text{O} & & & \ddots & \\ & & & & & T_l \end{pmatrix},$$

где $T_i=\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i\\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}=r_i\begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, i=1,\dots,l,$
$a_j\in\mathbb{R}, j=1,\dots,k,$ $\alpha_i,\beta_i,r_i,\varphi_i\in\mathbb{R}$, $r_i>0$, $\beta_i\neq 0$, φ_i не кратно π, $i=1,\dots,l$ а числа k,l могут быть и нулями. Этот ортонормированный базис будем называть каноническим.

Пример 106 Является ли нормальным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Если да, то найти канонический базис, то есть ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет блочно-диагональный вид с блоками порядка 1 или 2.

Решение. То, что это нормальный оператор можно проверить также, как в предыдущем примере. Не будем здесь этого делать, а сразу перейдем к поиску ортонормированного базиса. Если удастся построить канонический базис, то как следствие из его существования получим, что оператор является нормальным. Займемся сначала собственными значениями линейного оператора и отвечающими им собственными векторами. Характеристический многочлен можно найти, используя главные миноры матрицы A

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 3$$

Видно, что $\lambda = -1$ является корнем характеристического многочлена. Поделив по схеме Горнера, получим

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 2\lambda - 3).$$

Корни квадратного трехчлена легко находятся $\lambda = 1 \pm i\sqrt{2}$.

Найдем собственный вектор для единственного собственного значения $\alpha = -1$

$$\mathsf{A} + \mathsf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор легко угадывается. Это $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$. Больше линейно независимых с $\mathbf{a}$ собственных векторов нет.

Для любого из сопряженных невещественных корней, например для $\lambda = 1 - i\sqrt{2}$, существует ортонормированная система векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, удовлетворяющая (6.1). Ее найти не сложно, если, считая матрицу A комплексной, вычислить ее собственный вектор для собственного значения $\alpha = 1 - i\sqrt{2}$ и выделить его действительную и мнимую часть. Обычные вычисления

$$\mathsf{A} - (1 - i\sqrt{2})\mathsf{E} = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} - 1 & -\underline{1} & 1 \\ 1 & i\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & i\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + i\sqrt{2}C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} i\sqrt{2} - 1 & -1 & 1 \\ -1 - i\sqrt{2} & 0 & 1 + i\sqrt{2} \\ 2 - i\sqrt{2} & 0 & -2 + i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2/(1 + i\sqrt{2}) \\ \sim \\ C_3/(2 - i\sqrt{2}) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} i\sqrt{2}-1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & \underline{1} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_2 \\ \sim \\ C_3 + C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

приводят нас к общему решению $x_3 = x_1$, $x_2 = i\sqrt{2}x_1$. Полагая $x_1 = 1$, получаем комплексный собственный вектор $\mathbf{z} = (1, i\sqrt{(2)}, 1)$. Его вещественная и мнимая часть соответственно имеют вид $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ и $\mathbf{v} = (0, \sqrt{2}, 0)$. Нормируя все найденные векторы, получим $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = (0, 1, 0)$. Это и есть искомый ортонормированный базис. Так как

$$\begin{aligned} &Ae_1 = -e_1, \\ &Ae_2 = e_2 + \sqrt{2}e_3, \\ &Ae_3 = -\sqrt{2}e_2 + e_3, \end{aligned}$$

то в этом ортонормированном базисе нормальный оператор A имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональные операторы.

> ...Более же высокая степень понимания приходит, если вы сами оказываетесь в состоянии ставить и распутывать более трудные вопросы или задачи, разрешимые в рамках изученной вами теории. *Л. И. Мандельштам.*[4]

Обратимый линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, называется ортогональным, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ имеет место равенство $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y})$. Для конечномерного евклидового пространства $\mathbb{E}$ требование обратимости оператора в определении можно опустить.

Линейный оператор A, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, ортогонален тогда и только тогда, когда его сопряженный оператор совпадает с обратным оператором, то есть $A^* = A^{-1}$.

Ортогональный оператор является нормальным.

Линейный оператор A, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, ортогонален тогда и только тогда, когда $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ (оператор A не меняет длин векторов). В

[4] В.Я.Френкель. Пауль Эренфест. М., Атомиздат, 1977.

бесконечномерном случае нужно учесть еще и обратимость линейного оператора.

Если линейный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, ортогонален, то его матрица в любом ортонормированном базисе ортогональна[5]. Если для линейного оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица ортогональна, то он также ортогонален.

Корнями характеристического многочлена ортогонального оператора, действующего в конечномерном евклидовом пространстве, могут быть только 1, -1 и невещественные числа, по модулю равные 1. Таким образом, для ортогонального оператора собственными значениями могут быть только числа 1 и -1 (спектр может быть и пустым).

Линейный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, ортогонален тогда и только тогда, когда в этом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица данного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \text{O} & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & T_1 & & & \\ & \text{O} & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & T_l \end{pmatrix},$$

где $T_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, l$, $\sin\varphi_i \neq 0$, диагональные элементы ± 1 могут отсутствовать, а число l может быть и нулем.

<u>Пример</u> 107 Является ли ортогональным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}?$$

Если да, то найти канонический базис, то есть ортонормированный

[5] См. определение на стр. 264

базис, в котором матрица этого оператора имеет блочно-диагональный вид с блоками порядка 1 или 2.

Решение. Линейный оператор A будет ортогональным лишь в том случае, когда его матрица A (в ортонормированном базисе) будет ортогональной. Последнее легко проверить. Ведь по определению матрица является ортогональной, когда ее транспонированная совпадает с обратной. А это легко установить, перемножив матрицу A и ее транспонированную

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{\tau} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathsf{E}.$$

Произведение матриц равно единичной, значит матрица A ортогональна. Так как ортогональные операторы являются частным случаем нормальных, то к ортогональным операторам применим алгоритм нахождения канонического базиса, описанный выше для нормальных операторов. В соответствии с ним найдем все корни характеристического многочлена. Это будут числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$. Первый и второй корни вещественные. Это собственные значения ортогонального оператора. Им соответствуют собственные векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 0, 1)$. Далее, рассматривая матрицу как комплексную, найдем собственный вектор для ее собственного значения $\alpha = i$. Это будет вектор $\mathbf{z} = (i, 1, -i, 1)$. Выделяя его действительную и мнимую части, получим $\mathbf{u} = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -1, 0)$. Нормируя, получим $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{2}(0, -1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{2}(1, 0, -1, 0)$. В этом ортонормированном базисе матрица ортогонального оператора имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Антисамосопряженные операторы.

> Начните научную работу, даже если она не будет иметь мирового значения, начните как можно скорее, и вы сразу почувствуете себя счастливее. Чем труднее работа, тем меньше времени останется на неприятности. *Из письма*[6] *Э. Резерфорда П. Л. Капице.*

Линейный оператор A называется антисамосопряженным (или кососимметрическим), если $A = -A^*$. Иными словами, для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ имеет место равенство $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{x}, A\mathbf{y})$. Антисамосопряженный оператор является нормальным.

Если линейный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, является антисамосопряженным, то его матрица в любом ортонормированном базисе кососимметрическая[7].

Если существует ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора кососимметрическая, то этот оператор антисамосопряжен.

Корнями характеристического многочлена антисамосопряженного оператора, действующего в конечномерном евклидовом пространстве, могут быть только чисто мнимые[8] комплексные числа (в том числе и ноль). Таким образом, для антисамосопряженного оператора собственным значением может быть только ноль (спектр может быть и пустым).

Линейный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве, антисамосопряжен тогда и только тогда, когда в этом пространстве существует ортонормированный базис, в котором матрица данного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large O} & \\ & & 0 & & & \\ & & & T_1 & & \\ & \text{\Large O} & & & \ddots & \\ & & & & & T_l \end{pmatrix},$$

[6] Ф. Кедров. Эрнест Резерфорд. М. Знание, 1980.

[7] Квадратная вещественная матрица называется кососимметрической (кососимметричной), если она противоположна своей транспонированной, то есть все ее элементы удовлетворяют равенству $a_{i,j} = -a_{j,i}$. В частности, все ее диагональные элементы равны нулю.

[8] Комплексное число называется (чисто) мнимым, если его действительная часть равна нулю.

где $T_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, l$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$, $\sigma_j \neq 0$, $j = 1, \dots, l$, а все нули или все T_i могут и отсутствовать на диагонали матрицы.

Пример 108 Является ли антисамосопряженным линейный оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Если да, то найти канонический базис, то есть ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет блочно-диагональный вид с блоками порядка 1 или 2.

Решение. Матрица кососимметрическая, значит линейный оператор является антисамосопряженным. Дальнейшие вычисления ничем не отличается от аналогичных вычислений в примере для нормального оператора. Характеристический многочлен равен $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda$. Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{6}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{6}$. Для собственного значения $\alpha = 0$ нетрудно найти собственный вектор $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$. Рассматривая матрицу как комплексную, найдем ее собственный вектор для собственного значения $i\sqrt{6}$. Это будет вектор $\mathbf{z} = (1 + 2i\sqrt{6}, 2 - i\sqrt{6}, -5)$. Его действительная и мнимая часть соответственно равны $\mathbf{u} = (1, 2, -5)$, $\mathbf{v} = (2\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 0)$. Нормируя векторы, получим $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{6}(1, 2, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{30}(1, 2, -5)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{5}(2, -1, 0)$. В этом ортонормированном базисе антисамосопряженный оператор будет иметь матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задания

По-настоящему тебе
Принадлежит лишь то,
Что сделано тобою.
Фихиро.

114. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. d). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. g). $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. j). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

115. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -5 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

116. Найти канонический базис линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2+\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. b). $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6} \\ 1 & -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$.

c). $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & -2 \\ -2+\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$. d). $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

e). $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 2 \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2 \\ -2 & 2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$. f). $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 5+2\sqrt{5} & -5+2\sqrt{5} & -\sqrt{10} \\ -5+2\sqrt{5} & 5+2\sqrt{5} & -\sqrt{10} \\ \sqrt{10} & \sqrt{10} & 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

117. Найти канонический базис линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 7
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Канонический вид квадратичных форм

> Верно определяйте слова, и вы освободите мир от половины недоразумений. *Рене Декарт.*

Пусть в конечномерном линейном пространстве $\mathbb{V}$, определенном над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, задан базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2,\ldots$, $\mathbf{e}_n$. Квадратичной формой называется числовая функция $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ следующего вида

$$f(\mathbf{x}) = a_{1,1}x_1^2+a_{2,2}x_2^2+\cdots+a_{n,n}x_n^2+2a_{1,2}x_1x_2+2a_{1,3}x_1x_3+\cdots+2a_{1,n}x_1x_n+$$

$$+2a_{2,3}x_2x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n, \tag{7.1}$$

где аргументы x_1, $x_2,\ldots$, x_n суть элементы координатного вектора $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Коэффициенты $a_{i,j}$ принадлежат или $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в зависимости от того, над каким полем рассматривается линейное пространство $\mathbb{V}$. Квадратичная форма является однородной функцией второй степени относительно переменных x_1, $x_2,\ldots$, x_n. Последние в дальнейшем чаще всего будут называться координатами вектора $\mathbf{x}$ в данном базисе. Если положить $a_{i,j} = a_{j,i}$ для всех i, j, то квадратичную форму можно представить в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j. \tag{7.2}$$

Матрицей квадратичной формы в базисе e называется симметрическая матрица

$$F_e = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Используя матричные операции, равенство (7.2) можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_e)^\tau F_e\mathbf{x}_e.$$

Представление квадратичной формы в таком виде единственно.

Если задан еще один базис $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2,\ldots$, $\mathbf{u}_n$, то матрицы квадратичной формы в разных базисах связаны с помощью матрицы перехода $P_{e\to u}$

соотношением

$$F_u = P^{\tau}_{e\to u} F_e P_{e\to u}. \tag{7.3}$$

Рангом или индексом инерции квадратичной формы называется ранг матрицы этой формы в каком-нибудь базисе. Его будем обозначать r_f или $r(f)$. Квадратичная форма называется вырожденной, если ее ранг меньше размерности пространства $\mathbb{V}$, и невырожденной, если ее ранг равен размерности пространства $\mathbb{V}$.

Будем говорить, что квадратичная форма в базисе $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …, $\mathbf{u}_n$ имеет канонический вид, если ее матрица F_u диагональна. Это равносильно тому, что в этом базисе квадратичная форма имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{F}$ и $\mathbf{x}_u = (x_1,\ x_2, \dots, x_n)$. Базис называется каноническим для квадратичной формы, если она в нем имеет канонический вид. Если же числа λ_i равняются только или ± 1 или нулю, то такой канонический вид называется нормальным. Базисные векторы можно переставить так, чтобы все слагаемые с нулевыми коэффициентами шли в самом конце. Тогда получим канонический (в частности нормальный) вид с ненулевыми коэффициентами

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2.$$

Здесь число r равно рангу квадратичной формы.

Для любой квадратичной формы, заданной в конечномерном пространстве, существует канонический базис. В координатах вектора это утверждение формулируется так. Любая квадратичная форма, заданная в конечномерном линейном пространстве, с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду.

Любую комплексную квадратичную форму можно преобразовать к нормальному виду

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2.$$

Любую вещественную квадратичную форму можно преобразовать к нормальному виду

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Число квадратов с положительными коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы f называется положительным индексом инерции и обозначается $r_+(f)$, число квадратов с отрицательными коэффициентами в каноническом виде квадратичной формы f называется отрицательным индексом инерции и обозначается $r_-(f)$. Индексы инерции не зависят от способа приведения к каноническому (нормальному) виду. Индексы инерции связаны соотношением $r(f) = r_+(f) + r_-(f)$.

При приведении квадратичной формы к каноническому виду полезна следующая формула для квадрата суммы

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+$$
$$+\,2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_1x_n+2x_2x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n.$$

Пример 109 Найти канонический (нормальный) вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование.

а). $f(\mathbf{x}) = x_1^2+2x_2^2-8x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-16x_2x_3$;

б). $f(\mathbf{x}) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4-2x_3x_4$;

в). $f(\mathbf{x}) = 6x_1x_3+4x_1x_4-3x_3^2-2x_3x_4+2x_1x_2+x_2^2+2x_2x_3+2x_2x_4$.

Решение. Будет предложено несколько способов решения. Сначала воспользуемся классическим методом Лагранжа. Он основан на процедуре выделения полного квадрата. Как поступать, когда непосредственное выделение полного квадрата невозможно, можно посмотреть в преобразованиях для квадратичных форм из заданий б) и в). А для квадратичной формы из задания а) сначала возьмем все слагаемые, содержащие x_1. Это будет выражение

$$x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3.$$

Здесь стоит квадрат первого слагаемого x_1, затем удвоенное произведение x_1 на $2x_2$ и минус удвоенное произведение x_1 на x_3. Значит, чтобы получить эти слагаемые, нужно в квадрат возводить $x_1+2x_2-x_3$. Тогда

$$(x_1+2x_2-x_3)^2 = x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3.$$

Отсюда

$$x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3 = (x_1+2x_2-x_3)^2-4x_2^2-x_3^2+4x_2x_3.$$

Значит

$$f(\mathbf{x}) = (x_1+2x_2-x_3)^2-2x_2^2-9x_3^2-12x_2x_3.$$

Сделаем замену $y_1 = x_1+2x_2-x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. Получим

$$f(\mathbf{x}) = y_1^2-2y_2^2-9y_3^2-12y_2y_3.$$

Выпишем теперь все слагаемые, содержащие y_2, и выделим полный квадрат

$$-2y_2^2-12y_2y_3 = -2(y_2^2+6y_2y_3) = -2((y_2+3y_3)^2-9y_3^2) = -2(y_2+3y_3)^2+18y_3^2.$$

Тогда

$$f(\mathbf{x}) = y_1^2-2(y_2+3y_3)^2+9y_3^2.$$

После замены $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2+3y_3$, $z_3 = y_3$ получим канонический вид квадратичной формы

$$f(\mathbf{x}) = z_1^2-2z_2^2+9z_3^2.$$

Так как в каноническом виде присутствуют три ненулевых слагаемых, то ранг равен трем. Если мы рассматриваем квадратичную форму как

комплексную, то после замены $t_1 = z_1$, $t_2 = \sqrt{2}iz_2$, $t_3 = 3z_3$ получим нормальный вид
$$f(\mathbf{x}) = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$
и $t_1 = z_1 = y_1 = x_1+2x_2-x_3$, $t_2 = \sqrt{2}iz_2 = \sqrt{2}i(y_2+3y_3) = \sqrt{2}i(x_2+3x_3)$, $t_3 = 3z_3 = 3y_3 = 3x_3$. Окончательно $t_1 = x_1+2x_2-x_3$, $t_2 = \sqrt{2}i(x_2+3x_3)$, $t_3 = 3x_3$.

В случае вещественной квадратичной формы отрицательные коэффициенты «спрятать» под квадрат не удастся. Поэтому после замены $t_1 = z_1$, $t_2 = \sqrt{2}z_2$, $t_3 = 3z_3$ получим нормальный вид
$$f(\mathbf{x}) = t_1^2 - t_2^2 + t_3^2,$$
где $t_1 = x_1+2x_2-x_3$, $t_2 = \sqrt{2}(x_2+3x_3)$, $t_3 = 3x_3$. Так как канонический вид квадратичной формы содержит два квадрата с положительными коэффициентами и один квадрат с отрицательным коэффициентом, то положительный индекс инерции равен двум, а отрицательный — одному.

б). Для квадратичной формы второго задания поступаем аналогичным образом. Для слагаемых
$$\sigma = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4,$$
содержащих x_1, выделим полный квадрат
$$\sigma = (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$
После замены $y_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$ получим
$$f(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2y_2y_3 - 2y_2y_4.$$
Теперь можно перейти к выделению полного квадрата по следующей переменной. Для этого нужно, чтобы квадрат переменной входил с ненулевым коэффициентом. В нашем случае это не так. Для того, чтобы это исправить, введем замену
$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2 + z_3, \quad y_3 = z_2 - z_3, \quad y_4 = z_4.$$
Тогда
$$f(\mathbf{x}) = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2 - 2z_2z_4 - 2z_3z_4.$$
Для слагаемых, содержащих z_2, выделим полный квадрат
$$2z_2^2 - 2z_2z_4 = 2(z_2^2 - z_2z_4) = 2((z_2 - \frac{1}{2}z_4)^2 - \frac{1}{4}z_4^2) = 2(z_2 - \frac{1}{2}z_4)^2 - \frac{1}{2}z_4^2.$$
Снова делаем замену
$$t_1 = z_1, \quad t_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_4, \quad t_3 = z_3, \quad t_4 = z_4.$$
Тогда
$$f(\mathbf{x}) = t_1^2 + 2t_2^2 - 2t_3^2 - \frac{1}{2}t_4^2 - 2t_3t_4.$$
Так как
$$-2t_3^2 - \frac{1}{2}t_4^2 - 2t_3t_4 = -2(t_3 + \frac{1}{2}t_4)^2,$$

то после замены
$$s_1 = t_1, \quad s_2 = t_2, \quad s_3 = t_3 + \frac{1}{2}t_4, \quad s_4 = t_4$$
получим канонический вид квадратичной формы
$$f(\mathbf{x}) = s_1^2 + 2s_2^2 - 2s_3^2.$$
Число квадратов с ненулевыми коэффициентами меньше числа всех переменных. Следовательно квадратичная форма вырождена. Ее индекс инерции (ранг) равен трем. Если квадратичная форма является вещественной, то ее положительный индекс инерции равен двум и отрицательный индекс инерции равен одному. Для того, чтобы привести квадратичную форму к нормальному виду, нужно сделать еще одну замену. Если квадратичная форма является комплексной, то после замены $\xi_1 = s_1$,$\xi_2 = \sqrt{2}s_2$, $\xi_3 = i\sqrt{2}s_3$, $\xi_4 = s_4$ получим
$$f(\mathbf{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2.$$
Связь координат нетрудно получить. Так как $\xi_1 = s_1$, $s_1 = t_1$, $t_1 = z_1$, $z_1 = y_1$, $y_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$, то $\xi_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$. Из равенств $\xi_4 = s_4$, $s_4 = t_4$, $t_4 = z_4$, $z_4 = y_4$, $y_4 = x_4$ следует, что $\xi_4 = x_4$. Прежде, чем получить аналогичные соотношения для остальных переменных, заметим, что из $y_2 = z_2 + z_3$, $y_3 = z_2 - z_3$ (складывая их и вычитая) легко получить $z_2 = (y_2 + y_3)/2$, $z_3 = (y_2 - y_3)/2$. Тогда из $\xi_2 = \sqrt{2}s_2$, $s_2 = t_2$, $t_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_4$, $z_2 = (y_2 + y_3)/2$, $z_4 = x_4$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ следует $\xi_2 = \sqrt{2}(x_2 + x_3 - x_4)/2$. Из равенств $\xi_3 = i\sqrt{2}s_3$, $s_3 = t_3 + \frac{1}{2}t_4$, $t_3 = z_3$, $z_3 = (y_2 - y_3)/2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ получаем $\xi_3 = i\sqrt{2}(x_2 - x_3 + x_4)/2$.

Если квадратичная форма является вещественной, то после замены $\xi_1 = s_1$,$\xi_2 = \sqrt{2}s_2$, $\xi_3 = \sqrt{2}s_3$, $\xi_4 = s_4$ получим
$$f(\mathbf{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2,$$
причем линейное невырожденное преобразование координат дается равенствами $\xi_1 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$, $\xi_2 = \sqrt{2}(x_2 + x_3 - x_4)/2$, $\xi_3 = \sqrt{2}(x_2 - x_3 + x_4)/2$, $\xi_4 = x_4$.

в). У квадратичной формы
$$f(\mathbf{x}) = 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 3x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4.$$
коэффициент при квадрате первой координаты равен нулю. Есть, правда, произведение x_1x_2. Замена $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$ даст необходимый квадрат. Но можно здесь поступить и иначе. Есть ненулевые коэффициенты при квадратах других координат. Удобно x_2 сделать первой координатой. Этого можно достичь с помощью линейного невырожденного преобразования координат $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4$. Тогда квадратичная форма примет вид
$$f(\mathbf{x}) = y_1^2 - 3y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4 + 6y_2y_3 + 4y_2y_4 - 2y_3y_4.$$

Теперь можно взять сумму всех слагаемых, содержащих y_1,

$$\sigma = y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 + 2y_1y_4.$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$\sigma = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - 2y_2y_3 - 2y_2y_4 - 2y_3y_4.$$

После замены $z_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, $z_4 = y_4$ получим

$$f(\mathbf{x}) = z_1^2 - z_2^2 - 4z_3^2 - z_4^2 + 4z_2z_3 + 2z_2z_4 - 4z_3z_4.$$

Теперь можно выписать все слагаемые, содержащие z_2, и выделить полный квадрат

$$-z_2^2 + 4z_2z_3 + 2z_2z_4 = -((z_2 - 2z_3 - z_4)^2 - 4z_3^2 - z_4^2 - 4z_3z_4) =$$
$$= -(z_2 - 2z_3 - z_4)^2 + 4z_3^2 + z_4^2 + 4z_3z_4.$$

Линейное невырожденное преобразование координат $t_1 = z_1$, $t_2 = z_2 - 2z_3 - z_4$, $t_3 = z_3$, $t_4 = z_4$ дает канонический вид квадратичной формы

$$f(\mathbf{x}) = t_1^2 - t_2^2.$$

Связь координат легко устанавливается: $t_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $t_2 = x_1 - 2x_3 - x_4$, $t_3 = x_3$, $t_4 = x_4$. Ранг квадратичной формы равен двум. Положительный и отрицательный индексы инерции равны одному. Если же квадратичная форма рассматривается в комплексном линейном пространстве, то с помощью линейного невырожденного преобразования координат $t_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $t_2 = i(x_1 - 2x_3 - x_4)$, $t_3 = x_3$, $t_4 = x_4$ получаем ее нормальный вид

$$f(\mathbf{x}) = t_1^2 + t_2^2.$$

Замечание 1. Вычисления можно проверить подстановкой. Например, для комплексного случая, подставляя в последнюю формулу, получим

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + (i(x_1 - 2x_3 - x_4))^2.$$

После раскрытия скобок получим первоначальный вид.

Замечание 2. Проверку можно выполнить и по формуле (7.3) преобразования матрицы квадратичной формы при смене базиса. Пусть по условию квадратичная форма задана в базисе $\mathbf{u}$. Тогда она в этом базисе имеет матрицу

$$F_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{e}$ — базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид в вещественном случае, то в этом базисе ее матрица имеет вид

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{x}_u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\mathbf{x}_e = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, то из связи координат этих векторов и формулы $\mathbf{x}_e = P_{e\to u}\mathbf{x}_u$

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$P^{\tau}_{e\to u} F_e P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица совпадает с F_u. Это наблюдение и завершает проверку.

Второй способ решения. Введем в рассмотрение следующую невырожденную матрицу

$$\mathsf{E}_{i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \text{\Large 0} & \\ & & 1 & \dots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Она получена из единичной матрицы заменой элемента, стоящего в i – й строке и j – м столбце, на число α. Если $i = j$, то необходимо, чтобы число $\alpha \neq 0$. Для произвольной матрицы A можно вычислить произведение $\mathsf{A}\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что при $j \neq i$ это произведение можно получить из матрицы A, если все столбцы, кроме j – го оставить без изменения, а к j – му столбцу прибавить i – й столбец, умноженный на α. Если же $j = i$, то произведение получается из матрицы A умножением j – го столбца на α.

Если же умножать матрицу A на транспонированную матрицу $\mathsf{E}^{\tau}_{i,j}(\alpha)$ слева, то есть вычислять $\mathsf{E}^{\tau}_{i,j}(\alpha)\mathsf{A}$, то это произведение получается из матрицы A при $i \neq j$ прибавлением к j – ой строке i – й строки, умноженный на α. При $j = i$ произведение получается из матрицы A умножением j – й строки на α. Матрица $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ является невырожденной, значит может выступать в роли матрицы перехода. Так как преобразование матрицы квадратичной формы происходит по формуле $F_u = P^{\tau}_{e\to u} F_e P_{e\to u}$, то матрица $\mathsf{E}^{\tau}_{i,j}(\alpha) F_e \mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ будет матрицей квадратичной формы в некотором базисе. Выбирая последовательно подходящие матрицы $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$, можно получить диагональную матрицу квадратичной формы, то есть привести ее к каноническому виду. Вместо умножения справа на матрицу $\mathsf{E}_{i,j}(\alpha)$ будем выполнять элементарное преобразование столбцов $C^j + \alpha C^i$, вместо умножения слева на ее транспонированную будем выполнять элементарное преобразование строк $C_j + \alpha C_i$. Обратите внимание на то, что в этих преобразованиях одинаковы номера строк и столбцов. Такое преобразование будем называть согласованным элементарным преобразованием строк и столбцов.

а). Выполним согласованные элементарные преобразования строк и столбцов для матрицы квадратичной формы задания а) примера

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицу нужно преобразовать к диагональной форме, будем выбирать ведущий элемент на главной диагонали. Удобно сначала выбрать ведущим элемент, стоящий в первой строке и первом столбце. Выполним следующие преобразования строк: $C_2 - 2C_1$, $C_3 + C_1$. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Теперь выполним такие же преобразования столбцов: $C^2 - 2C^1$, $C^3 + C^1$. В результате этих согласованных элементарных преобразований строк и столбцов матрица квадратичной формы примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Выберем теперь ведущий элемент во второй строке и втором столбце. Выполним теперь согласованные элементарные преобразования строк и столбцов $C_3 - 3C_2$, $C^3 - 3C^2$. Тогда

$$F_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к диагональной. Квадратичная форма имеет канонический вид
$$f(\mathbf{x}) = z_1^2 - 2z_2^2 + 9z_3^2.$$
Построим теперь матрицу перехода и с ее помощью найдем связь координат вектора $\mathbf{x}$. Элементарным преобразованиям столбцов $C^2 - 2C^1$, $C^3 + C^1$ и $C^3 - 3C^2$ отвечают соответственно матрицы
$$\mathsf{E}_{1,2}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{E}_{1,3}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{и} \;\; \mathsf{E}_{2,3}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Эти матрицы строятся следующим образом. Если выполняется элементарное преобразование $C^j + \alpha C^i$, то элемент α нужно разместить в i – й строке и j – м столбце. Их произведение
$$\mathsf{E}_{1,2}(-2)\mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{2,3}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Эта матрица и есть матрица перехода
$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
А так как $x_e = P_{e\to u}x_u$, где $x_e = (x_1, x_2, x_3)$ и $x_u = (z_1, z_2, z_3)$, то
$$\begin{cases} x_1 = z_1 - 2z_2 + 7z_3, \\ x_2 = z_2 - 3z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$
Конечно, перемножать матрицы $\mathsf{E}_{1,2}(-2)$, $\mathsf{E}_{1,3}(1)$, $\mathsf{E}_{2,3}(-3)$ не всегда приятно. Тогда заметьте, что формулу $P_{e\to u} = \mathsf{E}_{1,2}(-2)\mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{2,3}(-3)$ можно записать в виде $P_{e\to u} = \mathsf{E}\mathsf{E}_{1,2}(-2)\mathsf{E}_{1,3}(1)\mathsf{E}_{2,3}(-3)$. Последняя формула показывает, что, выполнив над единичной матрицей E те же элементарные преобразования столбцов, что и над матрицей квадратичной формы, получим матрицу перехода $P_{e\to u}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C^2 - 2C^1 \\ \vdots \\ C^3 + C^1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \vdots \\ C^3 - 3C^2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
В результате получили ту же матрицу перехода. Вычисления, проводимые над матрицей квадратичной формы и единичной матрицей, можно объединить. Так как над ними проводятся одни и те же элементарные преобразования столбцов, то, записав первую матрицу над второй, эти

преобразования можно проводить одновременно. Сравните с предыдущими следующие вычисления

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -8 \\ -1 & -8 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ \vdots \\ C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C^2 - 2C^1 \\ \vdots \\ C^3 + C^1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ C_3 - 3C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ C^3 - 3C^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Верхняя матрица — это матрица квадратичной формы в каноническом виде, а нижняя — это искомая матрица перехода.

б).Выполним строчные элементарные преобразования $C_2 - C_1$, $C_3 + C_1$, $C_3 - C_1$ матрицы квадратичной формы

$$F_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

затем соответствующие столбцовые элементарные преобразования $C^2 - C^1$, $C^3 + C^1$, $C^3 - C^1$. Тогда матрица квадратичной формы сначала примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{затем} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы продолжить преобразования, нужно иметь ненулевые диагональные элементы матрицы (кроме первого, который уже использован при вычислениях). Для этого выполним вспомогательное согласованное элементарное преобразование строк и столбцов $C_2 + C_3$, $C^2 + C^3$. Тогда матрица квадратичной формы примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполним теперь согласованные элементарные преобразования строк и столбцов $C_3 - \frac{1}{2}C_2$, $C_4 + \frac{1}{2}C_2$ и $C^3 - \frac{1}{2}C^2$, $C^4 + \frac{1}{2}C^2$. Тогда матрица квадратичной формы будет равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Осталось выполнить согласованное элементарное преобразование строк и столбцов $C_4 + C_3$ и $C^4 + C^3$. Тогда

$$F_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к диагональной. Квадратичная форма в базисе $\mathbf{u}$ имеет канонический вид

$$f(\mathbf{x}) = z_1^2 + 2z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2.$$

Построим теперь матрицу перехода и с ее помощью найдем связь координат вектора $\mathbf{x}$. Для этого выполним те же элементарные преобразования столбцов над единичной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C^2 - C^1 \\ C^3 + C^1 \\ \vdots \\ C^4 - C^1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C^2 + C^3 \\ \vdots \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} C^3 - \frac{1}{2}C^2 \\ \vdots \\ C^4 + \frac{1}{2}C^2 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \vdots \\ C^4 + C^3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица и есть матрица перехода

$$P_{e \to u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А так как $x_e = P_{e\to u} x_u$, где $x_e = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $x_u = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, то

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_3, \\ x_2 = z_2 - \frac{1}{2}z_3, \\ x_3 = z_2 + \frac{1}{2}z_3 + z_4, \\ x_4 = z_4. \end{cases}$$

в). Воспользуемся алгоритмом, в котором одновременно "обрабатываются"и матрица квадратичной формы и единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 - C_2 \\ C_3 - C_2 \\ \vdots \\ C_4 - C_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C^1 - C^2 \\ C^3 - C^2 \\ \vdots \\ C^4 - C^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_3 + 2C_1 \\ \vdots \\ C_4 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C^3 + 2C^1 \\ \vdots \\ C^4 + C^1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица четвертого порядка, стоящая сверху, является диагональной. Значит, это матрица квадратичной формы, имеющей канонический вид. В соответствии с алгоритмом матрица четвертого порядка, стоящая снизу — это искомая матрица перехода. Поэтому

$$f(\mathbf{x}) = -z_1^2 + z_2^2$$

и

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 2z_3 + z_4, \\ x_2 = -z_1 + z_2 - 3z_3 - 2z_4, \\ x_3 = z_3, \\ x_4 = z_4. \end{cases}$$

Конечно, иногда требуется выразить координаты z_i через x_j. Обычно это не вызывает затруднений. Здесь $z_3 = x_3$, $z_4 = x_4$, $z_1 = x_1 - 2z_3 - z_4$ и $z_1 = x_1 - 2x_3 - x_4$. Тогда $z_2 = x_2 + z_1 + 3z_3 + 2z_4$ и $z_2 = x_2 + x_1 - 2x_3 - x_4 + 3x_3 + 2x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Замечание. Может случиться так, что в каноническом (нормальном) виде квадратичной формы квадраты координат с ненулевыми коэффициентами не будут идти по порядку один за другим. Например, у квадратичной формы $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_3^2$ между квадратами первой и третьей координатами стоит квадрат второй координаты с нулевым коэффициентом. Такого беспорядка можно избежать с помощью замены переменных, переставляющих координаты. Так линейное невырожденное преобразование координат $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_2$ приводит последнюю квадратичную форму к виду $f(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2y_2^2$.

Знакоопределенность квадратичных форм

Чтобы творить — надо думать около.
Поль Сурьё.

Вещественная квадратичная форма $f(\mathbf{x})$, определенная на вещественном конечномерном линейном пространстве $\mathbb{V}$, называется:
1) положительно определенной, если для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x}) > 0$;
2) отрицательно определенной, если для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x}) < 0$;
3) неотрицательной (нестрого положительно определенной или положительно полуопределенной), если для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$;
4) неположительной (нестрого отрицательно определенной или отрицательно полуопределенной), если для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x}) \leqslant 0$;
5) неопределенной (знакопеременной), если существуют векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ такие, что $f(\mathbf{x}) > 0$ и $f(\mathbf{y}) < 0$.
6) квазизнакоопределенной, если для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется одно из неравенств $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$, $f(\mathbf{x}) \leqslant 0$ и существует ненулевой вектор $\mathbf{y}$, для которого $f(\mathbf{y}) = 0$;

Квадратичная форма f
1) положительно определена тогда и только тогда, когда $r_+(f) = \dim \mathbb{V}$.
2) отрицательно определена тогда и только тогда, когда $r_-(f) = \dim \mathbb{V}$.
3) неотрицательна тогда и только тогда, когда $r_-(f) = 0$.
4) неположительна тогда и только тогда, когда $r_+(f) = 0$.
5) неопределена тогда и только тогда, когда $r_+(f) > 0$, $r_-(f) > 0$.
6) квазизнакоопределена тогда и только тогда, когда $r_+(f) < n$, $r_-(f) = 0$ или $r_-(f) < n$, $r_+(f) = 0$.

Угловым минором k – го порядка матрицы квадратичной формы называется минор с элементами, стоящими в первых k строках и первых k столбцах этой матрицы.

Квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда положительны все угловые миноры ее матрицы.

Главным минором матрицы квадратичной формы называется такой ее минор, у которого номера занимаемых им строк совпадают с номерами столбцов.

Все угловые миноры матрицы квадратичной формы положительны тогда и только тогда, когда положительны все ее главные миноры.

Квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда у ее матрицы все угловые миноры четного порядка положительны и все угловые миноры нечетного порядка отрицательны.

Все угловые миноры матрицы квадратичной формы четного порядка положительны и все угловые миноры нечетного порядка отрицательны тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы квадратичной формы четного порядка положительны и все главные миноры нечетного порядка отрицательны.

Квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ является неотрицательной тогда и только тогда, когда неотрицательны все главные (не только угловые) миноры ее матрицы.

Квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ является неположительной тогда и только тогда, когда у ее матрицы все главные миноры четного порядка неотрицательны и все главные миноры нечетного порядка неположительны.

Квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ является неопределенной (знакопеременной) тогда и только тогда, когда у ее матрицы существует отрицательный главный минор четного порядка или существуют два главных минора нечетных порядков и разных знаков.

Пример 110 Выяснить, являются ли следующие квадратичные формы положительно или отрицательно определенными, неположительными, неотрицательными или неопределенными, не находя их канонического вида.

1. $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
2. $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
3. $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
4. $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
5. $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Решение. 1. Для матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

найдем все угловые миноры

$$\Delta_1 = 3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Все угловые миноры положительны. Значит квадратичная форма положительно определена.

2. Матрица второй квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4.$$

Оба угловых минора нечетного порядка отрицательны и угловой минор четного порядка положителен. Значит квадратичная форма отрицательно определена.

3. Матрица третьей квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдем все главные миноры. Кроме углового есть еще два главных миноры первого порядка, которые равны -1 и -2. Не угловые главные миноры второго порядка $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$. Таким образом, все главные миноры нечетного порядка неположительны и все главные миноры четного порядка неотрицательны. Значит квадратичная форма неположительна.

4. Для четвертой квадратичной формы ее матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдем все главные миноры. Остальные главные миноры первого порядка равны 4 и 1 и остальные главные миноры второго порядка $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Таким образом, все главные миноры неотрицательны. Значит квадратичная форма неотрицательна.

5. Матрица последней квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ее угловые миноры

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

В этом случае опять только по значениям угловых миноров дать ответ нельзя. Найдем все главные миноры. Не угловые главные миноры первого порядка равны 2 и 4. Не угловые главные миноры второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1$. Имеется отрицательный главный минор четного порядка. Поэтому квадратичная форма неопределена.

Пример 111 Не приводя квадратичную форму к каноническому виду, найти все значения параметра μ, при которых она положительно определена

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 - \mu x_2^2 - \mu x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Решение. Все по-прежнему не очень сложно. Найдем все угловые миноры матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -\mu & 2 \\ 1 & 2 & -\mu \end{pmatrix}.$$

и выясним при каких μ они положительны. Угловой минор первого порядка $\Delta_1 = 1$, угловые миноры второго и третьего порядков

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu - 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -\mu & 2 \\ 1 & 2 & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + 5\mu + 4.$$

Теперь нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 > 0, \\ \Delta_2 = -\mu - 4 > 0, \\ \Delta_3 = \mu^2 + 5\mu + 4 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu < -4, \\ \mu < -4, \mu > -1. \end{cases}$$

Окончательно получаем $\mu < -4$. При этих значениях параметра квадратичная форма положительно определена.

Пример 112 Для каждого значения параметра μ выяснить тип (знакоопределенность) квадратичной формы, не приводя ее к каноническому виду

$$f(\mathbf{x}) = \mu x_1^2 + (\mu-3)x_2^2 + \mu x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Решение. Найдем все главные (не только угловые) миноры матрицы квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} \mu & 2 & 1 \\ 2 & \mu-3 & -2 \\ 1 & -2 & \mu \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры первого, второго и третьего порядка соответственно равны $\Delta_1 = \mu$, $\Delta_2 = \mu^2 - 3\mu - 4 = (\mu+1)(\mu-4)$, $\Delta_3 = \mu^3 - 3\mu^2 - 9\mu - 5 = (\mu+1)^2(\mu-5)$. Есть еще два главных минора первого порядка $\delta_2 = \mu - 3$, $\delta_3 = \mu$ и два главных минора второго порядка $\delta_{13} = \mu^2 - 1 = (\mu+1)(\mu-1)$, $\delta_{23} = \mu^2 - 3\mu - 4 = (\mu+1)(\mu-4)$.

Найдем сначала все значения μ, при которых квадратичная форма положительно определена. Для этого нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} \Delta_1 = \mu > 0, \\ \Delta_2 = (\mu+1)(\mu-4) > 0, \\ \Delta_3 = (\mu+1)^2(\mu-5) > 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu > 0, \\ \mu < -1, \ \mu > 4, \\ \mu > 5. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что квадратичная форма положительно определена при $\mu > 5$.

Квадратичная форма неотрицательна (не строго положительно определена), если все главные миноры неотрицательны, в том числе и все угловые миноры. Но последние неотрицательны при $\mu \geqslant 5$. Здесь не исследованным является лишь значение $\mu = 5$. Вычислим значения всех остальных главных миноров при $\mu = 5$: $\delta_2 = 5 - 3 > 0$, $\delta_3 = 5 > 0$, $\delta_{13} = 5^2 - 1 > 0$, $\delta_{23} = (5+1)(5-4) > 0$. Значит, при $\mu = 5$ квадратичная форма неотрицательна. А так как при этом значении она не является положительно определенной, то она квазиположительно определена.

Найдем теперь все значения μ, при которых квадратичная форма отрицательно определена. Для этого нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} \Delta_1 = \mu < 0, \\ \Delta_2 = (\mu+1)(\mu-4) > 0, \\ \Delta_3 = (\mu+1)^2(\mu-5) < 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu < 0, \\ \mu < -1, \ \mu > 4, \\ \mu < 5, \ \mu \neq -1. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что квадратичная форма отрицательно определена при $\mu < -1$.

Квадратичная форма неположительна (не строго отрицательно определена), если все главные миноры четного порядка неотрицательны и все главные миноры нечетного порядка неположительны. Для угловых миноров это выполняется при $\mu \leqslant -1$. Здесь осталось исследовать лишь значение $\mu = -1$. Вычислим значения всех остальных главных миноров при $\mu = -1$: $\delta_2 = -1 - 3 < 0$, $\delta_3 = -1 < 0$, $\delta_{13} = (-1)^2 - 1 = 0$, $\delta_{23} = (-1+1)(-1-4) = 0$. Значит, при $\mu = -1$ квадратичная форма неположительна. Но при этом значении она не является отрицательно определенной. Значит, она квазиотрицательно определена.

При остальных значениях параметра μ квадратичная форма неопределена. Теперь можно подвести итог. При $\mu < -1$ квадратичная форма отрицательно определена. При $\mu = -1$ квадратичная форма неположительна и, более того, квазиотрицательно определена. При $-1 < \mu < 5$ квадратичная форма неопределена. При $\mu = 5$ квадратичная форма неотрицательна и, более того, квазиположительно определена. При $\mu > 5$ квадратичная форма положительно определена.

Замечание. Так как в комплексном случае квадратичные формы принимают, вообще говоря, комплексные значения, то для них теряют смысл введенные выше понятия знакоопределенности. Эти понятия можно перенести на комплексный случай, если рассматривать эрмитовые квадратичные формы

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i \overline{x}_j,$$

где $a_{i,j} = \overline{a}_{j,i}$.

Приведение квадратичной формы к главным осям

> Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик тот, кто устанавливает аналогии доказательств; более сильный математик тот, кто замечает аналогии теорий; но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии.
> *С. Банах.*

Пусть вещественная квадратичная форма $f(\mathbf{x})$ задана матрицей F_e в ортонормированном базисе. Тогда существует ортонормированный базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид. Этот базис состоит из собственных векторов матрицы F_e. Коэффициенты квадратичной формы в каноническом виде являются собственными числами матрицы F_e, отвечающими собственным векторам базиса. Все собственные значения матрицы положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы положительны (отрицательны). Все собственные значения матрицы неотрицательной (неположительной) квадратичной формы неотрицательны (неположительны). Среди собственных значений матрицы неопределенной квадратичной формы имеются как положительные так и отрицательные. Число ноль является собственным значением матрицы квадратичной формы тогда и только тогда, когда последняя является вырожденной.

Пример 113 Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно)

$$f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Оно мало чем отличается от решения задания 104 (стр. 283), так как матрицы квадратичной формы и самосопряженного оператора одинаково преобразуются при смене ортонормированного базиса. Поэтому сначала найдем спектр матрицы квадратичной формы

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C^3-C^2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-8).$$

Корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы равны $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -4$ соответственно кратности 2 и 1. Эти собственные значения с учетом кратности дают нам коэффициенты квадратичной формы в каноническом виде

$$f(\mathbf{x}) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2,$$

где $\mathbf{x}_u = (y_1, y_2, y_3)$. Чтобы найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, нужно найти ортонормированный базис из собственных векторов матрицы. Чем и займемся. Для собственного значения $\lambda_1 = 2$

$$F_e - 2\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение можно записать в виде (x_1, x_2, x_3 уже заняты, поэтому неизвестные системы уравнений обозначим другими буквами) $t_3 = 2t_1 + t_2$. Теперь, как обычно, найдем фундаментальную систему решений $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 2)$. Процесс ортогонализации приводит к системе $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -1, 1)$. Нормируя, получим два первых вектора базиса $\mathbf{u}_1 = 1/\sqrt{2}(0,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = 1/\sqrt{3}(1,-1,1)$. Для собственного значения $\lambda_1 = -4$ из

$$F_e + 4\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ \sim \\ C_3 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

легко вычисляется собственный вектор $\mathbf{a}_3 = (2,1,-1)$. Нормируя, получаем последний вектор базиса $\mathbf{u}_3 = 1/\sqrt{6}(2,1,-1)$. Теперь можно составить матрицу перехода, используя ее определение:

$$P_{e\to u} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Так как для ортогональной матрицы перехода $P_{u\to e} = P^{-1}_{e\to u} = P^{\tau}_{e\to u}$, то, транспонируя, получим

$$P_{u\to e} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы перехода задают искомое ортогональное преобразование. Если нужно найти связь между координатными векторами $\mathbf{x}_u = (y_1, y_2, y_3)$ и $\mathbf{x}_e = (x_1, x_2, x_3)$, то следует воспользоваться равенствами $\mathbf{x}_u = P_{u\to e}\mathbf{x}_e$ и $\mathbf{x}_e = P_{e\to u}\mathbf{x}_u$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_3), & x_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \tfrac{2}{\sqrt{6}}y_3, \\ y_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}(x_1 - x_2 + x_3), & x_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \tfrac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\ y_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 + x_2 - x_3), & x_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}y_2 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}y_3. \end{aligned}$$

Задания

Быть опровергнутым — этого опасаться нечего; опасаться следует другого — быть непонятым.
Иммануил Кант.

118. Найти канонический (нормальный) вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование (преобразование определено не однозначно).

a). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 7x_2^2 + 14x_2x_3 + 5x_3^2$.

b). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 14x_2^2 - 48x_2x_3 + 45x_3^2$.

c). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 6x_1x_2 + 18x_1x_3 + x_2^2 + 30x_2x_3 - 16x_3^2$.

d). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 16x_2^2 + 24x_2x_3 + 11x_3^2$.

e). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 19x_2^2 + 30x_2x_3 - 20x_3^2$.

f). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 3x_3^2$.

119. Найти нормальный вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование (преобразование определено не однозначно).

a). $f(\mathbf{x}) = x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4+4x_2^2-2x_2x_3+6x_2x_4+x_3^2-4x_3x_4+x_4^2$.

b). $f(\mathbf{x}) = x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_1x_4+4x_2^2-2x_2x_3-8x_2x_4+x_3^2+2x_3x_4+3x_4^2$.

c). $f(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_3x_4$.

d). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.

e). $f(\mathbf{x}) = -x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4$.

f). $f(\mathbf{x}) = x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_1x_4+x_2^2+4x_2x_3-6x_2x_4+2x_3^2-6x_3x_4+5x_4^2$.

120. Не находя канонического вида, выяснить, являются ли следующие квадратичные формы положительно или отрицательно определенными, неположительными, неотрицательными или неопределенными.

a). $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

b). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

c). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

d). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

e). $f(\mathbf{x}) = -6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

f). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

121. Не приводя к каноническому виду, для каждого значения параметра μ выяснить тип следующих квадратичных форм (их знакоопределенность)

a). $f(\mathbf{x}) = \mu x_1^2 + \mu x_2^2 + \mu x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

b). $f(\mathbf{x}) = (\mu^2 + 3\mu)x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2x_2x_3$.

c). $f(\mathbf{x}) = \mu x_1^2 + \mu x_2^2 + (2\mu + 1)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2x_2x_3$.

d). $f(\mathbf{x}) = (\mu - 1)x_1^2 + 2\mu x_2^2 + (\mu - 2)x_3^2 + 2\mu x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2\mu x_2x_3$.

e). $f(\mathbf{x}) = (\mu-1)x_1^2 + 2\mu x_2^2 + (\mu-2)x_3^2 + (2\mu-2)x_1x_2 - 2\mu x_1x_3 - 2\mu x_2x_3$.

f). $f(\mathbf{x}) = (1 - \mu)x_1^2 + (2 - 2\mu)x_2^2 + \mu x_3^2 - 4\mu x_1x_3$.

122. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно).

a). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

b). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

c). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

d). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

e). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

f). $f(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

g). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

123. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид (преобразование определено не однозначно).

a). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

b). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

c). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_2x_3 - 8x_2x_4 - 4x_3x_4$.

d). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$.

e). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 8x_2x_3 + 4x_2x_4 - 4x_3x_4$.

f). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 8x_3x_4$.

8
ОТВЕТЫ

Утверждают, будто папа Бенедикт XII говорил:"Охотно верю, что все мои предшественники были непогрешимы; но я, ей-богу, не таков." *Вольтер.*

1. ⓐ $(-2,3,1)$. ⓑ $(-1,1,0)$. ⓒ $(-1,-2,2)$. ⓓ $(1+x_2, x_2, x_3, -1-x_2-x_3)$, $x_2, x_3 \in \mathbb{F}$. ⓔ $(-1,1,2,0)$. ⓕ $(-1,-1,2,0)$. ⓖ Система несовместна. ⓗ Система несовместна. ⓘ $(-1,0,2,1)$. ⓙ $(2,3,-3,-2)$. ⓚ $(2-x_3-2x_4-x_5, 1-2x_3-x_4-3x_5, x_3, x_4, x_5)$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{F}$. ⓛ $(1,-3,2)$. ⓜ $(-2-10x_2, x_2, 0, 3+13x_2, 6x_2)$, $x_2 \in \mathbb{F}$. ⓝ $(-2,-1,1)$. ⓞ $(-2-x_3+x_4+x_5, -1-3x_3-3x_4, x_3, x_4, x_5)$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{F}$. ⓟ $(1,3,3)$. ⓠ $(1+\alpha-2\beta, -\alpha+\beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. ⓡ $(-1-\alpha-\beta, 1-2\alpha-\beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. ⓢ $(-4+2\beta+3\alpha, \beta, \alpha, 2-2\beta-2\alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. ⓣ $(-\alpha, -2-2\alpha, \alpha, -1-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$. ⓤ $(0, 1-\alpha, 2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$. ⓥ $(-2-2\alpha, \alpha, -2-3\alpha, 2+2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

2. ⓐ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. ⓐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

4. ⓐ $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. ⓐ $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -9 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. ⓕ Матрица необратима.

6. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓕ Матрица необратима.

7.ⓐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

В ответах примеров 9.a – 11.e величины α, β, γ, δ, ξ, η, ζ, ϑ, λ, μ, ν, χ принимают любые числовые значения.

9. ⓐ $\begin{pmatrix} 3-\alpha & -\beta & -2-\gamma \\ 2-\alpha & -1-\beta & -1-\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} \alpha-2\xi & \beta-2\eta-1 & 1+\gamma-2\zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \\ \xi & \eta \\ -1+\lambda-2\alpha+2\xi & -2+\mu-2\beta+2\eta \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -2-\alpha & 1-\beta & -\gamma & 1-\delta \\ \alpha & -1+\beta & 1+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} -1+3\lambda-2\alpha+2\xi & 3+3\mu-2\beta+2\eta & -2+3\nu-2\gamma+2\zeta \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}$.

ⓕ $\begin{pmatrix} 2-\alpha & -\beta & -\gamma \\ -1-\alpha & 2-\beta & 1-\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

10. ⓐ $\begin{pmatrix} 3-\alpha & \alpha & -2+\alpha \\ -2-\beta & \beta & 1+\beta \\ 2-\gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 3+2\alpha-2\xi & \alpha & \xi \\ -2+2\beta-2\eta & \beta & \eta \\ -1+2\gamma-2\zeta & \gamma & \zeta \\ 2+2\delta-2\vartheta & \delta & \vartheta \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -\alpha & -1-\alpha & \alpha \\ -\beta & -2-\beta & \beta \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} \xi & 2+\xi+\lambda-2\alpha & \lambda & \alpha \\ \eta & -3+\eta+\mu-2\beta & \mu & \beta \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} -2-\xi+\lambda+2\alpha & \xi & \lambda & \alpha \\ 1-\eta+\mu+2\beta & \eta & \mu & \beta \\ 3-\zeta+\nu+2\gamma & \zeta & \nu & \gamma \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1+\alpha & \alpha & 3-2\alpha \\ -1+\beta & \beta & 1-2\beta \end{pmatrix}$.

11. ⓐ $\begin{pmatrix} 2\gamma-2\beta+4\delta-3 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 2\gamma+5 & 5+2\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1-2\beta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1+2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 4-\zeta & \delta \\ \zeta & \eta \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -\gamma+\zeta-\beta-\delta+\eta+3 & \beta \\ \gamma & \delta \\ \zeta & \eta \end{pmatrix}$.

12. ⓐ $x=-1$, $y=-2$. ⓑ $x=-1$, $y=1$. ⓒ $x=4$, $y=-3$. ⓓ $x=2$, $y=-1$. ⓔ $x=-1$, $y=3$. ⓕ $x=-1$, $y=3$.

13. ⓐ $x=3+3i$, $y=1-i$. ⓑ $x=1+2i$, $y=2+2i$. ⓒ $x=3+2i$, $y=2+2i$. ⓓ $x=3-i$, $y=1+i$. ⓔ $x=2i$, $y=1+3i$. ⓕ $x=-2+i$, $y=-2i$.

15. ⓐ Да. ⓑ Да. ⓒ Нет. ⓓ Да. ⓔ Да. ⓕ Да. ⓖ Нет.

16. Не выполняются условия ⓐ 6). ⓑ 6). ⓒ 8). ⓓ 6), 7). ⓔ 6).

17. Не выполняются условия ⓐ 2), 3), 4), 6) при $n>1$. ⓑ 3), 6). ⓒ 1), 2), 6). ⓓ 1), 2), 6).

18. Не выполняются условия ⓐ 7), 8). ⓑ 7), 8). ⓒ 7). ⓓ 7), 8). ⓔ 6), 7).

19. Не выполняются условия ⓐ 5), 7), 8). ⓑ 5), 6), 7), 8). ⓒ 8). ⓓ 7), 8).

20. ⓐ, ⓑ, ⓓ, ⓕ, ⓖ, ⓘ Нет. ⓒ, ⓔ, ⓗ Да.

21. ⓐ Нет. ⓑ Нет. ⓒ Нет. ⓓ Да. ⓔ Нет. ⓕ Да.

22. ⓐ Да. ⓑ Нет. ⓒ Нет. ⓓ Да. ⓔ Да. ⓕ Да.

23. ⓐ Да. ⓑ Да. ⓒ Нет. ⓓ Да. ⓔ Да. ⓕ Нет. ⓖ Да. ⓗ Да.

24. ⓐ $(9,8,3)$. ⓑ $(4,2,-15)$. ⓒ $-(16,4,4)$. ⓓ $(6,-14,-3)$. ⓔ $(2,-2,3)$. ⓕ $(-12,15,-3)$.

25. ⓐ $(1,0,-1/4)$. ⓑ $(-4,7/2,-1)$. ⓒ $(1/5,1/5,0)$. ⓓ $(0,0,-1/2)$. ⓔ $(-1,-5/2,3/2)$. ⓕ $(1,11/3,1/3)$.

26. Другой вектор не является линейной комбинацией. ⓐ $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$. ⓑ $\mathbf{b}_2 = -2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$. ⓒ $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. ⓓ $\mathbf{b}_1 = -2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$.

ⓔ $\mathbf{b}_2 = -3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. ⓕ $\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$.

27. ⓐ При $\lambda \neq 5$ $\mathbf{b} = \frac{\lambda+5}{\lambda-5}\mathbf{a}_1 + \frac{4}{\lambda-5}\mathbf{a}_2 - \frac{3\lambda-11}{3\lambda-15}\mathbf{a}_3$. При $\lambda = 5$ разложить нельзя. ⓑ При $\lambda \neq 3$ $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. При $\lambda = 3$ $\mathbf{b} = (1-t)\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ для любого t. ⓒ При $\lambda \neq -4$ $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$. При $\lambda = -4$ $\mathbf{b} = (t-3)\mathbf{a}_1 + (t-2)\mathbf{a}_2 + t\mathbf{a}_3$ для любого t. ⓓ При $\lambda \neq 11$ $\mathbf{b} = -\frac{5\lambda+8}{\lambda-11}\mathbf{a}_1 - \frac{7\lambda+4}{\lambda-11}\mathbf{a}_2 - \frac{9}{\lambda-11}\mathbf{a}_3$. При $\lambda = 11$ разложить нельзя. ⓔ При $\lambda \neq -15$ $\mathbf{b} = \frac{6}{\lambda+15}\mathbf{a}_1 - \frac{\lambda+6}{2\lambda+30}\mathbf{a}_2 + \frac{2}{\lambda+15}\mathbf{a}_3$. При $\lambda = -15$ разложить нельзя. ⓕ При всех λ $\mathbf{b} = \frac{9}{10}\mathbf{a}_1 + \left(\frac{9}{20}\lambda - \frac{9}{5}\right)\mathbf{a}_2 + \left(\frac{9}{20}\lambda - \frac{31}{10}\right)\mathbf{a}_3$.

28. ⓐ, ⓒ, ⓔ Линейно независима.
ⓑ, ⓓ, ⓕ Линейно зависима.

29. ⓐ, ⓒ, ⓔ Линейно зависима. ⓑ, ⓓ, ⓕ Линейно независима.

30. ⓐ, ⓒ, ⓔ Линейно независима. ⓑ, ⓓ, ⓕ Линейно зависима.

31. Все системы линейно независимы.

32. ⓐ, ⓒ, ⓔ Неполная система. ⓑ, ⓓ, ⓕ Полная система.

33. ⓐ, ⓓ, ⓕ Является базисом. ⓑ, ⓒ, ⓔ Базисом не является.

34. ⓐ, ⓒ, ⓔ Является базисом. ⓑ, ⓓ, ⓕ Базисом не является.

35. ⓐ, ⓒ, ⓔ Является базисом. ⓑ, ⓓ, ⓕ Базисом не является.

36. ⓐ, ⓒ, ⓔ Является базисом. ⓑ, ⓓ, ⓕ Базисом не является.

37. ⓐ $\mathbf{x}_e = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{y} = (-6,0,7)^\tau$. ⓑ $\mathbf{x}_e = (-4,1,-1)^\tau$, $\mathbf{y} = (3,2,-9)^\tau$. ⓒ $\mathbf{x}_e = (0,1,3)^\tau$, $\mathbf{y} = (-3,4,-7)^\tau$. ⓓ $\mathbf{x}_e = (0,-2,3)^\tau$, $\mathbf{y} = (-1,-4,6)^\tau$. ⓔ $\mathbf{x}_e = (3,2,3)^\tau$, $\mathbf{y} = (-1,4,2)^\tau$. ⓕ $\mathbf{x}_e = (4,2,2)^\tau$, $\mathbf{y} = (-3,6,8)^\tau$.

38. ⓐ $\mathsf{Y}_A = (-2,2,-1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\mathsf{Y}_A = (1,-1,20)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\mathsf{Y}_A = (2,-2,4-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. ⓓ $\mathsf{Y}_A = (3,-1,2-3)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\mathsf{Y}_A = (-1,-1,-20)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. ⓕ $\mathsf{Y}_A = (1,1,-2-3)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

39. ⓐ $\mathbf{h}_f = (-1,-3,0)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 1 - 2x + 4x^2$. ⓑ $\mathbf{h}_f = (-1,1,0)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 3 - 2x + 4x^2$. ⓒ $\mathbf{h}_f = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 5 + 2x + x^2$. ⓓ $\mathbf{h}_f = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 4 - 5x + 3x^2$. ⓔ $\mathbf{h}_f = (-3,-1,3)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 4 - x^2$. ⓕ $\mathbf{h}_f = (-1,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 3 + 2x - 2x^2$.

40. ⓐ $\mathbf{e}_1 = (3,0,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,1,-2)^\tau$. ⓑ $\mathbf{e}_1 = (-1,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-1,3)^\tau$. ⓒ $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,-2)^\tau$. ⓓ $\mathbf{e}_1 = (1,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,2,1)^\tau$. ⓔ $\mathbf{e}_1 = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,1)^\tau$. ⓕ $\mathbf{e}_1 = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-2,2)^\tau$.

41. ⓐ $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{x}_u = (0, 2, -2)^\tau$,
$\mathbf{y}_e = (-1, -3, -1)^\tau$.
ⓑ $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y}_u = (2, -2, 0)^\tau$,
$\mathbf{x}_e = (-5, -7, -4)^\tau$.
ⓒ $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y}_u = (-1, 0, -2)^\tau$,
$\mathbf{x}_e = (-1, -6, 3)^\tau$.
ⓓ $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{x}_u = (0, 2, -1)^\tau$,
$\mathbf{y}_e = (-2, 0, 3)^\tau$.
ⓔ $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{y}_u = (-2, 1, 1)^\tau$,
$\mathbf{x}_e = (0, 9, 8)^\tau$.
ⓕ $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathbf{x}_u = (-2, -1, -1)^\tau$,
$\mathbf{y}_e = (4, 7, 2)^\tau$.

42. ⓐ $\mathbf{u}_1 = (0, -2, -1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-2, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2, 1, 2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1, 3, -2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-2, 0, 3)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (2, -2, -2)^\tau$. ⓑ $\mathbf{u}_1 = (3, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, 2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1, -1, -1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1, 3, -2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2, -2, 1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-1, 3, -1)^\tau$. ⓒ $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, -1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 0, 2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-1, 3, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1, 3, 1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (2, -1, 0)^\tau$. ⓓ $\mathbf{u}_1 = (2, -2, 0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 3)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (2, 2, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2, 3, 1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (1, 0, -2)^\tau$. ⓔ $\mathbf{u}_1 = (-2, -1, 3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3, 2, -3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2, -1, -1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (3, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, -2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-2, 1, -1)^\tau$. ⓕ $\mathbf{u}_1 = (-3, -3, 3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, -1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3, -1, 1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-1, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1, -1, 3)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-2, 1, 2)^\tau$.

43. ⓐ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
ⓓ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

44. ⓐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
ⓓ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

45. ⓐ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

46. ⓐ $r = 2$. ⓑ $r = 4$. ⓒ $r = 3$. ⓓ $r = 2$. ⓔ $r = 4$. ⓕ $r = 2$.

47. ⓐ $r = 2$. ⓑ $r = 1$. ⓒ $r = 2$. ⓓ $r = 3$. ⓔ $r = 2$. ⓕ $r = 3$.

48. ⓐ, ⓒ, ⓔ Линейно зависимая система. ⓑ, ⓓ Линейно независимая система.

49. ⓐ, ⓑ, ⓓ Базис. ⓒ, ⓔ Не базис.

50. ⓐ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$. ⓑ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$. ⓒ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$. ⓓ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$. ⓔ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$. ⓕ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$.

51. ⓐ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓑ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_5$. ⓒ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓓ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_5$. ⓔ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓕ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_5$.

52. ⓐ A_1, A_3. ⓑ A_1, A_4. ⓒ A_1, A_3. ⓓ A_1, A_2. ⓔ A_1, A_2, A_4. ⓕ A_1, A_2, A_3.

53. ⓐ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, 3. ⓑ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓒ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓓ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$, 3. ⓔ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓕ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, 3.

54. ⓐ $(3,2,0,1)$, $(-2,1,1,0)$, $d = 2$. ⓑ $(2,1,0,1)$, $d = 1$. ⓒ $(0,-2,1,0)$, $(1,-2,0,1)$, $d = 2$. ⓓ Система уравнений имеет только нулевое решение, $d = 0$. ⓔ $(-2,0,1,-1)$, $d = 1$. ⓕ $(0,2,1,0)$, $(0,-4,0,1)$, $(1,-2,0,0)$, $d = 3$.

55. ⓐ, ⓒ, ⓓ Является. ⓑ, ⓔ, ⓕ Не является.

56. ⓐ $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$. ⓑ $\mathbf{a}_2 = -3\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. ⓒ $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. ⓓ $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$. ⓔ $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. ⓕ $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$.

57. ⓐ $x_2 + 3x_3 = 0$, $3x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - 3x_3 = 0$. ⓑ $x_1 + x_3 = 0$, $4x_1 + x_2 - 3x_4 = 0$. ⓒ $x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0$, $3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0$. ⓓ $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$. ⓔ $6x_1 + x_2 + 3x_4 = 0$, $9x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$. ⓕ $x_1 - x_3 = 0$.

58. ⓐ $s = 2$, $d = 2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ⓑ $s = 3$, $d = 2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ⓒ $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения — $(1,-2,2,2)$. ⓓ $s = 4$, $d = 0$. Базис суммы, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_3$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$). ⓔ $s = 4$, $d = 2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(0,0,0,1)$, $(2,-2,2,1)$. ⓕ $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения — $(-1,2,1,0)$.

59. ⓐ $s = 3$, $d = 2$. Например, базис суммы — $(0,1,0,1)$, $(6,6,4,0)$, $(5,-5,6,-10)$, базис пересечения — $(1,-1,2,-2)$, $(-2,-1,0,1)$. ⓑ $s =$

4, $d = 1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(3, 4, 3, 2)$. ⓒ $s = 2$, $d = 2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например — $(-2, -2, -1, -3)$, $(-2, 1, -2, -3)$. ⓓ $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $(1, 2, 3, -1)$, $(1, 3, 3, 0)$, $(-3, -2, 3, 2)$, базис пересечения — $(0, 1, 0, 1)$. ⓔ $s = 4$, $d = 0$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$. ⓕ $s = 3$, $d = 2$. Например, базис суммы — $(3, 0, -2, -2)$, $(5, 2, -1, -3)$, $(-8, 4, 5, 7)$, базис пересечения — $(-1, 2, 3, 1)$, $(1, -1, -1, -1)$.

60. ⓐ $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $(1, 1, -2, 0)$, базис пересечения — $(0, 1, -3, 1)$. ⓑ $s = 3$, $d = 2$. Например, базис суммы — $(1, -1, 1, 0)$, $(-3, 3, -4, 1)$, $(9, -9, -2, 8)$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ⓒ $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $(2, -2, -1, 0)$, базис пересечения — $(1, 2, 1, 3)$. ⓓ $s = 2$, $d = 2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ⓔ $s = 4$, $d = 2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(-9, -6, 9, 1)$, $(-3, -2, 2, 1)$. ⓕ $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $(0, -1, 2, -2)$, $(-1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_1$, базис пересечения — $(-2, -4, 6, -2)$.

61. ⓐ, ⓒ, ⓖ, ⓙ, ⓛ, ⓜ Нет.

ⓑ, ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓗ, ⓘ, ⓚ Да.

62. ⓐ Да. ⓑ Нет при неколлинеарных векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, да при коллинерных векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. ⓒ Да. ⓓ Нет при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, да при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. ⓔ Нет при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, да при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. ⓕ Да. ⓖ Нет. ⓗ Да. ⓘ Да. ⓙ Да. ⓚ Нет при неколлинеарных векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, да при коллинерных векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. ⓛ Да. ⓜ Да. ⓝ Да. ⓞ Да. ⓟ Да. ⓠ Да. ⓡ Да.

63. ⓐ Да. ⓑ Да. ⓒ Да. ⓓ Нет при $n > 0$. ⓔ Да. ⓕ Нет при $n > 0$.

64. ⓐ Да. ⓑ Нет. ⓒ Да. ⓓ Да. ⓔ Да. ⓕ Нет.

65. ⓐ Да. ⓑ Нет при $n > 1$, да при $n = 1$. ⓒ Да. ⓓ, ⓔ, ⓕ Нет.

66. ⓐ а) Оператор поворота на угол $7\pi/6$; б) оператор, поворачивающий каждый вектор на угол $5\pi/24$ и удлиняющий его в $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ раз; в) оператор поворота на угол $5\pi/12$; г) оператор, поворачивающий каждый вектор на угол $-7\pi/24$ и удлиняющий его в $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ раз; д) оператор, поворачивающий каждый вектор на угол $\pi/6$ и удлиняющий его в 2 раза; е) оператор поворота на угол $\pi/3$. ⓑ а) Q; б) P; в) оператор, удлиняющий каждый вектор в два раза вдоль оси Ox; г) оператор поворота на угол π (симметрии относительно начала координат); д) Q; е) O — нулевой оператор. ⓒ i) а) $2f''' + f'' + f$; б) $-2f'' - 2f'$; в) $-f''' + f'$; г) $-f''' + f'$; д) $4f''' + f'' - 2f' + f$; е) f'''. ⓒ ii) а) $f''' + (x^2 + 1)f'' + f$; б) $-2f'' - 4f$; в) $(4x+2)f''' + (2x^2+1)f'' - 2f$; г) $2f''' + (2x^2-1)f'' - 2f$; д) $(4+4x^3)f''' + f$;

е) $12f''+8f$. ⓓ а) $(A+B)\mathbf{x}=(2x_1+x_2;2x_1+x_2+4x_3;2x_1)$; б) $(3A)\mathbf{x}=(3x_1+3x_3;3x_1-3x_2+6x_3;3x_1-3x_2)$; в) $(AB)\mathbf{x}=(2x_1+2x_2-x_3;2x_1+x_2-3x_3;-x_2-3x_3)$; г) $(BA)\mathbf{x}=(x_1+3x_3;5x_1-4x_2+5x_3;2x_1-x_2+3x_3)$; д) $A^2\mathbf{x}=(2x_1-x_2+x_3;2x_1-x_2-x_3;x_2-x_3)$; е) $B^3\mathbf{x}=(4x_1+6x_2+3x_3;15x_1+22x_2+9x_3;6x_1+9x_2+4x_3)$. ⓔ а) $(A-B)\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}$; б) $(2A+3B)\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-1&2\\12&1\end{pmatrix}\mathbf{x}$; в) $(AB)\mathbf{x}=\begin{pmatrix}3&2\\-5&-1\end{pmatrix}\mathbf{x}$; г) $(BA)\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-1&-2\\5&3\end{pmatrix}\mathbf{x}$; д) $(A^2)\mathbf{x}=\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}\mathbf{x}$; е) $B^3=B$. ⓕ а) I — единичный оператор; б) O — нулевой оператор; в) $I+P$ — оператор, удлиняющий каждый вектор в 2 раза вдоль прямой $x-2y=0$; г) O — нулевой оператор; д) $-I$ — оператор поворота на угол π; е) Q. ⓖ а) P_{xy} — оператор проектирования на плоскость Oxy; б) P_z — оператор проектирования на прямую Oz; в) I — единичный оператор; г) P_{yz} — оператор проектирования на плоскость Oyz; д) I— единичный оператор; е) $I+P_x$ — оператор, удлиняющий каждый вектор в 2 раза вдоль оси Ox; ж) $2I$ — оператор, удлиняющий каждый вектор в 2 раза; и) P_y — оператор проектирования на прямую Oy.

67. ⓐ $\begin{pmatrix}-3&3&-2\\1&2&-1\\-1&-3&2\end{pmatrix}$, $\det A=-4$. ⓑ $\begin{pmatrix}0&-2&-1\\3&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}$, $\det A=2$. ⓒ $\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-3&0\\2&-2&3\end{pmatrix}$, $\det A=-11$.

ⓓ $\begin{pmatrix}-2&2&2\\2&-3&2\\-2&2&0\end{pmatrix}$, $\det A=-4$. ⓔ $\begin{pmatrix}-1&3&-3\\3&1&3\\0&3&-3\end{pmatrix}$, $\det A=12$. ⓕ $\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&0&1\\-2&2&2\end{pmatrix}$, $\det A=14$.

68. ⓐ $\begin{pmatrix}0&3&-6\\0&0&6\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\det A=0$. ⓑ $\begin{pmatrix}1&-2&4\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$, $\det A=20$. ⓒ $\begin{pmatrix}1&3&4\\1&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\det A=-2$.

ⓓ $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&6\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\det A=2$. ⓔ $\begin{pmatrix}3&0&4\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $\det A=27$. ⓕ $\begin{pmatrix}1&3&4\\1&-2&15\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\det A=-5$.

69. ⓐ $\begin{pmatrix}6&-2&1&0\\3&0&0&1\\0&0&4&-2\\0&0&3&-2\end{pmatrix}$, $\det A=-12$. ⓑ $\begin{pmatrix}11&-6&3&-2\\9&-7&3&-3\\0&0&5&-2\\0&0&3&-1\end{pmatrix}$, $\det A=-23$. ⓒ $\begin{pmatrix}2&3&1&0\\1&1&0&1\\2&0&4&3\\0&2&1&3\end{pmatrix}$, $\det A=-39$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -156.$ ⓔ $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = -7.$ ⓕ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 46.$

70. ⓐ $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

71. ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

72. ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

73. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

74. ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

75. ⓐ $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

76.ⓐ $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell((1;0;0;-2);(0;1;0;0);(0;0;1;-1))$; $\operatorname{im} A = \ell((1;-1;0;2))$. ⓑ $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell((1;0;0;0);(0;1;0;1);(0;0;1;1))$; $\operatorname{im} A = \ell((1;1;1;1))$. ⓒ $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell((0;-1;-1;1))$; $\operatorname{im} A = \ell((2;-1;-2;-2);(1;0;-2;0);(2;-1;2;2))$. ⓓ $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell((1;1;0;0);(1;0;0;1))$; $\operatorname{im} A = \ell((3;0;-1;-3);(3;2;3;1))$. ⓔ $\operatorname{rang}(A) = 4$; $\ker A = \{\mathbf{0}\}$; $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^4$. ⓕ $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell((-1;3;1;0);(-1;0;0;1))$; $\operatorname{im} A = \ell((3;3;3;1);(1;2;0;0))$.

77.ⓐ $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\right)$. ⓑ $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$. ⓒ $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right)$. ⓓ $\operatorname{rang}(A) = 3$, $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\right)$. ⓔ $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. ⓕ $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$. ⓖ $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. ⓗ $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. ⓘ $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$. ⓙ $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right)$. ⓚ $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A =$

$\ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$. (l) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right)$.

78. (a) $\operatorname{rang}(A) = 3$;$\ker A = \ell(1+x)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; 6+4x-3x^2; -18+18x+15x^2+4x^3\right)$. (b) $\operatorname{rang}(A) = 1$;$\ker A = \ell\left(1; x; x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell(1+x)$. (c) $\operatorname{rang}(A) = 2$;$\ker A = \ell\left(1+3x; 6+3x^2-x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; 4x+x^2\right)$. (d) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(2-3x; 2+6x^2-x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; x^2\right)$. (e) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left(1; x; 3x^2-x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(x^2\right)$. (f) $\operatorname{rang}(A) = 3$;$\ker A = \ell\left(-2+2x+x^2\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(-2; -1-x; 6x+9x^2+13x^3\right)$.

79.(a) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2+x_3; -2x_1-x_2-4x_3; -x_1-2x_3)$. (b) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_3; 2x_1+x_2+3x_3; -3x_1-2x_2-4x_3)$. (c) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2-x_3; -3x_1+4x_2+x_3; -x_1+2x_2)$. (d) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2-2x_3; x_2-2x_3; x_1+2x_2-3x_3)$. (e) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2-x_3; -2x_1+3x_2+x_3; -x_1+2x_2+x_3)$. (f) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2; -3x_1-2x_2-2x_3; 2x_1+2x_2+x_3)$.

80. (a) $A^{-1}f = -2f''' + 2f'' - 2f' + f$. (b) $A^{-1}f = -f''' - f' + f$. (c) $A^{-1}f = -f''' - 2f'' + 2f' - f$. (d) $A^{-1}f = -f''' - 2f'' - f$. (e) $A^{-1}f = -2f'' - f$. (f) $A^{-1}f = -2f''' - f'' + f$.

81. (a) $A^{-1}f = 8f'' + 3f' + f$. (b) $A^{-1}f = 7f'' + 3f' + f$. (c) $A^{-1}f = 4f'' + 2f' + f$. (d) $A^{-1}f = -4f'' + 2f' - f$. (e) $A^{-1}f = 3f'' + 2f' + f$. (f) $A^{-1}f = -5f'' + 2f' - f$. (g) $A^{-1}f(x) = (1-2x-2x^2)f'' + (2+2x)f' - f$. (h) $A^{-1}f(x) = xf'' + f$. (i) $A^{-1}f(x) = (2-2x^2)f'' + (-2+2x)f' - f$. (j) $A^{-1}f(x) = (-5+2x^2)f'' + (2-2x)f' + f$. (k) $A^{-1}f(x) = (-2x-2x^2)f'' + (1+2x)f' - f$. (l) $A^{-1}f(x) = (-1-x)f'' + f$.

82.В a–f $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. (a) $\lambda_{1,2} = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$. (b) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (c) $\lambda_{1,2} = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$. (d) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1;-2)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(1;-1)$. (e) Спектр пуст. (f) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(2;-1)$.

83.В a–l $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (a) $\lambda_1 = -2+i$, $\mathbf{u} = \mu(1;i)$, $\lambda_2 = -2-i$, $\mathbf{v} = \mu(1;-i)$. (b) $\lambda_1 = i$, $\mathbf{u} = \mu(1;1+i)$, $\lambda_2 = -i$, $\mathbf{v} = \mu(1;1-i)$. (c) $\lambda_1 = 2i$, $\mathbf{u} = \mu(1;i)$, $\lambda_2 = -2i$, $\mathbf{v} = \mu(i;1)$. (d) $\lambda_1 = 1+i$, $\mathbf{u} = \mu(1;1+i)$, $\lambda_2 = 1-i$, $\mathbf{v} = \mu(1;1-i)$. (e) $\lambda_1 = 1+3i$, $\mathbf{u} = \mu(1;-i)$, $\lambda_2 = 1-3i$, $\mathbf{v} = \mu(1;i)$. (f) $\lambda_1 = 2+i$, $\mathbf{u} = \mu(1-i;1)$, $\lambda_2 = 2-i$, $\mathbf{v} = \mu(1+i;1)$. (g) $\alpha_1 = 2-2i$, $u = \mu(-1;1)$; $\alpha_2 = -i$, $u = \mu(1;1-i)$. (h) $\alpha_1 = -2i$, $u = \mu(1;1)$; $\alpha_2 = 1$, $u = \mu(-1;2i)$. (i) $\alpha_1 = -1$, $u = \mu(i;1-i)$; $\alpha_2 = 1$, $u = \mu(-1;1)$. (j) $\alpha_1 = 2-i$, $u = \mu(2;-1+i)$; $\alpha_2 = 1$, $u = \mu(-1;1)$. (k) $\alpha_1 = 1$, $u = \mu(1;2i)$; $\alpha_2 = 2-1i$, $u = \mu(1;1+i)$. (l) $\alpha_1 = -2i$, $u = \mu(1+i;-1)$; $\alpha_2 = -1-2i$, $u = \mu(-1;1-i)$.

84. (a) $\alpha_{1,2,3} = -1$, $u = \mu(1,-1,-1)$, $\mu \neq 0$. (b) $\alpha_{1,2,3} = -1$, $u =$

$\mu(0,1,1)+\nu(1,-1,0)$, $|\mu|+|\nu|\neq 0$. ⓒ $\alpha_1=1$, $u=\mu(1,0,1)$, $|\mu|\neq 0$, $\alpha_{2,3}=0$, $v=\nu(-1,1,0)$, $|\nu|\neq 0$. ⓓ $\alpha_1=1$, $u=\mu(1,-2,-2)$, $|\mu|\neq 0$. ⓔ $\alpha_{1,2}=1$, $u=\mu(0,1,2)+\nu(1,1,0)$, $|\mu|+|\nu|\neq 0$; $\alpha_3=2$, $v=\xi(1,1,-1)$, $|\xi|\neq 0$. ⓕ $\alpha_1=1$, $u=\mu(1,0,1)$, $|\mu|\neq 0$, $\alpha_2=-1$,$v=\nu(0,-1,1)$, $|\nu|\neq 0$, $\alpha_3=-2$,$w=\xi(1,2,-2)$, $|\xi|\neq 0$.

85. ⓐ $\alpha_1=1$, $u=\mu(-1,-1,1,2)$, $|\mu|\neq 0$; $\alpha_2=0$, $v=\nu(-1,0,1,0)$, $|\nu|\neq 0$. ⓑ $\alpha_1=1$, $u=\mu(1,0,-3,4)+\nu(1,-1,0,0)$, $|\mu|+|\nu|\neq 0$; $\alpha_2=0$, $v=\xi(-1,1,-1,1)$, $|\xi|\neq 0$. ⓒ $\alpha_1=-1$, $u=\mu(0,1,-2,0)+\nu(1,0,-1,0)+\eta(0,0,-1,1)$, $|\mu|+|\nu|+|\eta|\neq 0$; $\alpha_2=0$, $v=\xi(-1,-1,1,1)$, $|\xi|\neq 0$. ⓓ $\alpha_1=1$, $u=\mu(-1,-1,1,0)+\nu(-1,0,0,1)$, $|\mu|+|\nu|\neq 0$; $\alpha_2=2$, $v=\xi(-4,0,2,3)+\eta(1,1,-2,0)$, $|\xi|+|\eta|\neq 0$. ⓔ $\alpha=1$, $v=\xi(0,0,1,1)+\eta(1,-1,0,0)$, $|\xi|+|\eta|\neq 0$. ⓕ $\alpha=-1$, $u=\mu(1,-4,0,0)+\nu(0,2,1,0)+\eta(0,-1,0,1)$, $|\mu|+|\nu|+|\eta|\neq 0$.

86. ⓐ $\alpha=-1$, $k_g=1$. ⓑ $\alpha=0$, $k_g=1$. ⓒ $\alpha=0$, $k_g=1$. ⓓ $\alpha=0$, $k_g=2$; $\alpha=-1$, $k_g=1$. ⓔ $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=1$, $k_g=1$. ⓕ $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=1$, $k_g=1$; $\alpha=-1$, $k_g=1$.

87. ⓐ $A_u=\mathrm{diag}(1,1,-1)$, $\mathbf{u}_1=(-1,1,0)$, $\mathbf{u}_2=(1,0,1)$, $\mathbf{u}_3=(-1,1,1)$. ⓑ $A_u=\mathrm{diag}(-3,1,1)$, $\mathbf{u}_1=(1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2=(-1,1,0)$, $\mathbf{u}_3=(1,0,1)$. ⓒ $A_u=\mathrm{diag}(-1,2,2)$, $\mathbf{u}_1=(-1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{u}_3=(-1,0,1)$. ⓓ $A_u=\mathrm{diag}(0,0,1)$, $\mathbf{u}_1=(1,0,1)$, $\mathbf{u}_2=(-1,1,0)$, $\mathbf{u}_3=(1,-1,1)$. ⓔ $A_u=\mathrm{diag}(0,0,1)$, $\mathbf{u}_1=(1,-2,0)$, $\mathbf{u}_2=(0,-1,1)$, $\mathbf{u}_3=(1,1,-2)$. ⓕ $A_u=\mathrm{diag}(-1,1,2)$, $\mathbf{u}_1=(-1,-2,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{u}_3=(1,1,1)$.

88. ⓐ $A_e=\mathrm{diag}(0,0,0,1)$, $\mathbf{e}_1=(0,0,1,1)$, $\mathbf{e}_2=(1,0,-1,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,1,-1,0)$, $\mathbf{e}_4=(-1,1,3,2)$. ⓑ $A_e=\mathrm{diag}(0,0,1,1)$, $\mathbf{e}_1=(0,1,0,-1)$, $\mathbf{e}_2=(1,0,-2,0)$, $\mathbf{e}_3=(1,0,1,1)$, $\mathbf{e}_4=(1,1,0,0)$. ⓒ $A_e=\mathrm{diag}(-1,-1,0,0)$, $\mathbf{e}_1=(2,0,1,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,-1,0,1)$, $\mathbf{e}_3=(0,-1,1,0)$, $\mathbf{e}_4=(1,0,0,1)$. ⓓ $A_e=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,1)$, $\mathbf{e}_1=(-2,1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(1,0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=(-1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_4=(1,1,1,-1)$. ⓔ $A_e=\mathrm{diag}(1,1,1,2)$, $\mathbf{e}_1=(0,0,1,1)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,1)$, $\mathbf{e}_3=(1,0,0,-1)$, $\mathbf{e}_4=(1,1,2,1)$. ⓕ $A_e=\mathrm{diag}(-2,-1,1,1)$, $\mathbf{e}_1=(0,1,-1,0)$, $\mathbf{e}_2=(1,-1,0,1)$, $\mathbf{e}_3=(1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_4=(0,1,-1,-1)$.

89. ⓐ $\mathrm{diag}(0,i,-i)$. ⓑ $\mathrm{diag}(1,2i,-2i)$. ⓒ $\mathrm{diag}(0,-1+i,-1-i)$. ⓓ $\mathrm{diag}(1,1+i,1-i)$. ⓔ $\mathrm{diag}(0,1+2i,1-2i)$. ⓕ $\mathrm{diag}(-1,1+2i,1-2i)$.

В примерах g – l характеристические многочлены имеют только простые корни, так как они взаимно просты со своей производной. ⓖ $-\varphi_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+22$. ⓗ $-\varphi_A(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-10$. ⓘ $-\varphi_A(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-11$. ⓙ $-\varphi_A(\lambda)=\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda+4$. ⓚ $-\varphi_A(\lambda)=\lambda^3-10\lambda+\lambda^2+12$. ⓛ $-\varphi_A(\lambda)=\lambda^3-8\lambda^2+11\lambda-12$.

90. ⓐ $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;-3;0;5),(-1;4;0;-7)\big)$,

$\alpha_2 = -1$ $\mathbb{K}_2 = \ell\big((-1;2;1;-3),(-1;1;2;0)\big)$. ⓑ $\alpha_1 = 0$ $\mathbb{K}_1 = \ell\big((1;1;1;0),(0;1;1;0),(3;3;4;-2)\big)$, $\alpha_2 = 1$ $\mathbb{K}_2 = \ell\big((1;2;2;1)\big)$. ⓒ $\alpha_1 = 0$ $\mathbb{K}_1 = \ell\big((1;1;-1;-1),(1;2;-2;-3)\big)$, $\alpha_2 = 1$ $\mathbb{K}_2 = \ell\big((1;1;0;-2),(3;3;-2;-3)\big)$. ⓓ $\alpha_1 = 0$ $\mathbb{K}_1 = \ell\big((1;2;-3;-3),(0;1;-1;-1)\big)$, $\alpha_2 = 1$ $\mathbb{K}_2 = \ell\big((0;-1;2;2),(1;2;-3;-2)\big)$. ⓔ $\alpha_1 = 1$ $\mathbb{K}_1 = \ell\big((1;0;-1;-1),(0;1;0;0),(3;0;-2;-3)\big)$, $\alpha_2 = 0$ $\mathbb{K}_2 = \ell\big((7;-3;-4;-6)\big)$. ⓕ $\alpha_1 = 0$ $\mathbb{K}_1 = \ell\big((1;0;0;1),(3;1;1;2)\big)$, $\alpha_2 = 1$ $\mathbb{K}_2 = \ell\big((-3;0;1;-1)\big)$, $\alpha_3 = -1$ $\mathbb{K}_3 = \ell\big((1;1;1;1)\big)$.

91.ⓐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

92.ⓐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

93.ⓐ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 2&1&0&0&0\\ 0&2&1&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} -2&1&0&0&0\\ 0&-2&1&0&0\\ 0&0&-2&1&0\\ 0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&-2 \end{pmatrix}$.

ⓕ $\begin{pmatrix} -1&1&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0\\ 0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

ⓗ $\begin{pmatrix} -1&1&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} -1&1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 2&1&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&1&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

ⓚ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

ⓛ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

94. ⓐ $\begin{pmatrix} -1&1&0&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&0&-1&1\\ 0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓑ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0\\ 0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

95. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

96. ⓐ–ⓑ. Инвариантными одномерными подпространствами являются $\ell(v)$, $v = \mu f_1 + \nu f_2$ для любых $|\mu| + |\nu| \neq 0$, и $\ell(f_3)$. Инвариантными двумерными подпространствами являются $\ell(v, f_3)$, $v = \mu f_1 + \nu f_2$ для любых $|\mu| + |\nu| \neq 0$, и $\ell(f_1, f_2)$. ⓐ $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (0,1,-1)$, $f_3 = (1,1,1)$. ⓑ $f_1 = (0,1,1)$, $f_2 = (1,-1,0)$, $f_3 = (1,-1,1)$. ⓒ Инвариантными одномерными подпространствами являются $\ell(f_1)$, $\ell(f_2)$ и $\ell(f_3)$. Инвариантными двумерными подпространствами являются $\ell(f_1, f_2)$, $\ell(f_1, f_3)$ и $\ell(f_2, f_3)$, $f_1 = (1,0,-1)$, $f_2 = (-1,1,0)$, $f_3 = (2,-2,1)$.

97. ⓐ $\ell((-2,0,-1))$, $\ell((1,1,1),(-1,0,-1))$. ⓑ $\ell((2,-1,3))$, $\ell((1,0,1),(-1,1,-1))$. ⓒ $\ell((2,-1,2))$, $\ell((1,-1,0),(1,0,1))$. ⓓ $\ell((1,-1,0))$, $\ell((1,0,-1),(-1,1,1))$. ⓔ $\ell((-1,1,1))$, $\ell((1,-1,0),(1,0,-1))$. ⓕ $\ell((1,1,0))$, $\ell((1,1,-1),(0,1,-1))$.

98. ⓐ $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$. ⓑ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$. ⓒ $\mu_A(\lambda) = \lambda^4$. ⓓ $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$. ⓔ $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$. ⓕ $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$.

99. ⓐ $A \approx B \not\approx C$. ⓑ $A \approx C \not\approx B$. ⓒ $B \approx C \not\approx A$. ⓓ $A \approx B \not\approx C$. ⓔ $B \approx C \not\approx A$. ⓕ $A \not\approx B \not\approx C \not\approx A$.

100. ⓐ, ⓑ, ⓒ, ⓓ Матрицы подобны. ⓔ, ⓕ Матрицы не подобны.

101. Подобна матрице ⓐ $\mathrm{diag}(-1,1)$. ⓑ $\mathrm{diag}(-2,3)$. ⓒ $\mathrm{diag}(1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$. ⓓ $\mathrm{diag}(-4,4)$. ⓔ $\mathrm{diag}(1+i, 1-i)$. ⓕ $\mathrm{diag}(-2,5)$.

102. Подобна матрице ⓐ $\mathrm{diag}(0,1,1)$. ⓑ $\mathrm{diag}(-1,1,1)$. ⓒ $\mathrm{diag}(-1,2,2)$. ⓓ $\mathrm{diag}(1,-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ⓔ $\mathrm{diag}(0,-i,i)$. ⓕ $\mathrm{diag}(0,-1,-1)$.

103. Подобна матрице ⓐ $\mathrm{diag}(0,0,1,1)$. ⓑ $\mathrm{diag}(0,1,1,1)$. ⓒ $\mathrm{diag}(0,0,-i,i)$. ⓓ $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. ⓔ $\mathrm{diag}(-i,-i,i,i)$. ⓕ $\mathrm{diag}(0,0,-1,1)$.

104. ⓐ $\frac{5\pi}{6}$. ⓑ $\frac{3\pi}{4}$. ⓒ $\frac{2\pi}{3}$. ⓓ $\frac{\pi}{2}$. ⓔ $\frac{\pi}{3}$. ⓕ $\frac{\pi}{4}$.

105. ⓐ $\frac{5\pi}{6}$. ⓑ $\frac{2\pi}{3}$. ⓒ $\frac{2\pi}{3}$. ⓓ $\frac{5\pi}{6}$. ⓔ $\frac{\pi}{6}$. ⓕ $\frac{\pi}{3}$.

106. ⓐ $\mathbf{a}_3 = (-1,-1,1,0)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,1,0,0)$. ⓑ $\mathbf{a}_3 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,1,-3)$. ⓒ $\mathbf{a}_3 = (1,2,-5,0)$, $\mathbf{a}_4 = (1,2,1,-2)$. ⓓ $\mathbf{a}_3 = (1,0,0,-2)$, $\mathbf{a}_4 = (0,-2,1,0)$. ⓔ $\mathbf{a}_3 = (1,1,-2,0)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,1,0,0)$. ⓕ $\mathbf{a}_3 = (-5,2,0,1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,2,-2,1)$.

107. ⓐ $\mathbf{a}_3 = (-2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 0; 1/\sqrt{6})$, $\mathbf{a}_4 = (1/\sqrt{12}; 1/\sqrt{12}; 3/\sqrt{12}; 1/\sqrt{12})$. ⓑ $\mathbf{a}_3 = (0; 1/\sqrt{5}; 0; 2/\sqrt{5})$, $\mathbf{a}_4 = (-2/\sqrt{10}; 2/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; -1/\sqrt{10})$. ⓒ $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-2/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; -2/\sqrt{10})$. ⓓ $\mathbf{a}_3 = (0; 1/\sqrt{5}; 0; -2/\sqrt{5})$, $\mathbf{a}_4 = (1/\sqrt{5}; 0; 2/\sqrt{5}; 0)$. ⓔ $\mathbf{a}_3 = (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (0; 0; 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$. ⓕ $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{2}; 0; 0; -1/\sqrt{2})$, $\mathbf{a}_4 = (1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6}; 0; 1/\sqrt{6})$.

108. ⓐ $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, -1, 0, 1)$. ⓑ $\mathbf{b}_1 = (2, 1, -2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 2, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, 1, -2, 1)$. ⓒ $\mathbf{b}_1 = (0, -1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 1, 0)$. ⓓ $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -1, -1, 1)$. ⓔ $\mathbf{b}_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 3, 1, 0)$. ⓕ $\mathbf{b}_1 = (2, 3, 2, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -2, 2, 0)$.

109. ⓐ $(-3, 1, 0, 6)$, $(-5, 0, 1, 8)$. ⓑ $(-4, -2, 1, 2)$. ⓒ $(5, 7, 0, -3)$, $(7, 8, 3, 0)$. ⓓ $(7, 6, -2, -9)$. ⓔ $(5, -2, 0, 1)$, $(-6, 3, 1, 0)$. ⓕ $(3, 1, 0, 2)$, $(3, 0, 1, 1)$.

110. ⓐ $x_3 - 2x_4 = 0$, $x_1 - 3x_2 + 7x_4 = 0$. ⓑ $x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$. ⓒ $x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$, $x_1 + 7x_3 - 4x_4 = 0$. ⓓ $6x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 0$, $2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0$. ⓔ $x_2 + 2x_3 = 0$, $2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$. ⓕ $5x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

111. ⓐ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, 1, 0, -1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 1, 0, 0)$. ⓑ $\mathbf{x}_{pr} = (-5, -4, -1, -2)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, -3, 7, 0)$. ⓒ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, 0, -2, 0)$, $\mathbf{a}_{ort} = (-6, 1, 3, 0)$. ⓓ $\mathbf{x}_{pr} = (3, 0, 6, 0)$, $\mathbf{a}_{ort} = (0, 1, 0, 0)$. ⓔ $\mathbf{x}_{pr} = (3, 7, -4, -3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (3, 1, 4, 0)$. ⓕ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 4, -2, -2)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, -3, 2)$.

112. ⓐ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 2, 3, 1)$. ⓑ $\mathbf{x}_{pr} = (0, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, 3, 3, -1)$. ⓒ $\mathbf{x}_{pr} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (3, 1, -4, -1)$. ⓓ $\mathbf{x}_{pr} = (-4, 2, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, -3, 2, 0)$. ⓔ $\mathbf{x}_{pr} = (0, -1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-3, -1, -1, -1)$. ⓕ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 1, 2, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, 1, 1)$.

113. ⓐ $\pi/4$, 3. ⓑ $\arccos(\frac{\sqrt{23}}{5})$, $\sqrt{2}$. ⓒ $\pi/6$, $\sqrt{5}$. ⓓ $\pi/3$, $\sqrt{21}$. ⓔ $\arccos(\sqrt{\frac{2}{3}})$, 3. ⓕ $\arccos(\frac{\sqrt{6}}{3})$, $\sqrt{2}$.

114. ⓐ $A_e = \operatorname{diag}(3, 0, -3)$, $\mathbf{e}_1 = (2/3, 2/3, 1/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-2/3, 1/3, 2/3)$, $\mathbf{e}_3 = (1/3, -2/3, 2/3)$. ⓑ $A_e = \operatorname{diag}(2, -3, 3)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (-2/\sqrt{30}, 1/\sqrt{30}, -5/\sqrt{30})$, $\mathbf{e}_3 = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$. ⓒ $A_e = \operatorname{diag}(3, 1, -2)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. ⓓ $A_e = \operatorname{diag}(-3, 3, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (1/3, 2/3, -2/3)$, $\mathbf{e}_2 = (2/3, 1/3, 2/3)$, $\mathbf{e}_3 = (-2/3, 2/3, 1/3)$. ⓔ $A_e = \operatorname{diag}(2, 1, -1)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$. ⓕ $A_e = \operatorname{diag}(2, -3, 3)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{30}, -5/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$. ⓖ $A_e = \operatorname{diag}(-5, 4, 4)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/3, -2/3, 1/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{5}/5, 0, 2\sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3 = (-4\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3, 2\sqrt{5}/15)$. ⓗ $A_e =$

$\operatorname{diag}(-1,2,2)$, $\mathbf{e}_1=(\sqrt{3}/3,-\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0)$, $\mathbf{e}_3=(-\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/3)$. (i) $A_e=\operatorname{diag}(3,-3,-3)$, $\mathbf{e}_1=(\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/3)$, $\mathbf{e}_2=(-2\sqrt{5}/5,0,\sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3=(-\sqrt{30}/30,\sqrt{30}/6,-\sqrt{30}/15)$. (j) $A_e=\operatorname{diag}(5,-4,-4)$, $\mathbf{e}_1=(1/3,2/3,-2/3)$, $\mathbf{e}_2=(-2\sqrt{5}/5,\sqrt{5}/5,0)$, $\mathbf{e}_3=(2\sqrt{5}/15,4\sqrt{5}/15,\sqrt{5}/3)$. (k) $A_e=\operatorname{diag}(-3,3,3)$, $\mathbf{e}_1=(\sqrt{6}/3,-\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/6)$, $\mathbf{e}_2=(0,\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3=(\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3,-\sqrt{3}/3)$. (l) $A_e=\operatorname{diag}(-3,3,3)$, $\mathbf{e}_1=(-\sqrt{6}/3,\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/6)$, $\mathbf{e}_2=(\sqrt{5}/5,0,2\sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3=(\sqrt{30}/15,\sqrt{30}/6,-\sqrt{30}/30)$.

115. (a) $A_e=\operatorname{diag}(0,0,0,7)$, $\mathbf{e}_1=1/\sqrt{5}(0,1,0,-2)$, $\mathbf{e}_2=1/\sqrt{30}(5,-2,0,-1)$, $\mathbf{e}_3=1/\sqrt{42}(-1,-2,6,-1)$, $\mathbf{e}_4=1/\sqrt{7}(1,2,1,1)$. (b) $A_e=\operatorname{diag}(5,5,5,-8)$, $\mathbf{e}_1=1\sqrt{5}(0,1,0,2)$, $\mathbf{e}_2=1\sqrt{45}(0,-4,5,2)$, $\mathbf{e}_3=1/(3\sqrt{13})(9,4,4,-2)$, $\mathbf{e}_4=1/\sqrt{13}(-2,2,2,-1)$. (c) $A_e=\operatorname{diag}(2,2,2,-2)$, $\mathbf{e}_1=1/\sqrt{6}(1,0,-1,2)$, $\mathbf{e}_2=1/\sqrt{12}(1,3,-1,-1)$, $\mathbf{e}_3=1/\sqrt{2}(1,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4=1/2(-1,1,1,1)$. (d) $A_e=\operatorname{diag}(-7,-7,4,4)$, $\mathbf{e}_1=1/\sqrt{6}(-1,-2,0,1)$, $\mathbf{e}_2=1/\sqrt{66}(5,-2,6,1)$, $\mathbf{e}_3=1/\sqrt{5}(0,1,0,2)$, $\mathbf{e}_4=1/\sqrt{55}(-5,2,5,-1)$. (e) $A_e=\operatorname{diag}(5,5,-9,-9)$, $\mathbf{e}_1=1/\sqrt{70}(5,2,5,-4)$, $\mathbf{e}_2=1/\sqrt{5}(0,2,0,1)$, $\mathbf{e}_3=1/3(2,-1,0,2)$, $\mathbf{e}_4=1/\sqrt{126}(-5,-2,9,4)$. (f) $A_e=\operatorname{diag}(2,2,-3,-3)$, $\mathbf{e}_1=1/\sqrt{2}(0,1,1,0)$, $\mathbf{e}_2=1/\sqrt{10}(2,-1,1,2)$, $\mathbf{e}_3=1/\sqrt{3}(0,-1,1,-1)$, $\mathbf{e}_4=1/\sqrt{15}(3,1,-1,-2)$.

116. (a) $A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\mathbf{u}_1=(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0),\\ \mathbf{u}_2=(\sqrt{2}/6,\sqrt{2}/6,2\sqrt{2}/3),\\ \mathbf{u}_3=(2/3,2/3,-1/3).\end{matrix}$

(b) $A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\mathbf{u}_1=(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),\\ \mathbf{u}_2=(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),\\ \mathbf{u}_3=(0,-1,0).\end{matrix}$

(c) $A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\mathbf{u}_1=(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0),\\ \mathbf{u}_2=(\sqrt{2}/6,\sqrt{2}/6,2\sqrt{2}/3),\\ \mathbf{u}_3=(2/3,2/3,-1/3).\end{matrix}$

(d) $A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\mathbf{u}_1=(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0),\\ \mathbf{u}_2=(\sqrt{2}/6,\sqrt{2}/6,2\sqrt{2}/3),\\ \mathbf{u}_3=(2/3,2/3,-1/3).\end{matrix}$

(e) $A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\mathbf{u}_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),\\ \mathbf{u}_2=(0,0,1),\\ \mathbf{u}_3=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0).\end{matrix}$

(f) $A_u=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\mathbf{u}_1=(-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0),\\ \mathbf{u}_2=(\sqrt{2}/6,\sqrt{2}/6,2\sqrt{2}/3),\\ \mathbf{u}_3=(2/3,2/3,-1/3).\end{matrix}$

117. ⓐ $A_e=\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&-3\\ 0&0&3&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1=(-1/\sqrt2,1/\sqrt2,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,0,-1/\sqrt2,1/\sqrt2)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1/\sqrt2,1/\sqrt2)$, $\mathbf{e}_4=(1/\sqrt2,1/\sqrt2,0,0)$.

ⓑ $A_e=\begin{pmatrix} 0&3&0&0\\ -3&0&0&0\\ 0&0&0&-1\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1=(-1/\sqrt2,1/\sqrt2,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,0,-1/\sqrt2,1/\sqrt2)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1/\sqrt2,1/\sqrt2)$, $\mathbf{e}_4=(1/\sqrt2,1/\sqrt2,0,0)$.

ⓒ $A_e=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-3\\ 0&0&3&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1=(1/\sqrt3,-1/\sqrt3,0,1/\sqrt3)$, $\mathbf{e}_2=(0,-1/\sqrt3,1/\sqrt3,-1/\sqrt3)$, $\mathbf{e}_3=(-1/\sqrt3,0,1/\sqrt3,1/\sqrt3)$, $\mathbf{e}_4=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,1/\sqrt3,0)$.

ⓓ $A_e=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-\sqrt5\\ 0&0&\sqrt5&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1=(1/\sqrt{10},-2/\sqrt{10},2/\sqrt{10},1/\sqrt{10})$, $\mathbf{e}_2=(-1/\sqrt2,0,0,1/\sqrt2)$, $\mathbf{e}_3=(-1/\sqrt{15},2/\sqrt{15},3/\sqrt{15},-1/\sqrt{15})$, $\mathbf{e}_4=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,0,1/\sqrt3)$.

ⓔ $A_e=\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&-3\\ 0&3&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1=(2/3,-1/3,2/3)$, $\mathbf{e}_2=(-4/\sqrt{45},2/\sqrt{45},5/\sqrt{45})$, $\mathbf{e}_3=(1/\sqrt5,2/\sqrt5,0)$.

ⓕ $A_e=\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-2\sqrt2\\ 0&0&2\sqrt2&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1=(-1/\sqrt2,0,0,1/\sqrt2)$, $\mathbf{e}_2=(-1/2,1/2,1/2,-1/2)$, $\mathbf{e}_3=(1/\sqrt{12},-1/\sqrt{12},3/\sqrt{12},1/\sqrt{12})$, $\mathbf{e}_4=(1/\sqrt6,2/\sqrt6,0,1/\sqrt6)$.

118. ⓐ $t_1^2-2t_2^2-2t_3^2$, $t_1=x_1-x_2-3x_3$, $t_2=-2x_2+x_3$, $t_3=x_3$. ⓑ $2t_1^2+3t_2^2$, $t_1=x_1-x_2+3x_3$, $t_2=2x_2-3x_3$, $t_3=x_3$. ⓒ $-3t_1^2+t_2^2+2t_3^2$, $t_1=x_1+x_2-3x_3$, $t_2=-2x_2-3x_3$, $t_3=x_3$. ⓓ $2t_1^2+2t_2^2+t_3^2$, $t_1=x_1-2x_2-2x_3$, $t_2=-2x_2-x_3$, $t_3=x_3$. ⓔ $-t_1^2-2t_2^2-3t_3^2$, $t_1=x_1-x_2+3x_3$, $t_2=3x_2-2x_3$, $t_3=x_3$. ⓕ $t_1^2-t_2^2$, $t_1=x_1-3x_2-x_3$, $t_2=-3x_2-2x_3$, $t_3=x_3$.

119. ⓐ $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$, $y_1=x_1+2x_2-x_3+x_4$, $y_2=(x_2+x_3)/\sqrt2$, $y_3=\sqrt2x_4$, $y_4=(x_2-x_3-2x_4)/\sqrt2$. ⓑ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$, $y_1=x_1-2x_2+x_3+2x_4$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3+x_4$, $y_4=x_2$. ⓒ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$, $y_1=(x_1+x_2+x_4)/2$, $y_2=x_3-x_4$, $y_3=(x_1-x_2+2x_3-x_4)/2$, $y_4=x_4$. ⓓ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$, $y_1=(x_1+x_2+2x_4)/\sqrt2$, $y_2=(2x_3-x_4)/\sqrt2$, $y_3=(x_1-x_2+2x_3)/\sqrt2$, $y_4=\sqrt5x_4/\sqrt2$. ⓔ $y_1^2-y_2^2$, $y_1=(-x_1-x_2+x_3-x_4)/2$, $y_2=(-x_1-x_2-x_3+x_4)/2$, $y_3=x_2$, $y_4=x_4$. ⓕ $y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $y_1=x_1+x_2+x_3-2x_4$, $y_2=x_2+x_3-x_4$, $y_3=x_2$, $y_4=x_4$.

120. ⓐ Положительно определена. ⓑ Отрицательно определена.

ⓒ Неположительна. ⓓ Неотрицательна. ⓔ, ⓕ Неопределена.

121. ⓐ При $\mu < -2$ кв. форма отрицательно определена, при $\mu = -2$ кв. форма неположительна, при $-2 < \mu < 4$ кв. форма неопределена, при $\mu = 4$ кв. форма неотрицательна, при $\mu > 4$ кв. форма положительно определена.

ⓑ При $\mu < 8/7$ кв. форма неопределена, при $\mu = 8/7$ кв. форма неотрицательна, при $\mu > 8/7$ кв. форма положительно определена.

ⓒ При $\mu < -1$ кв. форма отрицательно определена, при $\mu = -1$ кв. форма неположительна, при $-1 < \mu < 1$ кв. форма неопределена, при $\mu = 1$ кв. форма неотрицательна, при $\mu > 1$ кв. форма положительно определена.

ⓓ При $\mu < 0$ кв. форма отрицательно определена, при $\mu = 0$ кв. форма неположительна, при $0 < \mu$ кв. форма неопределена.

ⓔ При $\mu < -1$ кв. форма отрицательно определена, при $\mu = -1$ кв. форма неположительна, при $-1 < \mu$ кв. форма неопределена.

ⓕ При $\mu < 0$, $1/5 < \mu$ кв. форма неопределена, при $\mu = 0$, $\mu = 1/5$ кв. форма неотрицательна, при $0 < \mu < 1/5$ кв. форма положительно определена.

122. ⓐ $f(\mathbf{x}) = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$, $y_1 = (2x_1 - x_2 + 5x_3)/\sqrt{30}$, $y_2 = (x_1 + 2x_2)/\sqrt{5}$, $y_3 = (-2x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{6}$. ⓑ $f(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$, $y_1 = (x_2 + x_3)/\sqrt{2}$, $y_2 = (2x_1 - x_2 + x_3)/\sqrt{6}$, $y_3 = (-x_1 - x_2 + x_3)/\sqrt{3}$. ⓒ $f(\mathbf{x}) = 6y_3^2$, $y_1 = (2x_1 + x_3)/\sqrt{5}$, $y_2 = (x_1 + 5x_2 - 2x_3)/\sqrt{30}$, $y_3 = (x_1 - x_2 - 2x_3)/\sqrt{6}$. ⓓ $f(\mathbf{x}) = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$, $y_1 = (-x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, $y_2 = (-x_1 - x_2 + 2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3}$. ⓔ $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$, $y_1 = (-x_1 - x_2 + 2x_3)/\sqrt{6}$, $y_2 = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, $y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3}$. ⓕ $f(\mathbf{x}) = 9y_1^2 + 9y_2^2$, $y_1 = (x_1 + 2x_3)/\sqrt{5}$, $y_2 = (-4x_1 + 5x_2 + 2x_3)/\sqrt{45}$, $y_3 = (2x_1 + 2x_2 - x_3)/3$. ⓖ $f(\mathbf{x}) = y_1^2 + 3y_2^2$, $y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, $y_2 = (-x_1 + x_2 + 2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3 = (x_1 - x_2 + x_3)/\sqrt{3}$.

123. ⓐ $f(\mathbf{x}) = -3y_1^2 - 3y_2^2 + 5y_3^2 + 5y_4^2$, $y_1 = (2x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{6}$, $y_2 = (x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4)/\sqrt{12}$, $y_3 = (x_2 - x_3)/\sqrt{2}$, $y_4 = (-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/2$. ⓑ $f(\mathbf{x}) = 5y_1^2 + 5y_2^2$, $y_1 = (x_2 - x_3/\sqrt{2}$, $y_2 = (2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4)/\sqrt{10}$, $y_3 = (x_2 + x_3 - x_4)/\sqrt{3}$, $y_4 = (3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)/\sqrt{15}$. ⓒ $f(\mathbf{x}) = -7y_1^2 - 7y_2^2 + 3y_3^2 + 3y_4^2$, $y_1 = (-x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)/\sqrt{10}$, $y_2 = (x_1 + x_3)/\sqrt{2}$, $y_3 = (x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4)/\sqrt{15}$, $y_4 = (-x_1 - x_2 + x_3)/\sqrt{3}$. ⓓ $f(\mathbf{x}) = 7y_4^2$, $y_1 = (2x_1 + x_2)/\sqrt{5}$, $y_2 = (x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4)/\sqrt{42}$, $y_3 = (x_1 - 2x_2 + 5x_3)/\sqrt{30}$, $y_4 = (-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)/\sqrt{7}$. ⓔ $f(\mathbf{x}) = -4y_1^2 - 4y_2^2 - 4y_3^2 + 6y_4^2$, $y_1 = (-2x_1 + x_2)/\sqrt{5}$, $y_2 = (-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 9x_4)/\sqrt{90}$, $y_3 = (2x_1 + 4x_2 + 5x_3)/\sqrt{45}$, $y_4 = (x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4)/\sqrt{10}$. ⓕ $f(\mathbf{x}) = -5y_1^2 - 5y_2^2 - 5y_3^2 + 8y_4^2$, $y_1 = (x_1 + 2x_2)/\sqrt{5}$, $y_2 = (4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4)/\sqrt{117}$, $y_3 = (4x_1 - 2x_2 + 5x_3)/\sqrt{45}$, $y_4 = (-2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)/\sqrt{13}$.

9

ПРИЛОЖЕНИЕ.

1. Решить следующие системы уравнений.

a). $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

b). $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

c). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

d). $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

e). $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

f). $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

g). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

h). $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

i). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

j). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

k). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

l). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

m). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

n). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

o). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

p). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

q). $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

r). $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

s). $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

t). $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

u). $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

v). $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

w). $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ x). $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

2. Решить следующие системы уравнений.

a). $\begin{cases} -2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = 3. \end{cases}$ b). $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 5x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

c). $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$ d). $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 - 6x_4 = 6. \end{cases}$

e). $\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -3, \\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ f). $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

g). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 - 8x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$ h). $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ -3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -3, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

i). $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 4, \\ -3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$ j). $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -6, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

k). $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 6, \\ -2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$ l). $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$

m). $\begin{cases} 3x_1 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$ n). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -5, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases}$

o). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -3, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -1. \end{cases}$ p). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

q). $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_4 = -3. \end{cases}$ r). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$

s). $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 3, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -2. \end{cases}$ t). $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 4. \end{cases}$

u). $\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -1, \\ -2x_1 + 2x_3 - 8x_4 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$ v). $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 8x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 8x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

w). $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$ x). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 = -1, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

3. Для следующих матриц второго порядка решить матричное уравнение $\mathsf{X} + \mathsf{AXB} = \mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Для следующих матриц второго порядка решить матричное уравнение $\mathsf{AX} + \mathsf{XB} = \mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

d). $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

e). $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

f). $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

g). $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

h). $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

i). $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

j). $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

k). $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$.

l). $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$.

m). $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$.

n). $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

o). $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

p). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

q). $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$.

r). $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

s). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

t). $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

u). $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.

v). $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4&-4\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}4&1\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-9&-3\\-4&-6\end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4&1\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&4\\2&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-4&-6\\-4&-4\end{pmatrix}$.

5. Для следующих матриц второго порядка решить матричное уравнение $\mathsf{AXB}=\mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}4&1\\3&-4\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}6&-8\\-6&8\end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-4&-3\\-3&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}6&7\\-1&-2\end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&1\\4&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}4&-4\\3&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}8&-8\\0&0\end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&-4\\3&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}4&1\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-3&1\\-9&3\end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}8&-4\\8&8\end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4&-3\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-4&3\\-3&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-6&3\\6&-3\end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\-3&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&-1\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}6&-6\\8&-8\end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}0&-3\\0&2\end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&3\\-3&-3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&3\\4&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-8&-6\\0&-6\end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&4\\4&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&-3\\1&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-6&6\\-8&0\end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&3\\3&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&3\\4&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-6&7\\6&9\end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-2&1\\-2&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-6&-6\\2&2\end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&4\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-4&4\\8&4\end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-4&-2\\3&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&4\\2&-4\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}0&0\\4&-8\end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&1\\-4&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&3\\4&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-6\end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&1\\4&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{C}=\begin{pmatrix}-1&-1\\7&7\end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$.

6. Для следующих матриц третьего порядка найти их обратные.

a). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & -4 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -5 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -4 & -5 & -5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -3 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 2 & -3 & -3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & -5 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \\ -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Для следующих матриц четвертого порядка найти их обратные.

a). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Решить матричное уравнение $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\1&1&2\\1&2&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\-1&-1&1\\3&-2&-4\end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\3&1&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&1&-2\\1&2&0\end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&2&3\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-3&1&2\\0&3&3\\4&-3&1\end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\3&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\-4&-2&3&4\\4&-3&-4&3\end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-2&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-2&-3&-2&0\\0&2&-1&1\\2&3&3&3\end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&1&-1\\3&-2&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}0&-4&0&4\\0&-1&3&1\\1&-1&-2&3\end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-2&2&1\\-1&-2&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-3&0&-2\\0&2&3\\1&0&-4\\-2&0&-2\end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&2&1\\1&1&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}4&4&4\\-3&-4&1\\1&2&4\\3&0&1\end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&-2&3\\-1&2&-2\\1&0&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&3&4\\2&-1&-4\\4&3&0\end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&-1\\2&1&-2\\-1&0&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&-3\\-2&0&-1\\4&3&-4\end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\\1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\1&-3&1&-2\\1&-1&-1&-2\\-2&0&4&4\end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -2 \\ -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -4 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \\ -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

9. Решить матричное уравнение $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -3 \\ -5 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & -4 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -5 & 5 \\ -4 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -5 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & -3 \\ 1 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 & 4 \\ -4 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Решить матричное уравнение $\mathsf{AX} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -3 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 \\ -6 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 & 2 \\ -6 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & -4 \\ 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 4 \\ 1 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -2 \\ 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

11. Решить матричное уравнение $\mathsf{XA} = \mathsf{B}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \\ -3 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 3 \\ -2 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

12. Решить матричное уравнение $\mathsf{AXB} = \mathsf{C}$.

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 8 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

13. Решить систему уравнений методом Г.Крамера

a). $\begin{cases} 3x + 2y = -4, \\ 1x - y = -3. \end{cases}$ b). $\begin{cases} -x + y = -4, \\ 4x + 3y = 2. \end{cases}$ c). $\begin{cases} -3x - y = -7, \\ 2x - 2y = 2. \end{cases}$

d). $\begin{cases} 2x + 2y = -2, \\ 3x - y = -7. \end{cases}$ e). $\begin{cases} 4x + 2y = -2, \\ x + 4y = 3. \end{cases}$ f). $\begin{cases} -x + 4y = -5, \\ 4x + y = 3. \end{cases}$

g). $\begin{cases} 2x - 2y = 6, \\ 3x + 4y = -5. \end{cases}$ h). $\begin{cases} 4x + y = -7, \\ -x + 3y = 5. \end{cases}$ i). $\begin{cases} 3x - 3y = -6, \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$

j). $\begin{cases} -2x + 4y = -2, \\ x + 3y = 6. \end{cases}$ k). $\begin{cases} -2x + 4y = -4, \\ 4x - 3y = -2. \end{cases}$ l). $\begin{cases} -2x - 3y = 7, \\ -3x + 2y = 4. \end{cases}$

m). $\begin{cases} 3x + 4y = 6, \\ 4x + 2y = -2. \end{cases}$ n). $\begin{cases} -3x - 3y = 6, \\ -x + 4y = 7. \end{cases}$ o). $\begin{cases} -2x + 3y = 7, \\ -3x + 2y = 3. \end{cases}$

p). $\begin{cases} -2x + y = 5, \\ -3x - 2y = -3. \end{cases}$ q). $\begin{cases} 3x - y = -3, \\ -2x + 4y = -8. \end{cases}$ r). $\begin{cases} 3x - y = 7, \\ -2x - 3y = -1. \end{cases}$

s). $\begin{cases} x - 3y = -5, \\ 3x - 2y = -1. \end{cases}$ t). $\begin{cases} 4x - y = -3, \\ -x + 4y = -3. \end{cases}$ u). $\begin{cases} -x + 4y = 1, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

v). $\begin{cases} -2x + y = -4, \\ -x + 3y = 3. \end{cases}$ w). $\begin{cases} 4x + y = 9, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$ x). $\begin{cases} -3x + 4y = 7, \\ -3x - y = 2. \end{cases}$

14. Решить систему уравнений методом Г.Крамера

a). $\begin{cases} (-2+i)x + (1+3i)y = -3-3i, \\ (2+2i)x + (2+i)y = -2i. \end{cases}$ b). $\begin{cases} (-1-i)x + (1-i)y = 1-5i, \\ (1+i)x + (-1+3i)y = -3+7i. \end{cases}$

c). $\begin{cases} (-2+3i)x + (3+2i)y = 2-3i, \\ (3+2i)x + (1-i)y = -4. \end{cases}$ d). $\begin{cases} (3-2i)x + (1+i)y = -4+i, \\ (-1-i)x - (1+i)y = 1-3i. \end{cases}$

e). $\begin{cases} (-1+2i)x + (3+3i)y = 7+5i, \\ (1+2i)x + (1+2i)y = 7+9i. \end{cases}$ f). $\begin{cases} (-1+2i)x + (2+2i)y = 3i, \\ (-2+i)x + (3+3i)y = 1. \end{cases}$

g). $\begin{cases} (-1+i)x - (2+2i)y = -2+6i, \\ (1+3i)x + (1+3i)y = -3+i. \end{cases}$ h). $\begin{cases} (-2+2i)x + (-1+2i)y = 2-6i, \\ (-2+i)x + (-2+3i)y = 1-9i. \end{cases}$

i). $\begin{cases} (-1+i)x + (3+2i)y = 9-7i, \\ (-1+2i)x + 2iy = -3i. \end{cases}$ j). $\begin{cases} (-1+3i)x + (3+3i)y = 5-5i, \\ (1+2i)x + (1+i)y = 4-2i. \end{cases}$

k). $\begin{cases} (3-2i)x + (1+3i)y = 4-i, \\ (1+i)x + 3iy = 2-2i. \end{cases}$ l). $\begin{cases} (3-i)x + (1-i)y = -4+4i, \\ (3+3i)x + (-1+i)y = -4. \end{cases}$

m). $\begin{cases} (1+i)x + (3+2i)y = 3+2i, \\ (-1-2i)x + (-2+3i)y = 7+9i. \end{cases}$ n). $\begin{cases} (1+i)x + (2+3i)y = 8+2i, \\ (-2+i)x - 2iy = -5+2i. \end{cases}$

o). $\begin{cases} (1-i)x + (2+i)y = -1+5i, \\ -ix + (2+2i)y = -1+i. \end{cases}$ p). $\begin{cases} (-1-2i)x + (1+i)y = 2+7i, \\ (2+2i)x - 3iy = 3-5i. \end{cases}$

q). $\begin{cases} (-1+i)x + (2+2i)y = 1+i, \\ (1+i)x + (3+2i)y = 6+2i. \end{cases}$ r). $\begin{cases} (1-i)x - (2+i)y = 1+2i, \\ (1-2i)x + (2+2i)y = 5-3i. \end{cases}$

s). $\begin{cases} (1-2i)x + (1-i)y = 6i, \\ (3+2i)x - (1+i)y = -2+2i. \end{cases}$ t). $\begin{cases} (-1-i)x - (2+i)y = 6+2i, \\ (2+i)x - (2-i)y = -4+5i. \end{cases}$

u). $\begin{cases} (3+i)x - (2+2i)y = -6-2i, \\ (1+3i)x + (3-i)y = -3+i. \end{cases}$ v). $\begin{cases} (-2-2i)x - (1-3i)y = -3-i, \\ (1+i)x - (2+i)y = 2+3i. \end{cases}$

w). $\begin{cases}(-1+i)x-iy=3-3i,\\(1+3i)x+(1-2i)y=-3+i.\end{cases}$ x). $\begin{cases}(-1-2i)x+iy=2-4i,\\(2+i)x+(1+3i)y=3-i.\end{cases}$

15. Для системы векторов $\mathbf{a}_1=(2,2,-2)$; $\mathbf{a}_2=(-2,-1,-2)$; $\mathbf{a}_3=(-3,-1,3)$ вычислить следующие линейные комбинации.

a). $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$; b). $\mathbf{b}_3=3\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_1$; c). $\mathbf{b}_4=-2\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3$; d). $\mathbf{b}_5=-2\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$.

16. Для системы векторов $\mathbf{a}_1=(1,-1,-2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-2,3)$, $\mathbf{a}_3=(-3,1,-3)$; вычислить следующие линейные комбинации.

a). $\mathbf{b}_1=-2\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3$; b). $\mathbf{b}_2=3\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$; c). $\mathbf{b}_3=\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3$; d). $\mathbf{b}_4=3\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$.

17. Для системы векторов $\mathbf{a}_1=(3,1,2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-2,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-2,2,3)$ вычислить следующие линейные комбинации.

a). $\mathbf{b}_1=-\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3$; b). $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$; c). $\mathbf{b}_3=-2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3$; d). $\mathbf{b}_4=-3\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3$.

18. Для системы векторов $\mathbf{a}_1=(2,2,3)$, $\mathbf{a}_2=(-2,3,-2)$, $\mathbf{a}_3=(2,-3,-2)$ вычислить следующие линейные комбинации.

a). $\mathbf{b}_1=-\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3$; b). $\mathbf{b}_2=-3\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$; c). $\mathbf{b}_3=2\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3$; d). $\mathbf{b}_4=-2\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$.

19. Для системы векторов $\mathbf{a}_1=(-3,3,1)$, $\mathbf{a}_2=(-2,2,1)$, $\mathbf{a}_3=(0,0,3)$ вычислить следующие линейные комбинации.

a). $\mathbf{b}_1=-2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3$; b). $\mathbf{b}_2=-3\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$; c). $\mathbf{b}_3=-3\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3$; d). $\mathbf{b}_4=-3\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$.

20. Для системы векторов $\mathbf{a}_1=(3,2,2)$, $\mathbf{a}_2=(3,-3,3)$, $\mathbf{a}_3=(3,-2,-2)$ вычислить следующие линейные комбинации.

a). $\mathbf{b}_1=-2\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_3$; b). $\mathbf{b}_2=-2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3$; c). $\mathbf{b}_3=3\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$; d). $\mathbf{b}_4=-\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2-3\mathbf{a}_3$.

21. Найти вектор $\mathbf{x}$ из векторного уравнения $\alpha(\mathbf{a}+\beta\mathbf{x})+\gamma(\mathbf{b}+\delta\mathbf{x})=\mathbf{c}-\mathbf{x}$.

a). $\mathbf{a}=(-3,1,3)$, $\mathbf{b}=(1,2,0)$, $\mathbf{c}=(2,-3,0)$, $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=2$, $\delta=2$.

b). $\mathbf{a}=(-1,2,-1)$, $\mathbf{b}=(0,3,-2)$, $\mathbf{c}=(3,-3,1)$, $\alpha=-2$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$, $\delta=-1$.

c). $\mathbf{a}=(-2,0,-2)$, $\mathbf{b}=(-3,3,2)$, $\mathbf{c}=(-2,-2,-2)$, $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\delta=2$.

d). $\mathbf{a}=(-2,3,3)$, $\mathbf{b}=(-1,0,-3)$, $\mathbf{c}=(-2,-1,0)$, $\alpha=-1$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$, $\delta=2$.

e). $\mathbf{a}=(1,1,1)$, $\mathbf{b}=(1,-1,2)$, $\mathbf{c}=(-2,-2,1)$, $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\delta=1$.

f). $\mathbf{a}=(1,-1,0)$, $\mathbf{b}=(2,-3,-2)$, $\mathbf{c}=(-1,3,2)$, $\alpha=2$, $\beta=2$, $\gamma=1$, $\delta=2$.

g). $\mathbf{a}=(-1,0,2)$, $\mathbf{b}=(-3,3,-1)$, $\mathbf{c}=(0,3,0)$, $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=-1$,

$\delta = 2$.

h). $\mathbf{a} = (3, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (-3, -2, -3)$, $\mathbf{c} = (3, -2, -1)$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$.

i). $\mathbf{a} = (1, -2, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -3)$, $\mathbf{c} = (0, -1, -2)$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$.

j). $\mathbf{a} = (-2, -2, -3)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1)$, $\mathbf{c} = (-2, 0, 0)$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, $\delta = 1$.

k). $\mathbf{a} = (0, -3, -1)$, $\mathbf{b} = (0, -3, -3)$, $\mathbf{c} = (3, -2, 2)$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$, $\delta = -2$.

l). $\mathbf{a} = (-1, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (-2, 3, 1)$, $\alpha = -2$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$, $\delta = -1$.

m). $\mathbf{a} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (0, -2, -3)$, $\mathbf{c} = (-2, 2, 3)$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$.

n). $\mathbf{a} = (2, -1, -3)$, $\mathbf{b} = (3, -2, 0)$, $\mathbf{c} = (3, 3, -1)$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$, $\delta = -2$.

o). $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, -1, -2)$, $\mathbf{c} = (3, 2, 2)$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$, $\delta = -2$.

p). $\mathbf{a} = (-1, 3, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 3, -2)$, $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$.

q). $\mathbf{a} = (3, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (0, 3, 0)$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$.

r). $\mathbf{a} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, -1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 3)$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$, $\delta = -2$.

s). $\mathbf{a} = (1, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (-1, -2, -3)$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$, $\delta = 1$.

t). $\mathbf{a} = (0, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (-1, 3, 1)$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, $\delta = -2$.

u). $\mathbf{a} = (3, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, -3, -1)$, $\mathbf{c} = (-2, 3, -1)$, $\alpha = 2$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$.

v). $\mathbf{a} = (-2, -2, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -3, -1)$, $\mathbf{c} = (0, 3, -3)$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$, $\delta = 1$.

w). $\mathbf{a} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, -3, -1)$, $\mathbf{c} = (3, -1, 0)$, $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, $\delta = -1$.

x). $\mathbf{a} = (0, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 2)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 3)$, $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$, $\delta = -2$.

22. Будет ли каждый из векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$?

a). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -4, -4)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, 7, 7)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 2, 2)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (-2, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 6, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (2, -4, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, 2, -8)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -5, -4)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 0, -1)$,

$\mathbf{b}_2 = (6, -2, 5)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 4, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, -3, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (-4, 0, 1)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -1, -3)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, -1, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (9, 6, 2)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 4, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (7, -4, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -5, 4)$.

g). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (5, -9, -3)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -9, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (4, -9, -6)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 9, -4)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 1, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (5, -4, 1)$.

i). $\mathbf{a}_1 = (-3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (0, -8, 5)$, $\mathbf{b}_1 = (3, -7, 7)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 0, -7)$.

j). $\mathbf{a}_1 = (-3, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (6, -4, 5)$, $\mathbf{b}_1 = (3, -5, 7)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 7, 2)$.

k). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (8, 4, 6)$, $\mathbf{b}_1 = (2, -3, -4)$, $\mathbf{b}_2 = (7, 1, 4)$.

l). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 6, 8)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, 7, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 3, -6)$.

m). $\mathbf{a}_1 = (-3, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-5, -4, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (-6, 5, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, -1)$.

n). $\mathbf{a}_1 = (3, -2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 7, -9)$, $\mathbf{b}_1 = (5, 2, 6)$, $\mathbf{b}_2 = (-6, 1, 3)$.

o). $\mathbf{a}_1 = (-1, -3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 9, 8)$, $\mathbf{b}_1 = (5, 4, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 4, 3)$.

p). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -6, -7)$, $\mathbf{b}_1 = (1, -4, 5)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 4, 4)$.

q). $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, 7, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (-9, 8, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-6, -3, 4)$.

r). $\mathbf{a}_1 = (0, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -3, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (3, -5, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (4, -1, 2)$.

s). $\mathbf{a}_1 = (-3, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 3, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-9, -3, 5)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 3, 7)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, -9, -1)$.

t). $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 1, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (-8, 1, -4)$, $\mathbf{b}_2 = (5, -3, 7)$.

u). $\mathbf{a}_1 = (-3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 1, -3)$, $\mathbf{b}_1 = (6, -5, 5)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -2, 6)$.

v). $\mathbf{a}_1 = (3, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (8, 5, 6)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 7, 4)$.

w). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 3, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (3, 7, 8)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 9, 2)$.

x). $\mathbf{a}_1 = (0,3,1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (3,-5,-3)$, $\mathbf{b}_1 = (6,5,-1)$, $\mathbf{b}_2 = (3,-1,2)$.

23. Найти все значения λ, при которых вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

a). $\mathbf{a}_1 = (3,-1,4)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,0,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (\lambda,-1,-3)$, $\mathbf{b} = (1,-1,-2)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (2,-4,4)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-3,1)$, $\mathbf{a}_3 = (\lambda,-4,3)$, $\mathbf{b} = (0,-4,1)$.
c). $\mathbf{a}_1 = (\lambda,-1,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,0,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1,2,-1)$, $\mathbf{b} = (-1,-1,-1)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (\lambda,-3,-4)$, $\mathbf{a}_2 = (4,2,-3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-1,-1)$, $\mathbf{b} = (-2,2,4)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (4,-3,-4)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-1,\lambda)$, $\mathbf{b} = (-2,4,7)$.
f). $\mathbf{a}_1 = (0,\lambda,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,3,3)$, $\mathbf{a}_3 = (3,1,-3)$, $\mathbf{b} = (-2,-3,-4)$.
g). $\mathbf{a}_1 = (2,\lambda,1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,0,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,4,2)$, $\mathbf{b} = (1,0,0)$.
h). $\mathbf{a}_1 = (-2,-1,-4)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,\lambda,3)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,1,-3)$, $\mathbf{b} = (4,-2,1)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (-1,-4,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-2,\lambda)$, $\mathbf{a}_3 = (4,3,4)$, $\mathbf{b} = (2,4,4)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (2,1,-3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,3,\lambda)$, $\mathbf{a}_3 = (1,2,-2)$, $\mathbf{b} = (4,0,1)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (\lambda,-3,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,3,3)$, $\mathbf{a}_3 = (1,-4,-4)$, $\mathbf{b} = (-3,-1,-1)$.
l). $\mathbf{a}_1 = (-4,3,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (4,1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-3,\lambda)$, $\mathbf{b} = (2,0,-3)$.
m). $\mathbf{a}_1 = (1,4,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,0,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-1,\lambda)$, $\mathbf{b} = (3,4,1)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (\lambda,4,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,-2,-3)$, $\mathbf{a}_3 = (2,3,2)$, $\mathbf{b} = (-3,-4,4)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (\lambda,-3,1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (3,-2,4)$, $\mathbf{b} = (3,2,-3)$.
p). $\mathbf{a}_1 = (0,3,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,2,\lambda)$, $\mathbf{a}_3 = (3,3,0)$, $\mathbf{b} = (2,-1,2)$.
q). $\mathbf{a}_1 = (-2,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (\lambda,-2,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,1,2)$, $\mathbf{b} = (-4,5,2)$.
r). $\mathbf{a}_1 = (-3,-3,-3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,3,\lambda)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-2,4)$, $\mathbf{b} = (-4,-1,-1)$.
s). $\mathbf{a}_1 = (1,-4,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-3,\lambda)$, $\mathbf{a}_3 = (0,-2,-2)$, $\mathbf{b} = (-4,0,-3)$.
t). $\mathbf{a}_1 = (2,2,-4)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,1,\lambda)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,0,-2)$, $\mathbf{b} = (2,1,-2)$.
u). $\mathbf{a}_1 = (2,2,\lambda)$, $\mathbf{a}_2 = (2,-4,1)$, $\mathbf{a}_3 = (4,4,1)$, $\mathbf{b} = (-4,3,-4)$.
v). $\mathbf{a}_1 = (-2,-4,\lambda)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-4,1)$, $\mathbf{a}_3 = (0,-3,1)$, $\mathbf{b} = (4,0,2)$.
w). $\mathbf{a}_1 = (-1,1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (\lambda,-4,2)$, $\mathbf{a}_3 = (1,2,-4)$, $\mathbf{b} = (2,4,2)$.
x). $\mathbf{a}_1 = (-2,-3,4)$, $\mathbf{a}_2 = (\lambda,2,-4)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,1,-1)$, $\mathbf{b} = (2,4,-3)$.

24. Проверить, будут ли следующие системы векторов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

a). $\mathbf{a}_1 = (-3,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,2,-1)^\tau$.
b). $\mathbf{a1} = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a2} = (-1,0,-3)^\tau$, $\mathbf{a3} = (5,-2,8)^\tau$.
c). $\mathbf{a}_1 = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,-3,-2)^\tau$.
d). $\mathbf{a1} = (0,-1,2)^\tau$, $\mathbf{a2} = (3,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a3} = (-3,-3,5)^\tau$.
e). $\mathbf{a}_1 = (2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,-2,1)^\tau$.
f). $\mathbf{a1} = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a2} = (1,3,2)^\tau$, $\mathbf{a3} = (-3,5,0)^\tau$.
g). $\mathbf{a}_1 = (2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,-2,1)^\tau$.
h). $\mathbf{a1} = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{a2} = (1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{a3} = (2,1,-4)^\tau$.
i). $\mathbf{a}_1 = (-2,-3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,1,1)^\tau$.
j). $\mathbf{a1} = (-3,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a2} = (-1,3,1)^\tau$, $\mathbf{a3} = (-5,4,5)^\tau$.

k). $\mathbf{a}_1 = (3,3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,-3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,-1,-2)^\tau$.
l). $\mathbf{a}1 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (-2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (-5,-2,-7)^\tau$.
m). $\mathbf{a}_1 = (-1,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-1,2)^\tau$.
n). $\mathbf{a}1 = (1,0,1)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (1,2,3)^\tau$.
o). $\mathbf{a}_1 = (-3,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,2,3)^\tau$.
p). $\mathbf{a}1 = (2,1,0)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (1,0,3)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (-1,-2,9)^\tau$.
q). $\mathbf{a}_1 = (0,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,1,-2)^\tau$.
r). $\mathbf{a}1 = (-1,3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (1,-5,3)^\tau$.
s). $\mathbf{a}_1 = (3,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,-3,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,1,-1)^\tau$.
t). $\mathbf{a}1 = (-1,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (1,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (2,4,3)^\tau$.
u). $\mathbf{a}_1 = (2,-3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,3)^\tau$.
v). $\mathbf{a}1 = (-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (2,-3,0)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (-2,3,2)^\tau$.
w). $\mathbf{a}_1 = (3,3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-3,-2)^\tau$.
x). $\mathbf{a}1 = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a}2 = (-1,2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}3 = (2,-1,0)^\tau$.

25. Проверить, будут ли следующие системы многочленов линейно независимыми в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 - 2$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 - 2x + 1$, $\mathbf{f}_3(x) = 4x^2 - 2x - 1$.
b). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + 3x - 2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4x^2 - 4x - 3$.
c). $\mathbf{f}_1(x) = 4x^2 - 3x - 3$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2 + x - 3$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + 9x - 3$.
d). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 - x$, $\mathbf{f}_2(x) = x + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + x - 1$.
e). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2 + 4x - 1$, $\mathbf{f}_3(x) = 5x^2 + 2x - 5$.
f). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 + 2x - 4$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 - 2x - 1$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - 2$.
g). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 - 3x + 4$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2 - x + 1$, $\mathbf{f}_3(x) = 5x^2 + 5x - 8$.
h). $\mathbf{f}_1(x) = 4x^2 - x$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 + 2x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
i). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 - x - 4$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 + 3x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - 7x - 4$.
j). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 - 2x - 3$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2 + x + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4x^2 + 4x - 1$.
k). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 + x + 2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2 - x + 3$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + 5x$.
l). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 - 2x - 4$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2 + 4x + 4$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + 4x + 3$.
m). $\mathbf{f}_1(x) = 4x^2 - x - 3$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 + 1$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - x - 6$.
n). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2 + x$, $\mathbf{f}_2(x) = x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + x - 3$.
o). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 - 4x - 3$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2 - 3x$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 - 6x - 9$.
p). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + 2x - 2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2 + 2x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + x + 3$.
q). $\mathbf{f}_1(x) = x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 - 4x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - 3x + 1$.
r). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 - 3x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2 - x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - 3x$.
s). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = -x - 3$, $\mathbf{f}_3(x) = 6x^2 + 4x - 9$.
t). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 - 4x + 2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2 - x - 2$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 - 3x + 3$.
u). $\mathbf{f}_1(x) = 4x^2 - 3x - 3$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x^2 - 2x - 3$, $\mathbf{f}_3(x) = 6x^2 - 5x - 3$.
v). $\mathbf{f}_1(x) = 4x^2 + 3x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2 - 1$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + x + 3$.
w). $\mathbf{f}_1(x) = 4x - 3$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 + x - 3$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + 5x - 6$.

x). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 - 2x + 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2 - 3$, $\mathbf{f}_3(x) = 3x^2 - x + 2$.

26. Проверить, будут ли следующие системы матриц линейно независимыми в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Установить линейную независимость следующих систем функций в линейном пространстве всех непрерывных функций на $(0, \infty)$.

a). $\sin x$, $\cos x$, $\cos 2x$.
b). $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$.
c). $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$, $\frac{1}{x+3}$.
d). $\sin x$, $\cos x$, e^x.
e). x, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$.
f). $|\sin x|$, $|\cos x|$, $|\sin 2x|$.
g). $|\ln x|$, $|\sin x|$, $|\cos 2x|$.
h). $\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{1}{(x+2)^2}$, $\frac{1}{(x+3)^2}$.
i). 1, e^x, 3^{2x}.
j). e^x, x, e^{2x}.
k). x, x^2, 2^x.
l). e^x, $\ln x$, e^{2x}.
m). 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$.
n). $\sqrt[3]{(x-1)^2}$, $\sqrt[3]{(x-2)^2}$, $\sqrt[3]{(x-3)^2}$.
o). x, $\ln x$, $\sin x$.
p). x, e^x, $\cos x$.
q). x, $\sin x$, $\cos x$.
r). x, $\sqrt{x}$, $|\sin x|$.
s). $|\sin x|$, $\sin 2x$, $\sin x$.
t). $\sin x$, $\cos x$, $\sin\sqrt{x}$.
u). $\frac{x-1}{x}$, $|\sin x|$, $\cos x$.
v). $\frac{x+1}{x^3}$, $\frac{x^3}{x+1}$, x.
w). x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$.
x). $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, 1.

28. Проверить, будут ли следующие системы функций линейно независимыми в линейном пространстве всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, при $0 < a < b < \infty$.

a). e^x, $e^{2x}, \ldots, e^{nx}$.
b). $\cos x$, $\cos 2x, \ldots, \cos nx$.
c). $\sin x$, $\sin 2x, \ldots, \sin nx$.
d). $\log x$, $\log 2x, \ldots, \log nx$.
e). e^{x+1}, $e^{x+2}, \ldots, e^{x+n}$.
f). $\cos(x+1)$, $\cos(x+2), \ldots, \cos(x+n)$.
g). $\sin(x+1)$, $\sin(x+2), \ldots, \sin(x+n)$.
h). 2^{x^2+1}, $2^{x^2+2}, \ldots, 2^{x^2+n}$.
i). $\cos x$, $\cos^2 x, \ldots, \cos^n x$.
j). $\sin x$, $\sin^2 x, \ldots, \sin^n x$.
k). $\log x$, $\log^2 x, \ldots, \log^n x$.
l). $(x+1)^2$, $(x+2)^2, \ldots, (x+n)^2$.
m). $(x-1)^3$, $(x-2)^3, \ldots, (x-n)^3$.
n). $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}, \ldots, \sqrt[n]{x}$.
o). $\log(x+1)$, $\log(x+1)^2, \ldots, \log(x+1)^n$.

29. Проверить, будут ли следующие системы векторов полными в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

a). $\mathbf{a}_1 = (-3, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3, -4, 5)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (0, -5, 4)^\tau$.
b). $\mathbf{a}_1 = (-4, 0, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 1, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, 3, 3)^\tau$.
c). $\mathbf{a}_1 = (2, -1, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, 5, 9)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 3, 7)^\tau$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-3, -2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, -4, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, 3, 2)^\tau$.
e). $\mathbf{a}_1 = (0, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, -6, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1, -4, -1)^\tau$.
f). $\mathbf{a}_1 = (-4, 2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -3, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3, 2, -1)^\tau$.
g). $\mathbf{a}_1 = (2, -3, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-6, 6, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (5, -9, -8)^\tau$.
h). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -2, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-3, 4, -1)^\tau$.
i). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -3, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (5, 3, -8)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1, -6, -2)^\tau$.
j). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3, -3, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3, -3, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 0, 3)^\tau$.
k). $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, 0, -3)^\tau$.
l). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (4, -1, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, -2, 3)^\tau$.
m). $\mathbf{a}_1 = (0, 3, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -7, -4)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-6, 6, 6)^\tau$.
n). $\mathbf{a}_1 = (3, 0, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -4, 4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 1, 1)^\tau$.
o). $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3, 3, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -4, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (6, 9, -1)^\tau$.
p). $\mathbf{a}_1 = (-1, -3, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -2, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1, 1, -4)^\tau$.
q). $\mathbf{a}_1 = (-3, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (9, -1, -4)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-3, 2, 3)^\tau$.
r). $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -4, -4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-4, -4, -3)^\tau$.
s). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (9, -9, 3)^\tau$.
t). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 2, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (0, -1, -3)^\tau$.
u). $\mathbf{a}_1 = (3, 2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (6, 8, -7)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-8, -8, 6)^\tau$.
v). $\mathbf{a}_1 = (4, 1, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 3, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3, -1, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (0, -3, 4)^\tau$.
w). $\mathbf{a}_1 = (3, -2, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -3, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 5, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-9, -7, 5)^\tau$.
x). $\mathbf{a}_1 = (-3, 3, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -1, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, 4, -1)^\tau$.
y). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 2, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, -4, -6)^\tau$.

30. В следующих примерах проверить является ли система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.
a). $\mathbf{a}_1 = (3, -3, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 6, -1)^\tau$.
b). $\mathbf{a}_1 = (3, -4, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -3, 2)^\tau$.
c). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0, -3, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3, -1, 4)^\tau$.
d). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, -4, 3)^\tau$.
e). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2, 6, 3)^\tau$.
f). $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-8, -5, 2)^\tau$.

g). $\mathbf{a}_1 = (-3,-4,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-4,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4,-1,-3)^\tau$.
h). $\mathbf{a}_1 = (-1,3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,0,2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,6,6)^\tau$.
i). $\mathbf{a}_1 = (1,-4,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3,2,2)^\tau$.
j). $\mathbf{a}_1 = (-3,2,-4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,3,4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3,2,-1)^\tau$.
k). $\mathbf{a}_1 = (0,3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,4)^\tau$.
l). $\mathbf{a}_1 = (3,-2,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,-3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,5,9)^\tau$.
m). $\mathbf{a}_1 = (-2,2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-5,5,-6)^\tau$.
n). $\mathbf{a}_1 = (4,-1,4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,4,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,-3)^\tau$.
o). $\mathbf{a}_1 = (1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4,-3,1)^\tau$.
p). $\mathbf{a}_1 = (-4,1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-4,4,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-3,2)^\tau$.
q). $\mathbf{a}_1 = (-3,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,0,4)^\tau$.
r). $\mathbf{a}_1 = (4,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-1,4)^\tau$.
s). $\mathbf{a}_1 = (0,-4,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,0,2)^\tau$.
t). $\mathbf{a}_1 = (2,-3,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,-1,1)^\tau$.
u). $\mathbf{a}_1 = (-1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,-3,-2)^\tau$.
v). $\mathbf{a}_1 = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-5,4,4)^\tau$.
w). $\mathbf{a}_1 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-3,-4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (4,2,-3)^\tau$.
x). $\mathbf{a}_1 = (3,1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (5,-1,4)^\tau$.

31. В следующих примерах проверить является ли система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$.

a). $\mathbf{a}_1 = (-1,3,1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-4,8,4,2)^\tau$.
b). $\mathbf{a}_1 = (-1,-3,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-2,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3,-3,1,-3)^\tau$.
c). $\mathbf{a}_1 = (-3,2,2,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,2,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,2,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-5,-2,8,5)^\tau$.
d). $\mathbf{a}_1 = (1,1,3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,3,-3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1,2,3,1)^\tau$.
e). $\mathbf{a}_1 = (3,2,-3,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,2,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,3,-2,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-3,-2,2,3)^\tau$.
f). $\mathbf{a}_1 = (-3,0,2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-2,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (2,1,3,0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-3,3,1,-2)^\tau$.
g). $\mathbf{a}_1 = (0,1,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-3,0,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,1,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (8,-2,2,5)^\tau$.
h). $\mathbf{a}_1 = (2,-2,-3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,2,0,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-6,-1,-9,0)^\tau$.
i). $\mathbf{a}_1 = (0,-3,-2,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,2,1,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,-1,-3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3,-5,1,-1)^\tau$.
j). $\mathbf{a}_1 = (-1,0,-3,3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,2,3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (3,3,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,3,0,-2)^\tau$.

k). $\mathbf{a}_1 = (1,-1,3,0)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3,3,2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1,3,3,1)^\tau$.

l). $\mathbf{a}_1 = (-1,3,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,3,-3,1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,-2,3,0)^\tau$.

m). $\mathbf{a}_1 = (-3,-1,3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,3,2,0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,2,0,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (4,0,4,-9)^\tau$.

n). $\mathbf{a}_1 = (2,2,-3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,-2,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2,-2,-1,-3)^\tau$.

o). $\mathbf{a}_1 = (0,3,0,2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,0,-2,3)^\tau$.

p). $\mathbf{a}_1 = (0,3,1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1,3,0,3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3,-1,-2,-3)^\tau$.

q). $\mathbf{a}_1 = (-1,-3,-2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,0,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (4,5,6,3)^\tau$.

r). $\mathbf{a}_1 = (3,2,3,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,3,3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3,1,-2,0)^\tau$.

s). $\mathbf{a}_1 = (0,-1,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1,1,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (3,1,-1,3)^\tau$.

t). $\mathbf{a}_1 = (3,-3,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0,-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,1,3,2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-7,9,9,-6)^\tau$.

u). $\mathbf{a}_1 = (-3,2,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-3,2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-2,2,3,0)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,-1,2,-3)^\tau$.

v). $\mathbf{a}_1 = (1,-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0,-3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-1,0,1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1,-1,2,-2)^\tau$.

w). $\mathbf{a}_1 = (-1,-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2,-1,1,2)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0,1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-2,0,-3,3)^\tau$.

x). $\mathbf{a}_1 = (0,2,2,1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-1,3,3,-2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (1,-1,-1,1)^\tau$.

32. В следующих примерах проверить является ли система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = -1-2x+3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2+3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 5-2x-6x^2$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = -1-2x-2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -3+4x-x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3-4x-2x^2$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = 1-3x$, $\mathbf{f}_2(x) = 1+2x+x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3-3x+2x^2$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = 2+x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2+x+3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2-2x-3x^2$.

e). $\mathbf{f}_1(x) = 4+2x+x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1+2x$, $\mathbf{f}_3(x) = 4x+x^2$.

f). $\mathbf{f}_1(x) = 1-2x-x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1-x-3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1+3x-x^2$.

g). $\mathbf{f}_1(x) = 1+2x+x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2-2x-x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4-x-3x^2$.

h). $\mathbf{f}_1(x) = -1-2x$, $\mathbf{f}_2(x) = -1-x+x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3+4x-2x^2$.

i). $\mathbf{f}_1(x) = -1-3x+x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -3-2x$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x-3x^2$.

j). $\mathbf{f}_1(x) = 1+x-4x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4+x+4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3-4x-4x^2$.

k). $\mathbf{f}_1(x) = -3 - 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + 2x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -5 + 2x + 7x^2$.
l). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - 3x - 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 - 2x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + 4x + 5x^2$.
m). $\mathbf{f}_1(x) = -1 - 2x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -4 - 4x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + 2x^2$.
n). $\mathbf{f}_1(x) = -2 + x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 + 2x + x^2$.
o). $\mathbf{f}_1(x) = 2 + x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + 2x^2$.
p). $\mathbf{f}_1(x) = -2 + 3x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 + x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -7 + 5x + x^2$.
q). $\mathbf{f}_1(x) = -1x - 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 - x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 - x^2$.
r). $\mathbf{f}_1(x) = -3 + 2x + 4x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 - 4x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 + 2x + x^2$.
s). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + 2x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 - x$.
t). $\mathbf{f}_1(x) = -3 - x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 - 3x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -4 + 2x - x^2$.
u). $\mathbf{f}_1(x) = 3 - x - 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -3x + 4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 - 4x^2$.
v). $\mathbf{f}_1(x) = -2 + 3x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 - 3x$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + 3x + 2x^2$.
w). $\mathbf{f}_1(x) = -3 + x + 4x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 - x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 - 2x - 4x^2$.
x). $\mathbf{f}_1(x) = -1 + x - 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 + 4x + 3x^2$.

33. В следующих примерах проверить является ли система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 базисом в линейном пространстве $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}0&2\\1&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-3&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}3&3\\2&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}-2&2\\4&-1\end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}6&7\\3&2\end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}3&0\\2&-1\end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}0&-2\\3&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}3&3\\-5&-4\end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}3&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}2&-3\\0&2\end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}-1&2\\0&3\end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}3&3\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}-2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}-2&0\\1&2\end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}4&1\\-2&7\end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}2&-1\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}1&-2\\3&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}2&3\\3&-1\end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&3\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}-2&3\\1&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}-6&5\\4&1\end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}-2&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}-2&3\\2&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}3&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}3&0\\2&2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3=\begin{pmatrix}3&1\\3&-1\end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-3\end{pmatrix}$.

34. В следующих примерах проверить, что система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\mathbf{y}_e$ найти вектор $\mathbf{y}$.

a). $\mathbf{e}_1=(-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(4,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(-4,1,2)^\tau$, $\mathbf{x}=(-5,5,7)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(1,2,2)^\tau$.

b). $\mathbf{e}_1=(2,2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(2,4,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(3,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{x}=(5,-8,-5)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(-3,2,-2)^\tau$.

c). $\mathbf{e}_1=(1,-4,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(-1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(-1,-2,4)^\tau$, $\mathbf{x}=(1,1,-8)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(0,-2,-2)^\tau$.

d). $\mathbf{e}_1=(3,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(-4,3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(-4,1,-2)^\tau$, $\mathbf{x}=(1,-3,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(3,-2,4)^\tau$.

e). $\mathbf{e}_1=(3,3,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(1,0,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(-4,-1,3)^\tau$, $\mathbf{x}=(-8,-8,-6)^\tau$,

$\mathbf{y}_e = (4,3,2)^\tau$.

f). $\mathbf{e}_1 = (4,1,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-4,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,-2)^\tau$, $\mathbf{x} = (8,-1,-4)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-4,-2,4)^\tau$.

g). $\mathbf{e}_1 = (-4,3,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{x} = (-4,7,-9)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,2,2)^\tau$.

h). $\mathbf{e}_1 = (4,4,4)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,0,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,3)^\tau$, $\mathbf{x} = (2,-3,-6)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (0,-1,-1)^\tau$.

i). $\mathbf{e}_1 = (1,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,-4,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-3,3,3)^\tau$, $\mathbf{x} = (-7,5,11)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,2,1)^\tau$.

j). $\mathbf{e}_1 = (-3,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{x} = (-1,-8,4)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,4,0)^\tau$.

k). $\mathbf{e}_1 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,-2,0)^\tau$, $\mathbf{x} = (0,-6,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,1,-2)^\tau$.

l). $\mathbf{e}_1 = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-3,2,1)^\tau$, $\mathbf{x} = (2,-5,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,1,-2)^\tau$.

m). $\mathbf{e}_1 = (-2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-3,3,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,3,-2)^\tau$, $\mathbf{x} = (1,7,-7)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,1,-2)^\tau$.

n). $\mathbf{e}_1 = (2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,3)^\tau$, $\mathbf{x} = (2,4,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,2,2)^\tau$.

o). $\mathbf{e}_1 = (1,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-4,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{x} = (7,-1,-7)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,2,2)^\tau$.

p). $\mathbf{e}_1 = (2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-4,-4,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,-2,3)^\tau$, $\mathbf{x} = (6,3,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,0,1)^\tau$.

q). $\mathbf{e}_1 = (0,2,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-4,-4,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,2,-3)^\tau$, $\mathbf{x} = (4,6,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (4,-1,-3)^\tau$.

r). $\mathbf{e}_1 = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{x} = (-2,0,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,-3,-2)^\tau$.

s). $\mathbf{e}_1 = (-1,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,2,4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{x} = (-8,2,4)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,0,-2)^\tau$.

t). $\mathbf{e}_1 = (-1,-4,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,2)^\tau$, $\mathbf{x} = (-6,0,-4)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,1,1)^\tau$.

u). $\mathbf{e}_1 = (4,1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,3,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{x} = (-8,3,-7)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (0,2,-2)^\tau$.

v). $\mathbf{e}_1 = (-3,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-3,3,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,2)^\tau$, $\mathbf{x} = (5,2,8)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,3,0)^\tau$.

w). $\mathbf{e}_1 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-3,0,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{x} = (-1,7,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-3,-2)^\tau$.

x). $\mathbf{e}_1 = (1,0,4)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,4,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,3)^\tau$, $\mathbf{x} = (8,-8,10)^\tau$,

$\mathbf{y}_e = (-1, 3, -2)^\tau$.

35. В следующих примерах проверить, что система матриц A_1, A_2, A_3, A_4 является базисом в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ и найти в этом базисе координаты матрицы Y. По известному координатному вектору X_A найти матрицу X.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (2, 1, -30)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (4, 0, 2-3)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, 1, 20)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, -1, -3-2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, 1, -20)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-2, 3, 0-1)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, 2, 0-2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, 1, 1-2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathsf{X}_A = (-3, 1, -34)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (3, 2, 0 - 1)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, -2, 0 - 3)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (0, -2, -3 - 2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, -1, 01)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-3, 0, -31)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, -1, -11)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (4, -1, 0 - 3)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, -2, -2 - 1)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, -1, 0 - 2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-3, -1, -31)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, 1, -32)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (0, 1, -1-2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, 1, -1-2)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (1, -2, 11)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{X}_A = (-1, -2, 10)^\tau$, $\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

36. В следующих примерах проверить, что система многочленов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ и найти координаты многочлена $\mathbf{h}$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\mathbf{g}_f$ найти многочлен $\mathbf{g}$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = 2 + 2x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 + x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - 2x - 3x^2$, $\mathbf{g}_f = (-2, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 - 3x^2$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = 4 + 2x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + 2x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 1 - 2x - x^2$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = -3 - x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x + 4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 + 2x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (3, -1, -2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -x - 4x^2$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - 3x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -3 + 4x$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + x - x^2$, $\mathbf{g}_f = (-3, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 + x^2$.

e). $\mathbf{f}_1(x) = 4 + x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 - 2x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4 - 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_f = (-1, -3, 0)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -5 + x - 3x^2$.

f). $\mathbf{f}_1(x) = 3 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 - x - x^2$,

$\mathbf{g}_f = (1, -1, 2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 2 + 5x^2$.

g). $\mathbf{f}_1(x) = 2 - x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4 - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + 3x + x^2$, $\mathbf{g}_f = (-2, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -5 + 3x + 3x^2$.

h). $\mathbf{f}_1(x) = 4 + 3x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4 + x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 2 - 2x - 4x^2$.

i). $\mathbf{f}_1(x) = 3x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 - 3x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 + x - 3x^2$, $\mathbf{g}_f = (-2, 0, 2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -2 - 2x^2$.

j). $\mathbf{f}_1(x) = x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + 4x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4 - 3x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, -2, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 1 - 5x^2$.

k). $\mathbf{f}_1(x) = 4 + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 - 3x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4 - 3x + 3x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 4 + 3x - x^2$.

l). $\mathbf{f}_1(x) = -3 - x$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + 3x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 - x - x^2$, $\mathbf{g}_f = (-2, -2, -2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 2 + 2x + 2x^2$.

m). $\mathbf{f}_1(x) = 1 + 4x - 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 + 4x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 - 3x - x^2$, $\mathbf{g}_f = (-1, 1, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 - 4x + 2x^2$.

n). $\mathbf{f}_1(x) = -3 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 + 3x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3 + 2x - x^2$, $\mathbf{g}_f = (0, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -3 - 5x$.

o). $\mathbf{f}_1(x) = 2 - 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4 - 2x - 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 - 2x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (3, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -2 + x^2$.

p). $\mathbf{f}_1(x) = -3 - 2x$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 - x + 4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4 - 3x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 - 3x + 4x^2$.

q). $\mathbf{f}_1(x) = -2 - 2x + 3x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x + 4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3x + x^2$, $\mathbf{g}_f = (-1, 2, -2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 2 - x - 4x^2$.

r). $\mathbf{f}_1(x) = -1 - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4 - 2x + 4x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 + 3x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (2, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 1 - 2x - 2x^2$.

s). $\mathbf{f}_1(x) = 3 - 3x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -3 - x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 4 + 4x - x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 1 - 5x - 5x^2$.

t). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - 2x + 4x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 - x + 3x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - 3x + x^2$, $\mathbf{g}_f = (1, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -2 - 5x - x^2$.

u). $\mathbf{f}_1(x) = 1 + 3x$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (-1, 2, 0)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = 5 + 5x + 2x^2$.

v). $\mathbf{f}_1(x) = 1 + 2x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + 4x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (-1, 2, 1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -4 + 4x + 2x^2$.

w). $\mathbf{f}_1(x) = -3 + 3x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + x + 3x^2$, $\mathbf{g}_f = (-2, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -3 + x + 4x^2$.

x). $\mathbf{f}_1(x) = 2 - x$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 - 2x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3 - 2x + 2x^2$, $\mathbf{g}_f = (0, 1, -1)^\tau$, $\mathbf{h}(x) = -3 - x + 2x^2$.

37. В следующих примерах по элементам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ и их координатным векторам $\mathbf{a}_e$, $\mathbf{b}_e$, $\mathbf{c}_e$ в базисе ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) найти векторы этого базиса.

a). $\mathbf{a}_e = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,1,3)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{a} = (-2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{b} = (-3,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{c} = (2,-1,2)^\tau$.
b). $\mathbf{a}_e = (-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (3,2,2)^\tau$, $\mathbf{a} = (0,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (1,3,2)^\tau$, $\mathbf{c} = (1,1,-3)^\tau$.
c). $\mathbf{a}_e = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (0,2,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,3,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (-3,-2,-2)^\tau$.
d). $\mathbf{a}_e = (0,-2,2)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-2,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{b} = (-2,-3,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (3,-2,2)^\tau$.
e). $\mathbf{a}_e = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-3,2,2)^\tau$, $\mathbf{b} = (1,0,2)^\tau$, $\mathbf{c} = (2,-1,-3)^\tau$.
f). $\mathbf{a}_e = (-2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (3,-1,3)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (0,1,2)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{c} = (-1,-2,-3)^\tau$.
g). $\mathbf{a}_e = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (2,-3,2)^\tau$, $\mathbf{c} = (-2,-1,1)^\tau$.
h). $\mathbf{a}_e = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a} = (3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{b} = (-2,0,2)^\tau$, $\mathbf{c} = (-2,1,-1)^\tau$.
i). $\mathbf{a}_e = (-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-2,2,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-3,3,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{c} = (3,-1,-1)^\tau$.
j). $\mathbf{a}_e = (3,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (0,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (3,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{c} = (0,-3,-2)^\tau$.
k). $\mathbf{a}_e = (2,-2,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{a} = (-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,2,3)^\tau$, $\mathbf{c} = (-3,2,3)^\tau$.
l). $\mathbf{a}_e = (0,3,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (3,2,2)^\tau$, $\mathbf{c} = (1,-2,2)^\tau$.
m). $\mathbf{a}_e = (3,3,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (2,3,0)^\tau$, $\mathbf{a} = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-2,0,-3)^\tau$, $\mathbf{c} = (-1,3,2)^\tau$.
n). $\mathbf{a}_e = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,2,3)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{c} = (1,-1,-2)^\tau$.
o). $\mathbf{a}_e = (0,1,2)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,2,2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-1,1,3)^\tau$, $\mathbf{a} = (-1,3,1)^\tau$, $\mathbf{b} = (2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{c} = (-3,2,-1)^\tau$.
p). $\mathbf{a}_e = (0,2,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (0,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{c} = (2,-1,1)^\tau$.
q). $\mathbf{a}_e = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (3,-2,3)^\tau$, $\mathbf{a} = (1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (1,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{c} = (2,1,0)^\tau$.
r). $\mathbf{a}_e = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (2,3,-3)^\tau$, $\mathbf{b} = (-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{c} = (0,1,-3)^\tau$.
s). $\mathbf{a}_e = (-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (3,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (3,-3,-3)^\tau$, $\mathbf{b} = (2,3,0)^\tau$, $\mathbf{c} = (-1,3,3)^\tau$.
t). $\mathbf{a}_e = (-1,3,3)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-2,3,2)^\tau$, $\mathbf{a} = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{b} = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (3,3,1)^\tau$.

u). $\mathbf{a}_e = (2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (-2,0,1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (1,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (2,2,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (2,-3,1)^\tau$.

v). $\mathbf{a}_e = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (-2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{a} = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{c} = (0,1,-1)^\tau$.

w). $\mathbf{a}_e = (-1,3,3)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{a} = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{c} = (2,3,0)^\tau$.

x). $\mathbf{a}_e = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{b}_e = (0,2,-1)^\tau$, $\mathbf{c}_e = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{a} = (3,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{b} = (-2,2,0)^\tau$, $\mathbf{c} = (1,2,1)^\tau$.

38. В следующих примерах проверить, что системы векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ являются базисами в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода $P_{e\to u}$ от первого базиса ко второму. По известным координатам векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в одном базисе найти их координаты в другом базисе.

a). $\mathbf{e}_1 = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,-2,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,3,-3)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (1,1,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,0,-1)^\tau$.

b). $\mathbf{e}_1 = (-2,0,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,2,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,-3,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (3,-1,-3)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-4,6)^\tau$.

c). $\mathbf{e}_1 = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,2,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (0,2,1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-2,0)^\tau$.

d). $\mathbf{e}_1 = (-2,1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (1,-3,2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-2,2,0)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (2,-2,1)^\tau$.

e). $\mathbf{e}_1 = (0,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,3,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,-3)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (3,2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,-1,2)^\tau$.

f). $\mathbf{e}_1 = (1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,-2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,-3,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-3,3)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (0,2,1)^\tau$.

g). $\mathbf{e}_1 = (3,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,3,-3)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-2,2)^\tau$.

h). $\mathbf{e}_1 = (0,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-1,3)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (0,-1,2)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,0,3)^\tau$.

i). $\mathbf{e}_1 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-2,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,0,3)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (-3,4,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (0,-2,-2)^\tau$.

j). $\mathbf{e}_1 = (1,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,0,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (3,-1,1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (2,0,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,2,-1)^\tau$.

k). $\mathbf{e}_1 = (-2,1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,0,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,1,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (3,-2,-3)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-1,3,0)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-5,6)^\tau$.

l). $\mathbf{e}_1 = (-1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,3,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,3,-2)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (0,3,-1)^\tau$.

m). $\mathbf{e}_1 = (1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-2,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-3,-3,1)^\tau$,

$\mathbf{u}_2 = (0,-3,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (-3,-7,-5)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (1,-2,2)^\tau$.

n). $\mathbf{e}_1 = (-2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,0,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-3,0)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (3,1,0)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,-1,-2)^\tau$.

o). $\mathbf{e}_1 = (-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,0,3)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (2,0,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2,1,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (0,3,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,-4,-2)^\tau$.

p). $\mathbf{e}_1 = (-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,0)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,1,0)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2,1,1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (3,2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (4,-1,-4)^\tau$.

q). $\mathbf{e}_1 = (1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-1,0)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,1,0)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,1,3)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,-3,-2)^\tau$.

r). $\mathbf{e}_1 = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,1,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (-1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (6,5,8)^\tau$.

s). $\mathbf{e}_1 = (2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-1,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-3,2,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,2,2)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (1,3,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,3,2)^\tau$.

t). $\mathbf{e}_1 = (2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (2,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,-3,3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (3,2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,-2,-2)^\tau$.

u). $\mathbf{e}_1 = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,0,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-1,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (0,3,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (4,-3,-3)^\tau$.

v). $\mathbf{e}_1 = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,-1,-1)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,-3,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_u = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (3,-1,4)^\tau$.

w). $\mathbf{e}_1 = (0,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,3,-2)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (-1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,0,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (7,0,6)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (0,2,1)^\tau$.

x). $\mathbf{e}_1 = (-1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2,1,0)^\tau$; $\mathbf{u}_1 = (1,2,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-3,-1)^\tau$; $\mathbf{x}_e = (0,2,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,1,-1)^\tau$.

39. В следующих примерах даны базисы ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), ($\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$) и матрица A. Найти базисы ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$) и ($\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$) такие, что матрицы перехода $P_{e\to u} = \mathsf{A}$ и $P_{f\to g} = \mathsf{A}$.

a). $$\begin{matrix} \mathbf{e}_1 = (2,3,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (3,-2,3)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (2,3,3)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (3,3,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (1,1,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (3,-1,1)^\tau; \end{matrix} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b). $$\begin{matrix} \mathbf{e}_1 = (-2,-2,3)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (2,-2,2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (1,1,-2)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (3,-1,3)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (0,2,-2)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (0,2,3)^\tau; \end{matrix} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c). $$\begin{matrix} \mathbf{e}_1 = (-1,-2,1)^\tau, & \mathbf{g}_1 = (3,-1,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 = (-2,3,-1)^\tau, & \mathbf{g}_2 = (2,-2,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 = (-1,0,2)^\tau; & \mathbf{g}_3 = (-1,0,3)^\tau; \end{matrix} \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

d). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-1,-2,1)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (-3,-1,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (2,-2,2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (2,2,2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (0,-2,3)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (1,-2,0)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,-1,-2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (-2,-3,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,-2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (3,-1,3)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (2,-1,-1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (-1,-3,2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

f). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-2,-1,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (2,-1,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (2,0,2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (3,-1,2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (-1,1,-1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (0,-3,-2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

g). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,1,1)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (1,-2,-3)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (3,0,-2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (1,1,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (-2,2,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (0,-1,-1)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

h). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (0,1,1)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (-2,-1,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (-1,1,-2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (3,2,-3)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (2,-1,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (3,2,3)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

i). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (2,1,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (2,2,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (1,1,2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (1,1,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (3,-1,-2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

j). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-2,-1,1)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (2,-1,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (-1,-2,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (-1,1,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (-2,-1,-2)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (1,2,-2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

k). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,2,-1)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (-2,-2,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (-2,-1,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (-3,-1,-3)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (0,-1,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (0,-2,2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

l). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (2,-1,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (-3,-3,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (-1,3,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (3,-2,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (1,0,2)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (2,1,1)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

m). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,-1,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (1,-2,0)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (-1,3,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (3,-3,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (-2,3,0)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (3,-2,-2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

n). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,1,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (2,3,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (2,2,2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (-1,1,2)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (-2,3,1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (-2,0,-2)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

o). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (0,2,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (0,1,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (1,1,1)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (1,-1,-1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (-2,2,3)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (1,-2,-1)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

p). $$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-1,-1,2)^\tau, & \mathbf{g}_1 &= (3,3,-2)^\tau, \\ \mathbf{e}_2 &= (-2,1,2)^\tau, & \mathbf{g}_2 &= (2,3,1)^\tau, \\ \mathbf{e}_3 &= (2,0,-1)^\tau; & \mathbf{g}_3 &= (0,2,1)^\tau; \end{aligned} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

q). $\mathbf{e}_1=(1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(-2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(2,0,2)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(1,2,-3)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

r). $\mathbf{e}_1=(-2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(1,-1,-2)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(0,3,-1)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(-3,3,2)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&-1&-1\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$.

s). $\mathbf{e}_1=(-1,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(-2,1,1)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(-2,1,2)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(3,2,3)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(2,0,1)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&-1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

t). $\mathbf{e}_1=(2,3,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(3,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(1,3,-1)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(1,0,-2)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

u). $\mathbf{e}_1=(1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(-1,1,-1)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(-2,-2,-3)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&-2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

v). $\mathbf{e}_1=(-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(3,-2,1)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(2,0,2)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-2,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(-3,1,-2)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&-2\\1&0&-2\end{pmatrix}$.

w). $\mathbf{e}_1=(3,1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(0,-1,-2)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(0,2,1)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$.

x). $\mathbf{e}_1=(2,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2=(1,0,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3=(2,1,1)^\tau$; $\mathbf{g}_1=(2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{g}_2=(-3,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{g}_3=(-1,-1,-1)^\tau$; $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-1\\0&-2&-1\end{pmatrix}$.

40. В следующих примерах найти матрицу перехода $P_{e\to u}$, если известны координатные векторы $\mathbf{x}_e$, $\mathbf{y}_e$, $\mathbf{z}_e$ $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{y}_u$, $\mathbf{z}_u$.

a). $\mathbf{x}_e=(-1,3,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(2,0,1)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(3,1,2)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(-1,0,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(-1,-2,1)^\tau$.

b). $\mathbf{x}_e=(2,-2,0)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(-1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(2,1,-3)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(0,1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(-2,1,-2)^\tau$.

c). $\mathbf{x}_e=(2,1,-3)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(2,1,0)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(-1,1,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(0,1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(2,2,-1)^\tau$.

d). $\mathbf{x}_e=(3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(-3,1,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(-2,-2,-1)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(1,2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(0,3,2)^\tau$.

e). $\mathbf{x}_e=(-1,3,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(2,-2,0)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(-2,2,-3)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(1,1,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(-1,2,-2)^\tau$.

f). $\mathbf{x}_e=(-1,2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(-2,3,0)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(0,-1,3)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(2,-1,2)^\tau$.

g). $\mathbf{x}_e=(1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e=(-3,2,3)^\tau$, $\mathbf{z}_e=(3,2,1)^\tau$. $\mathbf{x}_u=(0,2,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_u=(-1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_u=(-2,-2,3)^\tau$.

h). $\mathbf{x}_e = (-3,2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (2,0,1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (3,2,-1)^\tau$.

i). $\mathbf{x}_e = (2,0,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,-3,2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-1,3,-2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (2,3,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (2,0,-1)^\tau$.

j). $\mathbf{x}_e = (3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (3,1,-2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (0,-2,1)^\tau$.

k). $\mathbf{x}_e = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-2,-1,3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (-2,3,1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (1,1,1)^\tau$.

l). $\mathbf{x}_e = (2,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-2,0,-2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (2,1,3)^\tau$.

m). $\mathbf{x}_e = (2,-3,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (3,2,-1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (-1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (3,0,2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-2,1,-2)^\tau$.

n). $\mathbf{x}_e = (2,3,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (2,-3,3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (0,1,-1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (3,3,1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (1,1,1)^\tau$.

o). $\mathbf{x}_e = (0,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,3,-3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-1,1,-2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (-1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,-2,3)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (0,-1,3)^\tau$.

p). $\mathbf{x}_e = (2,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (3,3,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-1,0,2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (2,2,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (2,2,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-1,-2,2)^\tau$.

q). $\mathbf{x}_e = (2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (0,3,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-2,-3,1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (2,2,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (2,2,1)^\tau$.

r). $\mathbf{x}_e = (-3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (0,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-1,3,2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (2,2,-1)^\tau$.

s). $\mathbf{x}_e = (3,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,1,-3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-2,3,3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,0,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-1,1,-2)^\tau$.

t). $\mathbf{x}_e = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (1,3,1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-1,1,1)^\tau$.

u). $\mathbf{x}_e = (0,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,3,2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (2,-1,1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (1,3,-2)^\tau$.

v). $\mathbf{x}_e = (2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,2,-3)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (-2,0,-3)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-2,0,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-1,-2,3)^\tau$.

w). $\mathbf{x}_e = (-1,3,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,3,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (3,1,1)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (1,-2,2)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (0,-2,1)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (-1,1,1)^\tau$.

x). $\mathbf{x}_e = (3,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (3,3,0)^\tau$, $\mathbf{z}_e = (1,-3,-2)^\tau$. $\mathbf{x}_u = (3,-2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_u = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{z}_u = (3,-2,2)^\tau$.

41. В следующих примерах найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ линейного пространства $\mathbb{R}[x]_2$.

a). $\mathbf{f}_1(x) = 3 + x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 - x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 + x - x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -x - 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -3 - 2x + 2x^2$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = 3 + 3x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + 2x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 + 3x + 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 2 - x$, $\mathbf{g}_2(x) = -1 - 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 2 + x + x^2$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = 2 - 2x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3 - x + 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 1 - 3x - 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -2 + 2x$, $\mathbf{g}_3(x) = 1 - x - x^2$.
d). $\mathbf{f}_1(x) = -1 + 2x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 - x$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + 3x - 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -3 - 3x + x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 - 2x + 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 - x + x^2$.
e). $\mathbf{f}_1(x) = 2 + 3x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + x$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + 2x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -3 + x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 + 2x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -3 + 2x + x^2$.
f). $\mathbf{f}_1(x) = 2 + x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - 2x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 2 - x - 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -2 - x + 3x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -2 + 2x + 3x^2$.
g). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 - x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 + 2x - 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 3x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 - x - x^2$.
h). $\mathbf{f}_1(x) = -1 + x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -x + 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -2 - 2x + x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -2 + 3x + x^2$.
i). $\mathbf{f}_1(x) = 2 + 2x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + 2x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 3 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = x - 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 3 + x + x^2$.
j). $\mathbf{f}_1(x) = -1 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 - 2x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 2 - 3x + 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 1 + x + 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 - x + x^2$.
k). $\mathbf{f}_1(x) = 1 + 2x - 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3 + x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 - x + 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 3x + x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 2 - 2x$.
l). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2 + x$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 + x - 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 1 + 3x - x^2$.
m). $\mathbf{f}_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 + x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 2 + x + 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 + x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 - 2x^2$.
n). $\mathbf{f}_1(x) = -1 - x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 + 3x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 - x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x - 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -2 - 3x + x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -3 - 2x^2$.
o). $\mathbf{f}_1(x) = 2 - 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 3 - x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 - 2x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 2 + 3x - x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2 - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -3 - x + x^2$.
p). $\mathbf{f}_1(x) = x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 - x + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 + 3x - 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -2 - x + 3x^2$.
q). $\mathbf{f}_1(x) = -x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + x - x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 3 - x + 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -1 - 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 2x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -2 - x - 2x^2$.
r). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 2 - x$, $\mathbf{g}_2(x) = -2 + x - 2x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -3 + x - x^2$.
s). $\mathbf{f}_1(x) = 1 - x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 - 2x$, $\mathbf{f}_3(x) = -2 + 3x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = -2 + 2x - x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 1 - x$, $\mathbf{g}_3(x) = 1 - 2x + 2x^2$.
t). $\mathbf{f}_1(x) = 3 + x + 2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 - x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 + 2x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 3x + x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -3 + 2x - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 - 2x + x^2$.
u). $\mathbf{f}_1(x) = -1 - x - x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 1 + x$, $\mathbf{f}_3(x) = 2 + x + 2x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 1 - x + 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 2x$, $\mathbf{g}_3(x) = 2 + 2x - x^2$.
v). $\mathbf{f}_1(x) = -1 + 2x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 - 2x + x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x - x^2$.
$\mathbf{g}_1(x) = 3 - 2x - x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 2x - 3x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = 3 + 2x + x^2$.

w). $\mathbf{f}_1(x) = -2 + 3x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = -1 + 3x + 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -1 - 2x - x^2$. $\mathbf{g}_1(x) = -3 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = -1 - x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -2 - 3x + x^2$.

x). $\mathbf{f}_1(x) = -1 - x + x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2 + 3x$, $\mathbf{f}_3(x) = 1 - 2x + x^2$. $\mathbf{g}_1(x) = 3x - 2x^2$, $\mathbf{g}_2(x) = 3 - 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x - 3x^2$.

42. В следующих примерах найти матрицу перехода от базиса A_1, A_2, A_3, A_4 к базису B_1, B_2, B_3, B_4 линейного пространства $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.

a). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B}_4 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

43. Найти ранг r для каждой из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -2 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & -1 & -5 & -1 \\ -3 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -5 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

44. Найти ранг r для каждой из следующих систем векторов

a). $\mathbf{e}_1 = (-1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2,-3,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-2,-1,-4)^\tau$.

b). $\mathbf{e}_1 = (3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,4,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-3,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (1,5,-4)^\tau$.

c). $\mathbf{e}_1 = (1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-4,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-3,0,-3)^\tau$.

d). $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,3,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (5,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (5,3,2)^\tau$.

e). $\mathbf{e}_1 = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-3,1,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (5,-2,4)^\tau$.

f). $\mathbf{e}_1 = (2,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,3,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-4,-3,3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-1,0,2)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (3,3,-1)^\tau$.

g). $\mathbf{e}_1 = (-2,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-3,3,1)^\tau$,

$\mathbf{e}_5 = (-5,-1,5)^\tau$.

h). $\mathbf{e}_1 = (-2,0,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (4,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (4,3,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (1,-2,5)^\tau$.

i). $\mathbf{e}_1 = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,4,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-3,5,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (0,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (1,-3,-1)^\tau$.

j). $\mathbf{e}_1 = (-1,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (4,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (5,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (4,-5,-1)^\tau$.

k). $\mathbf{e}_1 = (-2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,1,4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-3,4,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (0,5,2)^\tau$.

l). $\mathbf{e}_1 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2,-3,4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-1,2,-3)^\tau$.

m). $\mathbf{e}_1 = (2,2,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,4,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-2,4)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-2,2,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (5,0,1)^\tau$.

n). $\mathbf{e}_1 = (-1,3,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,4,5)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-3,-1,4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (0,-4,-2)^\tau$.

o). $\mathbf{e}_1 = (2,3,4)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,3,4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (4,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (2,2,3)^\tau$.

p). $\mathbf{e}_1 = (1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,5,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (2,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-4,3,5)^\tau$.

q). $\mathbf{e}_1 = (2,1,0)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (3,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-5,-5,1)^\tau$.

r). $\mathbf{e}_1 = (3,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (1,-4,0)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-2,4,1)^\tau$.

s). $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,4,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-1,3,-3)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (1,-2,4)^\tau$.

t). $\mathbf{e}_1 = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,-4,1)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-3,-5,-4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (3,1,5)^\tau$.

u). $\mathbf{e}_1 = (4,-2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,-2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-4,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-4,-3,2)^\tau$.

v). $\mathbf{e}_1 = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,-1,5)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-2,1,4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (2,-4,2)^\tau$.

w). $\mathbf{e}_1 = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,2,4)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,0,2)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (-2,1,4)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (2,2,-4)^\tau$.

x). $\mathbf{e}_1 = (-2,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (4,-1,5)^\tau$, $\mathbf{e}_4 = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_5 = (-1,-1,-5)^\tau$.

45. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем векторов (вообще говоря, находятся неоднозначно).

a). $\mathbf{a}_1 = (-2,-2,0,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-6,-6,0,9)$, $\mathbf{a}_3 = (4,4,0,-6)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,3,3,1)$, $\mathbf{a}_5 = (3,-1,2,-1)$, $\mathbf{a}_6 = (-1,-5,2,5)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (-2,1,0,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,1,-1,2)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-1,-1,6)$, $\mathbf{a}_4 =$

$(-4,2,-1,0)$, $\mathbf{a}_5=(-2,1,-2,6)$, $\mathbf{a}_6=(0,0,-1,4)$.

c). $\mathbf{a}_1=(0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,3,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(-2,-6,-2,-2)$, $\mathbf{a}_4=(1,0,-2,-2)$, $\mathbf{a}_5=(-3,-6,0,0)$, $\mathbf{a}_6=(4,6,-2,-2)$.

d). $\mathbf{a}_1=(-2,-1,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(2,1,0,0)$, $\mathbf{a}_3=(0,1,-2,1)$, $\mathbf{a}_4=(-6,-4,2,-1)$, $\mathbf{a}_5=(2,3,-4,2)$, $\mathbf{a}_6=(-1,2,0,2)$.

e). $\mathbf{a}_1=(-1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-1,1,3,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-3,1,7,-5)$, $\mathbf{a}_4=(0,2,2,-1)$, $\mathbf{a}_5=(2,2,-2,2)$, $\mathbf{a}_6=(-1,2,2,-1)$.

f). $\mathbf{a}_1=(-2,1,-2,-2)$, $\mathbf{a}_2=(2,-1,2,2)$, $\mathbf{a}_3=(4,-2,4,4)$, $\mathbf{a}_4=(-2,-1,1,-2)$, $\mathbf{a}_5=(-2,-3,4,-2)$, $\mathbf{a}_6=(3,-2,1,1)$.

g). $\mathbf{a}_1=(1,3,-1,1)$, $\mathbf{a}_2=(2,6,-2,2)$, $\mathbf{a}_3=(-1,1,-1,3)$, $\mathbf{a}_4=(3,9,-3,3)$, $\mathbf{a}_5=(0,-4,2,-4)$, $\mathbf{a}_6=(-1,3,-2,5)$.

h). $\mathbf{a}_1=(0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(-2,2,-2,0)$, $\mathbf{a}_3=(-6,6,-6,0)$, $\mathbf{a}_4=(1,1,3,1)$, $\mathbf{a}_5=(-2,2,-2,0)$, $\mathbf{a}_6=(3,2,-2,1)$.

i). $\mathbf{a}_1=(0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(0,-1,1,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-2,0,-2,-2)$, $\mathbf{a}_4=(-4,-1,-3,-6)$, $\mathbf{a}_5=(2,-3,5,-4)$, $\mathbf{a}_6=(-2,2,-4,2)$.

j). $\mathbf{a}_1=(-2,1,0,-2)$, $\mathbf{a}_2=(1,2,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(4,3,2,4)$, $\mathbf{a}_4=(-2,-2,2,-2)$, $\mathbf{a}_5=(5,8,1,5)$, $\mathbf{a}_6=(2,0,-2,3)$.

k). $\mathbf{a}_1=(1,1,-1,1)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-2,2,-2)$, $\mathbf{a}_3=(2,2,3,3)$, $\mathbf{a}_4=(1,1,4,2)$, $\mathbf{a}_5=(0,3,-2,1)$, $\mathbf{a}_6=(2,1,2,1)$.

l). $\mathbf{a}_1=(2,-1,0,2)$, $\mathbf{a}_2=(4,-2,0,4)$, $\mathbf{a}_3=(-2,1,2,-2)$, $\mathbf{a}_4=(-4,2,6,-4)$, $\mathbf{a}_5=(8,-4,-4,8)$, $\mathbf{a}_6=(-6,3,2,-6)$.

m). $\mathbf{a}_1=(0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(-1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_3=(2,-2,2,2)$, $\mathbf{a}_4=(-2,2,-2,-2)$, $\mathbf{a}_5=(1,0,2,0)$, $\mathbf{a}_6=(-1,1,-1,-1)$.

n). $\mathbf{a}_1=(0,-1,-1,0)$, $\mathbf{a}_2=(-1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_3=(0,-2,-2,0)$, $\mathbf{a}_4=(1,0,-2,0)$, $\mathbf{a}_5=(1,0,4,0)$, $\mathbf{a}_6=(0,-2,-5,0)$.

o). $\mathbf{a}_1=(2,-1,-1,1)$, $\mathbf{a}_2=(-1,1,3,0)$, $\mathbf{a}_3=(-3,2,4,-1)$, $\mathbf{a}_4=(0,1,5,1)$, $\mathbf{a}_5=(-2,1,1,-1)$, $\mathbf{a}_6=(2,0,4,2)$.

p). $\mathbf{a}_1=(3,1,2,0)$, $\mathbf{a}_2=(9,3,6,0)$, $\mathbf{a}_3=(-3,-1,-2,0)$, $\mathbf{a}_4=(0,-2,-2,3)$, $\mathbf{a}_5=(6,-4,-2,9)$, $\mathbf{a}_6=(-2,2,-2,3)$.

q). $\mathbf{a}_1=(1,3,-2,-2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-6,4,4)$, $\mathbf{a}_3=(-1,0,3,-2)$, $\mathbf{a}_4=(-2,-3,5,0)$, $\mathbf{a}_5=(-2,-2,3,1)$, $\mathbf{a}_6=(5,7,-8,-4)$.

r). $\mathbf{a}_1=(-1,3,1,-2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,6,2,-4)$, $\mathbf{a}_3=(1,-3,-1,2)$, $\mathbf{a}_4=(-1,-2,-1,1)$, $\mathbf{a}_5=(-2,2,2,-2)$, $\mathbf{a}_6=(-2,-2,2,0)$.

s). $\mathbf{a}_1=(1,3,1,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-1,-3,-1,1)$, $\mathbf{a}_3=(3,1,0,2)$, $\mathbf{a}_4=(2,-2,-1,3)$, $\mathbf{a}_5=(0,8,3,-5)$, $\mathbf{a}_6=(0,1,-1,0)$.

t). $\mathbf{a}_1=(0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,2,-2,-1)$, $\mathbf{a}_3=(1,2,1,1)$, $\mathbf{a}_4=(5,10,-4,-1)$, $\mathbf{a}_5=(-3,-6,0,-1)$, $\mathbf{a}_6=(1,2,7,5)$.

u). $\mathbf{a}_1=(2,-2,2,-1)$, $\mathbf{a}_2=(1,-2,0,1)$, $\mathbf{a}_3=(-1,0,-2,2)$, $\mathbf{a}_4=(4,-6,2,1)$, $\mathbf{a}_5=(-3,4,-2,0)$, $\mathbf{a}_6=(-2,-1,2,1)$.

v). $\mathbf{a}_1=(0,0,0,0)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,3,-1)$, $\mathbf{a}_3=(0,-2,-6,2)$, $\mathbf{a}_4=(3,3,-2,0)$,

$\mathbf{a}_5 = (-3,-5,-4,2)$, $\mathbf{a}_6 = (-6,-8,-2,2)$.

w). $\mathbf{a}_1 = (1,-2,3,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,0,1,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (0,2,-4,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (2,2,3,1)$, $\mathbf{a}_5 = (3,2,2,3)$, $\mathbf{a}_6 = (0,3,2,2)$.

x). $\mathbf{a}_1 = (1,-1,0,2)$, $\mathbf{a}_2 = (3,-3,0,6)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-2,0,4)$, $\mathbf{a}_4 = (2,0,-2,0)$, $\mathbf{a}_5 = (5,1,-6,-2)$, $\mathbf{a}_6 = (0,-2,2,4)$.

46. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующих систем многочленов (вообще говоря, находятся неоднозначно).

a). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2+3x+1$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2+6x+2$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2-x+2$, $\mathbf{f}_4(x) = 6x^2+4x+6$, $\mathbf{f}_5(x) = 5x^2+10x+1$.

b). $\mathbf{f}_1(x) = 3-2x-2x^2$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2+4x-6$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2+2x-3$, $\mathbf{f}_4(x) = x^2+x+3$, $\mathbf{f}_5(x) = -5x^2-5x+12$.

c). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2+2x-1$, $\mathbf{f}_2(x) = 6x^2+4x-2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2-2x+3$, $\mathbf{f}_4(x) = 13x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_5(x) = 4x^2+6x-5$.

d). $\mathbf{f}_1(x) = -2x^2+x+3$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2-2x-6$, $\mathbf{f}_3(x) = 3x^2+2x+1$, $\mathbf{f}_4(x) = -5x^2-x+2$, $\mathbf{f}_5(x) = -x^2+x-2$.

e). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2-x-1$, $\mathbf{f}_2(x) = -6x^2+2x+2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3x^2+x+1$, $\mathbf{f}_4(x) = 3x^2-x$, $\mathbf{f}_5(x) = -9x^2+3x+1$.

f). $\mathbf{f}_1(x) = x^2+2x+2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2+4x+4$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x^2+3x+2$, $\mathbf{f}_4(x) = -5x^2+4x+2$, $\mathbf{f}_5(x) = -3x^2+8x+6$.

g). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2+2x-2$, $\mathbf{f}_2(x) = -4x^2-4x+4$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2-x+2$, $\mathbf{f}_4(x) = -2x^2-5x+6$, $\mathbf{f}_5(x) = -2x^2+3x-2$.

h). $\mathbf{f}_1(x) = x^2+x-1$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x^2-2x+2$, $\mathbf{f}_3(x) = -x^2-x+1$, $\mathbf{f}_4(x) = -x^2+2x+1$, $\mathbf{f}_5(x) = -3x^2+3$.

i). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2+2x-1$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2+4x-2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2+2x$, $\mathbf{f}_4(x) = 2x^2+2x+1$, $\mathbf{f}_5(x) = 12x^2+12x-3$.

j). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2+3x+1$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2-6x-2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2-x+3$, $\mathbf{f}_4(x) = 2x^2-x+3$, $\mathbf{f}_5(x) = 2x^2+2x-2$.

k). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2+3x+3$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2-6x-6$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2-3x-3$, $\mathbf{f}_4(x) = -2x^2-x-1$, $\mathbf{f}_5(x) = x^2+4x+4$.

l). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2+2x+3$, $\mathbf{f}_2(x) = -6x^2-4x-6$, $\mathbf{f}_3(x) = -x^2+x+1$, $\mathbf{f}_4(x) = 9x^2+6x+9$, $\mathbf{f}_5(x) = -8x^2-2x-4$.

m). $\mathbf{f}_1(x) = x^2-2x+2$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2+3x+1$, $\mathbf{f}_3(x) = 4x^2-3x+7$, $\mathbf{f}_4(x) = -2x^2+4x-4$, $\mathbf{f}_5(x) = 2x^2+2x+2$.

n). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2+x-2$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2-2x+4$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2-x+2$, $\mathbf{f}_4(x) = x^2+2x$, $\mathbf{f}_5(x) = -x^2+x-2$.

o). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2-2x+1$, $\mathbf{f}_2(x) = 2x^2+4x-2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x^2-x-2$, $\mathbf{f}_4(x) = -8x^2-7x-4$, $\mathbf{f}_5(x) = -5x^2-4x-3$.

p). $\mathbf{f}_1(x) = -2x^2+2$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2+x-2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2+2x-4$, $\mathbf{f}_4(x) = -3x^2+2+x$, $\mathbf{f}_5(x) = 2x^2-x-2$.

q). $\mathbf{f}_1(x) = 3x^2+2x+1$, $\mathbf{f}_2(x) = -6x^2-4x-2$, $\mathbf{f}_3(x) = -3x^2-2x-1$,

$\mathbf{f}_4(x) = x^2 + 3x + 1$, $\mathbf{f}_5(x) = 8x^2 + 3x + 2$.

r). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + 2x + 2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x^2 - 4x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + 3x + 2$, $\mathbf{f}_4(x) = -2x^2 - 3x - 2$, $\mathbf{f}_5(x) = 4x^2 + 5x + 2$.

s). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + 2x - 2$, $\mathbf{f}_2(x) = x^2 + 3x + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = -4x^2 - 10x$, $\mathbf{f}_4(x) = -x^2 - 4x - 6$, $\mathbf{f}_5(x) = -x^2 - x + 2$.

t). $\mathbf{f}_1(x) = -x^2 + x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x^2 + 2x - 2$, $\mathbf{f}_3(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $\mathbf{f}_4(x) = -7x^2 - x - 1$, $\mathbf{f}_5(x) = 2x^2 + 6x - 4$.

u). $\mathbf{f}_1(x) = -2x^2 + x + 3$, $\mathbf{f}_2(x) = 4x^2 - 2x - 6$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2 + 3x + 2$, $\mathbf{f}_4(x) = -2x^2 - 6x - 4$, $\mathbf{f}_5(x) = 3x^2 + 3x - 2$.

v). $\mathbf{f}_1(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $\mathbf{f}_2(x) = -4x^2 - 6x + 4$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x^2 - 3x + 2$, $\mathbf{f}_4(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $\mathbf{f}_5(x) = 12x^2 + 13x - 4$.

w). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + x - 1$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x^2 - 2x + 2$, $\mathbf{f}_3(x) = -x^2 - x + 1$, $\mathbf{f}_4(x) = 3x^2 - 2x - 2$, $\mathbf{f}_5(x) = 4x^2 - x - 3$.

x). $\mathbf{f}_1(x) = x^2 + 2x + 2$, $\mathbf{f}_2(x) = -2x^2 - 4x - 4$, $\mathbf{f}_3(x) = 3x^2 - x + 2$, $\mathbf{f}_4(x) = 2x^2 + 4x + 4$, $\mathbf{f}_5(x) = -8x^2 - 2x - 8$.

47. Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной следующими системами векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (3,1,3,3)$, $\mathbf{a}_2 = (0,3,-1,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,2,-4,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (4,3,-3,2)$, $\mathbf{a}_5 = (3,7,1,7)$, $\mathbf{a}_6 = (6,5,5,8)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (0,-3,3,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,2,0,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-4,6,2)$, $\mathbf{a}_4 = (-6,1,3,-2)$, $\mathbf{a}_5 = (1,4,4,5)$, $\mathbf{a}_6 = (1,-3,-2,2)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (4,1,5,3)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,3,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (0,-2,-6,2)$, $\mathbf{a}_4 = (2,1,4,1)$, $\mathbf{a}_5 = (4,0,2,4)$, $\mathbf{a}_6 = (-4,1,1,-5)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-3,4,-1,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,1,-3,3)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,5,-4,1)$, $\mathbf{a}_4 = (7,-9,5,1)$, $\mathbf{a}_5 = (1,-3,0,4)$, $\mathbf{a}_6 = (-2,3,2,-5)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-2,3,5,5)$, $\mathbf{a}_2 = (0,4,2,4)$, $\mathbf{a}_3 = (0,5,3,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (2,5,-1,3)$, $\mathbf{a}_5 = (4,-3,3,0)$, $\mathbf{a}_6 = (2,3,-2,1)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (0,0,-2,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,3,2,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,3,6,1)$, $\mathbf{a}_4 = (-6,6,-2,-5)$, $\mathbf{a}_5 = (-9,9,8,-2)$, $\mathbf{a}_6 = (-1,-2,0,-2)$.

g). $\mathbf{a}_1 = (5,3,4,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,-2,0,2)$, $\mathbf{a}_3 = (5,1,4,1)$, $\mathbf{a}_4 = (5,0,4,2)$, $\mathbf{a}_5 = (-3,4,1,5)$, $\mathbf{a}_6 = (1,-3,4,4)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (2,-3,1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (4,0,-2,2)$, $\mathbf{a}_3 = (4,-3,0,0)$, $\mathbf{a}_4 = (5,2,2,1)$, $\mathbf{a}_5 = (0,6,-4,4)$, $\mathbf{a}_6 = (4,3,-4,4)$.

i). $\mathbf{a}_1 = (1,2,1,-3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-1,-2,3)$, $\mathbf{a}_3 = (3,4,5,-9)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,-3,0,3)$, $\mathbf{a}_5 = (-1,0,-3,3)$, $\mathbf{a}_6 = (-1,1,-4,3)$.

j). $\mathbf{a}_1 = (2,0,4,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (2,-2,3,0)$, $\mathbf{a}_3 = (4,2,9,-6)$, $\mathbf{a}_4 = (2,4,6,-6)$, $\mathbf{a}_5 = (2,-4,2,2)$, $\mathbf{a}_6 = (2,4,1,-3)$.

k). $\mathbf{a}_1 = (0,5,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (2,-3,2,0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4,1,-5,0)$, $\mathbf{a}_4 = (5,4,3,1)$, $\mathbf{a}_5 = (1,1,3,0)$, $\mathbf{a}_6 = (4,-2,0,5)$.

l). $\mathbf{a}_1 = (1,1,2,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,-2,0,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,2,-4,6)$, $\mathbf{a}_4 =$

$(3,1,6,-5)$, $\mathbf{a}_5=(1,-1,2,-3)$, $\mathbf{a}_6=(-1,-5,-2,-3)$.

m). $\mathbf{a}_1=(0,-1,0,3)$, $\mathbf{a}_2=(-3,-1,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(3,0,-1,3)$, $\mathbf{a}_4=(6,1,-2,3)$, $\mathbf{a}_5=(2,4,3,0)$, $\mathbf{a}_6=(-3,1,1,-6)$.

n). $\mathbf{a}_1=(1,4,2,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-3,-2,0,5)$, $\mathbf{a}_3=(2,8,4,-6)$, $\mathbf{a}_4=(-3,8,6,1)$, $\mathbf{a}_5=(0,5,3,-2)$, $\mathbf{a}_6=(4,-4,-4,-4)$.

o). $\mathbf{a}_1=(-2,2,3,5)$, $\mathbf{a}_2=(1,3,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,-3,-2,4)$, $\mathbf{a}_4=(4,4,-1,-5)$, $\mathbf{a}_5=(3,5,-1,5)$, $\mathbf{a}_6=(-1,5,4,5)$.

p). $\mathbf{a}_1=(0,-3,-3,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,3,2,0)$, $\mathbf{a}_3=(2,-3,-4,6)$, $\mathbf{a}_4=(2,6,5,-3)$, $\mathbf{a}_5=(-3,3,5,1)$, $\mathbf{a}_6=(-2,0,1,-3)$.

q). $\mathbf{a}_1=(2,3,-2,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,-2,-1,-1)$, $\mathbf{a}_3=(5,-3,-5,-2)$, $\mathbf{a}_4=(-3,-1,3,0)$, $\mathbf{a}_5=(7,0,-7,-1)$, $\mathbf{a}_6=(1,5,-1,2)$.

r). $\mathbf{a}_1=(0,3,2,-2)$, $\mathbf{a}_2=(0,2,1,2)$, $\mathbf{a}_3=(0,-1,-1,4)$, $\mathbf{a}_4=(1,-1,-2,1)$, $\mathbf{a}_5=(0,-1,0,-6)$, $\mathbf{a}_6=(-2,4,-1,5)$.

s). $\mathbf{a}_1=(0,-1,4,4)$, $\mathbf{a}_2=(-1,0,-3,-1)$, $\mathbf{a}_3=(1,2,-5,-7)$, $\mathbf{a}_4=(1,-1,7,5)$, $\mathbf{a}_5=(-3,-1,-5,1)$, $\mathbf{a}_6=(-1,2,-2,4)$.

t). $\mathbf{a}_1=(1,4,-3,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-3,-2,5)$, $\mathbf{a}_3=(3,1,-3,1)$, $\mathbf{a}_4=(-3,-2,-7,7)$, $\mathbf{a}_5=(1,-1,5,-2)$, $\mathbf{a}_6=(5,-2,5,1)$.

u). $\mathbf{a}_1=(5,-3,0,1)$, $\mathbf{a}_2=(-3,0,0,3)$, $\mathbf{a}_3=(4,-3,0,2)$, $\mathbf{a}_4=(-4,6,0,-8)$, $\mathbf{a}_5=(-8,6,0,-4)$, $\mathbf{a}_6=(1,-1,0,1)$.

v). $\mathbf{a}_1=(-3,3,0,4)$, $\mathbf{a}_2=(-1,5,0,3)$, $\mathbf{a}_3=(2,2,0,-1)$, $\mathbf{a}_4=(1,5,0,-3)$, $\mathbf{a}_5=(-4,8,0,7)$, $\mathbf{a}_6=(0,4,2,4)$.

w). $\mathbf{a}_1=(1,3,3,0)$, $\mathbf{a}_2=(2,0,1,-2)$, $\mathbf{a}_3=(5,3,5,-4)$, $\mathbf{a}_4=(6,6,8,-4)$, $\mathbf{a}_5=(0,4,0,-1)$, $\mathbf{a}_6=(7,3,6,-6)$.

x). $\mathbf{a}_1=(1,-1,5,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-2,3,-2,2)$, $\mathbf{a}_3=(-1,1,-5,1)$, $\mathbf{a}_4=(3,-5,-1,-3)$, $\mathbf{a}_5=(5,-7,9,-5)$, $\mathbf{a}_6=(-5,8,-1,5)$.

48. Найти фундаментальную систему решений и размерность d подпространства решений однородной системы линейных уравнений.

a). $\begin{cases} 3x_1+3x_2-6x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-x_2+5x_3-4x_4=0, \\ 3x_1-x_2+6x_3-5x_4=0. \end{cases}$ b). $\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+x_4=0, \\ -x_1-x_2+x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$

c). $\begin{cases} 3x_2-9x_3+6x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+4x_3-6x_4=0, \\ 2x_1+2x_2-8x_3+2x_4=0, \\ -3x_1-x_2+6x_3+x_4=0. \end{cases}$ d). $\begin{cases} -x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0, \\ -3x_1+4x_2+x_3-2x_4=0, \\ 4x_1-3x_2 2x_3+6x_4=0. \end{cases}$

e). $\begin{cases} -x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1+x_2-3x_3-2x_4=0, \\ 2x_2-4x_3-2x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+8x_3+6x_4=0. \end{cases}$ f). $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-2x_4=0, \\ -x_1-2x_2+2x_3-2x_4=0, \\ -x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

g). $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$
h). $\begin{cases} -x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

i). $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + +2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$
j). $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 10x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

k). $\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + -x_4 = 0, \\ -x_1 + -x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$
l). $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

m). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$
n). $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

o). $3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0.$
p). $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + 7x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0, \\ -3x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

q). $x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0.$
r). $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

s). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + +4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$
t). $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ -4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 8x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 0, \end{cases}$

u). $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 8x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$
v). $\begin{cases} -2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

w). $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$
x). $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

49. Проверить, являются ли системы векторов линейного пространства $\mathbb{R}^5$ фундаментальными системами решений соответствующих систем уравнений

a). $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1+5x_2+4x_3-5x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+x_3+x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-5,4,3,3,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-7,5,-3,6,6)$, $\mathbf{a}_3=(5,-4,6,-3,-6)$.

b). $\begin{cases} x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ 2x_1+2x_2-x_3-2x_5=0, \\ 2x_1+5x_2-4x_3-3x_4-5x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-3x_3-2x_4-4x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-5,4,2,4,-2)$, $\mathbf{a}_2=(0,-2,4,-2,-4)$, $\mathbf{a}_3=(-1,2,-2,2,2)$.

c). $\begin{cases} x_1+2x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-x_5=0, \\ x_1+2x_2-4x_3-3x_4-3x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3-5x_4-4x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(2,-6,-1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-5,6,1,-1,2)$, $\mathbf{a}_3=(-5,3,1,-2,1)$.

d). $\begin{cases} x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4-x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+3x_4=0, \\ x_1-4x_2-2x_3-x_4+5x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-4,0,2,2,2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,1,1,2,2)$, $\mathbf{a}_3=(2,1,2,-1,1)$.

e). $\begin{cases} 2x_2-2x_3+x_5=0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1-4x_2+4x_3+2x_4+x_5=0, \\ 3x_1-5x_2+5x_3+3x_4+2x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(1,-3,-4,2,-2)$, $\mathbf{a}_2=(-1,3,2,4,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-3,-5,-4,0,2)$.

f). $\begin{cases} x_1-x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1-2x_2+x_3-2x_4-x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-x_4-2x_5=0, \\ 3x_1-4x_2+x_3-3x_4-3x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-6,-5,-2,2,-2)$, $\mathbf{a}_2=(6,6,0,-4,2)$, $\mathbf{a}_3=(6,4,4,0,2)$.

g). $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2-x_3-2x_4-x_5=0, \\ 3x_1-2x_2-3x_3-3x_4-2x_5=0, \\ x_2+3x_4+x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-3,-5,-2,1,2)$, $\mathbf{a}_2=(3,5,1,-2,1)$, $\mathbf{a}_3=(0,7,-2,-2,-1)$.

h). $\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_2+x_3-2x_4-2x_5=0, \\ x_1-3x_2-3x_3+3x_4+5x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-5x_4-3x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-5,-3,1,-2,1)$, $\mathbf{a}_2=(-2,-3,-1,0,-2)$, $\mathbf{a}_3=(-4,-3,-1,-1,-1)$.

i). $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_3-x_4+x_5=0, \\ 4x_1+2x_2-3x_3+3x_4+x_5=0, \\ 5x_1+3x_2-4x_3+5x_4+x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(2,-6,4,4,4)$, $\mathbf{a}_2=(-3,5,-2,-2,2)$, $\mathbf{a}_3=(0,2,-2,-2,-4)$.

j). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (1, -2, 1, -2, -1),\ \mathbf{a}_2 = (5, -1, 1, 1, 1),\ \mathbf{a}_3 = (7, -2, 1, 1, 2).$

k). $\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (3, 2, 2, 1, -1),\ \mathbf{a}_2 = (-6, 3, -1, 2, 2),\ \mathbf{a}_3 = (-6, 4, 1, 1, 2).$

l). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (-3, -7, 4, 2, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-4, -4, 4, 2, -2),\ \mathbf{a}_3 = (-5, -1, 4, 2, -4).$

m). $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (-2, -2, 2, 4, -4),\ \mathbf{a}_2 = (1, 2, 2, 2, 2),\ \mathbf{a}_3 = (4, 2, -4, -4, 2).$

n). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (-4, -6, -2, 4, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-2, 1, 4, 0, -2),\ \mathbf{a}_3 = (-2, 1, 2, 4, 2).$

o). $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (3, -1, 4, 2, -2),\ \mathbf{a}_2 = (-6, -2, -4, -4, 4),\ \mathbf{a}_3 = (6, 4, 2, 4, -4).$

p). $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (-3, -1, -1, -2, 0),\ \mathbf{a}_2 = (-1, -2, -2, 0, -1),\ \mathbf{a}_3 = (1, -2, -2, 1, -2).$

q). $\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (-6, -4, -4, 2, 2),\ \mathbf{a}_2 = (6, 4, 2, -4, -2),\ \mathbf{a}_3 = (3, 2, -4, -2, 4).$

r). $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$ $\quad \mathbf{a}_1 = (2, -6, -2, 1, 1),\ \mathbf{a}_2 = (-1, -3, -1, 1, -1),\ \mathbf{a}_3 = (-2, -2, -1, 1, -2).$

s). $\begin{cases} 2x_1+x_3+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=0, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4+3x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(0,2,2,2,-4)$, $\mathbf{a}_2=(-4,-6,2,2,4)$, $\mathbf{a}_3=(3,4,-2,-2,-2)$.

t). $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_4+2x_5=0, \\ 5x_1-x_2+4x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1+4x_2-2x_3-5x_4+5x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(1,2,-3,3,0)$, $\mathbf{a}_2=(5,4,3,-3,-6)$, $\mathbf{a}_3=(-7,7,3,6,3)$.

u). $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-2x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+3x_3-x_4-4x_5=0, \\ 5x_1-x_2+x_3-3x_4-4x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-4,4,3,-3,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-4,7,6,-3,-3)$, $\mathbf{a}_3=(-4,-5,-3,-6,0)$.

v). $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4-x_5=0, \\ 2x_1+5x_2-2x_3-5x_4-3x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-6,2,2,0,-2)$, $\mathbf{a}_2=(-3,0,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_3=(3,1,-1,2,1)$.

w). $\begin{cases} x_1+x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4-x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3+5x_4+2x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-4,5,1,-2,-1)$, $\mathbf{a}_2=(-1,1,1,-1,1)$, $\mathbf{a}_3=(-1,2,1,-2,2)$.

x). $\begin{cases} x_1+x_4+x_5=0, \\ 2x_1+2x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ 5x_1+4x_2-2x_3-x_4+3x_5=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3+x_4+3x_5=0. \end{cases}$ $\mathbf{a}_1=(-2,7,4,4,-2)$, $\mathbf{a}_2=(-2,5,0,4,-2)$, $\mathbf{a}_3=(2,1,4,0,-2)$.

50. Найти базис в подпространстве $\ell(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_5,\mathbf{a}_6)$, и коэффициенты разложения остальных векторов системы по этому базису.

a). $\mathbf{a}_1=(4,4,-1,1)$, $\mathbf{a}_2=(-8,-8,2,-2)$, $\mathbf{a}_3=(3,4,0,5)$, $\mathbf{a}_4=(9,8,-3,-2)$, $\mathbf{a}_5=(7,8,-1,6)$, $\mathbf{a}_6=(-2,0,2,8)$.

b). $\mathbf{a}_1=(0,-2,2,-1)$, $\mathbf{a}_2=(0,4,-4,2)$, $\mathbf{a}_3=(0,-6,6,-3)$, $\mathbf{a}_4=(-1,3,-3,5)$, $\mathbf{a}_5=(-1,5,-5,6)$, $\mathbf{a}_6=(2,-4,4,-9)$.

c). $\mathbf{a}_1=(6,6,4,0)$, $\mathbf{a}_2=(3,3,2,0)$, $\mathbf{a}_3=(0,3,1,-3)$, $\mathbf{a}_4=(-3,3,0,-6)$, $\mathbf{a}_5=(-6,3,-1,-9)$, $\mathbf{a}_6=(3,9,4,-6)$.

d). $\mathbf{a}_1=(-2,1,0,-3)$, $\mathbf{a}_2=(-4,2,0,-6)$, $\mathbf{a}_3=(5,3,2,1)$, $\mathbf{a}_4=(-1,-5,-2,5)$, $\mathbf{a}_5=(-10,-6,-4,-2)$, $\mathbf{a}_6=(-1,6,2,-8)$.

e). $\mathbf{a}_1=(-3,2,-3,0)$, $\mathbf{a}_2=(6,-4,6,0)$, $\mathbf{a}_3=(-1,-2,1,1)$, $\mathbf{a}_4=(-7,2,-5,1)$, $\mathbf{a}_5=(4,-8,8,2)$, $\mathbf{a}_6=(-6,-4,0,3)$.

f). $\mathbf{a}_1=(-2,5,4,-1)$, $\mathbf{a}_2=(2,-5,-4,1)$, $\mathbf{a}_3=(-2,0,-2,-2)$, $\mathbf{a}_4=(-1,5,5,0)$, $\mathbf{a}_5=(4,0,4,4)$, $\mathbf{a}_6=(0,5,6,1)$.

g). $\mathbf{a}_1=(-1,-2,5,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,2,-5,0)$, $\mathbf{a}_3=(2,-2,0,-1)$, $\mathbf{a}_4=(1,-4,5,-1)$, $\mathbf{a}_5=(5,-8,5,-3)$, $\mathbf{a}_6=(0,-6,10,-1)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (2,3,2,4)$, $\mathbf{a}_2 = (4,6,4,8)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,-3,-2,-4)$, $\mathbf{a}_4 = (-2,3,4,-2)$, $\mathbf{a}_5 = (-4,0,2,-6)$, $\mathbf{a}_6 = (0,6,6,2)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (3,2,0,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-2,0,-3)$, $\mathbf{a}_3 = (6,4,0,6)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,5,2)$, $\mathbf{a}_5 = (-2,-1,5,-1)$, $\mathbf{a}_6 = (4,3,5,5)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (-2,2,2,-3)$, $\mathbf{a}_2 = (-6,6,6,-9)$, $\mathbf{a}_3 = (4,-4,-4,6)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,1,1,-1)$, $\mathbf{a}_5 = (-2,2,2,-4)$, $\mathbf{a}_6 = (-7,7,7,-9)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (1,0,-3,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,0,9,3)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,2,-2,1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-2,8,1)$, $\mathbf{a}_5 = (-5,4,-7,1)$, $\mathbf{a}_6 = (-2,2,-5,0)$.
l). $\mathbf{a}_1 = (1,0,2,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,0,-4,2)$, $\mathbf{a}_3 = (3,0,6,-3)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,5,-3)$, $\mathbf{a}_5 = (3,1,9,-5)$, $\mathbf{a}_6 = (0,2,6,-4)$.
m). $\mathbf{a}_1 = (3,1,0,5)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,-1,0,-5)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,0,3,-2)$, $\mathbf{a}_4 = (-5,-1,3,-7)$, $\mathbf{a}_5 = (2,2,6,6)$, $\mathbf{a}_6 = (1,1,3,3)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (-2,-1,4,2)$, $\mathbf{a}_2 = (4,2,-8,-4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,1,-3,0)$, $\mathbf{a}_4 = (2,-1,3,0)$, $\mathbf{a}_5 = (8,0,-2,-4)$, $\mathbf{a}_6 = (-4,0,1,2)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (-2,-6,2,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,3,-1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (3,3,5,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,3,-7,3)$, $\mathbf{a}_5 = (2,0,6,-2)$, $\mathbf{a}_6 = (5,9,3,1)$.
p). $\mathbf{a}_1 = (2,5,5,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-5,-5,1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,1,4,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,6,9,-2)$, $\mathbf{a}_5 = (-8,-2,7,-2)$, $\mathbf{a}_6 = (-6,-3,3,-1)$.
q). $\mathbf{a}_1 = (4,-2,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,2,1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (8,-4,-2,-2)$, $\mathbf{a}_4 = (5,4,2,4)$, $\mathbf{a}_5 = (1,6,3,5)$, $\mathbf{a}_6 = (-3,8,4,6)$.
r). $\mathbf{a}_1 = (2,1,-3,1)$, $\mathbf{a}_2 = (4,2,-6,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,5,2,3)$, $\mathbf{a}_4 = (2,7,-4,5)$, $\mathbf{a}_5 = (4,8,-7,6)$, $\mathbf{a}_6 = (0,-6,1,-4)$.
s). $\mathbf{a}_1 = (3,-2,0,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3,2,0,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,2,-2,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (5,-4,2,-1)$, $\mathbf{a}_5 = (-8,6,-2,3)$, $\mathbf{a}_6 = (1,-2,4,4)$.
t). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,2,3)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,-2,-3)$, $\mathbf{a}_3 = (1,-2,1,3)$, $\mathbf{a}_4 = (-2,1,1,0)$, $\mathbf{a}_5 = (3,0,-3,-3)$, $\mathbf{a}_6 = (-4,2,2,0)$.
u). $\mathbf{a}_1 = (2,2,1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2,-2,-1,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (5,-1,4,3)$, $\mathbf{a}_4 = (-6,6,-6,-2)$, $\mathbf{a}_5 = (1,-5,2,-1)$, $\mathbf{a}_6 = (9,3,6,7)$.
v). $\mathbf{a}_1 = (2,-1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (4,-2,-2,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (1,2,0,5)$, $\mathbf{a}_4 = (5,-5,-3,-8)$, $\mathbf{a}_5 = (1,-3,-1,-6)$, $\mathbf{a}_6 = (-1,-2,0,-5)$.
w). $\mathbf{a}_1 = (5,0,-1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (-5,0,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (10,0,-2,0)$, $\mathbf{a}_4 = (-3,2,-3,-3)$, $\mathbf{a}_5 = (7,2,-5,-3)$, $\mathbf{a}_6 = (2,2,-4,-3)$.
x). $\mathbf{a}_1 = (2,1,3,3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,-2,-6,-6)$, $\mathbf{a}_3 = (6,3,9,9)$, $\mathbf{a}_4 = (2,3,3,1)$, $\mathbf{a}_5 = (4,4,6,4)$, $\mathbf{a}_6 = (-2,-5,-3,1)$.

51. Найти однородную систему линейных алгебраических уравнений, подпространство решений которой совпадает с линейной оболочкой $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$, порожденной следующими системами векторов.
a). $\mathbf{a}_1 = (2,2,-3,-3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4,-4,6,6)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (-2,0,1,-2)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,-1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (5,-3,-4,5)$, $\mathbf{a}_4 = (6,-2,-4,6)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 4, 2, -4)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -3, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, 0, -1)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 4, -4, -2)$.
f). $\mathbf{a}_1 = (3, -3, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, 3, 0)$.
g). $\mathbf{a}_1 = (0, 3, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -6, -6, -4)$.
h). $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, -2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, -1)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (2, -3, -1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -2, -2)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (-2, 3, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -2, 0, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, -3, 2)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (2, -3, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 3, 1)$.
l). $\mathbf{a}_1 = (-2, 3, 1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, -2, -3)$.
m). $\mathbf{a}_1 = (3, 3, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-9, -7, -9, 2)$, $\mathbf{a}_4 = (-3, -6, -3, 8)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (-3, -1, -2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, -1, 1)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (-3, 2, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 3, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -2, 3, 1)$.
p). $\mathbf{a}_1 = (3, 2, -2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 1, 2)$.
q). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -3, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, -2, 4, 4)$.
r). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -2, 7, 8)$.
s). $\mathbf{a}_1 = (3, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3, 2, -1)$.
t). $\mathbf{a}_1 = (-3, -3, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -2, 4, -4)$, $\mathbf{a}_4 = (7, 8, -7, 4)$.
u). $\mathbf{a}_1 = (3, -2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -2, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 2, -1, -6)$.
v). $\mathbf{a}_1 = (2, -2, -3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -3, 2, -3)$.
w). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -3, 6, 5)$.
x). $\mathbf{a}_1 = (0, 1, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, 3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (2, 5, -7, 9)$.

52. Найти размерность s и базис суммы подпространств $\mathbb{V}_1 = \ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $\mathbb{V}_2 = \ell(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ (в $\mathbb{R}^4$), а также размерность d и базис их пересечения.
a). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 3, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -2, -3)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -3, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 2, -1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 6, -2, 0)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 0, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (6, 5, -1, -9)$, $\mathbf{b}_1 = (4, 6, 2, -6)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 0, -2, -3)$, $\mathbf{b}_3 = (-6, -3, 3, 9)$.
c). $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (-2, -1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, -1, 0, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (5, 1, 0, -9)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 3, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (4, -6, -4, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (-6, 5, 2, -5)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -7, -6, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (-6, -3, -6, -3)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -2, -3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, 3, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (3, 2, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 2, -2, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-7, -6, -4, -2)$.
f). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 5, -9, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, 1, -3, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (-9, -6, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-7, -4, 0, 2)$.

g). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, 3, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 3, -1, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 3, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -10, 0, 10)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -2, -3, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 3, 6, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 3, -1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 3, 9, 6)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -4, 4, 0)$.

i). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -3, -6, -8)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 4, -2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 0, 6, 7)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, -2, -2)$.

j). $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, -2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -3, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 4, -6, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, -3, -2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 6, -4, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, -1, -8, -2)$.

k). $\mathbf{a}_1 = (-2, 3, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 3, 2, -5)$, $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 3, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 5, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 3, 2)$.

l). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (5, -5, 3, -1)$, $\mathbf{b}_1 = (3, -3, 0, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 1, -5, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, -2, 0, -8)$.

m). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 6, -6, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 1, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (5, -4, -3, -5)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, 0, 1, 11)$.

n). $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -3, 0, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -9, 9, -5)$, $\mathbf{b}_1 = (9, -3, -9, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-7, 5, 3, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-5, 1, 6, -1)$.

o). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -2, 0, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (-2, 3, 0, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, 0, 2, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-5, 3, 2, 3)$.

p). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, 0, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 2, -3, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -3, -9, 6)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -2, -3, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-5, 11, 0, -4)$, $\mathbf{b}_3 = (-3, 1, -9, 0)$.

q). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, -2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (0, -1, 1, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (3, -3, 2, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 3, 3, 2)$.

r). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, -2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 5, 8, 9)$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 3, 3, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -8, -8, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, -1, -1, 5)$.

s). $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 2, -2, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (0, -2, 3, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -8, 3, -7)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, 4, -4, 8)$.

t). $\mathbf{a}_1 = (3, 0, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 0, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, -2, -1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 3, 3, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -3, 3, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 3, 1, -1)$.

u). $\mathbf{a}_1 = (-2, 3, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 1, -2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -2, 0, -1)$, $\mathbf{b}_1 = (-2, -3, -1, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 1, 3, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, -9, -11, 0)$.

v). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-7, -4, 5, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 3, 3, -3)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 5, 5, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, -4, -4, 8)$.

w). $\mathbf{a}_1 = (2, -2, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 0, -1)$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, -2, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (2, -2, -2, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-2, 1, -2, -2)$.

x). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -2, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, -1, -3, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 2, 4, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 0, 1, -1)$.

53. Для подпространств $\mathbb{V}_1$ и $\mathbb{V}_2$ всех решений однородных систем уравнений найти размерность s и базис суммы $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, размерность d и базис пересечения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

a). $\mathbb{V}_1$: $x_2 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0$.

b). $\mathbb{V}_1$: $6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$, $-9x_1 + 3x_2 - x_3 - 9x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_1 + 2x_2 - 21x_3 - 6x_4 = 0$, $2x_1 - x_2 + 13x_3 + 3x_4 = 0$.

c). $\mathbb{V}_1$: $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$, $3x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0$.

d). $\mathbb{V}_1$: $x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_1 - 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$.

e). $\mathbb{V}_1$: $2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$, $3x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $2x_1 - x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$.

f). $\mathbb{V}_1$: $2x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0$, $2x_1 + 6x_3 + 4x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $4x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 5x_4 = 0$.

g). $\mathbb{V}_1$: $2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0$, $3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_1 - 2x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 0$, $4x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0$.

h). $\mathbb{V}_1$: $x_1 + x_3 + x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_3 - 2x_4 = 0$.

i). $\mathbb{V}_1$: $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $4x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 10x_4 = 0$.

j). $\mathbb{V}_1$: $4x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0$, $x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$, $2x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 0$.

k). $\mathbb{V}_1$: $3x_1 - 4x_3 - 3x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_2 - x_4 = 0$.

l). $\mathbb{V}_1$: $2x_1 - 6x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $2x_1 - 2x_2 - 12x_3 + 3x_4 = 0$, $4x_1 + x_2 - 9x_3 + x_4 = 0$.

m). $\mathbb{V}_1$: $2x_1 + x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $7x_1 - x_2 - 11x_3 = 0$, $11x_1 - x_2 - 18x_3 + x_4 = 0$.

n). $\mathbb{V}_1$: $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

o). $\mathbb{V}_1$: $2x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $2x_1 - x_3 = 0$, $2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0$.

p). $\mathbb{V}_1$: $-9x_1 - 6x_3 + x_4 = 0$, $7x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

q). $\mathbb{V}_1$: $4x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 0$, $2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $4x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0$, $-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$.

r). $\mathbb{V}_1$: $-3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

s). $\mathbb{V}_1$: $x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0$, $2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $3x_1 + 6x_2 + 4x_4 = 0$, $3x_1 + 9x_2 - x_3 + 7x_4 = 0$.

t). $\mathbb{V}_1$: $4x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0$, $4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $7x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$, $8x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

u). $\mathbb{V}_1$: $3x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 0$, $3x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_1 + 2x_2 = 0$, $2x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0$.

v). $\mathbb{V}_1$: $3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

w). $\mathbb{V}_1$: $x_1 - 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - 15x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$.

x). $\mathbb{V}_1$: $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$, $3x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0$ и $\mathbb{V}_2$: $x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$, $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.

54. Для подпространства $\mathbb{V}_1$, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, и подпространства $\mathbb{V}_2$ всех решений однородной системы урав-

нений, найти размерность s и базис суммы $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, размерность d и базис пересечения $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

a). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3, 1, -1)$, $x_1 + x_2 - x_4 = 0$, $x_2 + 2x_4 = 0$.

b). $\mathbf{a}_1 = (3, 3, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -1, -3, -3)$, $6x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$, $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0$.

c). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 3, 0)$, $3x_2 - 2x_3 = 0$, $x_2 - 2x_3 = 0$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, -3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -6, 6, -6)$, $\mathbf{a}_3 = (-7, 10, -8, 9)$, $2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$, $x_1 + 4x_3 - 5x_4 = 0$.

e). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-7, -4, -5, 3)$, $4x_1 + x_2 - x_3 + 9x_4 = 0$, $-2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$.

f). $\mathbf{a}_1 = (3, 2, -2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-15, -7, 1, -12)$, $4x_1 - 9x_2 - 3x_3 = 0$.

g). $\mathbf{a}_1 = (-3, -2, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 13, 4, 1)$, $3x_1 - 2x_2 + 17x_3 + 15x_4 = 0$, $x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 0$.

h). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-7, -1, -9, -14)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 1, 2, -9)$, $x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$, $x_1 - 18x_2 + 6x_3 + x_4 = 0$.

i). $\mathbf{a}_1 = (1, 3, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-5, -9, -4, -7)$, $7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 0$, $-2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$.

j). $\mathbf{a}_1 = (0, 0, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 3, 3, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -1, -3, 0)$, $x_1 + x_2 = 0$.

k). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 7, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 5, -4, 8)$, $4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$, $2x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0$.

l). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 2, 1, 0)$, $3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$.

m). $\mathbf{a}_1 = (-2, 0, -3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1, -1)$, $x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

n). $\mathbf{b}_1 = (-3, 3, -3, 6)$, $\mathbf{b}_2 = (5, -1, 1, -8)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -1, 1, 1)$, $9x_1 - 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 0$, $-9x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0$.

o). $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, -3, 0)$, $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$, $6x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$.

p). $\mathbf{a}_1 = (-1, -3, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 4, 1, 6)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 4, 1, 6)$, $8x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$, $6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$.

q). $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -6, 8, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 6, -1, 6)$, $x_1 + x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0$.

r). $\mathbf{a}_1 = (-3, 2, -2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 0, -1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, 2, -3)$, $2x_1 + 3x_2 = 0$, $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$.

s). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (7, 2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (14, 4, 0, 6)$, $-9x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$.

t). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-7, 6, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 0, 4, -2)$, $x_1 - 2x_2 - 4x_3 -$

$7x_4 = 0$, $x_1 - x_3 - x_4 = 0$.

u). $\mathbf{a}_1 = (3, 1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, -1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 5, -1, -2)$, $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0$.

v). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -2, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 3, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 0, 3)$, $x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$.

w). $\mathbf{a}_1 = (-3, -3, 1, -3)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, -1, -2)$, $5x_1 + x_3 - 4x_4 = 0$, $4x_1 + x_2 - 3x_4 = 0$.

x). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 6, 0, 3)$, $8x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$, $-x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$.

55. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$

a). $A\mathbf{x} = (x_1 + 2x_3; x_1 + 2x_2 + x_3; -3x_1 + 2x_2 - 2x_3)$;

b). $A\mathbf{x} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3; 3x_1 + x_2 + x_3; x_1 - x_2 - 3x_3)$;

c). $A\mathbf{x} = (3x_1 - 2x_2 - 2x_3; -3x_1 + 2x_2 + 2x_3; 2x_2 + 2x_3)$;

d). $A\mathbf{x} = (-3x_1 + x_2 + 2x_3; 2x_1 + x_2 + 2x_3; 3x_1 + x_2 + 3x_3)$;

e). $A\mathbf{x} = (-2x_1 - x_2; 3x_1 + 3x_2 + 2x_3; -3x_1 + x_2 + 3x_3)$;

f). $A\mathbf{x} = (2x_1 + 2x_2 + x_3; -3x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 - 3x_2 + 2x_3)$;

g). $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 + x_3; -3x_1 + x_2 + 3x_3; x_1 + 3x_2)$;

h). $A\mathbf{x} = (3x_1 + 2x_2 + 3x_3; -3x_1 + 2x_2 - 3x_3; x_1 + 2x_2)$;

i). $A\mathbf{x} = (-3x_1 - 2x_2 - 2x_3; x_1 + 3x_2 - 2x_3; -x_2 + x_3)$;

j). $A\mathbf{x} = (3x_1 + 3x_2 + x_3; x_1 + 3x_3; x_1 - 2x_2 - 2x_3)$;

k). $A\mathbf{x} = (x_1 + x_2 + 3x_3; -3x_1 - x_2 + 3x_3; 2x_2 + 3x_3)$;

l). $A\mathbf{x} = (2x_1 + 3x_2 - 3x_3; x_1 - 2x_2 - x_3; x_1 + 2x_2 - x_3)$;

m). $A\mathbf{x} = (3x_1 + x_2 - 2x_3; 2x_1 + x_2 - 2x_3; 3x_1 + 3x_2 + 3x_3)$;

n). $A\mathbf{x} = (x_2 - 2x_3; -3x_1 + 3x_2 - 3x_3; 2x_1 + 3x_2 + x_3)$;

o). $A\mathbf{x} = (-3x_1 - 2x_2 + 3x_3; 3x_1 + 3x_2; 2x_1 + 2x_2 + 3x_3)$;

p). $A\mathbf{x} = (3x_1 + x_2 + 2x_3; x_1 + 2x_2; 3x_1 - 2x_2 + 2x_3)$;

q). $A\mathbf{x} = (3x_1 + 2x_2 + x_3; x_1 - 2x_2 - 3x_3; -2x_1 + x_3)$;

r). $A\mathbf{x} = (x_1 - 3x_2 + x_3; -x_1 - x_2 - 3x_3; x_2 + x_3)$;

s). $A\mathbf{x} = (2x_2 + 2x_3; x_1 + 2x_2 - 2x_3; 3x_1 + 3x_2 + 2x_3)$;

t). $A\mathbf{x} = (x_1 + 3x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3; 2x_1 + 2x_2)$;

u). $A\mathbf{x} = (3x_2 + x_3; 2x_1 + x_2 - x_3; -x_1 - 3x_2 - 3x_3)$;

v). $A\mathbf{x} = (x_1 + x_2 - x_3; 2x_1 + 3x_2 - 3x_3; 3x_1 - 2x_2 + 3x_3)$;

w). $A\mathbf{x} = (3x_1 + 2x_2 + 3x_3; 3x_1 + 2x_2 + 3x_3; -x_2 - 2x_3)$;

x). $A\mathbf{x} = (3x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 + x_2 + 3x_3; 2x_1 + 3x_3)$;

56. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]_2$

a). $Af = f'' + 2f'$;
b). $(Af)(x) = f(-1) + f(0)x + f(2)x^2$;
c). $(Af)(x) = f(x-3) + f(0)x + f'(x)$;
d). $(Af)(x) = f(0) + f(2)x + f(0)x^2$;
e). $Af = -2f'' - 3f'$;
f). $(Af)(x) = f(-2) + f(1)x + f(1)x^2$;
g). $(Af)(x) = f(x) + f(3)x + f'(x)$;
h). $Af = -3f' + 2f$;
i). $(Af)(x) = f(2) + f(2)x + f(0)x^2$;
j). $(Af)(x) = f(x+3) + f(2)x + f'(x)$;
k). $Af = -f$;
l). $(Af)(x) = f(3) + f(1)x + f(3)x^2$;
m). $(Af)(x) = f(x-3) + f(0)x + f'(x)$;
n). $Af = 2f'' + 3f$;
o). $(Af)(x) = f(1) + f(0)x + f(-3)x^2$;
p). $(Af)(x) = f(x+2) + f(2)x + f'(x)$;
q). $Af = -3f'' + 3f' + 3f$;
r). $(Af)(x) = f(0) + f(0)x + f(3)x^2$;
s). $(Af)(x) = f(x) + f(0)x + f'(x)$;
t). $Af = -f'' - 3f$;
u). $(Af)(x) = f(0) + f(1)x + f(1)x^2$;
v). $(Af)(x) = f(x+1) + f(3)x + f'(x)$;
w). $Af = f'$;
x). $(Af)(x) = f(-1) + f(3)x + f(2)x^2$.

57. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и его определитель. Отображение задано по формуле: для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

a). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;
b). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

c). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;

d). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

e). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

f). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

g). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

h). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

i). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

j). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

k). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

l). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

m). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

n). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$;

o). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

p). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$;

q). $AX = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

r). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \mathsf{X}$;

s). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

t). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$;

u). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

v). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

w). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \mathsf{X}$;

x). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

58. Доказать, что существует единственный линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ и переводящий вектор $\mathbf{a}_1$ в вектор $\mathbf{b}_1$, вектор $\mathbf{a}_2$ в вектор $\mathbf{b}_2$ и вектор $\mathbf{a}_3$ в вектор $\mathbf{b}_3$. Найти его матрицу в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (-4; 2; 1)$; $\mathbf{a}_2 = (0; -1; 2)$; $\mathbf{a}_3 = (1; -1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (1; -3; 3)$; $\mathbf{b}_2 = (3; 2; 3)$; $\mathbf{b}_3 = (2; 2; 1)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (3; 2; -1)$; $\mathbf{a}_2 = (1; 1; 0)$; $\mathbf{a}_3 = (1; 1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (4; 1; -4)$; $\mathbf{b}_2 = (1; 1; -1)$; $\mathbf{b}_3 = (-2; 0; -2)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (4; -3; 3)$; $\mathbf{a}_2 = (1; 1; -3)$; $\mathbf{a}_3 = (-1; 0; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-1; -3; 1)$; $\mathbf{b}_2 = (2; -1; -2)$; $\mathbf{b}_3 = (-1; 1; 1)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (-1; 2; -2)$; $\mathbf{a}_2 = (-1; 1; -1)$; $\mathbf{a}_3 = (1; 0; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-1; -2; 0)$; $\mathbf{b}_2 = (1; -2; -1)$; $\mathbf{b}_3 = (-3; 3; 3)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (1; 1; 0)$; $\mathbf{a}_2 = (3; 3; 1)$; $\mathbf{a}_3 = (3; 2; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (1; -1; -1)$; $\mathbf{b}_2 = (2; 0; -4)$; $\mathbf{b}_3 = (-1; -2; -3)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (1; -4; -2)$; $\mathbf{a}_2 = (2; 3; 1)$; $\mathbf{a}_3 = (0; 2; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (2; 1; -4)$; $\mathbf{b}_2 = (-2; 3; -4)$; $\mathbf{b}_3 = (-1; 0; 1)$.

g). $\mathbf{a}_1 = (-2; 1; 0)$; $\mathbf{a}_2 = (-1; 3; 2)$; $\mathbf{a}_3 = (1; 1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-4; 2; -2)$; $\mathbf{b}_2 = (-3; -2; 1)$; $\mathbf{b}_3 = (1; -3; 2)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (1; 1; 0)$; $\mathbf{a}_2 = (3; 4; 1)$; $\mathbf{a}_3 = (3; 3; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-1; -2; -1)$; $\mathbf{b}_2 = (-2; -2; -3)$; $\mathbf{b}_3 = (-3; -3; -1)$.

i). $\mathbf{a}_1 = (2; 1; 1)$; $\mathbf{a}_2 = (2; -1; 2)$; $\mathbf{a}_3 = (1; -1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-2; -4; -3)$; $\mathbf{b}_2 = (1; -1; -2)$; $\mathbf{b}_3 = (1; 0; -1)$.

j). $\mathbf{a}_1 = (3; 2; 0)$; $\mathbf{a}_2 = (-1; -2; -1)$; $\mathbf{a}_3 = (2; 3; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-1; 1; 0)$; $\mathbf{b}_2 = (-2; 4; 2)$; $\mathbf{b}_3 = (2; -4; -3)$.

k). $\mathbf{a}_1 = (-2; -4; -3)$; $\mathbf{a}_2 = (2; 3; 2)$; $\mathbf{a}_3 = (1; 1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-2; -3; 4)$; $\mathbf{b}_2 = (1; 4; -4)$; $\mathbf{b}_3 = (-1; 2; -3)$.

l). $\mathbf{a}_1 = (-1; -1; -2)$; $\mathbf{a}_2 = (1; 2; 1)$; $\mathbf{a}_3 = (1; 1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (4; -1; -4)$; $\mathbf{b}_2 = (-2; -1; 4)$; $\mathbf{b}_3 = (-3; -1; 2)$.

m). $\mathbf{a}_1 = (2; -3; -1)$; $\mathbf{a}_2 = (1; 1; -1)$; $\mathbf{a}_3 = (-1; 0; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (2; 0; -1)$; $\mathbf{b}_2 = (3; 2; 3)$; $\mathbf{b}_3 = (-2; -1; -2)$.

n). $\mathbf{a}_1 = (3; 4; 2)$; $\mathbf{a}_2 = (1; 1; 0)$; $\mathbf{a}_3 = (1; 2; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (0; -3; 3)$; $\mathbf{b}_2 = (1; -1; 2)$; $\mathbf{b}_3 = (-1; -2; 2)$.

o). $\mathbf{a}_1 = (1; -3; -1)$; $\mathbf{a}_2 = (1; 1; 0)$; $\mathbf{a}_3 = (-2; 1; 1)$; $\mathbf{b}_1 = (-4; 3; 1)$; $\mathbf{b}_2 = (3; 0; 3)$; $\mathbf{b}_3 = (-1; -2; -4)$.

p). $\mathbf{a}_1=(1;-1;2)$; $\mathbf{a}_2=(4;-1;-2)$; $\mathbf{a}_3=(-3;1;1)$; $\mathbf{b}_1=(2;-4;4)$; $\mathbf{b}_2=(-3;3;2)$; $\mathbf{b}_3=(2;-1;-2)$.

q). $\mathbf{a}_1=(4;3;2)$; $\mathbf{a}_2=(3;2;1)$; $\mathbf{a}_3=(0;1;1)$; $\mathbf{b}_1=(3;3;3)$; $\mathbf{b}_2=(3;4;1)$; $\mathbf{b}_3=(-1;-4;2)$.

r). $\mathbf{a}_1=(-3;-3;-2)$; $\mathbf{a}_2=(3;2;1)$; $\mathbf{a}_3=(1;1;1)$; $\mathbf{b}_1=(4;4;-2)$; $\mathbf{b}_2=(-3;-1;2)$; $\mathbf{b}_3=(-1;-2;1)$.

s). $\mathbf{a}_1=(3;2;1)$; $\mathbf{a}_2=(-1;-1;-1)$; $\mathbf{a}_3=(2;2;1)$; $\mathbf{b}_1=(2;0;-3)$; $\mathbf{b}_2=(1;2;2)$; $\mathbf{b}_3=(1;-2;-1)$.

t). $\mathbf{a}_1=(1;1;3)$; $\mathbf{a}_2=(1;0;-1)$; $\mathbf{a}_3=(2;1;1)$; $\mathbf{b}_1=(4;3;-1)$; $\mathbf{b}_2=(0;-4;4)$; $\mathbf{b}_3=(3;-2;4)$.

u). $\mathbf{a}_1=(-1;-2;1)$; $\mathbf{a}_2=(2;1;0)$; $\mathbf{a}_3=(-2;-2;1)$; $\mathbf{b}_1=(-2;-4;4)$; $\mathbf{b}_2=(4;3;0)$; $\mathbf{b}_3=(-3;-4;3)$.

v). $\mathbf{a}_1=(-2;4;-3)$; $\mathbf{a}_2=(1;0;1)$; $\mathbf{a}_3=(1;-1;1)$; $\mathbf{b}_1=(-1;-4;1)$; $\mathbf{b}_2=(-2;3;4)$; $\mathbf{b}_3=(-1;2;1)$.

w). $\mathbf{a}_1=(1;1;-1)$; $\mathbf{a}_2=(3;-1;2)$; $\mathbf{a}_3=(0;-1;1)$; $\mathbf{b}_1=(1;0;2)$; $\mathbf{b}_2=(1;-3;-1)$; $\mathbf{b}_3=(-1;-1;-1)$.

x). $\mathbf{a}_1=(2;1;1)$; $\mathbf{a}_2=(1;3;2)$; $\mathbf{a}_3=(1;1;1)$; $\mathbf{b}_1=(2;-4;-2)$; $\mathbf{b}_2=(4;3;3)$; $\mathbf{b}_3=(1;-1;0)$.

59. Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u.

a). $A_e=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&3&-2\\3&1&1\end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1=(-3;-3;-1)$; $\mathbf{e}_2=(3;1;2)$; $\mathbf{e}_3=(1;0;1)$; $\mathbf{u}_1=(-2;-1;-1)$; $\mathbf{u}_2=(1;-4;3)$; $\mathbf{u}_3=(1;-2;2)$;

b). $A_e=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&-2&3\\1&0&-1\end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1=(-2;-3;0)$; $\mathbf{e}_2=(2;4;1)$; $\mathbf{e}_3=(1;3;1)$; $\mathbf{u}_1=(-3;-2;2)$; $\mathbf{u}_2=(0;1;1)$; $\mathbf{u}_3=(-1;2;3)$;

c). $A_e=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-2&0&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1=(2;1;0)$; $\mathbf{e}_2=(-2;-1;-1)$; $\mathbf{e}_3=(3;2;1)$; $\mathbf{u}_1=(3;2;4)$; $\mathbf{u}_2=(1;1;1)$; $\mathbf{u}_3=(1;1;2)$;

d). $A_e=\begin{pmatrix}0&1&2\\-2&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1=(2;-2;-1)$; $\mathbf{e}_2=(-2;-1;2)$; $\mathbf{e}_3=(-1;-1;1)$; $\mathbf{u}_1=(3;3;-4)$; $\mathbf{u}_2=(2;3;-3)$; $\mathbf{u}_3=(3;1;-3)$;

e). $A_e=\begin{pmatrix}1&-2&3\\3&-3&3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1=(3;-2;2)$; $\mathbf{e}_2=(-1;1;0)$; $\mathbf{e}_3=(1;-1;1)$; $\mathbf{u}_1=(-3;0;-4)$; $\mathbf{u}_2=(3;-1;3)$; $\mathbf{u}_3=(2;-2;1)$;

f). $A_e=\begin{pmatrix}3&0&-1\\3&-2&-2\\2&0&-2\end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1=(2;2;1)$; $\mathbf{e}_2=(1;1;1)$; $\mathbf{e}_3=(1;0;1)$; $\mathbf{u}_1=(-2;0;-1)$; $\mathbf{u}_2=(3;3;2)$; $\mathbf{u}_3=(2;1;1)$;

g). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1;2;2)$; $\mathbf{e}_2 = (3;4;3)$; $\mathbf{e}_3 = (0;1;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1;-3;-2)$; $\mathbf{u}_2 = (2;2;1)$; $\mathbf{u}_3 = (2;3;2)$;

h). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2;2;1)$; $\mathbf{e}_2 = (2;3;2)$; $\mathbf{e}_3 = (1;1;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1;-4;-2)$; $\mathbf{u}_2 = (2;1;1)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;-2;-1)$;

i). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1;2;2)$; $\mathbf{e}_2 = (-4;1;3)$; $\mathbf{e}_3 = (-2;0;1)$; $\mathbf{u}_1 = (4;2;1)$; $\mathbf{u}_2 = (1;1;1)$; $\mathbf{u}_3 = (2;-1;-2)$;

j). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (4;2;-1)$; $\mathbf{e}_2 = (0;-1;2)$; $\mathbf{e}_3 = (-1;-1;1)$; $\mathbf{u}_1 = (3;2;-2)$; $\mathbf{u}_2 = (1;1;-2)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;0;-1)$;

k). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1;1;-1)$; $\mathbf{e}_2 = (-1;2;1)$; $\mathbf{e}_3 = (0;1;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2;3;-1)$; $\mathbf{u}_2 = (-1;1;-2)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;0;-4)$;

l). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (3;1;-1)$; $\mathbf{e}_2 = (2;-1;-1)$; $\mathbf{e}_3 = (-2;2;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3;-3;1)$; $\mathbf{u}_2 = (2;-3;-1)$; $\mathbf{u}_3 = (3;2;-1)$;

m). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (0;1;1)$; $\mathbf{e}_2 = (-1;-1;-2)$; $\mathbf{e}_3 = (-1;1;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-4;2;1)$; $\mathbf{u}_2 = (3;0;1)$; $\mathbf{u}_3 = (-2;-1;-2)$;

n). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1;1;0)$; $\mathbf{e}_2 = (2;4;1)$; $\mathbf{e}_3 = (2;3;1)$; $\mathbf{u}_1 = (3;2;0)$; $\mathbf{u}_2 = (1;3;1)$; $\mathbf{u}_3 = (1;-2;-1)$;

o). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1;3;1)$; $\mathbf{e}_2 = (-2;3;1)$; $\mathbf{e}_3 = (-2;2;1)$; $\mathbf{u}_1 = (1;-1;-1)$; $\mathbf{u}_2 = (-1;-1;0)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;2;1)$;

p). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2;2;1)$; $\mathbf{e}_2 = (-3;-1;-1)$; $\mathbf{e}_3 = (1;2;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1;4;1)$; $\mathbf{u}_2 = (1;3;1)$; $\mathbf{u}_3 = (-3;2;0)$;

q). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1;-2;-3)$; $\mathbf{e}_2 = (2;2;1)$; $\mathbf{e}_3 = (1;1;1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3;-4;-3)$; $\mathbf{u}_2 = (2;1;-2)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;-1;0)$;

r). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2;1;0)$; $\mathbf{e}_2 = (3;-1;1)$; $\mathbf{e}_3 = (2;-2;1)$; $\mathbf{u}_1 = (4;-2;1)$; $\mathbf{u}_2 = (3;-2;1)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;-1;0)$;

s). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2;2;-3)$; $\mathbf{e}_2 = (2;1;2)$; $\mathbf{e}_3 = (1;0;1)$; $\mathbf{u}_1 = (0;-4;1)$; $\mathbf{u}_2 = (-1;3;-2)$; $\mathbf{u}_3 = (-1;2;-2)$;

t). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; 4; 2)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -3; -1)$; $\mathbf{e}_2 = (-1; 1; 0)$; $\mathbf{u}_2 = (-1; -3; -3)$; $\mathbf{e}_3 = (-1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (0; 4; 3)$;

u). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -2; 0)$; $\mathbf{u}_1 = (3; -2; 1)$; $\mathbf{e}_2 = (-1; -1; -1)$; $\mathbf{u}_2 = (-4; -2; -3)$; $\mathbf{e}_3 = (1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (3; 1; 2)$;

v). $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; -2; -2)$; $\mathbf{u}_1 = (1; -2; -3)$; $\mathbf{e}_2 = (-1; 2; 1)$; $\mathbf{u}_2 = (-2; 2; 3)$; $\mathbf{e}_3 = (0; 1; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (1; -1; -2)$;

w). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; 0; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; -2; -1)$; $\mathbf{e}_2 = (4; 3; 1)$; $\mathbf{u}_2 = (4; 2; -1)$; $\mathbf{e}_3 = (2; 2; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (-1; -1; -1)$;

x). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (1; 0; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; -2; -3)$; $\mathbf{e}_2 = (2; -2; -1)$; $\mathbf{u}_2 = (4; -3; 0)$; $\mathbf{e}_3 = (-3; 3; 1)$; $\mathbf{u}_3 = (-2; 1; -1)$;

60. Линейный оператор A в базисе $\mathbf{f}_1(x) = 1$, $\mathbf{f}_2(x) = x$, $\mathbf{f}_3(x) = x^2$ имеет матрицу A_f. Найти матрицу A_g линейного оператора A в базисе $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

a). $A_f = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 1 + 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = x + x^2$;

b). $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + x - x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + x$; $\mathbf{g}_3(x) = -2 + x + x^2$;

c). $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 - 2x - 3x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = x + x^2$;

d). $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -2 + 2x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x^2$;

e). $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -2 - 2x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 2 + x$; $\mathbf{g}_3(x) = -3 - 2x + x^2$;

f). $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -1 - 2x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2x + 3x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 - x + x^2$;

g). $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -3 + 2x$; $\mathbf{g}_2(x) = 1 - 2x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 3 - 3x + x^2$;

h). $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x$; $\mathbf{g}_2(x) = 2 + 2x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 2 + x + x^2$;

i). $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 3 + 2x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 2 + x$; $\mathbf{g}_3(x) = 2 + 2x + x^2$;

j). $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + x$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + 2x + x^2$;

k). $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 2 + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 2 - x + 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 1 - x + x^2$;

l). $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 3 + 3x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 - 2x - x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 2 + 3x + x^2$;

m). $A_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 3 + x + 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 3 + x^2$;

n). $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -1 + x$; $\mathbf{g}_2(x) = 2 - 3x - 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -2 + 2x + x^2$;

o). $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -2 - 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 - 2x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -3 - 3x + x^2$;

p). $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 1 - x - 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x + x^2$;

q). $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 - 2x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + 3x - 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -x + x^2$;

r). $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 + x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + 3x + 2x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = x + x^2$;

s). $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = -2 - x + 3x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 + x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x^2$;

t). $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{g}_1(x) = 1 - 2x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -2 + x - 3x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 1 + x^2$;

u). $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{g}_1(x) = -1 + x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 1 + x - x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -1 + x^2$;

v). $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{g}_1(x) = -1 - 2x + 2x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 - x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = -2x + x^2$;

w). $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{g}_1(x) = -1 - x - x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = -1 - 2x - x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = 3x + x^2$;

x). $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{g}_1(x) = 1 + x + x^2$; $\mathbf{g}_2(x) = 3 + 2x + x^2$; $\mathbf{g}_3(x) = x + x^2$.

61. Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу A_e. Найти матрицу A_u линейного оператора A в базисе u, если известно разложение векторов базиса e в линейные комбинации по базису u.

a). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$;

b). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$;

c). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

d). $A_e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

e). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$;

f). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$;

g). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$;

h). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

i). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$;

j). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$;

k). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$;

l). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$;

m). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

n). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$;

o). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$;

p). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$;

q). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

r). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

s). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

t). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$;

u). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad$ $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

v). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$;

w). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_3$;

x). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$; $\mathbf{e}_2 = -3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$; $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$;

62. Линейный оператор A в базисе v имеет матрицу A_v. Линейный оператор B в базисе u имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов $A + B$ и $A - 2B$ в базисе u.

a). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; 3); \mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; -2); \mathbf{u}_2 = (3; -5)$;

b). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; 1); \mathbf{e}_2 = (-3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-7; 4); \mathbf{u}_2 = (5; -3)$;

c). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; -2); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (3; 5); \mathbf{u}_2 = (4; 7)$;

d). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; -1); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (5; 3); \mathbf{u}_2 = (3; 2)$;

e). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; 2); \mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; 5); \mathbf{u}_2 = (1; -3)$;

f). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2; 1); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (5; 3); \mathbf{u}_2 = (3; 2)$;

g). $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; -2); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; 3); \mathbf{u}_2 = (-2; -5)$;

h). $A_e = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-3; 1); \mathbf{e}_2 = (-4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; 2); \mathbf{u}_2 = (2; -1)$;

i). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-1; 2); \mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -7); \mathbf{u}_2 = (1; -3)$;

j). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2; 1); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-7; -5); \mathbf{u}_2 = (3; 2)$;

k). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (3; 2); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; -1); \mathbf{u}_2 = (-5; -3)$;

l). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-7; 2); \mathbf{e}_2 = (-4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -1); \mathbf{u}_2 = (3; -1)$;

m). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; 3); \mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; 7); \mathbf{u}_2 = (-3; 4)$;

n). $A_e = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-3; -2); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (4; 3); \mathbf{u}_2 = (-7; -5)$;

o). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; -3); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-3; -5); \mathbf{u}_2 = (-1; -2)$;

p). $A_e = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2; 1); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (5; 3); \mathbf{u}_2 = (3; 2)$;

q). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (3; -2); \mathbf{e}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (5; -3); \mathbf{u}_2 = (2; -1)$;

r). $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-3; -2); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (1; 2); \mathbf{u}_2 = (-1; -1)$;

s). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2; 1); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; -3); \mathbf{u}_2 = (7; 4)$;

t). $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-5; -2); \mathbf{e}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-7; -3); \mathbf{u}_2 = (-2; -1)$;

u). $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (2; 1); \mathbf{e}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (7; 4); \mathbf{u}_2 = (5; 3)$;

v). $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (3; 1); \mathbf{e}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; -1); \mathbf{u}_2 = (-4; -1)$;

w). $A_e = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (-2; 1); \mathbf{e}_2 = (-3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-7; 3); \mathbf{u}_2 = (-5; 2)$;

x). $A_e = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{e}_1 = (7; 2); \mathbf{e}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; -1); \mathbf{u}_2 = (-4; -1)$;

63. Линейный оператор A в базисе v имеет матрицу A_v, линейный оператор B в базисе u имеет матрицу B_u. Найти матрицы линейных операторов AB и $(A^2 + B)$ в базисе, в котором даны координаты всех векторов.

a). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (4; 3); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; -1); \mathbf{u}_2 = (-1; 1)$.

b). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (7; 2); \mathbf{v}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; -3); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

c). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (3; 2); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1; -1); \mathbf{u}_2 = (2; 1)$.

d). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (2; 1); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; -3); \mathbf{u}_2 = (2; 1)$.

e). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (3; 2); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; 1); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

f). $A_v = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7; 2); \mathbf{v}_2 = (-4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; 1); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

g). $A_v = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7; -4); \mathbf{v}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1; 1); \mathbf{u}_2 = (-2; 1)$.

h). $A_v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (5; 4); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (5; -2); \mathbf{u}_2 = (-2; 1)$.

i). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7; -2); \mathbf{v}_2 = (4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; -1); \mathbf{u}_2 = (3; 1)$.

j). $A_v = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (7; 2); \mathbf{v}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1; 2); \mathbf{u}_2 = (-1; 1)$.

k). $A_v = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (3; 1); \mathbf{v}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1; 1); \mathbf{u}_2 = (-2; 1)$.

l). $A_v = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (3; 2); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; 1); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

m). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-1; 2); \mathbf{v}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-7; -2); \mathbf{u}_2 = (4; 1)$.

n). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7; 2); \mathbf{v}_2 = (-4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1; -2); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

o). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7; 4); \mathbf{v}_2 = (-2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-5; 3); \mathbf{u}_2 = (-2; 1)$.

p). $A_v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-2; -3); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (4; 3); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

q). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-5; -2); \mathbf{v}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (4; -1); \mathbf{u}_2 = (-3; 1)$.

r). $A_v = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-1; 1); \mathbf{v}_2 = (-2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-1; 1); \mathbf{u}_2 = (-2; 1)$.

s). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (5; 2); \mathbf{v}_2 = (2; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; -3); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

t). $A_v = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-5; -2); \mathbf{v}_2 = (3; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; 3); \mathbf{u}_2 = (-1; 1)$.

u). $A_v = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (4; -3); \mathbf{v}_2 = (-1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (2; 1); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

v). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (4; 3); \mathbf{v}_2 = (1; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; -1); \mathbf{u}_2 = (3; 1)$.

w). $A_v = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-3; 1); \mathbf{v}_2 = (-4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; -3); \mathbf{u}_2 = (1; 1)$.

x). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-7; 2); \mathbf{v}_2 = (-4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (4; 1); \mathbf{u}_2 = (3; 1)$.

y). $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (5; 1); \mathbf{v}_2 = (4; 1)$; $\mathbf{u}_1 = (-2; 3); \mathbf{u}_2 = (-1; 1)$.

z). $A_v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B_u = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v}_1 = (-1;2); \mathbf{v}_2 = (-1;1);$ $\mathbf{u}_1 = (-2;1); \mathbf{u}_2 = (-3;1).$

64. Найти ранг, базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathbb{R}^4$ по правилу $A\mathbf{x} = \mathsf{M}\mathbf{x}$, где матрица M дана ниже.

a). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ n). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

65. Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ такого, что для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

a). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

c). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

g). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

h). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

i). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

j). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

k). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

l). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

m). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

n). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

o). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

p). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

q). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

r). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

s). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

t). $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

u). $AX = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

v). $AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

w). $AX = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

x). $AX = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

y). $AX = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} + \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

66. Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$ такого, что для любой матрицы $\mathsf{X} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R})$

a). $AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

b). $AX = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

c). $AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

d). $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

e). $AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

f). $AX = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

g). $AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

h). $AX = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

i). $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

j). $AX = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

k). $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

l). $AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

m). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

n). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

o). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

p). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

q). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

r). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

s). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

t). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2\mathsf{X}$.

u). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

v). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

w). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \mathsf{X}$.

x). $A\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathsf{X} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\mathsf{X}$.

67. Найдите ранг, базисы ядра и образа линейного оператора $A : \mathbb{C}[x]_3 \to \mathbb{C}[x]_3$, действующего в линейном пространстве $\mathbb{C}[x]_3$ всех многочленов степени не выше 3 с комплексными коэффициентами по правилу

a). $(Af)(x) = (1+x)f'''(x) + (1+x)f''(x) - 2f'(x)$.

b). $(Af)(x) = (-3+x)f'''(x) + (2-x^2)f''(x) + (-2+2x)f'(x)$.

c). $(Af)(x) = (2x+2x^2+x^3)f'''(x) - x^2f''(x) - 2f'(x)$.

d). $(Af)(x) = (1-2x)f'''(x) + (3+2x+x^2)f''(x) - 3(1+x)f'(x) + 3f(x)$.

e). $(Af)(x) = (2-3x+3x^2-2x^3)f'''(x) + (x+x^2)f''(x) + (-3+2x)f'(x)$.

f). $(Af)(x) = (-3+x+x^2-x^3)f'''(x) + (-1-2x^2)f''(x) + (-2+x)f'(x) + 2f(x)$.

g). $(Af)(x) = (1-2x^2)f'''(x) + (3x-x^2)f''(x) + 2f(x)$.

h). $(Af)(x) = (-2+3x^3)f'''(x) + (2+2x)f''(x) + (3+2x)f'(x)$.

i). $(Af)(x) = -x^2f'''(x) + (2+3x+3x^2)f''(x) + (-1+2x)f'(x)$.

j). $(Af)(x) = (2+2x-3x^2)f'''(x) + (-1-x)f'(x) + 2f(x)$.

k). $(Af)(x) = (-2+2x-3x^2-3x^3)f'''(x)+(2+2x)f'(x)-2f(x)$.
l). $(Af)(x) = (2x-3x^3)f'''(x)+(-3+2x^2)f''(x)+(3+2x)f'(x)$.
m). $(Af)(x) = (1+2x-x^2)f'''(x)+(-1+3x+2x^2)f''(x)+2xf'(x)-2f(x)$.
n). $(Af)(x) = (2-x-3x^2+2x^3)f'''(x)+(3+x^2)f''(x)+(2-3x)f'(x)$.
o). $(Af)(x) = (-1-2x)f'''(x)+2f''(x)$.
p). $(Af)(x) = (2x^2-x^3)f'''(x)+x^2f''(x)$.
q). $(Af)(x) = -2x^2f'''(x)+2xf''(x)$.
r). $(Af)(x) = (2+2x-x^2-2x^3)f'''(x)+(-2+x^2)f''(x)+3xf'(x)-3f(x)$.
s). $(Af)(x) = -2(1+x^3)f'''(x)+3x^2f''(x)-3xf'(x)+3f(x)$.
t). $(Af)(x) = (3+3x^2+2x^3)f'''(x)-3x^2f''(x)+3xf'(x)-3f(x)$.
u). $(Af)(x) = (1+3x+2x^2-x^3)f'''(x)+(-3+2x)f''(x)+(-2+3x)f'(x)-3f(x)$.
v). $(Af)(x) = (-1+2x^2-x^3)f'''(x)+(-2-x+2x^2)f''(x)-3xf'(x)+3f(x)$.
w). $(Af)(x) = (x+2x^2-x^3)f'''(x)+(-1-3x)f''(x)+(2+3x)f'(x)-3f(x)$.
x). $(Af)(x) = (2-3x)f'''(x)+(-3-x+x^2)f''(x)+(-1-3x)f'(x)+3f(x)$.
y). $(Af)(x) = (3-2x)f'''(x)+2f''(x)$.
z). $(Af)(x) = (-3+x^2)f'''(x)-2xf''(x)+2f'(x)$.

68. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, выяснить их обратимость. В случае их обратимости найти обратные операторы.
a). $A\mathbf{x} = (-x_1-2x_2+2x_3; -2x_2+3x_3; -x_1-x_2+x_3)$;
b). $A\mathbf{x} = (x_1-x_2-x_3; -x_2-x_3; x_1+2x_2+x_3)$;
c). $A\mathbf{x} = (-x_1-x_2+x_3; -3x_1-x_2+2x_3; -2x_1-x_2+x_3)$;
d). $A\mathbf{x} = (-2x_1+3x_2; -3x_1+3x_2-x_3; 2x_1-2x_2+x_3)$;
e). $A\mathbf{x} = (x_1-2x_2+2x_3; -2x_1+3x_2-x_3; x_1-2x_2+x_3)$;
f). $A\mathbf{x} = (2x_1-3x_2-2x_3; x_1-3x_2-2x_3; 2x_2+x_3)$;
g). $A\mathbf{x} = (-x_1+2x_2+x_3; 3x_1-3x_2-2x_3; -2x_1+2x_2+x_3)$;
h). $A\mathbf{x} = (x_1+2x_2-2x_3; -x_1+2x_2-x_3; -x_2+x_3)$;
i). $A\mathbf{x} = (3x_1-x_2-x_3; -2x_1+x_2+x_3; x_1+x_3)$;
j). $A\mathbf{x} = (x_1-2x_2-2x_3; -x_1+3x_2+2x_3; x_2+x_3)$;
k). $A\mathbf{x} = (-x_1-x_2-x_3; 2x_1+x_2; 2x_1+x_2+x_3)$;
l). $A\mathbf{x} = (-2x_1+3x_2+2x_3; -2x_1+2x_2+x_3; -x_1+x_2+x_3)$;
m). $A\mathbf{x} = (x_1+-x_2+-x_3; x_1+x_2; -2x_1-x_2+x_3)$;
n). $A\mathbf{x} = (-2x_1+x_2-x_3; -3x_1+x_2; 3x_1+-x_2+x_3)$;
o). $A\mathbf{x} = (-x_1-x_2-x_3; 2x_1+x_2; 2x_1+x_2+x_3)$;
p). $A\mathbf{x} = (-2x_1-3x_2+3x_3; -x_1-x_2+x_3; -2x_1-2x_2+x_3)$;
q). $A\mathbf{x} = (-x_1+x_2-x_3; x_1-2x_2+x_3; -3x_2+x_3)$;
r). $A\mathbf{x} = (x_1-3x_2+x_3; x_1+x_2; x_1-2x_2+x_3)$;
s). $A\mathbf{x} = (-x_1+x_2-2x_3; 2x_1-x_2+2x_3; x_1-x_2+x_3)$;

t). $A\mathbf{x} = (x_1 - x_3; -2x_1 - 2x_2 + 3x_3; -x_1 - x_2 + x_3)$;
u). $A\mathbf{x} = (-2x_1 - 3x_2 + 3x_3; x_1 + x_2; -x_1 - x_2 + x_3)$;
v). $A\mathbf{x} = (2x_1 + 2x_2 + x_3; x_1 + 2x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3)$;
w). $A\mathbf{x} = (x_1 + 2x_2 + 2x_3; -x_2 - x_3; -x_1 + 2x_2 + x_3)$;
x). $A\mathbf{x} = (2x_1 - 3x_2 - 2x_3; -x_2 - x_3; -x_1 + 2x_2 + x_3)$;

69. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_3$ всех полиномов степени не выше третьей с вещественными коэффициентами, найдите их обратные операторы A^{-1}, если они существуют, или докажите их необратимость. Линейные операторы действуют по правилу: для любого многочлена $f \in \mathbb{C}[x]_3$

a). $Af = 2f''' - f'' - f$;
b). $Af = 2f''' + 2f'' - f$;
c). $Af = -f'' + 2f' - f$;
d). $Af = -2f'' - f$;
e). $Af = f''' - f'' - f$;
f). $Af = 2f''' - f$;
g). $Af = f''' - f$;
h). $Af = f''' + f'' + f' - f$;
i). $Af = f''' + f'' - f$;
j). $Af = 2f''' - f'' - f' - f$;
k). $Af = 2f''' + f'' - 2f' + f$;
l). $Af = f''' - 2f'' - f' + f$;
m). $Af = -f'' + f' + f$;
n). $Af = 2f''' + 2f'' - f' - f$;
o). $Af = f'' + 2f' + f$;
p). $Af = 2f''' + 2f'' - 2f' + f$;
q). $Af = -2f'' + 2f' - f$;
r). $Af = 2f''' - 2f'' + f$;
s). $Af = f''' + f'' - f' + f$;
t). $Af = 2f''' - 2f'' - f$;
u). $Af = f''' + f'' - 2f' + f$;
v). $Af = f' - f$;
w). $Af = f'' - f$;
x). $Af = 2f''' - 2f'' + f' - f$;

70. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ всех многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами, найдите их обратные операторы A^{-1}, если они существуют, или докажите необратимость этих операторов. Линейные операторы действуют по правилу: для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]_2$

a). $Af = 2f'' - 2f' + f$;
b). $Af = 2f'' - 2f' - f$;
c). $Af = -f' + f$;
d). $Af = f'' - f' + f$;
e). $Af = f'' - f' - f$;
f). $Af = 2f'' - f' + f$;
g). $Af = 2f'' - f' - f$;
h). $Af = f'' + f$;
i). $Af = f'' - f$;
j). $Af = 2f'' + f$;
k). $Af = 2f'' - f$;
l). $Af = f' + f$;
m). $Af = f' - f$;
n). $Af = f'' + f' + f$;
o). $Af = f'' + f' - f$;
p). $Af = 2f'' + f' + f$;
q). $Af = 2f'' + f' - f$;
r). $Af = 2f' - f$;

s). $Af = f'' + 2f' + f$;
t). $Af = f'' + 2f' - f$;
u). $Af = 2f'' + 2f' + f$;
v). $Af = 2f'' + 2f' - f$;
w). $Af = f'' + 3f' + f$;
x). $Af = 2f'' + 3f' + f$.

71. Для следующих линейных операторов A, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ всех многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами, найдите их обратные операторы A^{-1}, если они существуют, или докажите необратимость этих операторов. Линейные операторы действуют по правилу: для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]_2$

a). $Af(x) = (-1 + 2x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$;
b). $Af(x) = (-1 + 2x - 2x^2)f'' + (-1 + 2x)f' - f$;
c). $Af(x) = (1 + 2x + 2x^2)f'' + (2 - 2x)f' + f$;
d). $Af(x) = (2 - 2x - 2x^2)f'' + (2 + 2x)f' - f$;
e). $Af(x) = (-1 - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$;
f). $Af(x) = (2 - 2x - 2x^2)f'' + (-2 + 2x)f' - f$;
g). $Af(x) = (1 + 2x^2)f'' + (-1 - 2x)f' + f$;
h). $Af(x) = (1 - 2x^2)f'' + (-1 + 2x)f' - f$;
i). $Af(x) = (-1 + x)f'' - f' + f$;
j). $Af(x) = (-1 + x - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$;
k). $Af(x) = (x + 2x^2)f'' - 2xf' + f$;
l). $Af(x) = (1 - x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$;
m). $Af(x) = (2 - 2x^2)f'' + (-1 + 2x)f' - f$;
n). $Af(x) = (2 - x + 2x^2)f'' + (1 - 2x)f' + f$;
o). $Af(x) = (-2 + 2x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$;
p). $Af(x) = (2 - x)f'' - 2f' + f$;
q). $Af(x) = (-2 + x - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$;
r). $Af(x) = 2x^2 f'' + (-2 - 2x)f' + f$;
s). $Af(x) = (2 - x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$;
t). $Af(x) = xf'' + f$;
u). $Af(x) = (x + 2x^2)f'' + (-1 - 2x)f' + f$;
v). $Af(x) = (2 + 2x - 2x^2)f'' + (2 + 2x)f' - f$;
w). $Af(x) = (-1 - x)f'' + f' + f$;
x). $Af(x) = (1 + 2x + 2x^2)f'' + (1 - 2x)f' + f$;

72. Найти собственные значения и собственные векторы матриц второго порядка, определенных над полем вещественных чисел.

a). $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. d). $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. g). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
i). $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. j). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
m). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. p). $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
q). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. s). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
u). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. v). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

73. Найти собственные значения и собственные векторы матриц второго порядка, определенных над полем комплексных чисел.

a). $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. d). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.
e). $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. g). $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
i). $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. j). $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.
m). $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. p). $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
q). $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. s). $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
u). $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. v). $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

74. Найти собственные значения и собственные векторы матриц второго порядка, определенных над полем комплексных чисел.

a). $\begin{pmatrix} 1-i & -2+2i \\ 1-2i & -2+2i \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1-i & -1-2i \\ -1-i & -2+i \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ -2-2i & -2+2i \end{pmatrix}$.
d). $\begin{pmatrix} 1-i & -1+i \\ -1-i & -i \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1-i & 1-2i \\ 1-i & -2-i \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
g). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -2+i & -2-i \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -2+i & -1-2i \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+i & -i \end{pmatrix}$.
j). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -1+2i & -2+i \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ -2i & 2-2i \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 2i & -2-i \end{pmatrix}$.
m). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & -1+2i \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-2i & 1-2i \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1-i & 2-i \end{pmatrix}$.
p). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & -2+i \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+2i & -2+i \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 2+i & -2+i \end{pmatrix}$.
s). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ -2+2i & -2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ -1-i & 1-2i \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 1+i & -2i \\ -1-i & -1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 1+i & 1-2i \\ i & 2-2i \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 1+i & 2+2i \\ -1-i & -1-i \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 1+2i & -1-2i \\ 2+2i & -2-i \end{pmatrix}$.

75. Найти собственные значения и собственные векторы матриц третьего порядка, определенных над полем вещественных чисел.

a). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

76. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами четвертого порядка.

a). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

77. Не находя характеристического многочлена, выяснить, являются ли числа 1, 0, -1 собственными значениями линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами. Если да, то найти геометрическую кратность этих собственных значений.

a). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

78. Показать, что следующие матрицы линейных операторов в трехмерном вещественном линейном пространстве можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу (базис не единственен).

a). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; b). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; c). $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

d). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; e). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; f). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

g). $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; h). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; i). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

j). $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; k). $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; l). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

m). $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; n). $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$; o). $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

p). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; q). $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; r). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

s). $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; t). $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; u). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

v). $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; w). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; x). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

79. Показать, что следующие матрицы линейных операторов в четырехмерном вещественном линейном пространстве можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу (базис не единственен).

a). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

80. Показать, что следующие матрицы линейных операторов, действующих в трехмерном комплексном линейном пространстве, можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису.

a). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

81. Показать, что следующие матрицы линейных операторов, действующих в трехмерном линейном пространстве, нельзя привести к диагональному виду путем перехода к новому базису.

a). $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & 4 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

82. Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

a). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ n). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.x). $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

83. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц третьего порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^3$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A третьего порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{AQ}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -5 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ 5 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

84. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц четвертого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^4$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A четвертого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 6 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

85. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц четвертого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^4$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A четвертого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

86. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц пятого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^5$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A пятого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. d). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

i). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

k). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

l). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

n). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

o). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

q). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

r). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

t). $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

u). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

w). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

x). $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

87. а). Найти жорданову нормальную форму следующих матриц шестого порядка.

б). Линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^6$ задан умножением слева на матрицу. Найти базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову форму и найти ее (искомый базис определен неоднозначно).

в). Для каждой из следующих матриц A шестого порядка найти обратимую матрицу Q такую, что матрица $\mathsf{Q}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{Q}$ имеет жорданову нормальную форму (матрица Q определена неоднозначно).

a). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

f). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

h). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

i). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

k). $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

l). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

n). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

o). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

q). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

r). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

t). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

u). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

w). $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

88. Линейный оператор задан в некотором базисе e_1, e_2, e_3, e_4 одной из следующих матриц. Покажите, что линейная оболочка, натянутая на векторы u_1, u_2, является двумерным инвариантным подпространством и найдите в базисе u_1, u_2 матрицу индуцированного в этом подпространстве оператора.

a). $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 4 \\ -4 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 - e_3 + e_4$, $u_2 = -e_1 + e_2 + e_3 - e_4$.

b). $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 - 2e_2 - e_4$, $u_2 = e_1 - e_2$.

c). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 + 2e_4$.

d). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = -e_1 + e_2 - e_3 + 2e_4$.

e). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 + e_3 - e_4$, $u_2 = e_2 - 2e_4$.

f). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -4 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = -e_1 + 2e_2 - 2e_3$.

g). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $u_2 = e_2 - e_3$.

h). $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3 + 2e_4,$ $u_2 = e_2 - e_3 + e_4.$

i). $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_2,$ $u_2 = e_2 + e_3 + e_4.$

j). $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_2 + e_3,$ $u_2 = e_2 + e_3 + e_4.$

k). $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_3 + e_4,$ $u_2 = e_2 - 2e_3 - e_4.$

l). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_3 - e_4,$ $u_2 = e_2 + e_4.$

m). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_2 + e_3 - 2e_4,$ $u_2 = e_2 + e_3 - 2e_4.$

n). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_2 + e_3,$ $u_2 = -e_1 - e_3 - e_4.$

o). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_2 - 2e_4,$ $u_2 = e_1 + 2e_2 - 3e_4.$

p). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + 2e_2 + e_3,$ $u_2 = e_2 + e_3.$

q). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 - e_3 - e_4,$ $u_2 = e_2 + 3e_3.$

r). $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_4,$ $u_2 = e_1 - e_2 + e_4.$

s). $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 - e_2,$ $u_2 = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4.$

t). $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + e_4,$ $u_2 = 2e_1 + e_2 - e_3.$

u). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 + 2e_3 - 2e_4,$ $u_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3 - 2e_4.$

v). $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 - e_2 + e_3,$ $u_2 = e_2 - e_3 + e_4.$

w). $\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3 - e_4,$ $u_2 = e_2 - e_3 + e_4.$

x). $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad u_1 = e_1 - e_2 - e_3 - e_4,$ $u_2 = e_1 - 2e_3 - 2e_4.$

89. Найти все инвариантные подпространства размерностей 1 и 2 для линейных операторов, действующих в линейном комплексном трехмерном пространстве и заданных в некотором базисе следующими матрицами третьего порядка

a). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

90. Найти все инвариантные подпространства размерностей 1 и 2 для линейных операторов, действующих в линейном вещественном трехмерном пространстве и заданных в некотором базисе следующими матрицами третьего порядка

a). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

91. Найти минимальный многочлен каждой из следующих матриц четвертого порядка:

a). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

92. Выяснить, какие из матриц A, B, C третьего порядка подобны между собой. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&3&-1\\-2&-2&1\\-2&-3&2\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-4&-1&4\\-4&-2&5\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&2&2\\-2&-2&-1\end{pmatrix}.$

n). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-4&-5&2\\-4&-4&1\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&-2&1\\1&2&-2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&1&2\\3&-3&-4\end{pmatrix}.$

o). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-1&0&1\\-1&-2&3\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}4&2&1\\-4&-2&-2\\4&4&4\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&5&-2\\1&3&0\end{pmatrix}.$

p). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&-1&2\\-1&-1&2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&2&-2\\-3&3&-3\end{pmatrix}.$

q). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&3&2\\-1&2&2\\1&-3&-3\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&-2&1\\-1&0&-2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&2&1\\4&-3&-2\end{pmatrix}.$

r). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&2&-2\\-3&3&-3\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$

s). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-4&3&4\\4&-2&-3\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&3\\2&-1&2\end{pmatrix}.$

t). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\-1&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-3&1&2\\-2&1&1\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-4&-2&-4\\4&2&4\end{pmatrix}.$

u). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}3&0&-2\\-1&1&1\\3&0&-2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-1&2&1\\4&-4&-3\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$

v). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}-2&2&-2\\1&-1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}-2&1&-3\\1&-1&2\\1&-1&2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$

w). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-2&3&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$

x). $\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}, \mathsf{B}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&3&-1\\-1&3&-1\end{pmatrix}.$

93. Выяснить, подобны ли между собой следующие матрицы четвертого порядка. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

b). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

e). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

f). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

g). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

h). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

i). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

j). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

k). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

l). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

m). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

n). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

o). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

p). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

q). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

r). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

s). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

t). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

u). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

v). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

w). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

x). $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

94. Выяснить, какие из следующих матриц второго порядка подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. d). $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

e). $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. g). $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

i). $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. j). $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. p). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

q). $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. s). $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

u). $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. v). $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

95. Выяснить, какие из следующих матриц третьего порядка подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

96. Выяснить, какие из следующих матриц четвертого порядка подобны диагональным матрицам над полем рациональных, вещественных или комплексных чисел. Найти матрицу, осуществляющую подобие (матрица не единственна).

a). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ n). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

97. В следующих примерах найти длины (нормы) векторов **a**, **b** и угол между ними в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$.

a). $\mathbf{a} = (0, 2, -2, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -1, 1)$.
b). $\mathbf{a} = (2, 0, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 1, -1)$.
c). $\mathbf{a} = (2, 1, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 3, -1, -1)$.
d). $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, -1, 2, 4)$.
e). $\mathbf{a} = (0, 2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 1, 1)$.
f). $\mathbf{a} = (-2, -1, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 3, 4)$.
g). $\mathbf{a} = (2, 3, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 2, 1)$.
h). $\mathbf{a} = (-2, -1, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -1, 3)$.
i). $\mathbf{a} = (-2, -1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1, -1)$.
j). $\mathbf{a} = (-1, 2, -2, -2)$, $\mathbf{b} = (3, 0, 1, 4)$.
k). $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0, 1)$.
l). $\mathbf{a} = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (4, 2, 2, -1)$.
m). $\mathbf{a} = (-1, -2, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -1, -1)$.
n). $\mathbf{a} = (-1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -1, 1)$.
o). $\mathbf{a} = (2, 3, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1, -1)$.
p). $\mathbf{a} = (-1, -2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, -1, 3, 3)$.
q). $\mathbf{a} = (2, 1, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (4, 3, 1, 0)$.
r). $\mathbf{a} = (1, -2, 1, -2)$, $\mathbf{b} = (2, 2, -1, 1)$.

s). $\mathbf{a} = (3, -2, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, -1, -1, 1)$.
t). $\mathbf{a} = (3, 3, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 2, -1)$.
u). $\mathbf{a} = (1, -2, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 4, -1, -1)$.
v). $\mathbf{a} = (-1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, -1, 3)$.
w). $\mathbf{a} = (2, -2, -2, 0)$, $\mathbf{b} = (3, -1, 1, 1)$.
x). $\mathbf{a} = (1, 1, -2, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, -1, 0)$.

98. В следующих примерах найти длины (нормы) элементов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ и угол между ними в евклидовом пространстве всех многочленов с вещественными коэффициентами

• и скалярным произведением $\int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$.
a). $\mathbf{f}(x) = x$, $\mathbf{g}(x) = -x + 1$.
b). $\mathbf{f}(x) = 1$, $\mathbf{g}(x) = x + 1$.
c). $\mathbf{f}(x) = 4x + 4$, $\mathbf{g}(x) = 3x + 1$.
d). $\mathbf{f}(x) = x$, $\mathbf{g}(x) = -x + 1$.

• и скалярным произведением $\int_{0}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$.
e). $\mathbf{f}(x) = -2x + 1$, $\mathbf{g}(x) = x$.
f). $\mathbf{f}(x) = 1$, $\mathbf{g}(x) = -2x + 2$.
g). $\mathbf{f}(x) = -1$, $\mathbf{g}(x) = -x$.
h). $\mathbf{f}(x) = -3x + 4$, $\mathbf{g}(x) = 4x - 3$.
i). $\mathbf{f}(x) = -x$, $\mathbf{g}(x) = x - 1$.
j). $\mathbf{f}(x) = -1$, $\mathbf{g}(x) = 3x - 1$.
k). $\mathbf{f}(x) = 3x - 4$, $\mathbf{g}(x) = x + 1$.
l). $\mathbf{f}(x) = 3x - 2$, $\mathbf{g}(x) = -x + 1$.
m). $\mathbf{f}(x) = 2x - 1$, $\mathbf{g}(x) = 3x - 2$.
n). $\mathbf{f}(x) = -x$, $\mathbf{g}(x) = 1$.
o). $\mathbf{f}(x) = -2x + 3$, $\mathbf{g}(x) = 3x + 2$.
p). $\mathbf{f}(x) = -2$, $\mathbf{g}(x) = 1 - x$.

• и скалярным произведением $\int_{-1}^{0} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)\,dx$.
q). $\mathbf{f}(x) = -3x + 1$, $\mathbf{g}(x) = 4x + 1$.
r). $\mathbf{f}(x) = 3x + 1$, $\mathbf{g}(x) = 1$.
s). $\mathbf{f}(x) = -1$, $\mathbf{g}(x) = x + 1$.
t). $\mathbf{f}(x) = 2x + 1$, $\mathbf{g}(x) = x$.
u). $\mathbf{f}(x) = -x - 1$, $\mathbf{g}(x) = 4x + 2$.
v). $\mathbf{f}(x) = 1$, $\mathbf{g}(x) = x + 1$.
w). $\mathbf{f}(x) = -3x + 1$, $\mathbf{g}(x) = x + 2$.
x). $\mathbf{f}(x) = x$, $\mathbf{g}(x) = x + 1$.

99. Проверить, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ортогональна в $\mathbb{E}^4$ и дополнить ее до ортогонального базиса (дополнение не единственно).
a). $\mathbf{a}_1 = (2, -2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 1, 1)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, -2, 1, 3)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (3, -5, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 1, 2)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -2, 0)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (3, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, 0, 0)$.
f). $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 1)$.
g). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 1, 1)$.
h). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 1, 0)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 3, 1)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3, 1)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, -3)$.
l). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 0, 0, 1)$.
m). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, -3, 1)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, -2)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (3, 1, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 0, -3)$.
p). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 3, -2, 1)$.
q). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -2, 0, 1)$.
r). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 1, -2)$.
s). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, 0)$.
t). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 2, 1)$.
u). $\mathbf{a}_1 = (-2, -4, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, 3)$.
v). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -5, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, 1)$.
w). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3, 1)$.
x). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, 1, 1)$.

100. Проверить, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ортонормирована в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ и дополнить ее до ортонормированного базиса (дополнение не единственно).

a). $\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{7}; 1/\sqrt{7}; -2/\sqrt{7}; 1/\sqrt{7})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6}; 0; -1/\sqrt{6})$.
b). $\mathbf{a}_1 = 1/\sqrt{15}(3; 2; 1; 1)$, $\mathbf{a}_2 = 1/\sqrt{30}(3; -4; 1; -2)$.
c). $\mathbf{a}_1 = 1/\sqrt{15}(3; 2; 1; -1)$, $\mathbf{a}_2 = 1/\sqrt{10}(2; -2; -1; 1)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (3/\sqrt{21}; 2/\sqrt{21}; -2/\sqrt{21}; -2/\sqrt{21})$, $\mathbf{a}_2 = (0; 0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$.
e). $\mathbf{a}_1 = (3/\sqrt{15}; -2/\sqrt{15}; 1/\sqrt{15}; 1/\sqrt{15})$, $\mathbf{a}_2 = (0; 1/\sqrt{5}; 0; 2/\sqrt{5})$.
f). $\mathbf{a}_1 = (-1/2; 1/2; 1/2; -1/2)$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6}; 0)$.
g). $\mathbf{a}_1 = (0; 2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6})$, $\mathbf{a}_2 = (0; 1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5}; 0)$.
h). $\mathbf{a}_1 = (-2/\sqrt{13}; -1/\sqrt{13}; -2/\sqrt{13}; -2/\sqrt{13})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5}; 0; 0)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{12}; 1/\sqrt{12}; -1/\sqrt{12}; 3/\sqrt{12})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0; 0)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (1/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; 0; 2/\sqrt{6})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0; 0)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{3}; 0; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{a}_2 = (2/\sqrt{10}; -2/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10})$.
l). $\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{7}; 1/\sqrt{7}; 2/\sqrt{7}; -1/\sqrt{7})$, $\mathbf{a}_2 = (0; -2/\sqrt{5}; 1/\sqrt{5}; 0)$.
m). $\mathbf{a}_1 = 1/\sqrt{20}(-1; -1; 3; 3)$, $\mathbf{a}_2 = 1/\sqrt{20}(-1; 1; 3; -3)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (3/\sqrt{18}; 2/\sqrt{18}; -1/\sqrt{18}; 2/\sqrt{18})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{10}; 0; 3/\sqrt{10}; 0)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0)$. $\mathbf{a}_2 = (2/\sqrt{7}; -1/\sqrt{7}; -1/\sqrt{7}; 1/\sqrt{7})$,

p). $\mathbf{a}_1 = (5/\sqrt{30}; 0; 1/\sqrt{30}; -2/\sqrt{30})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{6}; 0; -1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6})$.
q). $\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{7}; 1/\sqrt{7}; -2/\sqrt{7}; 1/\sqrt{7})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{2}; 0; 0; 1/\sqrt{2})$.
r). $\mathbf{a}_1 = (1/\sqrt{11}; 1/\sqrt{11}; 0; 3/\sqrt{11})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}; 0; 0)$.
s). $\mathbf{a}_1 = (3/\sqrt{26}; 2/\sqrt{26}; 3/\sqrt{26}; -2/\sqrt{26})$, $\mathbf{a}_2 = (2/\sqrt{13}; 0; 0; 3/\sqrt{13})$.
t). $\mathbf{a}_1 = (3/\sqrt{20}; 1/\sqrt{20}; 3/\sqrt{20}; -1/\sqrt{20})$, $\mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{10}; 0; 0; 3/\sqrt{10})$.
u). $\mathbf{a}_1 = (0; 3/\sqrt{14}; -1/\sqrt{14}; -2/\sqrt{14})$, $\mathbf{a}_2 = (1; 0; 0; 0)$.
v). $\mathbf{a}_1 = (-1/\sqrt{12}; 1/\sqrt{12}; -1/\sqrt{12}; 3/\sqrt{12})$, $\mathbf{a}_2 = (-1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}; 0)$.
w). $\mathbf{a}_1 = (3/\sqrt{17}; -2/\sqrt{17}; 0; -2/\sqrt{17})$, $\mathbf{a}_2 = (0; 0; 1; 0)$.
x). $\mathbf{a}_1 = (0; 1/\sqrt{5}; 0; 2/\sqrt{5})$, $\mathbf{a}_2 = (-1/\sqrt{10}; 2/\sqrt{10}; 2/\sqrt{10}; -1/\sqrt{10})$.

101. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки, порожденной системой векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$.

a). $\mathbf{a}_1 = (0, 0, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -2, 0, -5)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 7, -1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 4, 0, 1)$.
c). $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 3, 3, 6)$, $\mathbf{a}_3 = (-7, 3, 1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (-5, 5, 3, -1)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 4, -3, 7)$, $\mathbf{a}_3 = (7, 3, 4, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (2, 3, -1, 4)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, -2, 4, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 5, -2)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 2, 1, 4)$.
f). $\mathbf{a}_1 = (0, 3, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 6, -1, 7)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -3, -7, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 3, -2, 4)$.
g). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (5, -4, -2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -4, -1, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-4, 0, 1, 2)$.
h). $\mathbf{a}_1 = (0, 3, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -5, 5, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -5, 5, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -1, -3, -7)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 3, -6, -9)$, $\mathbf{a}_3 = (-7, 0, 3, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 1, 3, 7)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 5, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0, 2, 5)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 3, 1, 1)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (0, 2, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 5, 5, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 2, 0, -4)$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 4, 2, 0)$.
l). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -4, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -4, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (5, 0, 1, -1)$.
m). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 3, 7, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-5, -4, 4, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 1, 5, -1)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 2, -3, -4)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 6, -1, 2)$, $\mathbf{a}_4 = (-2, 6, 1, -2)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (-2, 3, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (5, -6, 0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (7, -2, 1, -6)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 4, 3, -8)$.

p). $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 5, 0, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 3, 4, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 5, 0, 4)$.

q). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, -2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 1, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 1, -1, 2)$.

r). $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 4, -4, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 2, -4, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-4, -2, 0, 2)$.

s). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, -2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, -1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (4, -1, 0, 1)$.

t). $\mathbf{a}_1 = (-1, -1, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, -2, 7)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 3, 1, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 0, -1, 4)$.

u). $\mathbf{a}_1 = (-1, -2, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 5, 4, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -3, -1, 3)$.

v). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (-4, 2, 0, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -2, 0, 4)$, $\mathbf{a}_4 = (8, 3, 3, 4)$.

w). $\mathbf{a}_1 = (0, -2, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 4, 5, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 3, -1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -2, -3, 1)$.

x). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -1, 6, 7)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -4, 3, -4)$, $\mathbf{a}_4 = (1, -2, 3, 6)$.

102. Найти базис (находится неоднозначно) ортогонального дополнения $\mathbb{V}^{\perp}$ подпространства $\mathbb{V}$, порожденного следующими системами векторов.

a). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 4, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 3, 5, 2)$.
b). $\mathbf{a}_1 = (2, 3, 2, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 3, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1, 4)$.
c). $\mathbf{a}_1 = (0, -2, 2, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -2, 3, -1)$.
d). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 3, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -1, 4, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 6, -1)$.
e). $\mathbf{a}_1 = (4, 3, 4, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, -2, 1)$.
f). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, -2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (8, 4, -7, -2)$.
g). $\mathbf{a}_1 = (3, 2, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 4, 6, 2)$.
h). $\mathbf{a}_1 = (3, 0, 4, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 3, -1)$.
i). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, -2, 4, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 3, -4, -1)$.
j). $\mathbf{a}_1 = (4, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, -2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 2, 3, 1)$.
k). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 2, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 2, 3, 2)$.
l). $\mathbf{a}_1 = (-1, 3, 4, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 2, 6, 2)$.
m). $\mathbf{a}_1 = (0, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 4, 0, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -2, 1, 1)$.
n). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -1, -4, 3)$.
o). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 4, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 4, 4, 1)$.
p). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, -1, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 0, -2)$.
q). $\mathbf{a}_1 = (-2, -2, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 6, 0, 1)$.
r). $\mathbf{a}_1 = (3, 3, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 2, 1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 1, -2, -2)$.

s). $\mathbf{a}_1 = (-2, 4, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 6, -4, 4)$.
t). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 2, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 4, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1, 1)$.
u). $\mathbf{a}_1 = (3, 2, -2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 2, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -3, 0, -3)$.
v). $\mathbf{a}_1 = (1, -1, -2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 3, -1)$.
w). $\mathbf{a}_1 = (0, 0, -1, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 3, 2, 4)$.
x). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, 4, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -3, -3, -2)$.

103. Найти однородную систему уравнений (находится неоднозначно), задающую ортогональное дополнение $\mathbb{V}^\perp$ подпространства $\mathbb{V}$, заданного системой уравнений

a). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \end{cases}$ b). $\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$

c). $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \end{cases}$ d). $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$

e). $\begin{cases} x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$ f). $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$

g). $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \end{cases}$ h). $\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$

i). $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$ j). $\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$

k). $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ l). $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$

m). $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$ n). $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$

o). $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ p). $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$

q). $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$ r). $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$

s). $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ t). $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$

u). $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ v). $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$

w). $\begin{cases} 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$ x). $\begin{cases} 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$

104. Найти проекцию $\mathbf{x}_{pr}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и его ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{ort}$.

a). $\mathbf{a}_1 = (2, -2, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -4, 4, 1)$, $\mathbf{x} = (3, -4, 4, -1)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{x} = (3, -1, 0, -2)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 3, -2)$, $\mathbf{x} = (5, -1, 0, -3)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 0, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 5, -3, -1)$, $\mathbf{x} = (5, -3, -1, -8)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 0, 3, -2)$, $\mathbf{x} = (-3, 0, 4, 1)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 0, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -2, -2, -2)$, $\mathbf{x} = (0, -4, -1, -2)$.

g). $\mathbf{a}_1 = (-2, 0, -1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -2, -3, 7)$, $\mathbf{x} = (-3, 2, -4, 6)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (-2, 2, -1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, 5, -2, 3)$, $\mathbf{x} = (4, -7, 1, -3)$.

i). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, -1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -2, -4, 2)$, $\mathbf{x} = (4, 5, 2, -2)$.

j). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0, -2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, -4, -2)$, $\mathbf{x} = (-4, 0, 1, 0)$.

k). $\mathbf{a}_1 = (3, -1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, 2, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 6, 0, 2)$, $\mathbf{x} = (0, -5, 4, -2)$.

l). $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 3, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 3, -5, -7)$, $\mathbf{x} = (3, -6, -6, -4)$.

m). $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, -2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -1, -2, 2)$, $\mathbf{x} = (3, -5, -4, 5)$.

n). $\mathbf{a}_1 = (-2, -1, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 2, 2)$, $\mathbf{x} = (-1, -3, 5, 7)$.

o). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 4, 1, -3)$, $\mathbf{x} = (2, 1, 3, 4)$.

p). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,-1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (2,0,1,-2)$, $\mathbf{a}_3 = (1,-3,-1,2)$, $\mathbf{x} = (-1,3,-2,0)$.

q). $\mathbf{a}_1 = (0,-1,-1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,-1,-1,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,-1,-1,2)$, $\mathbf{x} = (1,3,1,-4)$.

r). $\mathbf{a}_1 = (0,-1,-1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,2,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{x} = (3,3,2,-2)$.

s). $\mathbf{a}_1 = (2,0,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,2,2,1)$, $\mathbf{a}_3 = (3,2,1,0)$, $\mathbf{x} = (0,5,3,5)$.

t). $\mathbf{a}_1 = (1,2,0,2)$, $\mathbf{a}_2 = (0,-1,1,0)$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,1,2)$, $\mathbf{x} = (-3,-2,2,-2)$.

u). $\mathbf{a}_1 = (-1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,2,0,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (2,-3,1,2)$, $\mathbf{x} = (-4,4,-2,-2)$.

v). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,2,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,0,1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-1,4,-3)$, $\mathbf{x} = (-1,2,-2,1)$.

w). $\mathbf{a}_1 = (1,2,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,0,0,2)$, $\mathbf{a}_3 = (1,6,-3,1)$, $\mathbf{x} = (0,3,1,1)$.

x). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,1,-1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,0,0,3)$, $\mathbf{x} = (-4,-3,4,1)$.

105. Найти проекцию $\mathbf{x}_{pr}$ вектора $\mathbf{x}$ на подпространство решений следующих систем уравнений и его ортогональную составляющую $\mathbf{x}_{ort}$.

a). $\begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (0,0,6,0)$.

b). $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-2,-4,2,-2)$.

c). $\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-1,3,3,4)$.

d). $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-2,-3,0,-1)$.

e). $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-5,-1,1,-1)$.

f). $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-2,1,-2,3)$.

g). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (2,3,1,-1)$.

h). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-4,1,1,1)$.

i). $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-1,1,1,-2)$.

j). $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (0,4,1,2)$.

k). $\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-3,0,-1,-1)$.

l). $\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (-1,2,2,1)$.

m). $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (3,2,1,-1)$.

n). $\begin{cases} x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ $\mathbf{x} = (2,2,-1,0)$.

o). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-1, -4, 0, -2)$.

p). $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-1, 1, 5, -1)$.

q). $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-1, -3, -1, 2)$.

r). $\begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-1, 1, 3, 4)$.

s). $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-1, -3, 1, -2)$.

t). $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (1, 1, 3, 3)$.

u). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-4, -1, 1, 3)$.

v). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (0, -3, 0, 3)$.

w). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-1, 1, 5, 3)$.

x). $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_4 = 0, \end{cases}$
$\mathbf{x} = (-3, -2, -1, -1)$.

106. Найти угол между вектором $\mathbf{x}$ и подпространством $\ell(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и расстояние от вектора $\mathbf{x}$ до этого подпространства.

a). $\mathbf{a}_1 = (2, 2, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 0, -2)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 4, -4, 4)$, $\mathbf{x} = (-1, 1, 1, 3)$.

b). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 3, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 3, 4, -1)$, $\mathbf{x} = (5, -2, 0, -4)$.

c). $\mathbf{a}_1 = (0, -1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, 1, 2, 0)$, $\mathbf{x} = (0, 3, 3, 0)$.

d). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -1, -1, 0)$, $\mathbf{x} = (-1, -1, -1, 1)$.

e). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{x} = (2, -1, 2, -3)$.

f). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -2, 0, -2)$, $\mathbf{x} = (-1, -1, 0, -4)$.

g). $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 1, 1)$, $\mathbf{x} = (-2, -1, 0, 2)$.

h). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (6, -2, 1, 2)$, $\mathbf{x} = (-1, 5, 1, -1)$.

i). $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 2, -2)$, $\mathbf{x} = (-2, 2, 0, 0)$.

j). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 4, 1)$, $\mathbf{x} = (4, 2, 2, 0)$.

k). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -2, 2)$, $\mathbf{x} = (-2, 5, 2, -3)$.

l). $\mathbf{a}_1 = (-1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2, -2, -1, 1)$, $\mathbf{x} = (-5, -1, 1, -1)$.

m). $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (0, -1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{x} = (-3, -3, 1, -1)$.

n). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{x} = (2, -3, 2, -1)$.

o). $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 2, 0, 2)$, $\mathbf{x} =$

$(-1,-1,0,-4)$.

p). $\mathbf{a}_1 = (2,0,-1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (2,-1,1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (6,-2,1,2)$, $\mathbf{x} = (-1,5,1,-1)$.

q). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,2,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (1,-1,0,1)$, $\mathbf{a}_3 = (-3,-1,4,-3)$, $\mathbf{x} = (-1,2,-2,1)$.

r). $\mathbf{a}_1 = (2,0,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (2,1,2,-1)$, $\mathbf{x} = (-2,2,0,0)$.

s). $\mathbf{a}_1 = (1,2,2,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,2,1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,3,4,1)$, $\mathbf{x} = (4,2,2,0)$.

t). $\mathbf{a}_1 = (-1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,2,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,3,2,0)$, $\mathbf{x} = (-3,1,-3,3)$.

u). $\mathbf{a}_1 = (-1,-1,1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,1,-1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (-2,0,0,3)$, $\mathbf{x} = (-4,-3,4,1)$.

v). $\mathbf{a}_1 = (1,0,1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,2,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1,2,0,0)$, $\mathbf{x} = (1,1,-3,1)$.

w). $\mathbf{a}_1 = (1,2,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1,0,0,2)$, $\mathbf{a}_3 = (1,6,-3,1)$, $\mathbf{x} = (-4,3,-1,-1)$.

x). $\mathbf{a}_1 = (0,1,-1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{a}_3 = (-1,-2,2,-2)$, $\mathbf{x} = (-1,1,1,-2)$.

107. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

108. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. n). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

y). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. z). $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

109. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора и матрицу оператора в этом базисе, заданного в некотором ортонормированном базисе одной из следующих матриц.

a). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. b). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. c). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

d). $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -5 \\ -4 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

g). $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. h). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. i). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

j). $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. k). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. l). $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

m). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ n). $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. o). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

p). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. q). $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. r). $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

s). $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. t). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. u). $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -3 \\ -5 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

v). $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. w). $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. x). $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

110. Найти канонический (нормальный) вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование.

a). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_3 - x_2^2 - 24x_2x_3 + 9x_3^2$.
b). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 16x_2x_3 + 17x_3^2$.
c). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 + 18x_1x_2 + 18x_1x_3 - 18x_2^2 - 42x_2x_3 - 21x_3^2$.
d). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 26x_2^2 + 4x_2x_3 + 13x_3^2$.
e). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 - 10x_2^2 - 12x_2x_3 - 37x_3^2$.
f). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 24x_2x_3 - 23x_3^2$.
g). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 28x_2^2 - 12x_2x_3 + 9x_3^2$.
h). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 18x_2x_3 - 10x_3^2$.

i). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2^2 - 8x_2x_3 + 10x_3^2$.
j). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 13x_2^2 + 14x_2x_3 - 5x_3^2$.
k). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_3 - 21x_2^2 - 36x_2x_3 - 21x_3^2$.
l). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 13x_2^2 - 16x_2x_3 - 5x_3^2$.
m). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 18x_2x_3$.
n). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2^2 - 8x_2x_3 - 4x_3^2$.
o). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 6x_1x_2 + 12x_1x_3 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 11x_3^2$.
p). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 16x_2^2 - 8x_2x_3 + 4x_3^2$.
q). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 - 44x_2x_3 + 23x_3^2$.
r). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2^2 + 7x_3^2$.
s). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 20x_2x_3 + 17x_3^2$.
t). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 7x_2^2 - 14x_2x_3 - 29x_3^2$.
u). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 13x_2^2 + 28x_2x_3 - 14x_3^2$.
v). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + x_2^2 - 30x_2x_3 - 18x_3^2$.
w). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 21x_2^2 - 42x_2x_3 + 28x_3^2$.
x). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 9x_2^2 - 9x_3^2$.

111. Найти нормальный вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование.

a). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.
b). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
c). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
d). $f(\mathbf{x}) = 6x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.
e). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.
f). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.
g). $f(\mathbf{x}) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
h). $f(\mathbf{x}) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.
i). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$.
j). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
k). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4$.
l). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$.
m). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
n). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 6x_2x_4 + 2x_3x_4$.
o). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$.
p). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.
q). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
r). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
s). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$.
t). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.
u). $f(\mathbf{x}) = 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$.
v). $f(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 6x_3x_4$.

w). $f(\mathbf{x}) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.
x). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 - 2x_1x_4 - x_2x_3 - 3x_2x_4 - x_3x_4$.
y). $f(\mathbf{x}) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_2x_4 - x_3x_4$.
z). $f(\mathbf{x}) = -3x_1x_3 - 3x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4$.

112. Не находя канонического вида, выяснить, являются ли следующие квадратичные формы положительно или отрицательно определенными, неположительными, неотрицательными или неопределенными.
a). $f(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
b). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
c). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
d). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
e). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
f). $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
g). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
h). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
i). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.
j). $f(\mathbf{x}) = -3x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
k). $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
l). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.
m). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
n). $f(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
o). $f(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.
p). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
q). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
r). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
s). $f(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
t). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
u). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.
v). $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$.
w). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
x). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

113. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид (преобразование определено не обнозначно)
a). $f(\mathbf{x}) = 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
b). $f(\mathbf{x}) = -4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
c). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
d). $f(\mathbf{x}) = 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
e). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

f). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
g). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
h). $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
i). $f(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
j). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.
k). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.
l). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.
m). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
n). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
o). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
p). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
q). $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.
r). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
s). $f(\mathbf{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
t). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.
u). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
v). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
w). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.
x). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

114. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующую квадратичную форму к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид (преобразование определено не обнозначно)

a). $f(\mathbf{x}) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4-2x_3x_4$.
b). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
c). $f(\mathbf{x}) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.
d). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.
e). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
f). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
g). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.
h). $f(\mathbf{x}) = 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.
i). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 8x_2x_4 - 4x_3x_4$.
j). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.

k). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4$.
l). $f(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
m). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4 - 4x_3x_4$.
n). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 - 4x_3x_4$.
o). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_1x_4 - 8x_2x_3 + 4x_2x_4 - 8x_3x_4$.
p). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.
q). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.
r). $f(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4$.
s). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_1x_4 - 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 10x_3x_4$.
t). $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 - 4x_3x_4$.
u). $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 - 5x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_4^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 6x_3x_4$.
v). $f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$.
w). $f(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_4^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_1x_4 - 6x_2x_3 + 6x_2x_4 - 6x_3x_4$.
x). $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 8x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$.

10

ОТВЕТЫ ЗАДАНИЙ ПРИЛОЖЕНИЯ.

1. (a) $(0,3,1)$. (b) $(-1,0,1)$. (c) $(0,-1,1)$. (d) $(2,3,2)$. (e) $(0,2,-1)$. (f) $(-2,0,-1)$. (g) $(0,-1,1)$. (h) $(-2,2,-2)$. (i) $(2,-1,1)$. (j) $(1,1,-2)$. (k) $(-2,1,0)$. (l) $(1,2,-1)$. (m) $(1,-2,1)$. (n) $(1,1,-1)$. (o) $(-2,-2,-1)$. (p) $(1,-3,3)$. (q) $(2,1,3)$. (r) $(-2,0,2)$. (s) $(1,-3,0)$. (t) $(1,-2,1)$. (u) $(2,-1,0)$. (v) $(1,2,-1)$. (w) $(-1,2,1)$. (x) $(3,-2,2)$.

2. (a) $(-3-\alpha-2\beta,-3-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (b) $(\alpha-2\beta,-2\alpha-\beta+1,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (c) $(\beta,-2\beta-2-3\alpha,\beta-1+2\alpha,\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (d) $(-3+\beta-3\alpha,\beta,3-2\beta+2\alpha,\alpha)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (e) $(1-\alpha-\beta,-\alpha+\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (f) $(-1-\alpha-\beta,1-2\alpha+\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (g) $(2+\alpha-\beta,-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (h) $(-1+\alpha-\beta,1-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (i) $(-1+\alpha-\beta,1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (j) $(2+3\alpha-2\beta,1-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (k) $(-1+3\alpha-\beta,-2-2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (l) $(-3\alpha-\beta,-2\alpha+\beta+2,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. (m) $(1+2\alpha,-\alpha,-2\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (n) $(2\alpha,-2+\alpha,3,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (o) $(1-\alpha,-2,-1+\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (p) $(\alpha,1-2\alpha,1,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (q) $(-1+2\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (r) $(1+\alpha,1-2\alpha,-2\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (s) $(\alpha,-4+3\alpha,1+\alpha,-\alpha+2)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (t) $(1+\alpha,\alpha,2+2\alpha,-\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (u) $(5-3\alpha,-1+2\alpha,\alpha,-1+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (v) $(1-\alpha,1+2\alpha,-\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (w) $(\alpha,-\alpha+2,-1,\alpha-1)$, $\alpha\in\mathbb{F}$. (x) $(1-2\alpha,0,-3\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{F}$.

3. (a) $\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}4&4\\2&2\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}$.
(e) $\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-4\end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix}0&1\\-2&2\end{pmatrix}$. (g) $\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}$. (h) $\begin{pmatrix}0&0\\1&-2\end{pmatrix}$.
(i) $\begin{pmatrix}0&2\\-1&-1\end{pmatrix}$. (j) $\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$. (k) $\begin{pmatrix}2&2\\-3&-2\end{pmatrix}$. (l) $\begin{pmatrix}-4&-2\\-4&-2\end{pmatrix}$.
(m) $\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$. (n) $\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$. (o) $\begin{pmatrix}1&-3\\0&0\end{pmatrix}$. (p) $\begin{pmatrix}1&-4\\0&-1\end{pmatrix}$.
(q) $\begin{pmatrix}-4&3\\3&-3\end{pmatrix}$. (r) $\begin{pmatrix}3&0\\2&-1\end{pmatrix}$. (s) $\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$. (t) $\begin{pmatrix}-1&1\\3&-1\end{pmatrix}$.
(u) $\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}$. (v) $\begin{pmatrix}0&-1\\0&-4\end{pmatrix}$. (w) $\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$. (x) $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.

4. (a) $\begin{pmatrix}2&-2\\1&2\end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix}-3&1\\1&-2\end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix}-2&-3\\0&0\end{pmatrix}$.
(e) $\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix}-4&3\\-4&3\end{pmatrix}$. (g) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$. (h) $\begin{pmatrix}-2&-2\\3&-3\end{pmatrix}$.
(i) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. (j) $\begin{pmatrix}3&0\\2&0\end{pmatrix}$. (k) $\begin{pmatrix}0&0\\-2&-2\end{pmatrix}$. (l) $\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
ⓠ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓢ $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
ⓤ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5.ⓐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
ⓔ $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓖ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
ⓘ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓙ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
ⓜ $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
ⓠ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. ⓢ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
ⓤ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.ⓐ $\begin{pmatrix} 9 & -29 & -17 \\ 3 & -10 & -6 \\ -7 & 22 & 13 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 20 & -17 & -4 \\ -21 & 18 & 4 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
ⓓ $\begin{pmatrix} -18 & -1 & -25 \\ 15 & 1 & 21 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 17 & -1 & -22 \\ 21 & -1 & -27 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & -35 & 25 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 32 & -23 \end{pmatrix}$.
ⓖ $\begin{pmatrix} -14 & -25 & -29 \\ 3 & 5 & 6 \\ -10 & -18 & -21 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -13 & -19 & -4 \\ -6 & -9 & -2 \\ -17 & -25 & -5 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 4 & -11 & -12 \\ 2 & -5 & -5 \\ -3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$.
ⓙ $\begin{pmatrix} 22 & -8 & 21 \\ -27 & 10 & -26 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -4 & -7 & 4 \\ 4 & 8 & -5 \\ 9 & 17 & -10 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -1 & 21 & -13 \\ 1 & -24 & 15 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.
ⓜ $\begin{pmatrix} 13 & 6 & 17 \\ -4 & -2 & -5 \\ 19 & 9 & 25 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} -11 & -29 & 30 \\ -1 & -3 & 3 \\ -9 & -24 & 25 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & -13 \end{pmatrix}$.
ⓟ $\begin{pmatrix} -30 & -31 & 13 \\ -25 & -26 & 11 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} -1 & 15 & -24 \\ 1 & -13 & 21 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 21 & -8 & 20 \\ -19 & 7 & -18 \end{pmatrix}$.
ⓢ $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 18 \\ 11 & 16 & 29 \\ -6 & -9 & -16 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 19 & 26 \\ 1 & 16 & 22 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 12 & 10 & 1 \\ -28 & -23 & -2 \\ -29 & -24 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 18 & 25 & 1 \\ -21 & -29 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 21 & -11 & -15 \\ 31 & -16 & -22 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7.ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 & 6 \\ 2 & -4 & 7 & -6 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -5 & 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. (h) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. (i) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(j) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (l) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(m) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. (n) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (o) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(p) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. (q) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (r) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

(s) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (t) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. (u) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(v) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (w) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (x) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

9.(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (f) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (l) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(m) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. (n) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (o) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В ответах 10.a – 12.x величины α, β, γ, δ, ξ, η, ζ, ϑ, λ, μ, ν, χ могут принимать любые числовые значения.

10.ⓐ $\begin{pmatrix} -\alpha & 2-\beta & -1-\gamma \\ 1-\alpha & -2-\beta & 1-\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -3+\alpha & -2+\beta & 1+\gamma \\ 1-\alpha & 1-\beta & -\gamma \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -\alpha & -2-\beta & -2-\gamma \\ -1-\alpha & -\beta & -3-\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 1+7\,\alpha & -6+7\,\beta & -11+7\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ -1-5\,\alpha & 3-5\,\beta & 9-5\,\gamma \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 7-5\,\alpha & -2-5\,\beta & 4-5\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ -4+4\,\alpha & 4\,\beta & -3+4\,\gamma \end{pmatrix}$.

ⓕ $\begin{pmatrix} -1+2\,\alpha-2\,\xi & 1+2\,\beta-2\,\eta & -3+2\,\gamma-2\,\zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1+\xi-2\,\alpha & -2+\eta-2\,\beta & 1+\zeta-2\,\gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

ⓗ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \\ \xi & \eta \\ -2+\lambda-2\,\alpha+2\,\xi & -1+\mu-2\,\beta+2\,\eta \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} -5+2\,\alpha-2\,\xi+\lambda & 2+2\,\beta-2\,\eta+\mu \\ \alpha & \beta \\ \xi & \eta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -7+5\,\alpha+5\,\xi & -3+5\,\beta+5\,\eta \\ 4-3\,\alpha-3\,\xi & 1-3\,\beta-3\,\eta \\ \xi & \eta \end{pmatrix}$.

ⓚ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -4+7/2\,\alpha+2\,\xi & -8+7/2\,\beta+2\,\eta \\ -2+4\,\alpha+3\,\xi & -10+4\,\beta+3\,\eta \\ \xi & \eta \end{pmatrix}$.

ⓛ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -2-4\,\alpha & -1-4\,\beta & 2-4\,\gamma & -4-4\,\delta \\ -5\,\alpha & -2-5\,\beta & -5\,\gamma & -6-5\,\delta \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta & \vartheta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -2+\xi-2\,\alpha & \eta-2\,\beta & 2+\zeta-2\,\gamma & -4+\vartheta-2\,\delta \end{pmatrix}$.

ⓝ $\begin{pmatrix} 3-2\,\alpha+\xi & -3-2\,\beta+\eta & 1-2\,\gamma+\zeta & -2-2\,\delta+\vartheta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \xi & \eta & \zeta & \vartheta \end{pmatrix}$.

ⓞ $\begin{pmatrix} 1+2\,\alpha-2\,\xi & 2\,\beta-2\,\eta & -2+2\,\gamma-2\,\zeta & -1+2\,\delta-2\,\vartheta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \xi & \eta & \zeta & \vartheta \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2\,\alpha & -1-2\,\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2+\alpha & -1+\beta \\ \alpha & \beta \\ -1-\alpha & 2-\beta \end{pmatrix}$.

ⓡ $\begin{pmatrix} -2-\alpha & 1-\beta \\ -1-\alpha & -1-\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. ⓢ $\begin{pmatrix} 1-\alpha & -1-\beta \\ 2-\alpha & 1-\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 2-\alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & 2-\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

ⓤ $\begin{pmatrix} -6+2\,\alpha-2\,\xi & -1+2\,\beta-2\,\eta & 4+2\,\gamma-2\,\zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ 9-3\,\alpha+5/2\,\xi & 3-3\,\beta+5/2\,\eta & -5-3\,\gamma+5/2\,\zeta \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ -2+4\,\alpha+4\,\xi & 7+4\,\beta+4\,\eta & -5+4\,\gamma+4\,\zeta \\ 2-5\,\alpha-7\,\xi & -9-5\,\beta-7\,\eta & 5-5\,\gamma-7\,\zeta \end{pmatrix}$.

ⓦ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ 3+\lambda-2\,\alpha+2\,\xi & 2+\mu-2\,\beta+2\,\eta & 3+\nu-2\,\gamma+2\,\zeta \end{pmatrix}$.

ⓧ $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ 5+\lambda+3\,\alpha-2\,\xi & 4+\mu+3\,\beta-2\,\eta & 2+\nu+3\,\gamma-2\,\zeta \end{pmatrix}$.

11. ⓐ $\begin{pmatrix} -3+2\alpha & -1+2\alpha & \alpha \\ 2+2\beta & 1+2\beta & \beta \\ -1+2\gamma & 3+2\gamma & \gamma \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -2-\alpha & -\alpha & \alpha \\ 1-\beta & 3-\beta & \beta \\ -\gamma & 2-\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -1-\alpha & -\alpha & \alpha \\ 3-\beta & 2-\beta & \beta \\ -\gamma & -1-\gamma & \gamma \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 3+\alpha & \alpha & -3-\alpha \\ 2+\beta & \beta & -3-\beta \\ \gamma & \gamma & 2-\gamma \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} \alpha & -3+\alpha & 2-\alpha \\ \beta & 1+\beta & -2-\beta \\ \gamma & 1+\gamma & -\gamma \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} \xi & 5+\xi+2\alpha & \alpha \\ \eta & 1+\eta+2\beta & \beta \\ \zeta & \zeta+2\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 3+2\alpha-2\xi & \alpha & \xi \\ 1+2\beta-2\eta & \beta & \eta \\ -2+2\gamma-2\zeta & \gamma & \zeta \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 1-2\alpha & -2-2\alpha & \alpha \\ 2-2\beta & 4-2\beta & \beta \\ 5-2\gamma & 5-2\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} \xi & \alpha & -1+\xi-2\alpha \\ \eta & \beta & -1+\eta-2\beta \\ \zeta & \gamma & 2+\zeta-2\gamma \end{pmatrix}$. ⓙ $\begin{pmatrix} 2\alpha+\xi & \alpha & \xi \\ -2+2\beta+\eta & \beta & \eta \\ -3+2\gamma+\zeta & \gamma & \zeta \\ -3+2\delta+\vartheta & \delta & \vartheta \end{pmatrix}$.

ⓚ $\begin{pmatrix} \alpha & -4-4\alpha & -\alpha \\ \beta & -4\beta & -\beta \\ \gamma & -4-4\gamma & -3-\gamma \\ \delta & 6-4\delta & 1-\delta \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 2+\alpha+2\xi & \alpha & \xi \\ -3+\beta+2\eta & \beta & \eta \\ -1+\gamma+2\zeta & \gamma & \zeta \\ 2+\delta+2\vartheta & \delta & \vartheta \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} -2+2\alpha & -2+2\alpha & \alpha \\ 3+2\beta & 5+2\beta & \beta \\ 3+2\gamma & 3+2\gamma & \gamma \\ 2\delta & 1+2\delta & \delta \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} \alpha & 6-2\alpha & -3+\alpha \\ \beta & -2\beta & 1+\beta \end{pmatrix}$.

ⓞ $\begin{pmatrix} \alpha & -2+\alpha & 2-\alpha \\ \beta & 1+\beta & -\beta \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} 4+\alpha & \alpha & -2-\alpha \\ \beta & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.

ⓠ $\begin{pmatrix} 5-7\alpha+6\xi & \alpha & \xi & -3+3\alpha-2\xi \\ -7\beta+6\eta & \beta & \eta & 2+3\beta-2\eta \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -1-2\alpha+\xi+2\lambda & \alpha & \xi & \lambda \\ 4-2\beta+\eta+2\mu & \beta & \eta & \mu \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 8-4\alpha & \alpha & 2-3\alpha+2\xi & \xi \\ 2-4\beta & \beta & 3-3\beta+2\eta & \eta \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} \lambda & \xi & -2-\lambda+2\xi-3\alpha & \alpha \\ \mu & \eta & -3-\mu+2\eta-3\beta & \beta \end{pmatrix}$.

ⓤ $\begin{pmatrix} -2-2\lambda+\alpha+2\xi & \lambda & \alpha & \xi \\ 1-2\mu+\beta+2\eta & \mu & \beta & \eta \\ -1-2\nu+\gamma+2\zeta & \nu & \gamma & \zeta \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} -2+3\alpha+2\xi & \alpha & \xi & 5-7\alpha-6\xi \\ -1+3\beta+2\eta & \beta & \eta & 5-7\beta-6\eta \\ 1+3\gamma+2\zeta & \gamma & \zeta & -1-7\gamma-6\zeta \end{pmatrix}$.

ⓦ $\begin{pmatrix} \lambda & -\lambda+2\alpha-2\xi & \alpha & \xi \\ \mu & 3-\mu+2\beta-2\eta & \beta & \eta \\ \nu & -1-\nu+2\gamma-2\zeta & \gamma & \zeta \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} \alpha & -7+4\alpha+3\xi & \xi & -9+6\alpha+6\xi \\ \beta & 4+4\beta+3\eta & \eta & 8+6\beta+6\eta \\ \gamma & -2+4\gamma+3\zeta & \zeta & -6+6\gamma+6\zeta \end{pmatrix}$.

12. ⓐ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\delta+1 & \delta \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -1+\gamma & -1+\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -3+\gamma-\beta+\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -\gamma & 1-\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 2\gamma+\beta-2\delta+2 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -3+3\gamma+\beta-3\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
ⓖ $\begin{pmatrix} \gamma+\beta-\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} =2+\gamma-\beta+\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
ⓘ $\begin{pmatrix} \delta-\beta+\zeta+\gamma-\eta+3 & \beta & \gamma \\ \delta & \zeta & \eta \end{pmatrix}$. ⓙ $\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha+4\delta-2\zeta+\gamma+2\eta-8 & \gamma \\ \delta & \zeta & \eta \end{pmatrix}$.
ⓚ $\begin{pmatrix} \alpha & -1 & \gamma \\ \delta & \zeta & \eta \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -\delta-\beta-\zeta-\gamma-\eta-2 & \beta & \gamma \\ \delta & \zeta & \eta \end{pmatrix}$.
ⓜ $\begin{pmatrix} \delta-2\beta+2\zeta-3\gamma+3\eta+4 & \beta & \gamma \\ \delta & \zeta & \eta \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 6-\gamma-2\beta-2\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
ⓞ $\begin{pmatrix} 2\gamma-2\beta+4\delta-3 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} -2\gamma+2\beta+4\delta+3 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
ⓠ $\begin{pmatrix} 1+\gamma+\beta-\delta & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 2+\beta-\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. ⓢ $\begin{pmatrix} 2-2\beta+\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
ⓣ $\begin{pmatrix} 2\beta-3\gamma+4 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} -3+\beta+3\gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} 2+\beta & \beta \\ -3+2\zeta+\delta-2\eta & \delta \\ \zeta & \eta \end{pmatrix}$.
ⓦ $\begin{pmatrix} 3-\zeta+\beta+\eta & \beta \\ 1+\delta & \delta \\ \zeta & \eta \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \zeta+2\delta-2\eta-2 & \delta \\ \zeta & \eta \end{pmatrix}$.

13. ⓐ $x=-2$, $y=1$. ⓑ $x=2$, $y=-2$. ⓒ $x=2$, $y=1$. ⓓ $x=-2$, $y=1$. ⓔ $x=-1$, $y=1$. ⓕ $x=1$, $y=-1$. ⓖ $x=1$, $y=-2$. ⓗ $x=-2$, $y=1$. ⓘ $x=1$, $y=3$. ⓙ $x=3$, $y=1$. ⓚ $x=-2$, $y=-2$. ⓛ $x=-2$, $y=-1$. ⓜ $x=-2$, $y=3$. ⓝ $x=-3$, $y=1$. ⓞ $x=1$, $y=3$. ⓟ $x=-1$, $y=3$. ⓠ $x=-2$, $y=-3$. ⓡ $x=2$, $y=-1$. ⓢ $x=1$, $y=2$. ⓣ $x=-1$, $y=-1$. ⓤ $x=3$, $y=1$. ⓥ $x=3$, $y=2$. ⓦ $x=2$, $y=1$. ⓧ $x=-1$, $y=1$.

14. ⓐ $x=1-i$, $y=-2$. ⓑ $x=3+2i$, $y=1+i$. ⓒ $x=-1+i$, $y=1$. ⓓ $x=-i$, $y=1+3i$. ⓔ $x=3+i$, $y=2-2i$. ⓕ $x=2+i$, $y=1-i$. ⓖ $x=2+2i$, $y=-2-i$. ⓗ $x=-1-i$, $y=-2+2i$. ⓘ $x=-2+3i$, $y=2-2i$. ⓙ $x=1-i$, $y=-1-2i$. ⓚ $x=i$, $y=-1-i$. ⓛ $x=-1+i$, $y=-1-i$. ⓜ $x=-2+3i$, $y=2-i$. ⓝ $x=2-i$, $y=1-i$. ⓞ $x=-1+3i$, $y=-1+i$. ⓟ $x=-2+i$, $y=1+3i$. ⓠ $x=2+i$, $y=1-i$. ⓡ $x=1+i$, $y=-i$. ⓢ $x=-1+i$, $y=-2+i$. ⓣ $x=-2+3i$, $y=-1-i$. ⓤ $x=-2+2i$, $y=1+2i$. ⓥ $x=2-i$, $y=-i$. ⓦ $x=-2+2i$, $y=-1+3i$. ⓧ $x=1+i$, $y=-1-i$.

15. ⓐ $(-7,-4,3)$. ⓑ $(3,6,9)$. ⓒ $-(1,4,11)$. ⓓ $(3,-1,5)$.

16. ⓐ $(-5,11,-14)$. ⓑ $(6,4,-18)$. ⓒ $(9,-1,1)$. ⓓ $(-1,1,-15)$.

17. (a) $(7,-3,-7)$. (b) $(-1,9,10)$. (c) $(0,-4,-8)$. (d) $-(21,3,3)$.

18. (a) $(0,-5,7)$. (b) $-(4,9,3)$. (c) $(6,1,16)$. (d) $(4,-16,-6)$.

19. (a) $(8,-8,-12)$. (b) $(13,-13,-8)$. (c) $(11,-11,-13)$. (d) $(5,-5,-4)$.

20. (a) $(-6,-6,6)$. (b) $(6,-13,-7)$. (c) $(15,1,7)$. (d) $(-3,-5,13)$.

21. (a) $(2,-3,-2)$. (b) $\frac{1}{4}(1,4,-3)$. (c) $(1,-1,0)$. (d) Нет решения. (e) $\frac{1}{5}(-6,-2,-5)$. (f) $\frac{1}{7}(-5,8,4)$. (g) $\frac{1}{2}(4,-6,-1)$. (h) $\frac{1}{7}(6,0,7)$. (i) $\frac{1}{2}(-1,4,-3)$. (j) $-\frac{1}{2}(2,0,1)$. (k) $\frac{1}{4}(3,-11,-5)$. (l) $\frac{1}{3}(-6,1,-9)$. (m) $\frac{1}{3}(-3,8,6)$. (n) $(2,1,1)$. (o) $(5,2,-2)$. (p) $\frac{1}{7}(7,6,-1)$. (q) $-\frac{1}{7}(0,1,8)$. (r) $\frac{1}{7}(1,-3,-1)$. (s) $\frac{1}{3}(-4,1,1)$. (t) $\frac{1}{4}(3,5,4)$. (u) $\frac{1}{5}(9,0,2)$. (v) $\frac{1}{3}(0,7,1)$. (w) $-(3,3,8)$. (x) $-\frac{1}{2}(1,1,0)$.

22. Не указанный в ответе вектор не является линейной комбинацией векторов системы. (a) $\mathbf{b}_1=-3\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$. (b) $\mathbf{b}_2=3\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$. (c) $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2$. (d) $\mathbf{b}_1=-2\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. (e) $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$. (f) $\mathbf{b}_1=-3\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$. (g) $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2$. (h) $\mathbf{b}_2=\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$. (i) $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2$. (j) $\mathbf{b}_1=-\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2$. (k) $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2$. (l) $\mathbf{b}_1=3\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$. (m) $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1+3\mathbf{a}_2$. (n) $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. (o) $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. (p) $\mathbf{b}_2=2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$. (q) $\mathbf{b}_1=3\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$. (r) $\mathbf{b}_1=3\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. (s) $\mathbf{b}_2=-\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$. (t) $\mathbf{b}_1=-\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$. (u) $\mathbf{b}_1=-\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_2$. (v) $\mathbf{b}_1=3\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. (w) $\mathbf{b}_1=2\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$. (x) $\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$.

23. (a) При $\lambda\neq-11$ $\mathbf{b}=\frac{\lambda+1}{\lambda+11}\mathbf{a}_1+\frac{3\lambda-2}{\lambda+11}\mathbf{a}_2+\frac{10}{\lambda+11}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-11$ разложить нельзя. (b) При $\lambda\neq3/4$ $\mathbf{b}=-\frac{\lambda+8}{8\lambda-6}\mathbf{a}_1+\frac{6\lambda-8}{4\lambda-3}\mathbf{a}_2+\frac{7}{4\lambda-3}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=3/4$ разложить нельзя. (c) При $\lambda\neq-13/4$ $\mathbf{b}=-\frac{15}{4\lambda+13}\mathbf{a}_1-\frac{3\lambda-9}{4\lambda+13}\mathbf{a}_2-\frac{2\lambda+14}{4\lambda+13}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-13/4$ разложить нельзя. (d) При $\lambda\neq-13/5$ $\mathbf{b}=-\frac{16}{5\lambda+13}\mathbf{a}_1-\frac{2\lambda+2}{5\lambda+13}\mathbf{a}_2-\frac{14\lambda-18}{5\lambda+13}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-13/5$ разложить нельзя. (e) При $\lambda\neq-1$ $\mathbf{b}=-\frac{7}{4}\mathbf{a}_1-\frac{5}{4}\mathbf{a}_2$. При $\lambda=-1$ $\mathbf{b}=(-3-t)\mathbf{a}_1+t\mathbf{a}_2+(5+4t)\mathbf{a}_3$ для любого t. (f) При $\lambda\neq-13$ $\mathbf{b}=-\frac{85}{3\lambda+39}\mathbf{a}_1+\frac{6\lambda-7}{\lambda+13}\mathbf{a}_2+\frac{22\lambda-54}{3\lambda+39}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-13$ разложить нельзя. (g) При $\lambda\neq2/5$ $\mathbf{b}=\frac{2}{5\lambda-2}\mathbf{a}_1-\frac{\lambda-2}{5\lambda-2}\mathbf{a}_2-\frac{\lambda}{10\lambda-4}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=2/5$ разложить нельзя. (h) При $\lambda\neq20$ $\mathbf{b}=\frac{5\lambda-10}{\lambda-20}\mathbf{a}_1+\frac{10}{\lambda-20}\mathbf{a}_2-\frac{7\lambda-30}{\lambda-20}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=20$ разложить нельзя. (i) При $\lambda\neq-1$ $\mathbf{b}=-\frac{10\lambda+20}{13\lambda+13}\mathbf{a}_1+\frac{2}{\lambda+1}\mathbf{a}_2+\frac{4\lambda+8}{13\lambda+13}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-1$ разложить нельзя. (j) При $\lambda\neq-11/3$ $\mathbf{b}=\frac{8\lambda+23}{3\lambda+11}\mathbf{a}_1+\frac{19}{3\lambda+11}\mathbf{a}_2-\frac{4\lambda+40}{3\lambda+11}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-11/3$ разложить нельзя. (k) При всех λ $\mathbf{b}=\frac{13}{9}\mathbf{a}_2+\frac{4}{3}\mathbf{a}_3$. (l) При $\lambda\neq11/8$ $\mathbf{b}=-\frac{\lambda+24}{8\lambda-11}\mathbf{a}_1+\frac{3\lambda-15}{8\lambda-11}\mathbf{a}_2-\frac{29}{8\lambda-11}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=11/8$ разложить нельзя. (m) При $\lambda\neq1$ $\mathbf{b}=\frac{3\lambda-2}{3\lambda-3}\mathbf{a}_1-\frac{2\lambda-5}{3\lambda-3}\mathbf{a}_2+\frac{4}{3\lambda-3}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=1$ разложить нельзя. (n) При $\lambda\neq6$ $\mathbf{b}=\frac{13}{\lambda-6}\mathbf{a}_1-\frac{4\lambda-11}{\lambda-6}\mathbf{a}_2-\frac{4\lambda+2}{\lambda-6}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=6$ разложить нельзя. (o) При $\lambda\neq-3$ $\mathbf{b}=\frac{9}{2\lambda+6}\mathbf{a}_1+\frac{2\lambda+51}{2\lambda+6}\mathbf{a}_2-\frac{\lambda-6}{2\lambda+6}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-3$ разложить нельзя. (p) При $\lambda\neq4$ $\mathbf{b}=-\frac{\lambda+4}{\lambda-4}\mathbf{a}_1+\frac{4}{\lambda-4}\mathbf{a}_2+\frac{2\lambda+8}{3\lambda-12}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=4$ разложить нельзя. (q) При $\lambda\neq-4$ $\mathbf{b}=8\mathbf{a}_1-3\mathbf{a}_3$. При $\lambda=$

-4 $\mathbf{b}=(8+6t)\mathbf{a}_1+t\mathbf{a}_2-(3+4t)\mathbf{a}_3$ для любого t. (r) При $\lambda\neq 3/2$ $\mathbf{b}=\frac{5\lambda+15}{6\lambda-9}\mathbf{a}_1+\frac{9}{2\lambda-3}\mathbf{a}_2-\frac{3\lambda-9}{4\lambda-6}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=3/2$ разложить нельзя. (s) При $\lambda\neq -9$ $\mathbf{b}=-\frac{4\lambda+18}{\lambda+9}\mathbf{a}_1+\frac{9}{\lambda+9}\mathbf{a}_2+\frac{16\lambda+45}{2\lambda+18}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-9$ разложить нельзя. (t) При $\lambda\neq -5$ $\mathbf{b}=\frac{\lambda+6}{2\lambda+10}\mathbf{a}_1-\frac{1}{\lambda+5}\mathbf{a}_2-\frac{\lambda+2}{2\lambda+10}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=-5$ разложить нельзя. (u) При $\lambda\neq 1/2$ $\mathbf{b}=-\frac{29}{12\lambda-6}\mathbf{a}_1-\frac{7}{6}\mathbf{a}_2-\frac{5\lambda-17}{12\lambda-6}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=1/2$ разложить нельзя. (v) При $\lambda\neq 1$ $\mathbf{b}=\frac{4}{3\lambda-3}\mathbf{a}_1-\frac{6\lambda-2}{3\lambda-3}\mathbf{a}_2+\frac{8}{3}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=1$ разложить нельзя. (w) При $\lambda\neq 1/4$ $\mathbf{b}=\frac{10\lambda+20}{4\lambda-1}\mathbf{a}_1+\frac{15}{4\lambda-1}\mathbf{a}_2+\frac{3\lambda+18}{4\lambda-1}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=1/4$ разложить нельзя. (x) При $\lambda\neq 20$ $\mathbf{b}=\frac{\lambda+44}{\lambda-20}\mathbf{a}_1+\frac{32}{\lambda-20}\mathbf{a}_2+\frac{7\lambda-12}{\lambda-20}\mathbf{a}_3$. При $\lambda=20$ разложить нельзя.

24. (a), (c), (e), (g), (i), (k), (m), (o), (q), (s), (u), (w) Системы линейно независимы. (b), (d), (f), (h), (j), (l), (n), (p), (r), (t), (v), (x) Системы линейно зависимы.

25. (a), (c), (e), (g), (i), (k), (m), (o), (q), (s), (u), (w) Системы линейно зависимы. (b), (d), (f), (h), (j), (l), (n), (p), (r), (t), (v), (x) Системы линейно независимы.

26. (a), (c), (e), (g), (i), (k), (m), (o), (q), (s), (u), (w) Системы линейно независимы. (b), (d), (f), (h), (j), (l), (n), (p), (r), (t), (v), (x) Системы линейно зависимы.

27. (a) – 27. (x) Система функций линейно независима.

28. (a), (b), (c) Линейно независимые системы. (d) Линейно независима при $n\leq 2$, линейно зависима при $n>2$. (e) Линейно независима при $n=1$, линейно зависима при $n>1$. (f) Линейно независима при $n\leq 2$, линейно зависима при $n>2$. (g) Линейно независима при $n\leq 2$, линейно зависима при $n>2$. (h) Линейно независима при $n=1$, линейно зависима при $n>1$. (i), (j), (k) Линейно независимые системы. (l) Линейно независима при $n\leq 3$, линейно зависима при $n>3$. (m) Линейно независима при $n\leq 4$, линейно зависима при $n>4$. (n) Линейно независима. (o) Линейно независима при $n=1$, линейно зависима при $n>1$.

29. (a), (c), (e), (g), (i), (k), (m), (o), (q), (s), (u), (w), (y) Неполные системы. (b), (d), (f), (h), (j), (l), (n), (p), (r), (t), (v), (x) Полные системы.

30. (a), (d), (e), (f), (h), (l), (m), (o), (q), (t), (v), (x) Системы базисами не являются. (b), (c), (g), (i), (j), (k), (n), (p), (r), (s), (u), (w) Системы являются базисами.

31. (a), (c), (g), (h), (i), (k), (m), (o), (q), (t), (v), (x) Системы базисами не являются. (b), (d), (e), (f), (j), (l), (n), (p), (r), (s), (u), (w) Системы являются базисами.

32. (a), (d), (f), (h), (k), (l), (n), (p), (s), (t), (v), (x) Системы базисами не являются. (b), (c), (e), (g), (i), (j), (m), (o), (q), (r), (u), (w) Системы

являются базисами.

33. (a), (d), (f), (g), (i), (j), (k), (n), (p), (r), (t), (w) Системы являются базисами. (b), (c), (e), (h), (l), (m), (o), (q), (s), (u), (v), (x) Системы базисами не являются.

34. (a) $\mathbf{x}_e = (1,1,2)^\tau$, $\mathbf{y} = (-1,7,9)^\tau$. (b) $\mathbf{x}_e = (-3,1,3)^\tau$, $\mathbf{y} = (-8,6,11)^\tau$. (c) $\mathbf{x}_e = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{y} = (4,-2,-6)^\tau$. (d) $\mathbf{x}_e = (-1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{y} = (1,4,-3)^\tau$. (e) $\mathbf{x}_e = (-3,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{y} = (7,10,7)^\tau$. (f) $\mathbf{x}_e = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y} = (8,4,8)^\tau$. (g) $\mathbf{x}_e = (2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{y} = (0,0,-8)^\tau$. (h) $\mathbf{x}_e = (0,1,-3)^\tau$, $\mathbf{y} = (-2,-1,-6)^\tau$. (i) $\mathbf{x}_e = (2,2,3)^\tau$, $\mathbf{y} = (-2,-3,5)^\tau$. (j) $\mathbf{x}_e = (-2,3,4)^\tau$, $\mathbf{y} = (-1,0,-7)^\tau$. (k) $\mathbf{x}_e = (-3,-3,0)^\tau$, $\mathbf{y} = (-8,6,-1)^\tau$. (l) $\mathbf{x}_e = (1,2,-2)^\tau$, $\mathbf{y} = (-1,-7,-7)^\tau$. (m) $\mathbf{x}_e = (-2,1,0)^\tau$, $\mathbf{y} = (3,1,-3)^\tau$. (n) $\mathbf{x}_e = (-1,3,4)^\tau$, $\mathbf{y} = (6,4,-6)^\tau$. (o) $\mathbf{x}_e = (2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{y} = (-3,-5,4)^\tau$. (p) $\mathbf{x}_e = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y} = (-6,1,-3)^\tau$. (q) $\mathbf{x}_e = (1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{y} = (-8,6,1)^\tau$. (r) $\mathbf{x}_e = (-3,1,4)^\tau$, $\mathbf{y} = (-4,4,-4)^\tau$. (s) $\mathbf{x}_e = (4,3,-4)^\tau$, $\mathbf{y} = (-3,0,-1)^\tau$. (t) $\mathbf{x}_e = (-2,2,-4)^\tau$, $\mathbf{y} = (-2,-5,-2)^\tau$. (u) $\mathbf{x}_e = (-1,0,4)^\tau$, $\mathbf{y} = (6,4,8)^\tau$. (v) $\mathbf{x}_e = (-3,1,1)^\tau$, $\mathbf{y} = (-3,7,11)^\tau$. (w) $\mathbf{x}_e = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{y} = (11,-2,0)^\tau$. (x) $\mathbf{x}_e = (4,-2,0)^\tau$, $\mathbf{y} = (-5,8,-1)^\tau$.

35. (a) $\mathsf{Y}_A = (2,0,-2-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\mathsf{Y}_A = (2,-1,1-2)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. (c) $\mathsf{Y}_A = (0,1,11)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. (d) $\mathsf{Y}_A = (2,-2,-1-2)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. (e) $\mathsf{Y}_A = (-1,0,-1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. (f) $\mathsf{Y}_A = (-1,0,-3-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. (g) $\mathsf{Y}_A = (-3,1,-1-2)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. (h) $\mathsf{Y}_A = (-2,2,4-3)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. (i) $\mathsf{Y}_A = (-2,0,-22)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (j) $\mathsf{Y}_A = (3,4,1-2)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. (k) $\mathsf{Y}_A = (2,0,1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (l) $\mathsf{Y}_A = (0,-1,-1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. (m) $\mathsf{Y}_A = (1,-2,-10)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (n) $\mathsf{Y}_A = (-2,-1,-20)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. (o) $\mathsf{Y}_A = (1,-2,03)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$. (p) $\mathsf{Y}_A = (1,-1,-1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. (q) $\mathsf{Y}_A = (0,-1,-1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$. (r) $\mathsf{Y}_A = (0,-3,2-3)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. (s) $\mathsf{Y}_A = (-2,-3,-30)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$. (t) $\mathsf{Y}_A =$

$(2,1,-23)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\mathsf{Y}_A = (-1,0,-1-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. ⓥ $\mathsf{Y}_A = (1,2,-3-3)^\tau, \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. ⓦ $\mathsf{Y}_A = (1,-1,22)^\tau, \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\mathsf{Y}_A = (-1,-1,2-1)^\tau$, $\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

36. ⓐ $\mathbf{h}_f = (0,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -5-3x+2x^2$. ⓑ $\mathbf{h}_f = (0,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 4$. ⓒ $\mathbf{h}_f = (1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -3-5x-2x^2$. ⓓ $\mathbf{h}_f = (-1,0,-3)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -2x-3x^2$. ⓔ $\mathbf{h}_f = (-3,-3,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -1+5x$. ⓕ $\mathbf{h}_f = (2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -x+3x^2$. ⓖ $\mathbf{h}_f = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -5+5x-5x^2$. ⓗ $\mathbf{h}_f = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -3x-3x^2$. ⓘ $\mathbf{h}_f = (-1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 4-4x-4x^2$. ⓙ $\mathbf{h}_f = (4,-1,0)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -2-4x+2x^2$. ⓚ $\mathbf{h}_f = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 2-3x-2x^2$. ⓛ $\mathbf{h}_f = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 2-2x-4x^2$. ⓜ $\mathbf{h}_f = (-1,3,4)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -1-3x+3x^2$. ⓝ $\mathbf{h}_f = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -1-5x+2x^2$. ⓞ $\mathbf{h}_f = (4,-1,-3)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -2x+4x^2$. ⓟ $\mathbf{h}_f = (1,1,0)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 1-5x+2x^2$. ⓠ $\mathbf{h}_f = (-1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 4-2x+3x^2$. ⓡ $\mathbf{h}_f = (3,1,0)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -5+3x-2x^2$. ⓢ $\mathbf{h}_f = (2,3,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 1-x-4x^2$. ⓣ $\mathbf{h}_f = (0,-1,2)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -1-5x+5x^2$. ⓤ $\mathbf{h}_f = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 5-x+4x^2$. ⓥ $\mathbf{h}_f = (0,2,2)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = -3-2x+2x^2$. ⓦ $\mathbf{h}_f = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 2-4x+5x^2$. ⓧ $\mathbf{h}_f = (-1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{g}(x) = 1$.

37. ⓐ $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,0,-1)^\tau$. ⓑ $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,-1)^\tau, \mathbf{e}_2 = (-1,1,2)^\tau, \mathbf{e}_3 = (3,1,-2)^\tau$. ⓒ $\mathbf{e}_1 = (2,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,1,1)^\tau$. ⓓ $\mathbf{e}_1 = (0,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,-2,2)^\tau$. ⓔ $\mathbf{e}_1 = (1,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-1,0,1)^\tau$. ⓕ $\mathbf{e}_1 = (1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,3,2)^\tau$. ⓖ $\mathbf{e}_1 = (2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-2,0,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,-2)^\tau$. ⓗ $\mathbf{e}_1 = (-1,-1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2,1,-1)^\tau$. ⓘ $\mathbf{e}_1 = (-1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,1,2)^\tau$. ⓙ $\mathbf{e}_1 = (-1,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,2,0)^\tau$. ⓚ $\mathbf{e}_1 = (1,2,-1)^\tau, \mathbf{e}_2 = (2,2,-1)^\tau, \mathbf{e}_3 = (0,-2,-1)^\tau$. ⓛ $\mathbf{e}_1 = (2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,-2)^\tau$. ⓜ $\mathbf{e}_1 = (1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-2,1)^\tau$. ⓝ $\mathbf{e}_1 = (3,1,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,-2,-2)^\tau$. ⓞ $\mathbf{e}_1 = (0,3,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (3,-1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,2,-1)^\tau$. ⓟ $\mathbf{e}_1 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,0,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-2,-1)^\tau$. ⓠ $\mathbf{e}_1 = (-1,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (2,1,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-1,0)^\tau$. ⓡ $\mathbf{e}_1 = (1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,-2,3)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (2,2,-2)^\tau$. ⓢ $\mathbf{e}_1 = (1,2,1)^\tau, \mathbf{e}_2 = (3,2,1)^\tau, \mathbf{e}_3 = (2,-1,-2)^\tau$. ⓣ $\mathbf{e}_1 = (-2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (-2,-1,-2)^\tau$. ⓤ $\mathbf{e}_1 = (-1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,-2,3)^\tau$. ⓥ $\mathbf{e}_1 = (2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (3,-1,3)^\tau$. ⓦ $\mathbf{e}_1 = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (1,3,-1)^\tau$. ⓧ $\mathbf{e}_1 = (2,2,2)^\tau$, $\mathbf{e}_2 = (-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{e}_3 = (0,2,2)^\tau$.

38. ⓐ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (-1,0,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (5,5,0)^\tau$.

ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (3,1,1)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-7,1,5)^\tau$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-2,0,2)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-3,0,1)^\tau$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (2,2,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-3,9,5)^\tau$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (3,0,-1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-1,0,-1)^\tau$.

ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (1,1,0)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (2,4,3)^\tau$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-2,-2,2)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (8,11,5)^\tau$.

ⓗ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,0,2)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-5,-4,1)^\tau$.

ⓘ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (0,1,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (-2,0,-4)^\tau$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (3,5,9)^\tau$.

ⓚ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (2,-1,0)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (6,10,-8)^\tau$.

ⓛ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (-1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (4,7,-5)^\tau$.

ⓜ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (0,3,-2)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,8,6)^\tau$.

ⓝ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (0,-3,-2)^\tau$.

ⓞ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-1,-6,-4)^\tau$.

ⓟ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-2,3,1)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-2,0,7)^\tau$.

ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-8,4,3)^\tau$.

ⓡ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (0,2,3)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-7,-7,-7)^\tau$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,2,3)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (5,3,-3)^\tau$.

ⓣ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (2,3,6)^\tau$.

ⓤ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-1,-2,0)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-2,0,4)^\tau$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_u = (-2,1,3)^\tau$, $\mathbf{x}_e = (-2,-2,5)^\tau$.

ⓦ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (3,-2,1)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (5,-5,9)^\tau$.

ⓧ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_u = (2,-1,3)^\tau$, $\mathbf{y}_e = (1,2,3)^\tau$.

39. ⓐ $\mathbf{u}_1 = (0,-1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-3,-3)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (3,3,0)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (3,2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (3,1,1)^\tau$. ⓑ $\mathbf{u}_1 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,-1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (0,2,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (0,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (1,-1,2)^\tau$. ⓒ $\mathbf{u}_1 = (2,1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-1,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,3,2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (2,-1,1)^\tau$. ⓓ $\mathbf{u}_1 = (-2,2,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,0,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (2,0,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (1,1,2)^\tau$. ⓔ $\mathbf{u}_1 = (-3,2,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,-3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,0,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (2,-1,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2,2,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (3,2,0)^\tau$. ⓕ $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,1,2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-1,0,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (3,1,3)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-1,-2,-2)^\tau$. ⓖ $\mathbf{u}_1 = (-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (0,-1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,-3)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,1,2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (2,-1,-2)^\tau$. ⓗ $\mathbf{u}_1 = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (0,2,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-1,-2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-1,-1,0)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (3,2,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-2,-1,-1)^\tau$. ⓘ $\mathbf{u}_1 = (1,3,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,3)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (3,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (1,1,0)^\tau$. ⓙ $\mathbf{u}_1 = (-1,1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (0,3,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (3,-2,0)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (3,-1,1)^\tau$. ⓚ $\mathbf{u}_1 = (2,2,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (0,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,1,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-1,1,-1)^\tau$. ⓛ $\mathbf{u}_1 = (-3,2,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (0,2,1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,3,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (0,1,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-1,3,2)^\tau$. ⓜ $\mathbf{u}_1 = (-1,2,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,2,2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (2,-1,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2,-1,-2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (1,-1,-1)^\tau$. ⓝ $\mathbf{u}_1 = (-2,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,2,3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-2,0)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (0,-1,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (1,2,2)^\tau$. ⓞ $\mathbf{u}_1 = (-1,1,2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-2,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2,0,-2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,0,1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-2,2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (3,-1,1)^\tau$. ⓟ $\mathbf{u}_1 = (-2,-3,3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,-2,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (3,0,1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (0,1,1)^\tau$. ⓠ $\mathbf{u}_1 = (-1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (3,3,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-2,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2,1,0)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-2,-2,1)^\tau$. ⓡ $\mathbf{u}_1 = (1,-3,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-3,3)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-2,2,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,-2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (2,1,-1)^\tau$. ⓢ $\mathbf{u}_1 = (3,-2,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,0,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-2,1,-2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-1,-2,-2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2,3,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (3,1,0)^\tau$. ⓣ $\mathbf{u}_1 = (2,-1,1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (2,2,1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1,1,-2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (-1,0,-1)^\tau$. ⓤ $\mathbf{u}_1 = (2,0,2)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-1,-1,3)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-1,2)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (3,0,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (2,1,2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (3,-1,1)^\tau$. ⓥ $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (2,-3,1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-1,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (1,1,2)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (1,1,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (0,-2,-1)^\tau$. ⓦ $\mathbf{u}_1 = (-1,-3,-3)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (1,-3,0)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (-2,2,3)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,2,2)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (0,-2,2)^\tau$. ⓧ $\mathbf{u}_1 = (0,3,-1)^\tau$, $\mathbf{u}_2 = (-3,1,-2)^\tau$, $\mathbf{u}_3 = (-1,2,-1)^\tau$. $\mathbf{f}_1 = (0,2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_2 = (-1,2,1)^\tau$, $\mathbf{f}_3 = (2,1,1)^\tau$.

40. ⓐ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

41. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

42. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

43. ⓐ $r = 2$. ⓑ $r = 1$. ⓒ $r = 2$. ⓓ $r = 2$. ⓔ $r = 1$. ⓕ $r = 2$. ⓖ $r = 2$. ⓗ $r = 2$. ⓘ $r = 2$. ⓙ $r = 3$. ⓚ $r = 2$. ⓛ $r = 3$. ⓜ $r = 2$. ⓝ $r = 3$.

ⓞ $r=3$. ⓟ $r=4$. ⓠ $r=2$. ⓡ $r=4$. ⓢ $r=4$. ⓣ $r=3$. ⓤ $r=2$. ⓥ $r=3$. ⓦ $r=3$. ⓧ $r=2$.

44. ⓐ $r=2$. ⓑ $r=3$. ⓒ $r=2$. ⓓ $r=3$. ⓔ $r=3$. ⓕ $r=2$. ⓖ $r=3$. ⓗ $r=3$. ⓘ $r=2$. ⓙ $r=3$. ⓚ $r=2$. ⓛ $r=2$. ⓜ $r=3$. ⓝ $r=2$. ⓞ $r=3$. ⓟ $r=2$. ⓠ $r=2$. ⓡ $r=3$. ⓢ $r=3$. ⓣ $r=2$. ⓤ $r=3$. ⓥ $r=2$. ⓦ $r=3$. ⓧ $r=2$.

45. ⓐ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$. ⓑ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ⓒ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$. ⓓ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6$. ⓔ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$. ⓕ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$. ⓖ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$. ⓗ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$. ⓘ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. ⓙ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$. ⓚ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$. ⓛ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$. ⓜ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$. ⓝ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$. ⓞ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. ⓟ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$. ⓠ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$. ⓡ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$. ⓢ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6$. ⓣ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. ⓤ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$. ⓥ $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$. ⓦ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$. ⓧ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4$.

46. ⓐ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓑ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓒ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓓ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_5$. ⓔ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓕ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓖ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_5$. ⓗ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓘ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓙ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_5$. ⓚ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓛ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓜ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_5$. ⓝ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓞ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓟ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_5$. ⓠ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓡ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓢ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_5$. ⓣ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$. ⓤ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_5$. ⓥ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓦ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_4$. ⓧ $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$.

47. ⓐ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, 3. ⓑ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓒ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓓ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, 3. ⓔ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$, 4. ⓕ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$, 3. ⓖ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓗ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, 3. ⓘ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓙ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$, 3. ⓚ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓛ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓜ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, 3. ⓝ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓞ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5$, 4. ⓟ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, 3. ⓠ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓡ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓢ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$, 3. ⓣ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓤ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2. ⓥ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6$, 4. ⓦ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$, 3. ⓧ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, 2.

48. ⓐ $(1,-2,0,1)$, $(0,1,1,1)$, $d=2$. ⓑ Система уравнений имеет только нулевое решение, $d=0$. ⓒ $(1,3,1,0)$, $(1,-2,0,1)$, $d=2$. ⓓ $(1,0,1,-1)$, $d=1$. ⓔ $(-1,1,0,1)$, $(-1,2,1,0)$, $d=2$. ⓕ Система уравнений имеет только нулевое решение, $d=0$. ⓖ $(-3,1,2,1)$, $d=1$. ⓗ Система уравнений имеет только нулевое решение, $d=0$. ⓘ $(-2,1,1,-1)$, $d=1$. ⓙ $(5,0,0,2)$, $(-1,0,1,0)$, $(-3,2,0,0)$, $d=3$. ⓚ $(0,1,2,1)$, $(1,0,-3,-1)$, $d=2$. ⓛ $(2,1,0,-1)$, $d=1$. ⓜ Система уравнений имеет только нулевое решение, $d=0$ ⓝ $(1,-2,-1,0)$, $(0,2,2,1)$, $d=2$. ⓞ $(1,0,-3,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,2,1)$, $d=3$. ⓟ $(-2,-1,1,1)$, $d=1$. ⓠ $(4,0,1,0)$, $(-2,1,0,0)$, $(7,0,0,1)$, $d=3$. ⓡ $(-1,1,0,1)$, $(2,-1,1,0)$, $d=2$. ⓢ $(-2,-1,0,1)$, $d=1$. ⓣ $(3,0,0,4)$, $(0,1,0,-1)$, $(0,0,1,1)$, $d=3$. ⓤ $(3,-2,1,0)$, $(1,2,0,1)$, $d=2$. ⓥ $(0,1,2,0)$, $(0,0,-2,1)$, $(1,0,0,0)$, $d=3$. ⓦ $(2,-1,0,1)$, $(-3,1,1,0)$, $d=2$. ⓧ $(3,-1,1,1)$, $d=1$.

49. ⓐ, ⓒ, ⓓ, ⓔ, ⓖ, ⓗ, ⓙ, ⓚ, ⓜ, ⓝ, ⓟ, ⓠ, ⓡ, ⓣ, ⓤ, ⓦ, ⓧ Являются. ⓑ, ⓕ, ⓘ, ⓛ, ⓞ, ⓢ, ⓥ Не являются.

50. ⓐ $\mathbf{a}_2=-2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4=3\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6=-2\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_3$. ⓑ $\mathbf{a}_2=-2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3=3\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5=-\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6=-\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_4$. ⓒ $\mathbf{a}_1=2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4=-\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5=-2\mathbf{a}_2+3\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6=\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$. ⓓ $\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4=$

$-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. (e) $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3$. (f) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - 0{,}5\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$. (g) $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. (h) $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$. (i) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$. (j) $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = 2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_4$. (k) $\mathbf{a}_2 = -3\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. (l) $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_4$. (m) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. (n) $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + -2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. (o) $\mathbf{a}_1 = -2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. (p) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$. (q) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$. (r) $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$. (s) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = -\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$. (t) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$. (u) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 2\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$. (v) $\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_4 = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_6 = -\mathbf{a}_3$. (w) $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$. (x) $\mathbf{a}_2 = -2\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_4$.

51. (a) $3x_1 + 2x_4 = 0$, $3x_1 + 2x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$. (b) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$. (c) $2x_1 - x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $2x_1 + x_4 = 0$. (d) $2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$. (e) $2x_1 + x_2 = 0$, $2x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$. (f) $2x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0$. (g) $2x_3 - 3x_4 = 0$, $2x_2 - 3x_4 = 0$, $x_1 = 0$. (h) $4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$. (i) $2x_1 + x_3 + x_4 = 0$, $7x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0$. (j) $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$. (k) $6x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$. (l) $5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$, $11x_1 + 8x_2 + x_4 = 0$. (m) $4x_1 - 6x_2 - 3x_4 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$. (n) $3x_1 + 5x_2 - 7x_4 = 0$, $4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$. (o) $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. (p) $7x_2 + x_3 - 4x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0$. (q) $4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$, $3x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0$. (r) $2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 = 0$. (s) $x_1 - 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 0$. (t) $x_1 + x_3 = 0$, $4x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0$. (u) $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$, $3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0$. (v) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$. (w) $2x_2 + x_3 = 0$, $4x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$. (x) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $3x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$.

52. (a) $s = 4$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(1, 1, 0, 1)$. (b) $s = 2$, $d = 2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (c) $s = 4$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(3, 2, 0, 3)$. (d) $s = 2$, $d = 2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (e) $s = 3$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения — $(2, 0, 2, 1)$. (f) $s = 3$, $d = 2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (g) $s = 4$, $d = 1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(2, 5, -5, -5)$. (h) $s = 3$, $d = 2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (i) $s =$

2, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (j) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (k) $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения — $(-2,-6,-4,2)$. (l) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (m) $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения — $(2,-1,-1,-4)$. (n) $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (o) $s=4$, $d=0$. Базис суммы, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_2$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$). (p) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (q) $s=4$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(1,-2,1,1)$, $(8,-12,3,4)$. (r) $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, базис пересечения — $(-1,2,2,3)$. (s) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. (t) $s=4$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(-2,9,-3,0)$, $(2,-3,1,-1)$. (u) $s=4$, $d=1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(0,4,4,1)$. (v) $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_3$, базис пересечения — $(1,1,1,1)$. (w) $s=4$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_1$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$), базис пересечения — $(0,1,1,0)$, $(1,0,0,0)$. (x) $s=4$, $d=0$. Базис суммы, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_3$ (или любой базис в $\mathbb{R}^4$).

53. (a) $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(3,-3,1,3)$, $(2,0,1,0)$. (b) $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(-1,0,0,1)$, $(2,3,0,-1)$, $(-1,2,1,-3)$, базис пересечения — $(0,3,0,1)$. (c) $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(5,4,-1,3)$. (d) $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(2,0,1,0)$, $(-2,1,-5,2)$. (e) $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например — $(1,-1,0,2)$, $(2,0,1,3)$. (f) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(3,-1,-2,3)$, $(7,2,-2,-2)$, $(3,4,-2,0)$, базис пересечения — $(1,1,-1,1)$, $(-3,0,1,0)$. (g) $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(1,2,0,1)$, $(1,-1,1,2)$, $(1,-1,1,3)$, базис пересечения — $(1,5,-1,0)$. (h) $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(0,1,0,0)$, $(3,0,-2,-1)$. (i) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(-3,-1,2,-3)$, $(15,0,4,4)$, $(-2,1,0,0)$, базис пересечения — $(2,-1,2,-1)$, $(0,0,-2,1)$. (j) $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например — $(1,-2,-1,1)$, $(-1,3,3,-2)$. (k) $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(1,1,1,1)$, $(-5,7,-6,7)$, $(4,0,3,0)$, базис пересечения —

$(1,1,0,1)$, $(-3,1,-3,1)$. l $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например — $(3,-3,1,0)$, $(2,-1,1,2)$. m $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(1,0,-3,-1)$, $(0,-1,1,1)$, $(3,-1,2,2)$, базис пересечения — $(1,-4,1,3)$. n $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(-1,0,1,0)$, $(10,4,-2,3)$, $(-6,0,6,1)$, базис пересечения — $(2,2,2,1)$, $(1,1,1,1)$. o $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(1,-4,2,2)$. p $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(1,1,0,0)$, $(4,9,-5,6)$, $(5,6,-1,3)$, базис пересечения — $(-1,-3,2,3)$, $(1,2,-1,3)$. q $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(0,1,0,2)$, $(-2,-2,2,3)$, $(2,-1,-2,2)$, базис пересечения — $(0,1,0,2)$. r $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(3,3,4,-7)$, $(1,1,0,-1)$. s $s=4$, $d=0$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$. t $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(2,-3,-3,-1)$, $(1,-3,-3,1)$, $(-2,3,-2,2)$, базис пересечения — $(-1,3,3,-1)$. u $s=4$, $d=0$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$. v $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(3,2,1,-2)$. w $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(3,2,-3,-3)$, $(0,0,-1,2)$, $(2,1,-1,1)$, базис пересечения — $(-3,-2,4,1)$. x $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например — $(2,3,-1,-2)$, $(1,0,-2,-1)$.

54. a $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(3,-2,5,1)$. b $s=4$, $d=0$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$. c $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(1,0,0,-1)$. d $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(2,0,-3,-2)$, $(2,-1,2,2)$, $\mathbf{a}_1$, базис пересечения — $(-4,1,1,0)$. e $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. f $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(-3,-2,2,-1)$, $(-15,-9,7,-12)$, $(0,-1,3,5)$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. g $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $(2,2,-1,1)$, базис пересечения — $(3,-3,0,-1)$. h $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, базис пересечения — $(-3,0,1,-3)$, $(1,1,3,-1)$. i $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. j $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(0,0,1,-3)$. $(7,-7,-9,4)$, k $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, базис пересечения — $(-3,-1,1,0)$, $(-1,-2,3,-2)$. l $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(13,5,6,3)$. $(5,3,2,0)$, m $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $(-2,1,1,-2)$, $(8,-2,6,-4)$, $(4,-2,-4,6)$, базис пересечения — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. n $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. o $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является

любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(1,7,3,1)$. ⓟ $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(0,1,-3,1)$, $(1,0,-2,-2)$, $\mathbf{a}_1$, базис пересечения — $(-3,1,3,7)$. ⓠ $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, базис пересечения — $(1,3,1,0)$, $(1,-2,3,1)$. ⓡ $s=4$, $d=0$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$. ⓢ $s=3$, $d=1$. Например, базис суммы — $(-2,1,-1,-3)$, $(2,3,-3,0)$, $\mathbf{a}_1$, базис пересечения — $(6,1,-1,6)$. ⓣ $s=3$, $d=2$. Например, базис суммы — $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, базис пересечения — $(0,3,2,-2)$, $(-1,0,-2,1)$. ⓤ $s=4$, $d=0$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$. ⓥ $s=4$, $d=2$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(2,-1,-4,-3)$. $(-5,2,15,9)$. ⓦ $s=4$, $d=1$. Базисом суммы является любой базис в $\mathbb{R}^4$, базис пересечения, например — $(2,1,2,3)$. ⓧ $s=2$, $d=2$. Сумма и пересечение совпадают, их базис, например, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

55. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 10$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\det A = 10$. ⓒ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -5$. ⓔ $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 1$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 13$.

ⓖ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 26$. ⓗ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -12$. ⓘ $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 1$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 31$. ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -18$. ⓛ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = -4$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 9$. ⓝ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 27$. ⓞ $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -9$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -6$. ⓠ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -2$.

(s) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = -22.$

(t) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = -2.$

(u) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $\det A = 16.$

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 1.$

(w) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(x) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 9.$

56.(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = 6.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 3.$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 3.$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 8.$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = -1.$

(k) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = -1.$

(l) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(m) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 3.$

(n) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 27.$

(o) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\det A = -12.$

(p) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(q) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 27.$

(r) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(s) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

(t) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\det A = -27.$

(u) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0.$

ⓥ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 2$.

ⓦ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

ⓧ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = -12$.

57. ⓐ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 54$.

ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -4 & 2 \\ -6 & 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $\det A = 664$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 64$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 9 \\ -3 & 2 & 9 & -4 \end{pmatrix}$, $\det A = -41$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = -44$.

ⓕ $\begin{pmatrix} -7 & -6 & -6 & -4 \\ 6 & 11 & 4 & 6 \\ -6 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 76$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 23$.

ⓗ $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 17$.

ⓘ $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 76$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 6 & -6 \\ -6 & 8 & -6 & 6 \\ -9 & 9 & -4 & 6 \\ 9 & -9 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $\det A = 304$.

ⓚ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 14$.

ⓛ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 56$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

ⓝ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

ⓞ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = -16$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 41$.

ⓠ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 52$.

ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A = 109$.

ⓢ $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$.

ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\det A = 144$.

ⓤ $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 9$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, det $A = 142$.
ⓦ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & 6 \\ -1 & 4 & -2 & 6 \\ 9 & -9 & -5 & 6 \\ 3 & -9 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, det $A = 2347$.
ⓧ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, det $A = 184$.

58.ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

59.ⓐ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 4 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

60.ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -4 & -4 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

61.ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

62.ⓐ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. ⓙ $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

ⓞ $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓠ $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓤ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

ⓦ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

63. ⓐ $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. ⓙ $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓚ $\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

ⓞ $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

ⓠ $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

ⓤ $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

ⓦ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓨ $\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. ⓩ $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

64. ⓐ $\mathrm{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\,((-4;-1;3;-3))$; $\operatorname{im} A = \ell\,((0;1;3;2);(3;-1;-3;1);(2;3;1;2))$.

(b) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((0;2;3;-3)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((2;1;3;1);(3;0;-3;0);(-2;3;1;1)\right)$.
(c) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((0;-1;0;1)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((2;1;0;-3);(1;1;-2;-3);(0;1;0;3)\right)$.
(d) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((3;-3;1;0)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((0;-2;3;0);(-1;-1;3;1);(3;2;-3;1)\right)$.
(e) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((1;2;-1;-1)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((2;2;1;0);(2;-1;0;0);(3;1;-2;-1)\right)$.
(f) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((-2;-1;2;0);(-4;1;0;2)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((1;1;1;1);(0;2;0;0)\right)$.
(g) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((-2;-1;1;0);(-1;0;0;1)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((3;1;1;1);(-3;1;0;1)\right)$.
(h) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((1;-1;0;0);(1;0;0;-2)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((0;-2;2;2);(-3;3;2;-3)\right)$.
(i) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((1;-2;-6;0);(11;2;0;-6)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((0;0;0;-2);(3;3;3;2)\right)$.
(j) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((-3;-2;-1;0);(-2;-1;0;-1)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((0;-1;-2;2);(-1;0;3;-2)\right)$.
(k) $\operatorname{rang}(A) = 4$; $\ker A = \{\mathbf{0}\}$; $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^4$. (l) $\operatorname{rang}(A) = 4$; $\ker A = \{\mathbf{0}\}$; $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^4$. (m) $\operatorname{rang}(A) = 4$; $\ker A = \{\mathbf{0}\}$; $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^4$. (n) $\operatorname{rang}(A) = 4$; $\ker A = \{\mathbf{0}\}$; $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^4$. (o) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\operatorname{im} A = \ell\left((1;1;0;2)\right)$.
$\ker A = \ell\left((1;0;2;0);(0;1;2;0);(0;0;2;1)\right)$;
(p) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left((1;0;0;2);(0;1;0;-1);(0;0;1;1)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((1;1;0;-1)\right)$.
(q) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left((1;0;0;-2);(0;1;0;1);(0;0;1;0)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((1;-1;1;-1)\right)$.
(r) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((16;-26;23;-5)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((-3;1;2;2);(1;2;3;3);(3;2;2;2)\right)$.
(s) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((2;-2;3;-2)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((0;1;-3;3);(0;0;-1;1);(-2;-2;2;-2)\right)$.
(t) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((2;1;4;3)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((-1;3;1;2);(1;-3;2;2);(1;0;-1;0)\right)$.
(u) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left((-5;0;1;-2)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((0;-1;0;0);(1;3;2;-3);(2;1;2;2)\right)$.
(v) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((-1;1;0;0);(0;0;-1;1)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((2;2;2;2);(-3;2;2;3)\right)$.
(w) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((-2;1;1;0);(-1;-2;0;3)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((-1;1;2;0);(-1;1;2;3)\right)$.
(x) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left((0;-1;2;0);(-2;1;0;2)\right)$;
$\operatorname{im} A = \ell\left((3;-1;-2;1);(2;2;-2;0)\right)$.

65. ⓐ $\operatorname{rang}(A)=2$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}2&2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}-2&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\right)$.
ⓑ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}6&3\\-4&-2\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}\right)$.
ⓒ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&-2\\0&3\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}6&0\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\5&0\end{pmatrix}\right)$.
ⓓ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&0\\-2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\right)$.
ⓔ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&0\\-2&-3\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&-3\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&-3\end{pmatrix}\right)$.
ⓕ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}3&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\3&2\end{pmatrix}\right)$.
ⓗ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}6&-3\\-2&1\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\4&-1\end{pmatrix}\right)$.
ⓘ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\1&-3\end{pmatrix}\right)$.
ⓙ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}-3&3\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\-2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\3&-2\end{pmatrix}\right)$.
ⓚ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}\right)$.
ⓛ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-2\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}-3&-2\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\-1&-2\end{pmatrix}\right)$.
ⓜ $\operatorname{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-3&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\3&2\end{pmatrix}\right)$.
ⓝ $\operatorname{rang}(A)=2$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A=\ell\left(\begin{pmatrix}-2&2\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\right)$.

ⓞ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓟ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\right)$.

ⓠ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓡ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓢ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

ⓣ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓤ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

ⓥ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓦ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓧ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓨ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

66. ⓐ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓑ $\mathrm{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\, A = \ell\left(\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ⓒ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓓ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓔ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓕ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ⓖ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ⓗ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

ⓘ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right)$.

ⓙ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓚ $\operatorname{rang}(A) = 3$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\right)$.

ⓛ $\operatorname{rang}(A) = 2$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓜ $\operatorname{rang}(A) = 3$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

ⓝ $\operatorname{rang}(A) = 3$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

ⓞ $\operatorname{rang}(A) = 3$,
$\ker A = \ell\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $\operatorname{im} A = \ell\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\right)$.

ⓟ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}\right)$.
ⓠ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\3&2\end{pmatrix}\right)$.
ⓡ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-2\\2&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$.
ⓢ $\mathrm{rang}(A)=2$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\2&2\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\-2&2\end{pmatrix}\right)$.
ⓣ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&5\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6&9\\4&-4\end{pmatrix}\right)$.
ⓤ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$.
ⓥ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}-2&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\end{pmatrix}\right)$.
ⓦ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\-3&-1\end{pmatrix}\right)$.
ⓧ $\mathrm{rang}(A)=3$,
$\ker A=\ell\left(\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$, $\mathrm{im}\,A=\ell\left(\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&3\\-5&-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\-3&-1\end{pmatrix}\right)$.

67. ⓐ $\mathrm{rang}(A)=2$; $\ker A=\ell\left(1;9x+6x^2+x^3\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(-2;2-2x\right)$. ⓑ $\mathrm{rang}(A)=2$; $\ker A=\ell\left(1;-3x+3x^2+x^3\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(-2+2x;4-4x+2x^2\right)$. ⓒ $\mathrm{rang}(A)=2$; $\ker A=\ell\left(1;3x^2+1x^3\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(-2;-4x-2x^2\right)$. ⓓ $\mathrm{rang}(A)=2$; $\ker A=\ell\left(1+x;8-3x^2-x^3\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(3;6-2x-x^2\right)$. ⓔ $\mathrm{rang}(A)=2$; $\ker A=\ell\left(1;-8x+5x^2-2x^3\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(-3+2x;-4x+6x^2\right)$. ⓕ $\mathrm{rang}(A)=3$; $\ker A=\ell\left(7+4x+3x^2\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(2;-2+3x;-18-13x^3\right)$. ⓖ $\mathrm{rang}(A)=3$; $\ker A=\ell\left(-3x+x^2\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(2;2x;6+6x^2-4x^3\right)$. ⓗ $\mathrm{rang}(A)=3$; $\ker A=\ell\left(1\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(3+2x;4+10x+4x^2;-12+12x+21x^2+24x^3\right)$. ⓘ $\mathrm{rang}(A)=3$; $\ker A=\ell\left(1\right)$; $\mathrm{im}\,A=\ell\left(-1+2x;4+4x+10x^2;12x+9x^2+24x^3\right)$.

(j) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(1+2x+x^2\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(2; -1+1x; 12+12x-21x^2-x^3\right)$. (k) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(1+x\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(-2; 4x+2x^2; -12+12x-12x^2-14x^3\right)$. (l) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(1\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(3+2x; -6+6x+8x^2; -6x+9x^2\right)$. (m) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(x\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(-2; -2+6x+6x^2; 6+6x+12x^2+16x^3\right)$. (n) $\operatorname{rang}(A) = 3$; $\ker A = \ell\left(1\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(2-3x; 6+4x-4x^2; 12+12x-12x^2+9x^3\right)$. (o) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left(1; x; x^2+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(4\right)$. (p) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left(1; x; -6x^2+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(x^2\right)$. (q) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left(1; x; x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(x\right)$. (r) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(x; 12+6x^2+5x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; x^2\right)$. (s) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(x; 4+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; x^2\right)$. (t) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(x; 6+6x^2+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; x^2\right)$. (u) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(2-3x; 14-6x^2+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; x^2\right)$. (v) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(x; 6+6x^2-x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; 2x-x^2\right)$. (w) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(2+3x; x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; 2x-3x^2\right)$. (x) $\operatorname{rang}(A) = 2$; $\ker A = \ell\left(1+3x; 22+9x^2-x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(1; 4x+x^2\right)$. (y) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left(\frac{1}{7}; x; -4x^2+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(4^4\right)$. (z) $\operatorname{rang}(A) = 1$; $\ker A = \ell\left(1; x^2; 9x+x^3\right)$; $\operatorname{im} A = \ell\left(\pi\right)$.

68.(a) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-2x_3; -3x_1+x_2+3x_3; -2x_1+x_2+2x_3)$. (b) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2; -x_1+2x_2+x_3; x_1-3x_2-x_3)$. (c) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_3; -x_1+x_2-x_3; x_1+x_2-2x_3)$. (d) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-3x_2-3x_3; x_1-2x_2-2x_3; 2x_2+3x_3)$. (e) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-2x_2-4x_3; x_1-x_2-3x_3; x_1-x_3)$. (f) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2; -x_1+2x_2+2x_3; 2x_1-4x_2-3x_3)$. (g) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_3; x_1+x_2+x_3; -2x_2-3x_3)$. (h) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+2x_3; x_1+x_2+3x_3; x_1+x_2+4x_3)$. (i) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2; 3x_1+4x_2-x_3; -x_1-x_2+x_3)$. (j) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+2x_3; x_1+x_2; -x_1-x_2+x_3)$. (k) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_3; -2x_1+x_2-2x_3; -x_2+x_3)$. (l) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2-x_3; x_1-2x_3; -x_2+2x_3)$. (m) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+2x_2+x_3; -x_1-x_2-x_3; x_1+3x_2+2x_3)$. (n) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_3; 3x_1+x_2+3x_3; x_2+x_3;)$. (o) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_3; -2x_1+x_2-2x_3; -x_2+x_3)$. (p) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-3x_2; -x_1+4x_2-x_3; 2x_2-x_3)$. (q) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+2x_2-x_3; -x_1-x_2; -3x_1-3x_2+x_3)$. (r) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2-x_3; -x_1+x_3; -3x_1-x_2+4x_3)$. (s) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2; x_2-2x_3; -x_1-x_3)$. (t) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+x_2-2x_3; -x_1-x_3; x_2-2x_3)$. (u) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-3x_3; -x_1+x_2+3x_3; x_2+x_3)$. (v) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2; x_2-x_3; -x_1+2x_3)$. (w) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1+2x_2; x_1+3x_2+x_3; -x_1-4x_2-x_3)$. (x) $A^{-1}\mathbf{x} = (x_1-x_2+x_3; x_1+2x_3; -x_1-x_2-2x_3)$.

69. (a) $A^{-1}f = -2f'''+f''-f$. (b) $A^{-1}f = -2f'''-2f''-f$. (c) $A^{-1}f = -4f'''-3f''-2f'-f$. (d) $A^{-1}f = 2f''-f$. (e) $A^{-1}f = -f'''+f''-f$. (f) $A^{-1}f = -2f'''-f$. (g) $A^{-1}f = -f'''-f$. (h) $A^{-1}f = -4f'''-2f''-f'-f$. (i) $A^{-1}f = -f'''-f''-f$. (j) $A^{-1}f = -3f'''+f'-f$. (k) $A^{-1}f = 2f'''+3f''+$

$2f' + f$. (l) $A^{-1}f = 4f''' + 3f'' + f' + f$. (m) $A^{-1}f = -3f''' + 2f'' - f' + f$. (n) $A^{-1}f = 3f''' - 3f'' + f' - f$. (o) $A^{-1}f = -4f''' + 3f'' - 2f' + f$. (p) $A^{-1}f = -2f''' + 2f'' + 2f' + f$. (q) $A^{-1}f = -2f'' - 2f' - f$. (r) $A^{-1}f = -2f''' + 2f'' + f$. (s) $A^{-1}f = -2f''' + f' + f$. (t) $A^{-1}f = -2f''' + 2f'' - f$. (u) $A^{-1}f = 3f''' + 3f'' + 2f' + f$. (v) $A^{-1}f = -f''' - f'' - f' - f$. (w) $A^{-1}f = -f'' - f$. (x) $A^{-1}f = f''' + f'' - f' - f$.

70. (a) $A^{-1}f = 2f'' + 2f' + f$. (b) $A^{-1}f = -6f'' + 2f' - f$. (c) $A^{-1}f = f'' + f' + f$. (d) $A^{-1}f = f' + f$. (e) $A^{-1}f = -2f'' + f' - f$. (f) $A^{-1}f = -f'' + f' + f$. (g) $A^{-1}f = -3f'' + f' - f$. (h) $A^{-1}f = -f'' + f$. (i) $A^{-1}f = -f'' - f$. (j) $A^{-1}f = -2f'' + f$. (k) $A^{-1}f = -2f'' - f$. (l) $A^{-1}f = f'' - f' + f$. (m) $A^{-1}f = -f'' - f' - f$. (n) $A^{-1}f = -f' + f$. (o) $A^{-1}f = -2f'' - f' - f$. (p) $A^{-1}f = -f'' - f' + f$. (q) $A^{-1}f = -3f'' - f' - f$. (r) $A^{-1}f = -4f'' - 2f' - f$. (s) $A^{-1}f = 3f'' - 2f' + f$. (t) $A^{-1}f = -5f'' - 2f' - f$. (u) $A^{-1}f = 2f'' - 2f' + f$. (v) $A^{-1}f = -6f'' - 2f' - f$. (w) $A^{-1}f = 8f'' - 3f' + f$. (x) $A^{-1}f = 7f'' - 3f' + f$.

71. (a) $A^{-1}f(x) = (1 + 2x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$. (b) $A^{-1}f(x) = (2x - 2x^2)f'' + (-1 + 2x)f' - f$. (c) $A^{-1}f(x) = (-9 + 2x + 2x^2)f'' + (2 - 2x)f' + f$. (d) $A^{-1}f(x) = (-2 - 2x - 2x^2)f'' + (2 + 2x)f' - f$. (e) $A^{-1}f(x) = (2 - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$. (f) $A^{-1}f(x) = (6 - 2x - 2x^2)f'' + (-2 + 2x)f' - f$. (g) $A^{-1}f(x) = (-2 + 2x^2)f'' + (-1 - 2x)f' + f$. (h) $A^{-1}f(x) = -2x^2 f'' + (-1 + 2x)f' - f$. (i) $A^{-1}f(x) = (1 - x)f'' + f' + f$. (j) $A^{-1}f(x) = (3 + x - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$. (k) $A^{-1}f(x) = (x + 2x^2)f'' - 2xf' + f$. (l) $A^{-1}f(x) = (-1 - x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$. (m) $A^{-1}f(x) = (-1 - 2x^2)f'' + (-1 + 2x)f' - f$. (n) $A^{-1}f(x) = (-2 - x + 2x^2)f'' + (1 - 2x)f' + f$. (o) $A^{-1}f(x) = (2 + 2x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$. (p) $A^{-1}f(x) = (4 + x)f'' + 2f' + f$. (q) $A^{-1}f(x) = (4 + x - 2x^2)f'' + (1 + 2x)f' - f$. (r) $A^{-1}f(x) = (-4 + 2x^2)f'' + (-2 - 2x)f' + f$. (s) $A^{-1}f(x) = (-2 - x - 2x^2)f'' + 2xf' - f$. (t) $A^{-1}f(x) = -xf'' + f$. (u) $A^{-1}f(x) = (x + 2x^2)f'' + (-1 - 2x)f' + f$. (v) $A^{-1}f(x) = (6 + 2x - 2x^2)f'' + (2 + 2x)f' - f$. (w) $A^{-1}f(x) = (1 + 1x)f'' - f' + f$. (x) $A^{-1}f(x) = (-4 + 2x + 2x^2)f'' + (1 - 2x)f' + f$.

72. (a) – (x) $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (a) $\lambda_{1,2} = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1;1)$. (b) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1;1)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{v} = \mu(1;2)$. (c) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(2;1)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (d) $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{u} = \mu(2;1)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v} = \mu(1;-2)$. (e) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(1;-3)$. (f) $\lambda_{1,2} = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1;1)$. (g) $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{v} = \mu(2;1)$. (h) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (i) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(1;2)$. (j) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{u} = \mu(2;-1)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (k) $\lambda_{1,2} = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1;1)$. (l) $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(2;1)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (m) $\lambda_{1,2} = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$. (n) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{u} = \mu(1;-2)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (o) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1;-1)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v} = \mu(1;2)$. (p) $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(2;-1)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v} = \mu(1;1)$. (q) $\lambda_{1,2} = 1$,

$\mathbf{v}=\mu(1;1)$. (r) $\lambda_1=-1$, $\mathbf{u}=\mu(1;-2)$, $\lambda_2=0$, $\mathbf{v}=\mu(1;-1)$. (s) $\lambda_1=-1$, $\mathbf{u}=\mu(1;-1)$, $\lambda_2=0$, $\mathbf{v}=\mu(2;-1)$. (t) $\lambda_1=-1$, $\mathbf{u}=\mu(1;1)$, $\lambda_2=0$, $\mathbf{v}=\mu(2;1)$. (u) $\lambda_{1,2}=0$, $\mathbf{u}=\mu(1;-1)$. (v) $\lambda_1=-1$, $\mathbf{u}=\mu(1;-2)$, $\lambda_2=2$, $\mathbf{v}=\mu(1;1)$. (w) Спектр пуст. (x) Спектр пуст.

73. (a) – (x) $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. (a) $\lambda_1=-2+i$, $\mathbf{u}=\mu(1;1+i)$, $\lambda_2=-2-i$, $\mathbf{v}=\mu(1;1-i)$. (b) $\lambda_1=-2+2i$, $\mathbf{u}=\mu(1;-i)$, $\lambda_2=-2-2i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (c) $\lambda_1=-1+i$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;1)$, $\lambda_2=-1-i$, $\mathbf{v}=\mu(1+i;1)$. (d) $\lambda_1=-2+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1-i;1)$, $\lambda_2=-2-i$, $\mathbf{v}=\mu(-1+i;1)$. (e) $\lambda_1=-1+i$, $\mathbf{u}=\mu(1;i)$, $\lambda_2=-1-i$, $\mathbf{v}=\mu(i;1)$. (f) $\lambda_1=-1+2i$, $\mathbf{u}=\mu(i;1)$, $\lambda_2=-1-2i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (g) $\lambda_1=-1+i\sqrt{2}$, $\mathbf{u}=\mu(3;-2+i\sqrt{2})$, $\lambda_2=-1-i\sqrt{2}$, $\mathbf{v}=\mu(3;-2-i\sqrt{2})$. (h) $\lambda_1=i$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;1)$, $\lambda_2=-i$, $\mathbf{v}=\mu(1+i;1)$. (i) $\lambda_1=-1+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1-i;1)$, $\lambda_2=-1-i$, $\mathbf{v}=\mu(-1+i;1)$. (j) $\lambda_1=i$, $\mathbf{u}=\mu(1;-i)$, $\lambda_2=-i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (k) $\lambda_1=i\sqrt{5}$, $\mathbf{u}=\mu(2;i\sqrt{5}+1)$, $\lambda_2=-i\sqrt{5}$, $\mathbf{v}=\mu(2;-i\sqrt{5}+1)$. (l) $\lambda_1=-1+2i\sqrt{2}$, $\mathbf{u}=\mu(1-2i\sqrt{2};3)$, $\lambda_2=-1-2i\sqrt{2}$, $\mathbf{v}=\mu(1+2i\sqrt{2};3)$. (m) $\lambda_1=1+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;1)$, $\lambda_2=1-i$, $\mathbf{v}=\mu(1+i;-1)$. (n) $\lambda_1=i$, $\mathbf{u}=\mu(1;-1+i)$, $\lambda_2=-i$, $\mathbf{v}=\mu(1;-1-i)$. (o) $\lambda_1=1+i$, $\mathbf{u}=\mu(i;1)$, $\lambda_2=1-i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (p) $\lambda_1=1+2i$, $\mathbf{u}=\mu(i;1)$, $\lambda_2=1-2i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (q) $\lambda_1=3+i\sqrt{6}$, $\mathbf{u}=\mu(i\sqrt{6};2)$, $\lambda_2=3-i\sqrt{6}$, $\mathbf{v}=\mu(i\sqrt{6};-2)$. (r) $\lambda_1=1+i$, $\mathbf{u}=\mu(1;1-i)$, $\lambda_2=1-i$, $\mathbf{v}=\mu(1;1+i)$. (s) $\lambda_1=1+i$, $\mathbf{u}=\mu(1+i;1)$, $\lambda_2=1-i$, $\mathbf{v}=\mu(1-i;1)$. (t) $\lambda_1=2+i$, $\mathbf{u}=\mu(1;i)$, $\lambda_2=2-i$, $\mathbf{v}=\mu(i;1)$. (u) $\lambda_1=2+2i$, $\mathbf{u}=\mu(i;1)$, $\lambda_2=2-2i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (v) $\lambda_1=2+i$, $\mathbf{u}=\mu(1+i;-1)$, $\lambda_2=2-i$, $\mathbf{v}=\mu(1-i;-1)$. (w) $\lambda_1=3+i$, $\mathbf{u}=\mu(i;1)$, $\lambda_2=3-i$, $\mathbf{v}=\mu(1;i)$. (x) $\lambda_1=i\sqrt{2}$, $\mathbf{u}=\mu(i\sqrt{2}-2;3)$, $\lambda_2=-i\sqrt{2}$, $\mathbf{v}=\mu(-i\sqrt{2}-2;3)$.

74. (a) $\alpha_1=1+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;i)$; $\alpha_2=-2$, $\mathbf{u}=\mu(2i;-1+2i)$. (b) $\alpha_1=0$, $\mathbf{u}=\mu(-2+i;1+i)$; $\alpha_2=-1$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;1+i)$. (c) $\alpha_1=0$, $\mathbf{u}=\mu(1+i;1-i)$; $\alpha_2=-1+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;2+2i)$. (d) $\alpha_1=2-i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;1)$; $\alpha_2=-1-i$, $\mathbf{u}=\mu(1;1+i)$. (e) $\alpha_1=-2$, $\mathbf{u}=\mu(-i;-1+i)$; $\alpha_2=1-2i$, $\mathbf{u}=\mu(1-2i;-i)$. (f) $\alpha_1=1+i$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;2)$; $\alpha_2=2-2i$, $\mathbf{u}=\mu(i;1)$. (g) $\alpha_1=1$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-i)$; $\alpha_2=-2$, $\mathbf{u}=\mu(-i;2-i)$. (h) $\alpha_1=-i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-1-2i)$; $\alpha_2=0$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-1-i)$. (i) $\alpha_1=1-i$, $\mathbf{u}=\mu(-1;1-i)$; $\alpha_2=i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-1)$. (j) $\alpha_1=-2+2i$, $\mathbf{u}=\mu(-i;1-2i)$; $\alpha_2=1$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-i)$. (k) $\alpha_1=1-i$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;2i)$; $\alpha_2=2$, $\mathbf{u}=\mu(-1;1)$. (l) $\alpha_1=i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-1)$; $\alpha_2=-1-i$, $\mathbf{u}=\mu(1;2i)$. (m) $\alpha_1=-1+i$, $\mathbf{u}=\mu(i;-1+i)$; $\alpha_2=1+2i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;i)$. (n) $\alpha_1=-2i$, $\mathbf{u}=\mu(1;-1+2i)$; $\alpha_2=2+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;1)$. (o) $\alpha_1=2+i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;1)$; $\alpha_2=1-i$, $\mathbf{u}=\mu(1;-1+i)$. (p) $\alpha_1=-1+i$, $\mathbf{u}=\mu(1;1+i)$; $\alpha_2=i$, $\mathbf{u}=\mu(-1+i;-1)$. (q) $\alpha_1=-1+2i$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;2-i)$; $\alpha_2=0$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;1+i)$. (r) $\alpha_1=-1$, $\mathbf{u}=\mu(1-i;2+i)$; $\alpha_2=2i$, $\mathbf{u}=\mu(1;1)$.

(s) $\alpha_1 = -2+2i$, $\mathbf{u} = \mu(-i;1-i)$; $\alpha_2 = 1-i$, $\mathbf{u} = \mu(-1+2i;-2i)$. (t) $\alpha_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1-2i;1+i)$; $\alpha_2 = 2-i$, $\mathbf{u} = \mu(-1;1)$. (u) $\alpha_1 = 1+2i$, $\mathbf{u} = \mu(-2;1)$; $\alpha_2 = -1-i$, $\mathbf{u} = \mu(i;1+i)$. (v) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1-2i;-i)$; $\alpha_2 = 2-i$, $\mathbf{u} = \mu(1;1)$. (w) $\alpha_1 = -1+i$, $\mathbf{u} = \mu(1+i;-1)$; $\alpha_2 = 1-i$, $\mathbf{u} = \mu(-2;1+i)$. (x) $\alpha_1 = -2+i$, $\mathbf{u} = \mu(1;1-i)$; $\alpha_2 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(2-i;2)$.

75. (a) $\alpha_{1,2,3} = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,-1)$, $\mu \neq 0$. (b) $\alpha_{1,2,3} = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,0)$, $\mu \neq 0$. (c) $\alpha_{1,2,3} = 2$, $\mathbf{u} = \mu(1,2,0)$, $\mu \neq 0$. (d) $\alpha_{1,2,3} = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,2) + \nu(0,1,-1)$, $|\mu|+|\nu| \neq 0$. (e) $\alpha_{1,2,3} = 1$, $\mathbf{u} = \mu(0,1,-1)+\nu(1,0,1)$, $|\mu|+|\nu| \neq 0$. (f) $\alpha_{1,2,3} = 2$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,0) + \nu(0,1,-1)$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$. (g) $\alpha_1 = 2$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_{2,3} = 1$, $\mathbf{v} = \nu(-1,1,-1)$, $|\nu| \neq 0$. (h) $\alpha_{1,2} = 0$, $\mathbf{u} = \mu(2,-1,0)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_3 = 1$, $\mathbf{v} = \nu(1,-1,-1)$, $|\nu| \neq 0$. (i) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_{2,3} = -1$, $\mathbf{v} = \nu(-1,1,0)$, $|\nu| \neq 0$. (j) $\alpha_{1,2} = 0$, $\mathbf{u} = \mu(-1,2,0) + \nu(0,1,1)$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$, $\alpha_3 = 1$, $\mathbf{v} = \xi(1,-2,-1)$, $|\xi| \neq 0$. (k) $\alpha_{1,2} = -1$, $\mathbf{u} = \mu(0,1,1) + \nu(1,1,0)$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$, $\alpha_3 = 0$, $\mathbf{v} = \xi(1,1,-1)$, $|\xi| \neq 0$. (l) $\alpha_{1,2} = 1$, $\mathbf{u} = \mu(0,1,-1) + \nu(1,1,0)$, $|\mu| + |\nu| \neq 0$, $\alpha_3 = 0$, $\mathbf{v} = \xi(1,3,-1)$, $|\xi| \neq 0$. (m) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = 2$, $\mathbf{v} = \nu(3,1,3)$, $|\nu| \neq 0$, $\alpha_3 = 3$, $\mathbf{w} = \xi(1,1,0)$, $|\xi| \neq 0$. (n) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,0)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = -1, \mathbf{v} = \nu(1,0,1)$, $|\nu| \neq 0$, $\alpha_3 = 2$, $\mathbf{w} = \xi(1,1,1)$, $|\xi| \neq 0$. (o) $\alpha_1 = 2$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = -1, \mathbf{v} = \nu(1,-1,3)$, $|\nu| \neq 0$, $\alpha_3 = -2$ $\mathbf{w} = \xi(0,-1,1)$, $|\xi| \neq 0$. (p) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,3)$, $|\mu| \neq 0$. (q) $\alpha_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(-1,0,-1)$, $|\mu| \neq 0$. (r) $\alpha_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(-1,-1,-1)$, $|\mu| \neq 0$. (s) $\alpha_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(-1,-1,1)$, $|\mu| \neq 0$. $\alpha_2 = -2$, $\mathbf{v} = \nu(2,0,-3)$, $|\nu| \neq 0$. (t) $\alpha_1 = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1,-2,-1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = 2, \mathbf{v} = \nu(1,1,0)$, $|\nu| \neq 0$. (u) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(2,1,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = -1, \mathbf{v} = \nu(1,0,1)$, $|\nu| \neq 0$. (v) $\alpha_1 = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = 2, \mathbf{v} = \nu(2,1,1)$, $|\nu| \neq 0$. (w) $\alpha_1 = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,-1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = -2, \mathbf{v} = \nu(1,0,1)$, $|\nu| \neq 0$. (x) $\alpha_1 = -2$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,1)$, $|\mu| \neq 0$, $\alpha_2 = 1, \mathbf{v} = \nu(1,0,-1) + \xi(0,1,1)$, $|\nu| + |\xi| \neq 0$.

76. (a) $\alpha = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,-1,-1)$ для $\mu \neq 0$. (b) $\alpha = 2$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,-1,0)$ для $\mu \neq 0$. (c) $\alpha = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,-1,0) + \nu(0,2,0,1)$ для $|\mu| + |\nu| \neq 0$. (d) $\alpha = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,0,1) + \nu(0,5,4,7)$ для $|\mu| + |\nu| \neq 0$. (e) $\alpha = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,0,1)+\nu(0,0,1,-2)+\xi(0,1,0,1)$ для $|\mu|+|\nu|+|\xi| \neq 0$. (f) $\alpha = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1,1,0,0) + \nu(0,-1,1,-1)$ для $|\mu| + |\nu| \neq 0$. (g) $\alpha = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,1,-1)$ для $\mu \neq 0$, $\alpha = 0$, $\mathbf{v} = \nu(2,1,1,-2)$ для $\nu \neq 0$. (h) $\alpha = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,0,1)$ для $\mu \neq 0$, $\alpha = 1$, $\mathbf{v} = \nu(-1,2,1,1)$ для $\nu \neq 0$. (i) $\alpha = 1$, $\mathbf{u} = \mu(1,-1,1,0)$ для $\mu \neq 0$, $\alpha = 2$, $\mathbf{v} = \nu(1,-2,1,0) + \xi(0,0,1,1)$ для $|\nu| + |\xi| \neq 0$. (j) $\alpha = 0$, $\mathbf{u} = \mu(1,2,-2,7)$ для $\mu \neq 0$, $\alpha = 1$, $\mathbf{v} = \nu(1,-1,0,0)+\xi(0,2,-1,3)$ для $|\nu|+|\xi| \neq 0$. (k) $\alpha = -2$, $\mathbf{u} = \mu(1,0,0,1) + \nu(0,1,-1,0)$ для $|\mu| + |\nu| \neq 0$, $\alpha = 0$, $\mathbf{v} = \xi(1,0,-1,2) + \eta(0,-1,1,1)$ для $|\xi| + |\eta| \neq 0$. (l) $\alpha = -1$, $\mathbf{u} = \mu(1,-1,1,0) + \nu(0,1,0,-1)$ для

$|\mu|+|\nu|\neq 0$, $\alpha=1$, $\mathbf{v}=\xi(0,0,1,-1)+\eta(-1,1,0,0)$ для $|\xi|+|\eta|\neq 0$. (m) $\alpha=0$, $\mathbf{u}=\mu(1,2,0,-2)$ для $\mu\neq 0$, $\alpha=1$, $\mathbf{v}=\nu(0,1,0,-1)$ для $\nu\neq 0$, $\alpha=-1$, $\mathbf{w}=\xi(-3,-2,1,2)$ для $\xi\neq 0$. (n) $\alpha=1$, $\mathbf{u}=\mu(1,0,-1,-1)$ для $\mu\neq 0$, $\alpha=2$, $\mathbf{v}=\nu(0,1,0,1)$ для $\nu\neq 0$, $\alpha=0$, $\mathbf{w}=\xi(-1,-1,2,0)$ для $\xi\neq 0$. (o) $\alpha=1$, $\mathbf{u}=\mu(-1,0,1,1)$ для $\mu\neq 0$, $\alpha=2$, $\mathbf{v}=\nu(0,1,0,-1)$ для $\nu\neq 0$, $\alpha=0$, $\mathbf{w}=\xi(-2,0,2,3)+\eta(1,1,0,-2)$ для $|\xi|+|\eta|\neq 0$. (p) $\alpha=0$, $\mathbf{u}=\mu(1,-2,-1,2)$ для $\mu\neq 0$, $\alpha=1$, $\mathbf{v}=\nu(1,-1,-1,1)$ для $\nu\neq 0$, $\alpha=-1$, $\mathbf{w}=\xi(1,1,0,0)+\eta(2,0,-1,2)$ для $|\xi|+|\eta|\neq 0$. (q) $\alpha=2$, $\mathbf{u}=\mu(1,-1,0,0)$ для $\mu\neq 0$, $\alpha=1$, $\mathbf{v}=\nu(-2,3,1,-1)$ для $\nu\neq 0$, $\alpha=-2$, $\mathbf{w}=\xi(-1,1,1,-1)$ для $\xi\neq 0$, $\alpha=-1$, $\mathbf{f}=\eta(-1,1,2,-1)$ для $\eta\neq 0$ (r) $\alpha=2$, $\mathbf{u}=\mu(1,0,2,0)$ для $\mu\neq 0$, $\alpha=1$, $\mathbf{v}=\nu(2,1,3,0)$ для $\nu\neq 0$, $\alpha=-2$, $\mathbf{w}=\xi(1,0,1,1)$ для $\xi\neq 0$, $\alpha=-1$, $\mathbf{f}=\eta(4,1,4,2)$ для $\eta\neq 0$. (s) Если $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то $\operatorname{Spec}A=\{1\}$. Если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec}A=\{1,i,-i\}$. При $\mu\neq 0$ для $\alpha_1=1$ $\mathbf{u}_1=\mu(1,0,-1,-1)$, для $\alpha_2=i$ $\mathbf{u}_2=\mu(13,-11+3i,-5-i,-4-6i)$, для $\alpha_3=-i$ $\mathbf{u}_3=\mu(13,-11-3i,-5+i,-4+6i)$. (t) Если $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то $\operatorname{Spec}A=\{2\}$. Если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec}A=\{2,1+i,1-i\}$. При $\mu\neq 0$ для $\alpha_1=2$ $\mathbf{u}_1=\mu(1,1,-1,0)$, для $\alpha_2=1+i$ $\mathbf{u}_2=\mu(1-i,2,1+i,-1+i)$, для $\alpha_3=1-i$ $\mathbf{u}_3=\mu(1+i,2,1-i,-1-i)$. (u) Если $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то $\operatorname{Spec}A=\{-1\}$. Если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec}A=\{-1,i,-i\}$. Для $\alpha_1=-1$ $\mathbf{u}_1=\mu(0,1,0,2)+\nu(1,0,0,1)$, $|\mu|+|\nu|\neq 0$, для $\alpha_2=i$ $\mathbf{u}_2=\mu(3+i,6+2i,-3-i,10)$, $\mu\neq 0$, для $\alpha_3=-i$ $\mathbf{u}_3=\mu(3-i,6-2i,-3+i,10)$, $\mu\neq 0$. (v) Если $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то $\operatorname{Spec}A=\{0\}$. Если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec}A=\{0,1+i,1-i\}$. Для $\alpha_1=0$ $\mathbf{u}_1=\mu(0,-1,2,1)+\nu(1,0,1,1)$ для $|\mu|+|\nu|\neq 0$, для $\alpha_2=1+i$ $\mathbf{u}_2=\mu(-1-i,-1-i,2,2)$, $\mu\neq 0$, для $\alpha_3=1-i$ $\mathbf{u}_3=\mu(-1+i,-1+i,2,2)$, $\mu\neq 0$. (w) Если $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то $\operatorname{Spec}A=\{-1,1\}$. Если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec}A=\{-1,1,i,-i\}$. При $\mu\neq 0$ для $\alpha_1=-1$ $\mathbf{u}_1=\mu(1,0,-1,1)$, для $\alpha_2=1$ $\mathbf{u}_2=\nu(1,-1,-1,1)$, для $\alpha_3=i$ $\mathbf{u}_3=\mu(5+i,-2i,-6,4)$, для $\alpha_4=-i$ $u_4=\mu(5-i,2i,-6,4)$. (x) Если $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, то $\operatorname{Spec}A=\{0,2\}$. Если $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, то $\operatorname{Spec}A=\{0,2,1+i,1-i\}$. При $\mu\neq 0$ для $\alpha_1=0$ $\mathbf{u}_1=\mu(1,-1,0,0)$, для $\alpha_2=2$ $\mathbf{u}_2=\mu(1,0,0,1)$, для $\alpha_3=1+i$ $\mathbf{u}_3=\mu(2-2i,-4,2,1-i)$, для $\alpha_4=1-i$ $\mathbf{u}_4=\mu(2+2i,-4,2,1+i)$.

77. (a) $\alpha=0$, $k_g=3$. (b) $\alpha=1$, $k_g=3$. (c) $\alpha=1$, $k_g=3$. (d) $\alpha=-1$, $k_g=3$. (e) $\alpha=0$, $k_g=3$. (f) $\alpha=1$, $k_g=2$. (g) $\alpha=0$, $k_g=2$. (h) $\alpha=1$, $k_g=2$. (i) $\alpha=0$, $k_g=2$. (j) $\alpha=0$, $k_g=2$. (k) $\alpha=1$, $k_g=1$. (l) $\alpha=-1$, $k_g=1$. (m) $\alpha=1$, $k_g=2$; $\alpha=0$, $k_g=1$. (n) $\alpha=1$, $k_g=2$; $\alpha=0$, $k_g=1$. (o) $\alpha=0$, $k_g=2$; $\alpha=-1$, $k_g=1$. (p) $\alpha=1$,$k_g=2$; $\alpha=0$,$k_g=1$. (q) $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=1$, $k_g=1$. (r) $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=-1$, $k_g=1$. (s) $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=-1$, $k_g=1$. (t) $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=1$, $k_g=1$; $\alpha=-1$, $k_g=1$. (u) $\alpha=0$, $k_g=1$; $\alpha=1$, $k_g=1$; $\alpha=-1$, $k_g=1$.

(v) $\alpha = 0$, $k_g = 1$; $\alpha = 1$, $k_g = 1$; $\alpha = -1$, $k_g = 1$. (w) $\alpha = 0$, $k_g = 1$; $\alpha = 1$, $k_g = 1$; $\alpha = -1$, $k_g = 1$. (x) $\alpha = 0$, $k_g = 1$; $\alpha = 1$, $k_g = 1$; $\alpha = -1$, $k_g = 2$.

78. (a) $A_u = \mathrm{diag}(1,0,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,3,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,0)$. (b) $A_u = \mathrm{diag}(2,1,1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,-2,4)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,0,-1)$. (c) $A_u = \mathrm{diag}(0,-1,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,3)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,0,5)$. (d) $A_u = \mathrm{diag}(-1,-2,-2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,-3,-5)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,0)$. (e) $A_u = \mathrm{diag}(2,0,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,0,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (0,-1,1)$. (f) $A_u = \mathrm{diag}(3,1,1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,1,0)$. (g) $A_u = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,0,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-2,0)$. (h) $A_u = \mathrm{diag}(0,-2,-2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,-1)$. (i) $A_u = \mathrm{diag}(1,1,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (3,-3,1)$. (j) $A_u = \mathrm{diag}(2,2,1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,-2)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-4)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,1,-1)$. (k) $A_u = \mathrm{diag}(0,0,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-3,-3,1)$. (l) $A_u = \mathrm{diag}(-1,-1,-2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,-3,2)$. (m) $A_u = \mathrm{diag}(2,2,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-4,1,2)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-1,-1)$. (n) $A_u = \mathrm{diag}(1,1,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-2)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-1,1)$. (o) $A_u = \mathrm{diag}(0,0,-2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,0,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (2,2,1)$. (p) $A_u = \mathrm{diag}(3,0,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,0,1)$. (q) $A_u = \mathrm{diag}(2,-1,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,-1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (1,-1,0)$. (r) $A_u = \mathrm{diag}(1,-2,-2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,0,1)$. (s) $A_u = \mathrm{diag}(2,2,-1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-1,-1)$. (t) $A_u = \mathrm{diag}(1,1,-2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,0,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1,-1,1)$. (u) $A_u = \mathrm{diag}(1,2,3)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (3,-3,1)$. (v) $A_u = \mathrm{diag}(0,1,2)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,1,-2)$, $\mathbf{u}_3 = (0,-2,1)$. (w) $A_u = \mathrm{diag}(-1,0,1)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,1)$, $\mathbf{u}_3 = (-5,-4,0)$. (x) $A_u = \mathrm{diag}(-2,-1,0)$, $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-3,1,-2)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,1,0)$.

79. (a) $A_e = \mathrm{diag}(-1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (2,1,-2,2)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,0,-1)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,1,-2)$. (b) $A_e = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_3 = (2,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (1,-1,2,1)$. (c) $A_e = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (-1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,0,-1)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,1,-1)$. (d) $A_e = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,1,-1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (-1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3 = (-2,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,0,1)$. (e) $A_e = \mathrm{diag}(3,0,2,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,-3,-3,2)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,3,4,-1)$, $\mathbf{e}_4 = (0,4,4,-1)$. (f) $A_e = \mathrm{diag}(2,-1,1,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,1,-1)$, $\mathbf{e}_2 = (2,1,0,-2)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,-1)$, $\mathbf{e}_4 = (4,2,1,-4)$. (g) $A_e = \mathrm{diag}(0,1,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (-1,1,2,1)$, $\mathbf{e}_2 = (-1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,1,0)$. (h) $A_e = \mathrm{diag}(0,1,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1,0,2)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,3)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,0,1)$. (i) $A_e = \mathrm{diag}(1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,2,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (1,-2,0,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,2,0,1)$. (j) $A_e = \mathrm{diag}(1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,-1,1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,0,1,-3)$, $\mathbf{e}_4 = (0,2,-2,3)$. (k) $A_e =$

$\operatorname{diag}(2,2,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (0,1,-1,2)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,0,4)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,-1)$, $\mathbf{e}_4 = (1,-1,0,2)$. ⓛ $A_e = \operatorname{diag}(2,0,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (-1,1,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,-1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,2,0,1)$. ⓜ $A_e = \operatorname{diag}(2,2,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (-1,0,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,-2,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{e}_4 = (1,-1,1,0)$. ⓝ $A_e = \operatorname{diag}(2,2,2,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,-2)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{e}_4 = (1,1,1,-1)$. ⓞ $A_e = \operatorname{diag}(0,0,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,4,0)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,0,-1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,1,1)$. ⓟ $A_e = \operatorname{diag}(1,0,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,-2)$, $\mathbf{e}_2 = (2,1,-1,-4)$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,1,1)$. ⓠ $A_e = \operatorname{diag}(2,1,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,-2,1)$, $\mathbf{e}_4 = (2,-2,1,1)$. ⓡ $A_e = \operatorname{diag}(2,2,2,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,-1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1,-1)$, $\mathbf{e}_4 = (1,1,2,-1)$. ⓢ $A_e = \operatorname{diag}(2,2,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,1,-1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (2,-1,0,1)$. ⓣ $A_e = \operatorname{diag}(-2,-2,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,-1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,-2,1)$, $\mathbf{e}_3 = (-1,1,0,1)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,-2,1)$. ⓤ $A = \operatorname{diag}(3,3,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,-1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{e}_3 = (-2,1,2,0)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,0,1)$. ⓥ $A_e = \operatorname{diag}(0,-1,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1,0,3)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,-1,2)$, $\mathbf{e}_4 = (1,0,0,1)$. ⓦ $A_e = \operatorname{diag}(0,-2,-2,-2)$, $\mathbf{e}_1 = (-1,2,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (1,0,-1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,1,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,-1,1)$. ⓧ $A_e = \operatorname{diag}(2,1,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,-1,1,1)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,-4)$, $\mathbf{e}_3 = (1,0,0,-2)$, $\mathbf{e}_4 = (0,0,1,-2)$.

80. В примерах ⓐ – ⓧ характеристические многочлены имеют только простые корни, так как они взаимно просты со своей производной. ⓐ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 13\lambda - 8$. ⓑ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda - 23$. ⓒ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 8\lambda + 26$. ⓓ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4$. ⓔ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda - 1$. ⓕ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 1$. ⓖ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 4$. ⓗ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 6$. ⓘ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 18$. ⓙ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 20$. ⓚ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda - 2$. ⓛ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda + 12$. ⓜ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda + 5$. ⓝ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 6$. ⓞ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 8$. ⓟ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 25$. ⓠ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 7$. ⓡ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 8\lambda - 5$. ⓢ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 5$. ⓣ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 3\lambda + 10$. ⓤ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 7$. ⓥ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 9\lambda. + 15$. ⓦ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 6$. ⓧ $-\varphi_A(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 11\lambda + 9$.

81. В ⓐ – ⓧ геометрическая кратность любого собственного значения равна 1. ⓐ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. ⓑ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$. ⓒ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$. ⓓ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$. ⓔ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$. ⓕ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$. ⓖ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. ⓗ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$. ⓘ $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$. ⓙ $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$. ⓚ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$. ⓛ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$. ⓜ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$. ⓝ $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$. ⓞ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$. ⓟ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$. ⓠ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$. ⓡ $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. ⓢ $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$. ⓣ $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$.

u $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=1$. v $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$. w $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$. x $\alpha_1=0$, $\alpha_2=2$.

82. a $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;-1;0),(2;1;-2;-1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-1;0;2;-1),(5;3;-8;1)\big)$. b $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;2;2;-1),(0;1;1;0)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((2;2;3;-2),(-4;-6;-7;5)\big)$. c $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;-1;0;-1),(-1;2;0;2)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((1;0;1;0)\big)$, $\alpha_3=-1$ $\mathbb{K}_3=\ell\big((1;-2;-2;-1)\big)$. d $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;1;-2;1),(-1;0;2;0)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-2;-2;5;-3)\big)$, $\alpha_3=-1$ $\mathbb{K}_3=\ell\big((1;1;-1;1)\big)$. e $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;1;0;-2),(0;1;0;-1),(-2;-3;1;3)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((0;0;1;-1)\big)$. f $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;1;-1;0),(0;1;0;-1),(3;1;-2;1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((0;1;1;-1)\big)$. g $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;-1;-1),(0;1;2;2),(0;0;1;0)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((1;-1;-3;-2)\big)$. h $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;1),(1;1;-1;1),(-3;0;1;-3)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-1;2;-1;0)\big)$. i $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;0),(2;1;-2;-1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-1;0;1;0),(-2;1;1;0)\big)$. j $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;-1),(0;1;0;-1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((0;1;1;-1),(-2;3;0;0)\big)$. k $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;2;2;0),(-2;-3;-3;0)\big)$, $\alpha_2=-1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-2;-4;-3;1),(-1;-1;0;2)\big)$. l $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;2;-7;2),(0;1;-2;1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((0;-1;3;0),(-1;0;3;1)\big)$. m $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;1;-2;-2),(1;2;-4;-4),(3;3;-5;-5)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((2;4;-8;-7)\big)$. n $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;1;2;2),(2;3;4;4),(2;3;5;5)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-1;0;-2;-1)\big)$. o $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;0),(0;1;0;1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-3;0;1;1),(-2;0;0;1)\big)$. p $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;2;-1;3),(-1;-1;1;-2)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((2;2;-1;3),(2;1;-2;4)\big)$. q $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;0),(1;1;1;-2)\big)$, $\alpha_2=-1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((1;-1;0;2),(1;0;0;1)\big)$. r $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;-1;1),(1;1;-1;2)\big)$, $\alpha_2=-1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((2;1;-1;1),(2;2;0;1)\big)$. s $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;-1;-1),(-2;1;2;3)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((3;-3;-2;-5),(1;0;-1;0)\big)$. t $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;-2;-2;4),(0;1;1;-2)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-3;2;3;-3),(-4;2;3;-2)\big)$. u $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;-3;5;1),(0;1;-2;-1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((1;0;0;0),(-2;1;-1;2)\big)$. v $\alpha_1=1$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;-1),(-1;1;-2;1),(2;1;-1;-2)\big)$, $\alpha_2=0$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((0;-1;2;1)\big)$. w $\alpha_1=1$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;2;1),(-1;1;-5;-4),(-1;1;-4;-3)\big)$, $\alpha_2=0$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((-1;-2;2;4)\big)$. x $\alpha_1=0$ $\mathbb{K}_1=\ell\big((1;0;0;1),(1;1;-1;1)\big)$, $\alpha_2=1$ $\mathbb{K}_2=\ell\big((3;0;1;3)\big)$, $\alpha_3=-1$ $\mathbb{K}_3=\ell\big((0;2;-3;1)\big)$.

83. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

84. ⓐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} -2&1&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 0&0&-2&0\\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} -1&1&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ 0&2&1&0\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} -1&1&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -2&1&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 0&0&-2&1\\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

85. ⓐ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓔ $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 0&0&-2&1\\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$. ⓘ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&2&1\\ 0&0&0&2 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&-2&0&0\\ 0&0&-2&1\\ 0&0&0&-2 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&-1&1\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓤ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

86. ⓐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓛ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓝ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ⓞ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓟ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓠ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓣ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓤ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓦ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓧ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

87. ⓐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓑ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ⓒ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓓ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓔ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓕ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ⓖ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓗ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓘ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ⓙ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ⓛ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ⓝ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ⓞ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ⓟ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ⓠ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ⓢ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Ⓣ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Ⓤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ⓥ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

ⓦ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

88. ⓐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓑ $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. ⓒ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓓ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
ⓔ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. ⓕ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓖ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. ⓗ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
ⓘ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓙ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓚ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. ⓛ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
ⓜ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. ⓝ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. ⓞ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓟ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
ⓠ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓡ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. ⓢ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ⓣ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.
ⓤ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. ⓥ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. ⓦ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. ⓧ $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

89. В ⓐ – ⓜ инвариантными одномерными подпространствами являются $\ell(v)$, $v = \mu f_1 + \nu f_2$ для любых $|\mu| + |\nu| \neq 0$, и $\ell(f_3)$. Инвариантными двумерными подпространствами являются $\ell(v, f_3)$, $v = \mu f_1 + \nu f_2$ для любых $|\mu| + |\nu| \neq 0$, и $\ell(f_1, f_2)$. ⓐ $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (-1, -1, 1)$. ⓑ $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 1, 1)$. ⓒ $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (-1, 1, 0)$, $f_3 = (1, -1, 1)$. ⓓ $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (1, -1, 1)$. ⓔ $f_1 = (1, -1, 2)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (1, -1, 1)$. ⓕ $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (-1, 1, 1)$. ⓖ $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, -1, -1)$. ⓗ $f_1 = (1, -1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (-1, 1, 1)$. ⓘ $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (-2, 2, 1)$. ⓙ $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (-1, -1, 1)$. ⓚ $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (-3, 2, 2)$. ⓛ $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (1, 1, -1)$. ⓜ $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (-1, -1, 1)$.

В ⓝ – ⓧ инвариантными одномерными подпространствами являются $\ell(f_1)$, $\ell(f_2)$ и $\ell(f_3)$. Инвариантными двумерными подпространствами являются $\ell(f_1, f_2)$, $\ell(f_1, f_3)$ и $\ell(f_2, f_3)$. ⓝ $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 2, 1)$, $f_3 = (0, 1, 1)$. ⓞ $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, -1, -1)$. ⓟ $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (-1, 1, -1)$, $f_3 = (0, -2, 1)$. ⓠ $f_1 = (1, 1, -1)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (1, -1, 2)$. ⓡ $f_1 = (1, 1, -2)$, $f_2 = (1, 2, -2)$, $f_3 = (1, 2, -1)$. ⓢ $f_1 = (1, -1, -1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (-1, -3, -2)$. ⓣ $f_1 = (1, 0, 2)$, $f_2 = (-1, 1, -2)$, $f_3 = (-1, 1, -1)$. ⓤ $f_1 = (1, 1, 0)$,

$f_2 = (-1,0,1)$, $f_3 = (-1,-1,1)$. ⓥ $f_1 = (1,-1,1)$, $f_2 = (3,-2,2)$, $f_3 = (-1,1,0)$. ⓦ $f_1 = (1,1,-1)$, $f_2 = (0,1,-1)$, $f_3 = (1,0,1)$. ⓧ $f_1 = (1,1,0)$, $f_2 = (-3,-2,-2)$, $f_3 = (-1,0,-1)$.

90. ⓐ $\ell((1,1,-1))$, $\ell((1,0,-1),(1,1,-2))$. ⓑ $\ell((-2,1,2))$, $\ell((1,0,-1),(-1,1,0))$. ⓒ $\ell((-1,0,2))$, $\ell((1,0,-1),(1,1,-1))$. ⓓ $\ell((1,1,3))$, $\ell((1,0,1),(0,1,1))$. ⓔ $\ell((1,1,0))$, $\ell((1,1,-1),(-2,-1,0))$. ⓕ $\ell((1,0,2))$, $\ell((1,0,1),(1,1,1))$. ⓖ $\ell((-1,0,1))$, $\ell((1,-1,-1),(0,1,1))$. ⓗ $\ell((0,-1,1))$, $\ell((1,-1,1),(0,1,0))$. ⓘ $\ell((0,-1,2))$, $\ell((1,-1,1),(0,1,-1))$. ⓙ $\ell((-1,1,1))$, $\ell((1,0,-2),(-2,1,2))$. ⓚ $\ell((1,1,1))$, $\ell((1,1,0),(-1,0,-1))$. ⓛ $\ell((0,1,0))$, $\ell((1,-1,0),(0,1,-1))$. ⓜ $\ell((0,1,1))$, $\ell((1,-1,-1),(0,1,0))$. ⓝ $\ell((0,-1,1))$, $\ell((1,0,1),(0,1,0))$. ⓞ $\ell((1,-1,0))$, $\ell((1,0,-1),(0,1,0))$. ⓟ $\ell((1,-1,-1))$, $\ell((1,0,-1),(0,1,1))$. ⓠ $\ell((-1,-1,-1))$, $\ell((1,0,1),(0,1,1))$. ⓡ $\ell((-1,2,0))$, $\ell((1,-2,1),(1,-1,0))$. ⓢ $\ell((1,-1,0))$, $\ell((1,-2,0),(0,1,-1))$. ⓣ $\ell((1,0,-1))$, $\ell((1,-1,-1),(0,1,-1))$. ⓤ $\ell((1,2,0))$, $\ell((1,0,-1),(0,1,0))$. ⓥ $\ell((1,-3,-2))$, $\ell((1,-1,-1),(0,1,1))$. ⓦ $\ell((-1,3,-3))$, $\ell((1,-1,2),(0,1,-1))$. ⓧ $\ell((-1,3,-2))$, $\ell((1,-1,1),(0,1,-1))$.

91. ⓐ $\mu_A(\lambda) = \lambda^2$. ⓑ $\mu_A(\lambda) = \lambda^2$. ⓒ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$. ⓓ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$. ⓔ $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$. ⓕ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$. ⓖ $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$. ⓗ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$. ⓘ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^2$. ⓙ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^3$. ⓚ $\mu_A(\lambda) = \lambda^3$. ⓛ $\mu_A(\lambda) = \lambda^3$. ⓜ $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^3$. ⓝ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^4$. ⓞ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)^4$. ⓟ $\mu_A(\lambda) = \lambda^4$. ⓠ $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^4$. ⓡ $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)$. ⓢ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$. ⓣ $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$. ⓤ $\mu_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$. ⓥ $\mu_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$. ⓦ $\mu_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$. ⓧ $\mu_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)$.

92. ⓐ $A \approx B \not\approx C$. ⓑ $A \approx C \not\approx B$. ⓒ $A \approx B \approx C$. ⓓ $C \not\approx A \not\approx B \not\approx C$. ⓔ $A \approx C \not\approx B$. ⓕ $A \approx B \not\approx C$. ⓖ $A \not\approx B \approx C$. ⓗ $A \approx C \not\approx B$. ⓘ $A \approx B \not\approx C$. ⓙ $A \approx B \approx C$. ⓚ $A \not\approx B \approx C$. ⓛ $A \approx C \not\approx B$. ⓜ $A \approx B \not\approx C$. ⓝ $A \approx C \not\approx B$. ⓞ $A \approx B \approx C$. ⓟ $A \approx B \not\approx C$. ⓠ $A \not\approx B \approx C$. ⓡ $A \approx C \not\approx B$. ⓢ $A \approx B \not\approx C$. ⓣ $A \approx C \not\approx B$. ⓤ $A \approx B \not\approx C$. ⓥ $A \approx C \not\approx B$. ⓦ $A \approx B \not\approx C$. ⓧ $A \approx C \not\approx B$.

93. ⓐ, ⓒ, ⓓ, ⓕ, ⓖ, ⓘ, ⓙ, ⓚ, ⓝ, ⓞ, ⓠ, ⓡ, ⓣ, ⓥ, ⓦ Матрицы подобны. ⓑ, ⓔ, ⓗ, ⓛ, ⓜ, ⓟ, ⓢ, ⓤ, ⓧ Матрицы не подобны.

94. ⓐ – ⓕ Подобна диагональной матрице. ⓖ – ⓛ Подобна диагональной матрице над полем комплексных чисел. ⓜ – ⓧ Подобна диагональной матрице над полем вещественных или комплексных чисел.

95. ⓐ – ⓢ Подобна диагональной матрице. ⓣ – ⓧ Не подобна диагональной матрице.

96. ⓐ – ⓛ Подобна диагональной матрице. ⓜ – ⓟ Подобна диа-

гональной матрице над полем комплексных чисел. q – t Подобна диагональной матрице над полем вещественных или комплексных чисел. u – x Подобна диагональной матрице.

97. a $\frac{\pi}{3}$. b $\frac{\pi}{6}$. c $\frac{\pi}{4}$. d $\frac{\pi}{3}$. e $\frac{\pi}{6}$. f $\frac{\pi}{4}$. g $\frac{\pi}{3}$. h $\frac{5\pi}{6}$. i $\frac{2\pi}{3}$. j $\frac{3\pi}{4}$. k $\frac{\pi}{6}$. l $\frac{2\pi}{3}$. m $\frac{3\pi}{4}$. n $\frac{\pi}{3}$. o $\frac{\pi}{4}$. p $\frac{\pi}{6}$. q $\frac{\pi}{4}$. r $\frac{2\pi}{3}$. s $\frac{\pi}{4}$. t $\frac{\pi}{3}$. u $\frac{5\pi}{6}$. v $\frac{\pi}{4}$. w $\frac{\pi}{3}$. x $\frac{\pi}{4}$.

98. a $\frac{2\pi}{3}$. b $\frac{\pi}{6}$. c $\frac{\pi}{6}$. d $\frac{2\pi}{3}$. e $\frac{2\pi}{3}$. f $\frac{\pi}{6}$. g $\frac{\pi}{6}$. h $\frac{5\pi}{6}$. i $\frac{\pi}{3}$. j $\frac{2\pi}{3}$. k $\frac{5\pi}{6}$. l $\frac{5\pi}{6}$. m $\frac{\pi}{6}$. n $\frac{5\pi}{6}$. o $\frac{\pi}{6}$. p $\frac{5\pi}{6}$. q $\frac{5\pi}{6}$. r $\frac{2\pi}{3}$. s $\frac{5\pi}{6}$. t $\frac{\pi}{3}$. u $\frac{2\pi}{3}$. v $\frac{\pi}{6}$. w $\frac{\pi}{6}$. x $\frac{2\pi}{3}$.

99. a $\mathbf{a}_3 = (2,0,1,-5)$, $\mathbf{a}_4 = (1,0,-2,0)$. b $\mathbf{a}_3 = (0,0,-3,1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-2,0,0)$. c $\mathbf{a}_3 = (1,0,-3,0)$, $\mathbf{a}_4 = (3,2,1,-7)$. d $\mathbf{a}_3 = (0,2,1,-5)$, $\mathbf{a}_4 = (3,2,1,1)$. e $\mathbf{a}_3 = (0,0,-1,1)$, $\mathbf{a}_4 = (3,1,-5,-5)$. f $\mathbf{a}_3 = (-1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_4 = (0,0,-1,1)$. g $\mathbf{a}_3 = (0,-1,0,1)$, $\mathbf{a}_4 = (0,1,-2,1)$. h $\mathbf{a}_3 = (-1,0,1,0)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,1,-3)$. i $\mathbf{a}_3 = (0,0,1,-3)$, $\mathbf{a}_4 = (-5,-5,3,1)$. j $\mathbf{a}_3 = (-1,0,0,1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,2,-2,1)$. k $\mathbf{a}_3 = (1,-2,0,0)$, $\mathbf{a}_4 = (2,1,-5,0)$. l $\mathbf{a}_3 = (1,-5,0,2)$, $\mathbf{a}_4 = (1,1,-2,2)$. m $\mathbf{a}_3 = (-5,0,1,3)$, $\mathbf{a}_4 = (2,-7,1,3)$. n $\mathbf{a}_3 = (1,1,-2,0)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,1,0,0)$. o $\mathbf{a}_3 = (0,-3,1,0)$, $\mathbf{a}_4 = (3,-1,-3,1)$. p $\mathbf{a}_3 = (1,0,-2,0)$, $\mathbf{a}_4 = (0,1,0,-3)$. q $\mathbf{a}_3 = (-1,0,1,0)$, $\mathbf{a}_4 = (-5,4,-5,8)$. r $\mathbf{a}_3 = (0,-5,4,2)$, $\mathbf{a}_4 = (-9,4,4,2)$. s $\mathbf{a}_3 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-1,-1,1)$. t $\mathbf{a}_3 = (1,3,2,1)$, $\mathbf{a}_4 = (-1,0,0,1)$. u $\mathbf{a}_3 = (0,0,-3,1)$, $\mathbf{a}_4 = (-2,1,0,0)$. v $\mathbf{a}_3 = (-2,1,0,0)$, $\mathbf{a}_4 = (1,2,1,-6)$. w $\mathbf{a}_3 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,-1,0,1)$. x $\mathbf{a}_3 = (1,0,0,-1)$, $\mathbf{a}_4 = (1,0,-2,1)$.

100. a $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{2};0;0;1/\sqrt{2})$, $\mathbf{a}_4 = (-2/\sqrt{21};2/\sqrt{21};3/\sqrt{21};2/\sqrt{21})$. b $\mathbf{a}_3 = (0;1/\sqrt{5};0;-2/\sqrt{5})$, $\mathbf{a}_4 = (1/\sqrt{10};0;-3/\sqrt{10};0)$. c $\mathbf{a}_3 = (0;0;1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$, $\mathbf{a}_4 = (0;1/\sqrt{3};-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3})$. d $\mathbf{a}_3 = (0;2/\sqrt{6};1/\sqrt{6};1/\sqrt{6})$, $\mathbf{a}_4 = (2/\sqrt{7};-1/\sqrt{7};1/\sqrt{7};1/\sqrt{7})$. e $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{10};0;-3/\sqrt{10};0)$, $\mathbf{a}_4 = (3/\sqrt{30};4/\sqrt{30};1/\sqrt{30};-2/\sqrt{30})$. f $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{2};1/\sqrt{2};0;0)$, $\mathbf{a}_4 = (-1/\sqrt{12};1/\sqrt{12};1/\sqrt{12};3/\sqrt{12})$. g $\mathbf{a}_3 = (0;2/\sqrt{30};1/\sqrt{30};-5/\sqrt{30})$, $\mathbf{a}_4 = (1;0;0;0)$. h $\mathbf{a}_3 = (4/\sqrt{45};2/\sqrt{45};-5/\sqrt{45};0)$, $\mathbf{a}_4 = (4/\sqrt{117};2/\sqrt{117};4/\sqrt{117};-9/\sqrt{117})$. i $\mathbf{a}_3 = (0;0;3/\sqrt{10};1/\sqrt{10})$, $\mathbf{a}_4 = (-5/\sqrt{60};5/\sqrt{60};1/\sqrt{60};-3/\sqrt{60})$. j $\mathbf{a}_3 = (-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3};0;1/\sqrt{3})$, $\mathbf{a}_4 = (0;0;1;0)$. k $\mathbf{a}_3 = (2/\sqrt{15};3/\sqrt{15};1/\sqrt{15};1/\sqrt{15})$, $\mathbf{a}_4 = (0;0;1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2})$. l $\mathbf{a}_3 = (5/\sqrt{30};1/\sqrt{30};2/\sqrt{30};0)$, $\mathbf{a}_4 = (-1/\sqrt{42};1/\sqrt{42};2/\sqrt{42};6/\sqrt{42})$. m $\mathbf{a}_3 = (3/\sqrt{10};0;1/\sqrt{10};0)$, $\mathbf{a}_4 = (0;3/\sqrt{10};0;1/\sqrt{10})$. n $\mathbf{a}_3 = (-3/\sqrt{35};0;1/\sqrt{35};5/\sqrt{35})$, $\mathbf{a}_4 = (-3/\sqrt{63};7/\sqrt{63};1/\sqrt{63};-2/\sqrt{63})$. o $\mathbf{a}_3 = (0;1/\sqrt{6};1/\sqrt{6};2/\sqrt{6})$, $\mathbf{a}_4 = (-3/\sqrt{21};-2/\sqrt{21};-2/\sqrt{21};2/\sqrt{21})$. p $\mathbf{a}_3 = (0;0;2/\sqrt{5};1/\sqrt{5})$, $\mathbf{a}_4 = (0;1;0;0)$. q $\mathbf{a}_3 = (0;2/\sqrt{5};1/\sqrt{5};0)$, $\mathbf{a}_4 = (5/\sqrt{70};2/\sqrt{70};-4/\sqrt{70};-5/\sqrt{70})$. r $\mathbf{a}_3 = (0;0;1;0)$,

$\mathbf{a}_4 = (-3/\sqrt{22}; -3/\sqrt{22}; 0; 2/\sqrt{22})$. (s) $\mathbf{a}_3 = (0; -3/\sqrt{13}; 2/\sqrt{13}; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-3/\sqrt{26}; 2/\sqrt{26}; 3/\sqrt{26}; 2/\sqrt{26})$. (t) $\mathbf{a}_3 = (0; -3/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10}; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-3/\sqrt{20}; 1/\sqrt{20}; 3/\sqrt{20}; 1/\sqrt{20})$. (u) $\mathbf{a}_3 = (0; 1/\sqrt{10}; 3/\sqrt{10}; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (0; -3/\sqrt{35}; 1/\sqrt{35}; -5/\sqrt{35})$. (v) $\mathbf{a}_3 = (1/\sqrt{6}; 2/\sqrt{6}; 1/\sqrt{6}; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (1/2; -1/2; 1/2; 1/2)$. (w) $\mathbf{a}_3 = (0; 1/\sqrt{2}; 0; -1/\sqrt{2})$, $\mathbf{a}_4 = (4/\sqrt{34}; 3/\sqrt{34}; 0; 3/\sqrt{34})$. (x) $\mathbf{a}_3 = (2/\sqrt{5}; 0; 1/\sqrt{5}; 0)$, $\mathbf{a}_4 = (-1/\sqrt{10}; -2/\sqrt{10}; 2/\sqrt{10}; 1/\sqrt{10})$.

101. (a) $\mathbf{b}_1 = (0, 0, -2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 2, -4)$. (b) $\mathbf{b}_1 = (2, 3, -1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 1, 1, 0)$. (c) $\mathbf{b}_1 = (-2, 1, 1, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (-4, 3, 1, -4)$. (d) $\mathbf{b}_1 = (-1, 1, -2, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 2, 1, 1)$. (e) $\mathbf{b}_1 = (2, 1, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 0, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 1, 3, 1)$. (f) $\mathbf{b}_1 = (0, 3, 1, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 0, -3, 1)$. (g) $\mathbf{b}_1 = (-2, 2, 1, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, -2, 0, 1)$. (h) $\mathbf{b}_1 = (0, 3, -1, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 3, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -3, 1, -5)$. (i) $\mathbf{b}_1 = (-2, -1, 3, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-5, 1, 0, -3)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 3, 0, 1)$. (j) $\mathbf{b}_1 = (-2, 2, 0, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 1, 2)$. (k) $\mathbf{b}_1 = (0, 2, 2, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 1, -1, 0)$. (l) $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (4, -2, 1, 0)$. (m) $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 2, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, -1, 3, 1)$. (n) $\mathbf{b}_1 = (-2, 1, -2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 5, 2, 1)$. (o) $\mathbf{b}_1 = (-2, 3, -1, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, -2, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 1, 2, -7)$. (p) $\mathbf{b}_1 = (-1, 2, 1, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -2, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 2, 1, 5)$. (q) $\mathbf{b}_1 = (-1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0, 2)$. (r) $\mathbf{b}_1 = (-2, -2, 2, 2)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 0, -2, 1)$. (s) $\mathbf{b}_1 = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (3, -2, 1, 0)$. (t) $\mathbf{b}_1 = (-1, -1, -1, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 0, 1)$. (u) $\mathbf{b}_1 = (-1, -2, -2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 0, 1, 2)$. (v) $\mathbf{b}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (-3, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 5, 3, 3)$. (w) $\mathbf{b}_1 = (0, -2, -2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 1, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 0, 0, 0)$. (x) $\mathbf{b}_1 = (-2, -1, 3, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 1, 0, 5)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -2, 0, 0)$.

102. (a) $(-3, 0, 1, 5)$, $(-1, 1, 0, 1)$. (b) $(5, -6, 2, 1)$. (c) $(-1, 1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0, 1)$. (d) $(1, 0, 0, 1)$, $(-1, 5, 1, 0)$. (e) $(-1, 0, 1, 2)$. (f) $(1, 0, 2, -3)$, $(0, 1, 2, -5)$. (g) $(-2, 2, 0, 1)$, $(2, -4, 1, 0)$. (h) $(-4, 3, 3, 0)$. (i) $(-3, 0, 2, 1)$, $(-2, 2, 3, 0)$. (j) $(0, 1, 0, -2)$, $(2, 0, 1, -7)$. (k) $(6, -4, -4, 1)$. (l) $(4, 0, 1, 5)$, $(3, 1, 0, 5)$. (m) $(0, 1, 0, 2)$, $(1, 0, 2, 2)$. (n) $(-2, -1, 0, 1)$, $(3, 2, 1, 0)$. (o) $(1, 4, -6, 4)$. (p) $(1, 0, 2, 0)$, $(0, 1, -2, 1)$. (q) $(0, 1, 2, -6)$, $(1, 0, 2, -4)$. (r) $(1, -3, -4, 2)$. (s) $(1, 0, 2, 2)$, $(0, 2, -2, -5)$. (t) $(3, 2, 0, -2)$. (u) $(3, 0, 5, -1)$, $(6, -2, 7, 0)$. (v) $(-5, 1, 0, 2)$, $(-7, 0, 1, 3)$. (w) $(-5, -4, 4, 1)$. (x) $(1, 0, -2, 2)$, $(0, 1, -5, 6)$.

103. (a) $x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$. (b) $3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$. (c) $9x_2 - x_3 - 6x_4 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$. (d) $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. (e) $9x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0$, $7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$. (f) $x_1 + 2x_2 - 7x_4 = 0$, $3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0$. (g) $2x_1 + 7x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$. (h) $7x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $5x_1 - 2x_2 - x_4 = 0$. (i) $2x_1 - 10x_2 + 7x_4 = 0$, $8x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0$. (j) $2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0$. (k) $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0$. (l) $6x_1 - x_3 - 3x_4 =$

0, $3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$. ⓜ $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0$. ⓝ $3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0$, $3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$. ⓞ $5x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, $5x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$. ⓟ $3x_1 - x_2 + 5x_4 = 0$. ⓠ $x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$, $x_2 - 2x_3 = 0$. ⓡ $x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$. ⓢ $x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$. ⓣ $x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 0$. ⓤ $x_1 + x_4 = 0$, $x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$. ⓥ $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$. ⓦ $x_2 - x_4 = 0$, $2x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 0$. ⓧ $x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$.

104. ⓐ $\mathbf{x}_{pr} = (2, -4, 4, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, 0, -2)$. ⓑ $\mathbf{x}_{pr} = (2, -2, 0, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 1, 0, -2)$. ⓒ $\mathbf{x}_{pr} = (4, -3, 0, -1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 2, 0, -2)$. ⓓ $\mathbf{x}_{pr} = (3, -4, -2, -8)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, 1, 1, 0)$. ⓔ $\mathbf{x}_{pr} = (-4, 0, 2, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, 2, 1)$. ⓕ $\mathbf{x}_{pr} = (1, -2, -1, -3)$, $\mathbf{a}_{ort} = (-1, -2, 0, 1)$. ⓖ $\mathbf{x}_{pr} = (-4, 0, -2, 6)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 2, -2, 0)$. ⓗ $\mathbf{x}_{pr} = (4, -6, 2, -4)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, -1, -1, 1)$. ⓘ $\mathbf{x}_{pr} = (4, 2, 3, -3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, 3, -1, 1)$. ⓙ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 0, 0, 2)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, 0, 1, -2)$. ⓚ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, -5, 2, -3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, 2, 1)$. ⓛ $\mathbf{x}_{pr} = (3, 0, -1, -5)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, -6, -5, 1)$. ⓜ $\mathbf{x}_{pr} = (1, 1, -4, 4)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, -6, 0, 1)$. ⓝ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, -1, 5, 7)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, -2, 0, 0)$. ⓞ $\mathbf{x}_{pr} = (3, 0, 3, 3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, 1, 0, 1)$. ⓟ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 2, 0, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 1, -2, 0)$. ⓠ $\mathbf{x}_{pr} = (1, 2, 2, -4)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, 1, -1, 0)$. ⓡ $\mathbf{x}_{pr} = (2, 3, 3, -1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, -1, -1)$. ⓢ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 4, 5, 3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, 1, -2, 2)$. ⓣ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, -3, 1, -2)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, 1, 1, 0)$. ⓤ $\mathbf{x}_{pr} = (-3, 4, -2, -3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, 0, 0, 1)$. ⓥ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 2, -2, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, 0, 0, 1)$. ⓦ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 2, -1, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, 1, 2, 0)$. ⓧ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, -3, 3, 3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-3, 0, 1, -2)$.

105. ⓐ $\mathbf{x}_{pr} = (2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, 1, 5, 0)$. ⓑ $\mathbf{x}_{pr} = (0, -1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, -3, 2, -3)$. ⓒ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 3, 2, 4)$. ⓓ $\mathbf{x}_{pr} = (0, -2, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, -1, 0, -2)$. ⓔ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 0, 1, -3)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-3, -1, 0, 2)$. ⓕ $\mathbf{x}_{pr} = (0, -1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, 2, -2, 2)$. ⓖ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, 2, 1, -2)$. ⓗ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-4, 1, 0, 0)$. ⓘ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, 0, 0, -2)$. ⓙ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 4, 1, 1)$. ⓚ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, 0, -2, -1)$. ⓛ $\mathbf{x}_{pr} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, 1, 1, 1)$. ⓜ $\mathbf{x}_{pr} = (1, 2, 2, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, 0, -1, -1)$. ⓝ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 1, -1, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, 1, 0, -1)$. ⓞ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, -3, -1, -2)$. ⓟ $\mathbf{x}_{pr} = (-3, 1, 2, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (2, 0, 3, -1)$. ⓠ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, -2, -2, 2)$. ⓡ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, 2, 4)$. ⓢ $\mathbf{x}_{pr} = (1, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-2, -2, 0, -2)$. ⓣ $\mathbf{x}_{pr} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (1, 0, 3, 3)$. ⓤ $\mathbf{x}_{pr} = (-4, -2, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, 1, 1, 2)$. ⓥ $\mathbf{x}_{pr} = (0, -2, -2, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, -1, 2, 2)$. ⓦ $\mathbf{x}_{pr} = (-1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{x}_{ort} = (0, -1, 5, 2)$. ⓧ $\mathbf{x}_{pr} = (-2, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_{ort} = (-1, -2, -2, -1)$.

106. ⓐ $\pi/4$, $\sqrt{6}$. ⓑ $\arccos(\sqrt{2}/3)$, $\sqrt{35}$. ⓒ $\pi/4$, 3. ⓓ $\pi/6$, 1. ⓔ $\arccos(\frac{2\sqrt{2}}{3})$, $\sqrt{2}$. ⓕ $\pi/4$, 3. ⓖ $\arccos(\frac{\sqrt{7}}{3})$, $\sqrt{2}$. ⓗ $\pi/3$, $\sqrt{21}$. ⓘ $\pi/6$, $\sqrt{2}$. ⓙ $\pi/6$, $\sqrt{6}$. ⓚ $\pi/4$, $\sqrt{21}$. ⓛ $\pi/4$, $\sqrt{14}$. ⓜ $\pi/6$, $\sqrt{5}$. ⓝ $\arccos(\frac{2\sqrt{2}}{3})$,

$\sqrt{2}$. (o) $\pi/4$, 3. (p) $\pi/3$, $\sqrt{21}$. (q) $\arccos(\frac{2\sqrt{5}}{5})$, $\sqrt{2}$. (r) $\pi/6$, $\sqrt{2}$. (s) $\pi/6$, $\sqrt{6}$. (t) $\pi/4$, $\sqrt{14}$. (u) $\arccos(\frac{6}{3})$, $\sqrt{14}$. (v) $\pi/3$, 3. (w) $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{3})$, $\sqrt{21}$. (x) $\arccos(\sqrt{\frac{5}{7}})$, $\sqrt{2}$.

107. (a) $A_e = \mathrm{diag}(0,-3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (b) $A_e = \mathrm{diag}(-1,-3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (c) $A_e = \mathrm{diag}(-1,-2,2)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (d) $A_e = \mathrm{diag}(2,-2,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. (e) $A_e = \mathrm{diag}(1,2,-2)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (-1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (f) $A_e = \mathrm{diag}(1,-3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. (g) $A_e = \mathrm{diag}(3,1,-3)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$. (h) $A_e = \mathrm{diag}(2,0,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. (i) $A_e = \mathrm{diag}(3,0,-2)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$. (j) $A_e = \mathrm{diag}(1,-2,3)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$. (k) $A_e = \mathrm{diag}(-1,2,1)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$. (l) $A_e = \mathrm{diag}(1,2,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (m) $A_e = \mathrm{diag}(-3,3,0)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. (n) $A_e = \mathrm{diag}(0,-3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$. (o) $A_e = \mathrm{diag}(-2,1,2)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$. (p) $A_e = \mathrm{diag}(0,1,3)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (q) $A_e = \mathrm{diag}(2,3,0)$, $\mathbf{e}_1 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (-2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (r) $A_e = \mathrm{diag}(-2,-3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (0,2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (-5/\sqrt{30},1/\sqrt{30},-2/\sqrt{30})$. (s) $A_e = \mathrm{diag}(-3,3,2)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{30},-5/\sqrt{30},2/\sqrt{30})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},2/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (-2/\sqrt{5},0,1/\sqrt{5})$. (t) $A_e = \mathrm{diag}(3,0,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. (u) $A_e = \mathrm{diag}(2,-1,3)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_2 = (-1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$. (v) $A_e = \mathrm{diag}(1,0,3)$, $\mathbf{e}_1 = (0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$. (w) $A_e = \mathrm{diag}(0,3,2)$, $\mathbf{e}_1 = (-1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6})$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$. (x) $A_e =$

$\mathrm{diag}(1,0,3)$, $\mathbf{e}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\mathbf{e}_3 = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.

108. (a) $A_e = \mathrm{diag}(-2,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. (b) $A_e = \mathrm{diag}(3,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6)$. (c) $A_e = \mathrm{diag}(-4,5,5)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/3, -2/3, 1/3)$, $\mathbf{e}_2 = (0, \sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{5}/3, -4\sqrt{5}/15, 2\sqrt{5}/15)$. (d) $A_e = \mathrm{diag}(-5,4,4)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$. (e) $A_e = \mathrm{diag}(-4,5,5)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$. (f) $A_e = \mathrm{diag}(-4,2,2)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6)$. (g) $A_e = \mathrm{diag}(-1,5,5)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$, $\mathbf{e}_2 = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$. (h) $A_e = \mathrm{diag}(5,-4,-4)$, $\mathbf{e}_1 = (1/3, -2/3, -2/3)$, $\mathbf{e}_2 = (2\sqrt{5}/5, 0, \sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3 = (2\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3, -4\sqrt{5}/15)$. (i) $A_e = \mathrm{diag}(5,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$. (j) $A_e = \mathrm{diag}(-1,5,5)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{5}/5, 0, 2\sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{30}/15, \sqrt{30}/6, \sqrt{30}/30)$. (k) $A_e = \mathrm{diag}(-1,5,5)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$. (l) $A_e = \mathrm{diag}(5,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (2\sqrt{5}/5, 0, \sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{30}/30, \sqrt{30}/6, -\sqrt{30}/15)$. (m) $A_e = \mathrm{diag}(0,3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$. (n) $A_e = \mathrm{diag}(5,2,2)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6)$. (o) $A_e = \mathrm{diag}(4,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6)$. (p) $A_e = \mathrm{diag}(1,4,4)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$. (q) $A_e = \mathrm{diag}(3,-3,-3)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$. (r) $A_e = \mathrm{diag}(2,-1,-1)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. (s) $A_e = \mathrm{diag}(4,-2,-2)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$, $\mathbf{e}_3 = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. (t) $A_e = \mathrm{diag}(-3,3,3)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6)$. (u) $A_e = \mathrm{diag}(-2,4,4)$, $\mathbf{e}_1 = (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$. (v) $A_e = \mathrm{diag}(4,-2,-2)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6)$. (w) $A_e = \mathrm{diag}(5,-4,-4)$, $\mathbf{e}_1 = (1/3, 2/3, 2/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-2\sqrt{5}/15, -4\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3)$, $\mathbf{e}_3 = (-2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5, 0)$. (x) $A_e = \mathrm{diag}(-4,5,5)$, $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6)$. (y) $A_e = \mathrm{diag}(-5,4,4)$, $\mathbf{e}_1 =$

$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$. (z) $A_e = \mathrm{diag}(-4, 5, 5)$, $\mathbf{e}_1 = (-2/3, 2/3, -1/3)$, $\mathbf{e}_2 = (\sqrt{5}/5, 0, -2\sqrt{5}/5)$, $\mathbf{e}_3 = (4\sqrt{5}/15, \sqrt{5}/3, 2\sqrt{5}/15)$.

109. (a) $A_e = \mathrm{diag}(3, 3, 3, -7)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{5}(-2, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{45}(2, 0, 4, 5)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{90}(1, 9, 2, -2)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{10}(-1, 1, -2, 2)$. (b) $A_e = \mathrm{diag}(-8, -8, 3, 3)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{6}(-1, -2, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{66}(-5, 2, 6, -1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{3}(1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{33}(-2, 3, -2, 4)$. (c) $A_e = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 9)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{6}(-1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{12}(-1, 3, -1, -1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(1, 1, 1, 1)$. (d) $A_e = \mathrm{diag}(-5, -5, 5, 5)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{15}(3, 1, 1, 2)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{30}(0, -5, 1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{10}(-2, 1, 1, 2)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{5}(0, 0, -2, 1)$. (e) $A_e = \mathrm{diag}(2, 2, 2, -5)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{30}(1, 0, -2, 5)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{42}(1, 6, -2, -1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{5}(2, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{7}(-1, 1, 2, 1)$. (f) $A_e = \mathrm{diag}(-7, -7, 7, 7)$, $\mathbf{e}_1 = 1/3(2, 1, 0, 2)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{126}(-4, -2, 9, 5)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{5}(1, -2, 0, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{70}(-4, -2, -5, 5)$. (g) $A_e = \mathrm{diag}(-5, -5, -5, 9)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{3}(1, -1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{42}(1, -1, -2, 6)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{7}(-1, 1, 2, 1)$. (h) $A_e = \mathrm{diag}(-7, -7, 3, 3)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{15}(3, -1, 2, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{3}(0, 1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{10}(2, 1, -2, -1)$. (i) $A_e = \mathrm{diag}(3, 3, 3, -4)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{3}(1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{42}(1, 6, -1, -2)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{7}(1, -1, -1, -2)$. (j) $A_e = \mathrm{diag}(-2, -2, 2, 2)$, $\mathbf{e}_1 = 1/2(-1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{2}(0, 0, -1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(1, -1, 1, 1)$. (k) $A_e = \mathrm{diag}(-5, -5, -5, 3)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{6}(1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{12}(-1, 3, 1, 1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(-1, -1, 1, 1)$. (l) $A_e = \mathrm{diag}(7, 7, -5, -5)$, $\mathbf{e}_1 = 1/2(1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(-1, 1, -1, 1)$. (m) $A_e = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -9)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{3}(0, -1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{15}(3, 1, -1, 2)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{10}(2, -1, 1, -2)$. (n) $A_e = \mathrm{diag}(-6, -6, 7, 7)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{143}(11, -3, 3, 2)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{11}(0, 1, -1, 3)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(0, 1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{26}(-2, -3, 3, 2)$. (o) $A_e = \mathrm{diag}(-5, -5, -5, 9)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{3}(0, -1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{42}(6, -1, -2, -1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(0, 1, 0, -1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{7}(1, 1, 2, 1)$. (p) $A_e = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -7)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{6}(-1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{3}(-1, 1, -1, 3)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(1, -1, 1, 1)$. (q) $A_e = \mathrm{diag}(-4, -4, -4, 9)$, $\mathbf{e}_1 = 1/(3\sqrt{13})(-2, -4, 9, 4)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{5}(-2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{45}(2, 4, 0, 5)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{13}(-1, -2, -2, 2)$. (r) $A_e = \mathrm{diag}(6, 6, 6, -6)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(-1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{132}(1, 3, 11, 1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{22}(-3, 2, 0, -3)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{12}(1, 3, -1, 1)$. (s) $A_e = \mathrm{diag}(2, 2, -6, -6)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{6}(-2, 0, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{12}(-1, 3, -1, -1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(0, 0, -1, 1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(1, 1, 1, 1)$. (t) $A_e = \mathrm{diag}(-2, -2, -2, 8)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{90}(-1, -2, -2, 9)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{5}(-2, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{45}(-2, -4, 5, 0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{10}(1, 2, 2, 1)$. (u) $A_e = \mathrm{diag}(-8, -8, 4, 4)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{12}(-1, 3, 1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/2(1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{6}(1, 0, -1, 2)$.

ⓥ $A_e = \mathrm{diag}(-3,-3,-3,4)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{5}(-2,0,0,1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{30}(-1,5,0,-2)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{42}(-1,-1,6,-2)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{7}(1,1,1,2)$. ⓦ $A_e = \mathrm{diag}(-4,-4,1,1)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{15}(1,3,1,-2)$, $\mathbf{e}_2 = 1/\sqrt{3}(1,0,1,1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{3}(-1,1,0,1)$, $\mathbf{e}_4 = 1/\sqrt{15}(-2,-1,3,-1)$. ⓧ $A_e = \mathrm{diag}(5,5,-3,-3)$, $\mathbf{e}_1 = 1/\sqrt{2}(0,1,0,-1)$, $\mathbf{e}_2 = 1/2(1,1,1,1)$, $\mathbf{e}_3 = 1/\sqrt{2}(-1,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4 = 1/2(-1,1,-1,1)$.

110. ⓐ $-3t_1^2+2t_2^2+3t_3^2$, $t_1 = x_1-x_2-2x_3$, $t_2 = x_2-3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓑ $-t_1^2+2t_2^2$, $t_1 = x_1+2x_2+x_3$, $t_2 = x_2-3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓒ $-3t_1^2+t_2^2+2t_3^2$, $t_1 = x_1-3x_2-3x_3$, $t_2 = -3x_2-2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓓ $2t_1^2+2t_2^2+3t_3^2$, $t_1 = x_1-3x_2+x_3$, $t_2 = 2x_2+2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓔ $-2t_1^2-2t_2^2-t_3^2$, $t_1 = x_1-2x_2-3x_3$, $t_2 = -x_2+3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓕ $3t_1^2-3t_2^2+t_3^2$, $t_1 = x_1-x_2+x_3$, $t_1 = x_2+3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓖ $t_1^2+3t_2^2-3t_3^2$, $t_1 = x_1+x_2+3x_3$, $t_2 = -3x_2+x_3$, $t_3 = x_3$. ⓗ $t_1^2-t_2^2-2t_3^2$, $t_1 = x_1+3x_2-x_3$, $t_2 = 2x_2+3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓘ $t_1^2+2t_2^2-2t_3^2$, $t_1 = x_1-2x_2-2x_3$, $t_2 = -2x_2+2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓙ $-t_1^2-3t_2^2-t_3^2$, $t_1 = x_1-x_2+x_3$, $t_2 = 2x_2-x_3$, $t_3 = x_3$. ⓚ $-3t_1^2-2t_2^2-t_3^2$, $t_1 = x_1-x_2-2x_3$, $t_2 = -3x_2-2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓛ $-t_1^2-3t_2^2+2t_3^2$, $t_1 = x_1-x_2-2x_3$, $t_2 = 2x_2+x_3$, $t_3 = x_3$. ⓜ $t_1^2-t_2^2+3t_3^2$, $t_1 = x_1-3x_2+x_3$, $t_2 = -3x_2-2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓝ $2t_1^2-3t_2^2-3t_3^2$, $t_1 = x_1+x_2+x_3$, $t_2 = -2x_2-x_3$, $t_3 = x_3$. ⓞ $-3t_1^2+t_2^2-3t_3^2$, $t_1 = x_1+x_2-2x_3$, $t_2 = x_2-2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓟ $3t_1^2+t_2^2$, $t_1 = x_1+2x_2-x_3$, $t_2 = 2x_2+x_3$, $t_3 = x_3$. ⓠ $-t_1^2+3t_2^2$, $t_1 = x_1-2x_2-2x_3$, $t_2 = 2x_2-3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓡ $-2t_1^2+2t_2^2+t_3^2$, $t_1 = x_1+2x_2+x_3$, $t_2 = x_2+2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓢ $2t_1^2+3t_2^2-3t_3^2$, $t_1 = x_1+x_2+2x_3$, $t_2 = -x_2-2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓣ $-t_1^2-3t_2^2-t_3^2$, $t_1 = x_1+2x_2-x_3$, $t_2 = x_2+3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓤ $-t_1^2-3t_2^2+2t_3^2$, $t_1 = x_1+x_2-2x_3$, $t_2 = -2x_2+2x_3$, $t_3 = x_3$. ⓥ $-2t_1^2+t_2^2-t_3^2$, $t_1 = x_1-2x_2-3x_3$, $t_2 = -3x_2+x_3$, $t_3 = x_3$. ⓦ $t_1^2+3t_2^2$, $t_1 = x_1-3x_2+x_3$, $t_2 = 2x_2-3x_3$, $t_3 = x_3$. ⓧ $3t_1^2-3t_2^2$, $t_1 = x_1+2x_2-x_3$, $t_2 = x_2-2x_3$, $t_3 = x_3$.

111. ⓐ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓑ $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$. ⓒ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓓ $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. ⓔ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓕ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓖ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓗ $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$. ⓘ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓙ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓚ $y_1^2-y_2^2$. ⓛ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓜ $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. ⓝ $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. ⓞ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓟ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓠ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓡ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓢ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓣ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓤ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓥ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓦ $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$. ⓧ $y_1^2+y_2^2-y_3^2$. ⓨ $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. ⓩ $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

112. ⓐ, ⓘ, ⓜ, ⓢ, ⓧ Неположительна. ⓑ, ⓕ, ⓛ, ⓡ, ⓥ Положительно определена. ⓒ, ⓗ, ⓝ, ⓟ, ⓦ Отрицательно определена. ⓓ, ⓖ, ⓚ, ⓠ, ⓤ Неотрицательна. ⓔ, ⓙ, ⓞ, ⓣ Неопределена.

113. ⓐ $f(\mathbf{x}) = -y_1^2-y_2^2+5y_3^2$, $y_1 = (x_1+5x_2+2x_3)/\sqrt{30}$, $y_2 = (-2x_1+x_3)\sqrt{5}$, $y_3 = (x_1-x_2+2x_3)/\sqrt{6}$. ⓑ $f(\mathbf{x}) = -2y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$, $y_1 = (x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2 = (x_1-x_2+2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3 = (-x_1+x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓒ $f(\mathbf{x}) =$

$3y_1^2+3y_2^2$, $y_1=(-x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2=(-x_1-x_2+2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3=(x_1+x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓓ $f(\mathbf{x})=4y_1^2+4y_2^2-5y_3^2$, $y_1=(4x_1+5x_2-2x_3)/\sqrt{45}$, $y_2=(x_1+2x_3)/\sqrt{5}$, $y_3=(-2x_1+2x_2+x_3)/3$. ⓔ $f(\mathbf{x})=3y_3^2$, $y_1=(x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2=(x_1-x_2+2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3=(-x_1+x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓕ $f(\mathbf{x})=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$, $y_1=(x_1-2x_2)/\sqrt{5}$, $y_2=(2x_1+x_2+5x_3)/\sqrt{30}$, $y_3=(2x_1+x_2-x_3)/\sqrt{6}$. ⓖ $f(\mathbf{x})=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$, $y_1=(x_1+2x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_2=(-x_1+x_3)/\sqrt{2}$, $y_3=(-x_1+x_2-x_3)/\sqrt{3}$. ⓗ $f(\mathbf{x})=6y_1^2+6y_2^2$, $y_1=(-x_1+2x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_2=(x_1+x_3)/\sqrt{2}$, $y_3=(x_1+x_2-x_3)/\sqrt{3}$. ⓘ $f(\mathbf{x})=4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$, $y_1=(x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_2=(x_2+x_3)/\sqrt{2}$, $y_3=(-2x_1-x_2+x_3)/\sqrt{6}$. ⓙ $f(\mathbf{x})=-4y_1^2-4y_2^2+5y_3^2$, $y_1=(2x_1+x_2)/\sqrt{5}$, $y_2=(2x_1-4x_2+5x_3)/\sqrt{45}$, $y_3=(-x_1+2x_2+2x_3)/3$. ⓚ $f(\mathbf{x})=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$, $y_1=(x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_2=(x_2+x_3)/\sqrt{2}$, $y_3=(2x_1+x_2-x_3)/\sqrt{6}$. ⓛ $f(\mathbf{x})=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$, $y_1=(-x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2=(x_1+x_2+2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3=(-x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓜ $f(\mathbf{x})=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$, $y_1=(x_1-2x_2)/\sqrt{5}$, $y_2=(-2x_1-x_2+5x_3)/\sqrt{30}$, $y_3=(2x_1+x_2+x_3)/\sqrt{6}$. ⓝ $f(\mathbf{x})=3y_1^2+3y_2^2$, $y_1=(x_2+x_3)/\sqrt{2}$, $y_2=(2x_1-x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_3=(-x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓞ $f(\mathbf{x})=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$, $y_1=(x_2-2x_3)/\sqrt{5}$, $y_2=(5x_1-4x_2-2x_3)/\sqrt{45}$, $y_3=(2x_1+2x_2+x_3)/3$. ⓟ $f(\mathbf{x})=-2y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$, $y_1=(-x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_2=(-x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_3=(x_1+x_2+2x_3)/\sqrt{6}$. ⓠ $f(\mathbf{x})=2y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, $y_1=(x_1+x_3)/\sqrt{2}$, $y_2=(-x_1+2x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_3=(-x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓡ $f(\mathbf{x})=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$, $y_1=(x_1-2x_2)/\sqrt{5}$, $y_2=(-2x_1-x_2+5x_3)/\sqrt{30}$, $y_3=(2x_1+x_2+x_3)/\sqrt{6}$. ⓢ $f(\mathbf{x})=-9y_3^2$, $y_1=(x_1-2x_3)/\sqrt{5}$, $y_2=(4x_1+5x_2+2x_3)/\sqrt{45}$, $y_3=(-2x_1+2x_2-x_3)/3$. ⓣ $f(\mathbf{x})=-2y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$, $y_1=(x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2=(-x_1+x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_3=(x_1-x_2+2x_3)/\sqrt{6}$. ⓤ $f(\mathbf{x})=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$, $y_1=(x_2+2x_3)/\sqrt{5}$, $y_2=(5x_1+4x_2-2x_3)/\sqrt{45}$, $y_3=(-2x_1+2x_2-x_3)/3$. ⓥ $f(\mathbf{x})=y_1^2+y_2^2+7y_3^2$, $y_1=(-2x_1+x_3)/\sqrt{5}$, $y_2=(-x_1+5x_2-2x_3)/\sqrt{30}$, $y_3=(x_1+x_2+2x_3)/\sqrt{6}$. ⓦ $f(\mathbf{x})=4y_1^2+4y_2^2-5y_3^2$, $y_1=(x_2-x_3)/\sqrt{2}$, $y_2=(2x_1+x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_3=(-x_1+x_2+x_3)/\sqrt{3}$. ⓧ $f(\mathbf{x})=6y_1^2+6y_2^2$, $y_1=(x_1-2x_3)/\sqrt{5}$, $y_2=(2x_1+5x_2+x_3)/\sqrt{30}$, $y_3=(2x_1-x_2+x_3)/\sqrt{6}$.

114. ⓐ $f(\mathbf{x})=4y_4^2$, $y_1=(x_1+2x_2-x_4)/\sqrt{6}$, $y_2=(x_1+x_4)/\sqrt{2}$, $y_3=(-x_1+x_2+3x_3+x_4)/\sqrt{12}$, $y_4=(-x_1+x_2-x_3+x_4)/2$. ⓑ $f(\mathbf{x})=-5y_1^2-5y_2^2$, $y_1=(x_1-x_2+x_4)/\sqrt{3}$, $y_2=(-x_1-2x_2+3x_3-x_4)/\sqrt{15}$, $y_3=(x_2+x_3+x_4)/\sqrt{3}$, $y_4=(3x_1+x_2+x_3-2x_4)/\sqrt{15}$. ⓒ $f(\mathbf{x})=2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-2y_4^2$, $y_1=(2x_2-x_3+x_4)/\sqrt{6}$, $y_2=(3x_1-x_2-x_3+x_4)/\sqrt{12}$, $y_3=(x_3+x_4)/\sqrt{2}$, $y_4=(x_1+x_2+x_3-x_4)/2$. ⓓ $f(\mathbf{x})=3y_1^2+3y_2^2-5y_3^2-5y_4^2$, $y_1=(x_1+x_4)/\sqrt{2}$, $y_2=(-x_1+x_2+x_3+x_4)/2$, $y_3=(-x_1-x_2-x_3+x_4)/2$, $y_4=(-x_2+x_3)/\sqrt{2}$. ⓔ $f(\mathbf{x})=-3y_1^2-3y_2^2-3y_3^2+4y_4^2$. $y_1=(x_1+x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_2=(x_1+x_2-2x_3+6x_4)/\sqrt{42}$, $y_3=(-x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_4=(-x_1-x_2+2x_3+x_4)/\sqrt{7}$. ⓕ $f(\mathbf{x})=-y_1^2-y_2^2-6y_3^2-6y_4^2$, $y_1=(-x_1+x_3+x_4)/\sqrt{3}$, $y_2=(2x_1+3x_2+x_3+x_4)/\sqrt{15}$, $y_3=(x_1-x_2+x_4)/\sqrt{3}$,

$y_4 = (x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4)/\sqrt{15}$. (g) $f(\mathbf{x}) = -2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 5y_4^2$, $y_1 = (x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2 = (x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_3 = (-x_1+x_2+2x_3+6x_4)/\sqrt{42}$, $y_4 = (-x_1+x_2+2x_3-x_4)/\sqrt{7}$. (h) $f(\mathbf{x}) = -y_1^2-y_2^2-y_3^2+6y_4^2$, $y_1 = (-x_1+x_2)/\sqrt{2}$, $y_2 = (-x_1 - x_2 + 2x_3)/\sqrt{6}$, $y_3 = (-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4)/\sqrt{21}$, $y_4 = (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)/\sqrt{7}$. (i) $f(\mathbf{x}) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 8y_3^2 - 8y_4^2$, $y_1 = (x_2+x_3-x_4)/\sqrt{3}$, $y_2 = (3x_1+x_2-2x_3-x_4)/\sqrt{15}$, $y_3 = (x_1+x_3+x_4)/\sqrt{3}$, $y_4 = (-x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4)/\sqrt{15}$. (j) $f(\mathbf{x}) = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 3y_3^2 - 4y_4^2$, $y_1 = (-2x_1 + x_3)/\sqrt{5}$, $y_2 = (x_1 + 5x_2 + 2x_3)/\sqrt{30}$, $y_3 = (-x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4)/\sqrt{42}$, $y_4 = (x_1-x_2+2x_3+x_4)/\sqrt{7}$. (k) $f(\mathbf{x}) = -6y_1^2-6y_2^2+4y_3^2+4y_4^2$, $y_1 = (x_1+x_3)/\sqrt{2}$, $y_2 = (x_1-2x_2-x_3+2x_4)/\sqrt{10}$, $y_3 = (-x_1-x_2+x_3)/\sqrt{3}$, $y_4 = (-x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4)/\sqrt{15}$. (l) $f(\mathbf{x}) = 4y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_4^2$, $y_1 = (x_1+2x_2)/\sqrt{5}$, $y_2 = (2x_1-x_2+x_3+6x_4)/\sqrt{42}$, $y_3 = (-2x_1+x_2+5x_3)/\sqrt{30}$, $y_4 = (-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4)/\sqrt{7}$. (m) $f(\mathbf{x}) = -5y_1^2 - 5y_2^2 + 5y_3^2 + 5y_4^2$, $y_1 = (2x_1 + 7x_2 - x_3 - 4x_4)/\sqrt{70}$, $y_2 = (3x_1 + 2x_3 + x_4)/\sqrt{14}$, $y_3 = (-x_2 + x_3 - 2x_4)/\sqrt{6}$, $y_4 = (3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4)/\sqrt{30}(3, -2, -4, -1)$. (n) $f(\mathbf{x}) = y_1^2+y_2^2+y_3^2-9y_4^2$, $y_1 = (2x_2+x_3)/\sqrt{5}$, $y_2 = (5x_1+2x_2-4x_3)/\sqrt{45}$, $y_3 = (-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 9x_4)/\sqrt{90}$, $y_4 = (-2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4)/\sqrt{10}$. (o) $f(\mathbf{x}) = -5y_1^2 - 5y_2^2 - 5y_3^2 + 9y_4^2$, $y_1 = (x_3 + 2x_4)/\sqrt{5}$, $y_2 = (5x_2 + 2x_3 - x_4)/\sqrt{30}$, $y_3 = (6x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)/\sqrt{42}$, $y_4 = (x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4)/\sqrt{7}$. (p) $f(\mathbf{x}) = 4y_1^2 + 4y_2^2$, $y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 + x_4)/2$, $y_2 = (x_3 + x_4)/\sqrt{2}$, $y_3 = (-2x_1-x_3+x_4)/\sqrt{6}$, $y_4 = (-x_1+3x_2+x_3-x_4)/\sqrt{12}$. (q) $f(\mathbf{x}) = -3y_3^2-3y_4^2$, $y_1 = (x_1+2x_2+x_4)/\sqrt{6}$, $y_2 = (x_1+2x_3-x_4)/\sqrt{6}$, $y_3 = (-2x_1+x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_4 = (-x_2 + x_3 + 2x_4)/\sqrt{6}$. (r) $f(\mathbf{x}) = -5y_1^2 - 5y_2^2 - 5y_3^2 + 3y_4^2$, $y_1 = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$, $y_2 = (-x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4)/\sqrt{12}$, $y_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3)/\sqrt{6}$, $y_4 = (x_1-x_2-x_3+x_4)/2$. (s) $f(\mathbf{x}) = 7y_1^2+7y_2^2-7y_3^2-7y_4^2$, $y_1 = (2x_1+x_2-2x_3)/3$, $y_2 = (4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4)/\sqrt{126}$, $y_3 = (-2x_2 - x_3 + x_4)/\sqrt{6}$, $y_4 = (3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4)/\sqrt{21}$. (t) $f(\mathbf{x}) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 - 8y_4^2$, $y_1 = (-2x_1+x_2-x_3+3x_4)/\sqrt{15}$, $y_2 = (x_1+x_2-x_3)/\sqrt{3}$, $y_3 = (x_2+x_3)/\sqrt{2}$, $y_4 = (-2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4)/\sqrt{10}$. (u) $f(\mathbf{x}) = -7y_1^2 - 7y_2^2 + 6y_3^2 + 6y_4^2$, $y_1 = (-x_1 - 3x_2 + x_4)/\sqrt{11}$, $y_2 = (-3x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 3x_4)/\sqrt{143}$, $y_3 = (3x_1 - x_2 + x_3)/\sqrt{11}$, $y_4 = (2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 11x_4)/\sqrt{143}$. (v) $f(\mathbf{x}) = -5y_1^2 - 5y_2^2 - 5y_3^2 + 5y_4^2$, $y_1 = (x_3 - 2x_4)/\sqrt{5}$, $y_2 = (5x_2 + 2x_3 + x_4)/\sqrt{30}$, $y_3 = (3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)/\sqrt{15}$, $y_4 = (-2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4)/\sqrt{10}$. (w) $f(\mathbf{x}) = -7y_1^2-7y_2^2+5y_3^2+5y_4^2$, $y_1 = (x_1+2x_2+x_3)/\sqrt{6}$, $y_2 = (x_1-x_2+x_3+3x_4)/\sqrt{12}$, $y_3 = (-2x_1+x_2+x_4)/\sqrt{6}$, $y_4 = (-x_1-x_2+3x_3-x_4)/\sqrt{12}$. (x) $f(\mathbf{x}) = 10y_4^2$, $y_1 = (2x_1 + x_2)/\sqrt{5}$, $y_2 = (2x_1 - 4x_2 + 5x_3)/\sqrt{45}$, $y_3 = (x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 9x_4)/\sqrt{90}$, $y_4 = (-x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)/\sqrt{10}$.

Книги делаются из книг.
Вольтер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. Конечномерные векторные пространства. Издательство Московского университета. 1982.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука. 1980.
3. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука. 1983.
4. Березин И.С.,Жидков Н.П. Методы вычислений. Том второй. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы. 1962.
5. Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. М.: Высшая школа. 1971.
6. Булдырев В.С.,Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных.Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985.
7. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука. 1980.
8. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука. 1971.
9. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука. 1971.
10. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука. 1975.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука. 1978.
12. Козак А.В., Пилиди В.С. Линейная алгебра. М. Вузовская книга. 2001.
13. Кострикин А.И. [1] Введение в алгебру. М.: Наука. 1977. [2] Часть 1. Основы алгебры. Часть 2. Линейная алгебра. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физико-математическая литература. 2000.
14. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 2000.
15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1971.
16. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука. 1970.
17. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука. 1974.
18. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. М.: Наука. 1980.
19. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука. 1977.
20. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз. 1963.
21. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука. 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

КРЯКВИН ВАДИМ ДОНАТОВИЧ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Пособие к решению задач
и
большая коллекция вариантов заданий

Под редакцией автора
Компьютерная верстка автора