Лабораторна робота № 2

Похибки чисельних розрахунків

Мета роботи: отримання практичних навичок в чисельному визначенні похибок обчислень, реалізація розрахунку похибок в пакеті *Mathematica*.

Короткі теоретичні відомості

Особливістю чисельних методів обробки даних є те, що вони оперують з великими масивами даних представлених у числовій формі. Ці числові дані можуть бути отримані шляхом:

1) Розрахунку аналітичних функцій при певних значеннях їх аргументів.
2) Вимірювання фізичних величин;
3) Моделювання фізичних процесів, роботи пристроїв і систем у пакетах Comsol, ANSYS і т.д.

У будь-якому випадку масиви отриманих даних містять початкову похибку, що обумовлено:

- обмеженою розрядною сіткою опису числових даних в цифрових системах, що обумовлює появу похибки квантування чисел.
- похибки вхідних даних;
- інструментальною похибкою – похибкою вимірювального пристрою;
- методичною похибкою – похибкою методу вимірювання.

Нехай x – точне значення певної величини, а $\tilde{x}$ – її наближене значення, що отримане внаслідок вимірювання або розрахунку. Тоді значення

$$\Delta_x = \left| x - \tilde{x} \right|,$$

називають абсолютною похибка, а

$$\delta = \frac{\left| x - \tilde{x} \right|}{x} = \frac{\Delta_x}{x},$$

відносною похибкою. Тобто відносна похибка це доля абсолютної похибки в порівнянні з абсолютним значенням величини, що обчислюється.

При виконанні арифметичних операцій похибки обчислень тільки *накопичуються,* незалежно від типу виконуваної операції. Нехай два числа x_1 і x_2 обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x_1)$ і $\Delta(x_2)$ та відносними $\delta(x_1)$ і $\delta(x_2)$, тоді внаслідок арифметичних операцій похибка результату дорівнює:

$$\begin{gathered}
\Delta(x_1 + x_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2; \\
\Delta(x_1 - x_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2; \\
\delta\,(x_1 \cdot x_2) = \delta\,(x_1) + \delta\,(x_2); \\
\delta \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \delta\,(x_1) + \delta\,(x_2); \\
\delta \left(x^n \right) = n\delta\,(x).
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Як бачимо, для операцій додавання і віднімання простіше оцінити абсолютну похибку, а для операцій множення та ділення – відносну. Взагалі, не можна сказати, яка з похибок, абсолютна чи відносна, є кращою за іншу. Кожна з них несе певну інформацію про точність обчислень.

При аналізі похибок особливо критичними є операція віднімання близьких за значенням чисел. У цьому випадку результат віднімання може бути меншим за значення абсолютної похибки, що свідчить про те, що істинне значення результату втрачається на фоні похибки.

При обчислення значення деякої функції $F(x)$ через похибку у значення аргументам $\tilde{x} = x + \Delta x$ виникає похибка в обчисленому значення функції:

$$\Delta F(x) = F(\tilde{x}) - F(x). \tag{2.2}$$

Поділивши ліву і праву частину рівняння (1) на Δx, отримаємо:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(\tilde{x}) - F(x)}{\Delta x}, \tag{2.3}$$

Відношення в правій частині рівняння (2.3) при $\Delta x \to 0$ дорівнює похідній dF/dx. Вважаючи похибку Δx достатньо малою у порівнянні зі значенням аргументу x, будемо вважати:

$$\Delta F(x) = \left| \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \bigg|_{x = \tilde{x}} \right) \right| \Delta x. \tag{2.4}$$

У випадку функції декількох змінних формула (2.4) матиме вид:

$$\Delta F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial F(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i} \bigg|_{x = \tilde{x}} \right) \right| \Delta x_i. \tag{2.5}$$

Можна поставити і обернену задачу, а саме - які максимальні значення можуть мати похибки аргументів, щоб гарантувати обчислення значення функції F із заданою точністю $\Delta F = 10^{-m}$, де m – додатне ціле число (число вірних знаків мантиси). При вирішенні цього питання найчастіше керуються так званим принципом рівних впливів, згідно з яким межі похибок аргументів визначають такими, щоб всі члени суми в формулі (2.5) мали однакові значення. Це припущення дозволяє перетворити формулу (2.5) до виду:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta F}{n} \left(\left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \right)^{-1}. \tag{2.6}$$

Розглянемо приклади оцінки похибок обчислень.

Приклад 1

Оцінити похибку обчислення виразу:

$$F = \frac{a^2 + b^3}{c},$$

при наступних значеннях аргументів і похибок: a = 28.3 ± 0.02, b = 7.45 ± 0.01, c = 0.7854 ± 0.001.

Послідовно знаходимо:

$a^2 = 28.3^2 = 800.89$;

$b^3 = 7.45^3 = 413.49$;

$a^2 + b^3 = 800.89 + 413.49 = 1214.38;$

$(a^2 + b^3)/c = 1214.38/0.7854 = 1546.19.$

Тепер оцінимо похибки:

$$\varepsilon(a^2) = 2\varepsilon(a) = 2\frac{0.02}{28.3} = 1.413 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon(b^3) = 3\varepsilon(b) = 3\frac{0.01}{7.45} = 4.027 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta(a^2 + b^3) = \Delta(a^2) + \Delta(b^3) = a^2 \cdot \varepsilon(a^2) + b^3 \cdot \varepsilon(b^3) = 800.89 \cdot 1.413 \cdot 10^{-3} +$$

$$+413.49 \cdot 4.027 \cdot 10^{-3} = 1.131 + 1.665 = 2.796;$$

$$\varepsilon\left(\frac{a^2 + b^3}{c}\right) = \varepsilon(a^2 + b^3) + \varepsilon(c) = \frac{2.796}{1214.38} + \frac{0.001}{0.7854} = 2.302 \cdot 10^{-3} + 1.273 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 3.575 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta\left(\frac{a^2 + b^3}{c}\right) = 3.575 \cdot 10^{-3} \cdot 1546.19 = 5.527.$$

Приклад 2

Оцінити похибку обчислення функції:

$$F = \frac{ab}{\sqrt[3]{1+c}}\sin(c),$$

для наступних значень аргументів і похибок: $a = 0.2456 \pm 0.0005$, $b = 0.0078 \pm 0.0003$, $c = 0.008 \pm 0.00013$.

Знаходимо значення функції та її часткових похідних у точках a, b, c.

$$F = \frac{0.2456 \cdot 0.0078}{\sqrt[3]{1+0.008}}\sin(0.008) = 0.24566;$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{b}{\sqrt[3]{1+c}}\sin(c) = \frac{0.0078}{\sqrt[3]{1+0.008}}\sin(0.008) = 6.217 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{a}{\sqrt[3]{1+c}}\sin(c) = \frac{0.2456}{\sqrt[3]{1+0.008}}\sin(0.008) = 1.957 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{ab}{3(1+c)^{5/3}}\sin(c) + \frac{ab}{\sqrt[3]{1+c}}\cos(c) = \frac{0.2456}{\sqrt[3]{1+0.008}}\sin(0.008) =$$

$$= \frac{0.2456 \cdot 0.0078}{3(1+0.008)^{5/3}}\sin(0.008) + \frac{0.2456 \cdot 0.0078}{\sqrt[3]{1+0.008}}\cos(0.008) = 1.961 \cdot 10^{-3}.$$

Підставивши отримані значення у формулу (2.5), отримаємо:

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial c}\Delta c\right| = 6.217 \cdot 10^{-4} \cdot 0.005 + 1.957 \cdot 10^{-2} \cdot 0.0003 +$$

$$1.961 \cdot 10^{-3} \cdot 0.00013 = 6.437 \cdot 10^{-6};$$

$$\varepsilon(F) = \frac{\Delta F}{F} = \frac{6.437 \cdot 10^{-6}}{0.24566} = 2.620 \cdot 10^{-5}.$$

Приклад 3

Визначити, якими можуть бути похибки аргументів *a*, *b*, *c* функції *F* з попереднього прикладу, якщо функція *F* повинна бути обчислена з точністю до п'ятого знаку мантиси ($m = 5$) в околі точки $a = 0.02456$, $b = 0.0078$, $c = 0.008$.

Перш за все обчислимо абсолютну похибку результату, при якій точно розраховується *m* знаків мантиси. Число *x*, представлене в формі з плаваючою точкою (*float point*), має наступний вид:

$$x = 0.a_1 a_2 \ldots a_n \cdot 10^q,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ десяткові цифри або розряди, причому $a_1 \neq 0$. Якщо показник порядку $q = 0$, то одиниця в першому розряді активно представляє число 10^{-1}, в другому – 10^{-2}, а в розряді m – 10^{-m}. У загальному випадку $a_1 = 1$ представляє число 10^{q-1}, а $a_m = 10^{q-m-1}$.

Якщо необхідно отримати результат з *m* знаками мантиси, то це означає, що абсолютна похибка не повинна перевищувати одиниці розряду *m*, тобто

$$\Delta F \leq 10^{q-m}. \tag{2.7}$$

Для заданої функції і значень аргументів знаходимо:

$$F = \frac{0.2456 \cdot 0.0078}{\sqrt[3]{1+0.008}} \sin(0.008) = 0.24566 \cdot 10^0.$$

Отже, абсолютна похибка обчислення функції за формулою (2.7) не повинна перевищувати:

$$\Delta F \leq 10^{q-m} = 10^{0-5} = 10^{-5}.$$

Використовуючи раніше знайдені вирази для похідних, обчислимо:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0.6217 \cdot 10^{-3}; \frac{\partial F}{\partial b} = 0.1957 \cdot 10^{-1}; \frac{\partial F}{\partial c} = 0.1961 \cdot 10^{-2}.$$

Використовуючи формулу (2.6), отримаємо:

$$\Delta a = \frac{10^{-5}}{3}(0.6217 \cdot 10^{-3})^{-1} = 5.362 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta b = \frac{10^{-5}}{3}(0.1957 \cdot 10^{-1})^{-1} = 1.703 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta c = \frac{10^{-5}}{3}(0.1961 \cdot 10^{-2})^{-1} = 1.700 \cdot 10^{-2}.$$

Застосування операторів пакету Mathematica при оцінюванні похибок

Розрахунки, наведені в теоретичній частині, можуть бути виконані в пакеті *Mathematica*. Зокрема, якщо скористуватися функція D[y, x] використовується для розрахунку частинної похідної функцій *y* за змінною *x*, функція Dt[y] – для знаходження повного диференціалу функції *y*. Для чисельної оцінки отриманих символьних виразів при заданих значеннях аргументів необхідно використати функцію N[] до отриманого виразу, N[D[y, x]]. У лістингу 1 наведена послідовність виконання функцій та результатів їх виконання для розрахунку частинних похідних.

```
In:= d1=D[(a^2 + b^3)/Cos[t],a]

Out= 2 a Sec[t]

In:= d2=D[(a^2 + b^3)/Cos[t],b]

Out= 3 b² Sec[t]

In:= d3=D[(a^2 + b^3)/Cos[t],t]

Out= (a²  + b³ ) Sec[t] Tan[t]

In:=  a=28.3; b=7.45; t=0.7854;

In:= N[d1]

Out= 80.0446

In:= N[d2]

Out= 235.478

In:= N[d3]

Out= 1717.41
```

Лістинг 1. Код програми Mathematica для обчислення частинних похідних

Порядок виконання роботи

1. Виберіть варіант завдання згідно з номером у списку групи.
2. Для функції № 1 розрахуйте похибку її обчислення за похибками її аргументів, використовуючи формули (2.1). Запишіть послідовність виконуваних вами операцій, оцініть похибки проміжних результатів, переходячи від абсолютної похибки до відносної і навпаки залежно від типу арифметичної дії і запишіть шукане значення.
3. Скористуйтесь формулою (2.4) і повторіть обчислення загальної похибки для умов вашого варіанту.
4. Скористайтесь операторами пакету *Mathematica* для обчислення частинних похідних чи диференціалу функції і перевірте результат, отриманий в пункті 3.
5. Для функції № 2 за відомою кількістю точних значень мантиси і заданих координат аргументів розрахуйте максимальні похибки аргументів, використовуючи формули (2.6) і (2.7).
6. Запишіть хід рішення, отриманий у п. 6, у пакеті *Mathematica*.
7. Проаналізуйте отримані результати і сформулюйте висновки по роботі.

Варіанти завдань

Вар.		F(a,b,c)	a	b	c	m
1	1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a+b)$	2456 ±0.0005	0.00078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b}\arcsin(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
2	1	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b}\right)^3$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^3}{13}(a-b)^7\cos(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
3	1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a^3+b)$	0.12456 ±0.0005	0.0078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b}\mathrm{arctg}(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
4	1	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b^2}\right)^3$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^2}{13}(a-b)^3\cos(ac^2)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
5	1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}(a+b)^2$	0.12456 ±0.0005	0.078 ±0.0003	0.2468 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b^2}{a-b}\arccos(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
6	1	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b}\right)^2$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^3}{13}(a-b)^3\cos(a^2c)$	0.02456	0.007823	0.8348	5
7	1	$\frac{a^2b}{\sqrt[3]{c}}(1+b)$	2456 ±0.0005	0.00078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{a+b}{a-b}\ln(1+ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
8	1	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b}\right)$	0.2456 ±0.0005	0.20078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	
	2	$\frac{c^3}{13}(a-b)^7\cos(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
9	1	$\frac{ab}{\sqrt[3]{1+c}}(a+b)$	0.12456 ±0.0005	0.0078 ±0.00003	0.008 ±0.00013	

	2	$\frac{a+b}{a-b}\operatorname{arctg}(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
10	1	$\left(\frac{(a+b)c}{a-b^2}\right)^2$	0.2556 ±0.0005	0.50078 ±0.00003	0.8 ±0.013	
	2	$\frac{c^2}{13}(a-b)^3\cos(ac^2)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
11	1	$\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}(a-b)$	0.2456 ±0.0005	0.0078 ±0.00003	8 ±1.23	
	2	$\frac{(a+b)^2}{a-b}\arcsin(c)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
12	1	$\frac{a+b}{\sqrt[3]{a-b}}(a^2+b)c$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	0.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\arccos(c)$	0.02456	0.01823	0.0348	5
13	1	$\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}+cb$	0.2456 ±0.0005	0.078 ±0.003	8 ±1.25	
	2	$\frac{c(a+b)}{a-b}+\arcsin(ac)$	0.02456	0.007823	0.8348	4
14	1	$\frac{a+b}{c\sqrt[3]{a-b}}a$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}-\arccos(a+c)$	0.02456	0.01823	0.0348	5
15	1	$\frac{a+bc}{(ab)^2}(a-b)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\left(1+c+\frac{c^4}{4!}\right)\lg(c)$	0.02456	0.01823	0.348	5
16	1	$\frac{ac+b^2}{\sqrt[3]{a-b}}a$	0.1245 ±0.0005	0.120 ±0.0003	2.08 ±0.015	
	2	$a+\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\lg(ac)$	0.02456	0.01823	3.0148	4
17	1	$\frac{2}{\sqrt[3]{a-b}}(a+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b^2}}-\arcsin(a+c)$	0.2456	0.01823	0.0348	5
18	1	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}(a+c)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\lg(\arccos(a+c))$	0.02456	0.01823	0.0348	5
19	1	$\frac{a+bc}{(ab)^2}(a^2-b)$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	

	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\left(1+a+\frac{c^4}{4!}\right)\lg(c)$	0.02456	0.01823	0.348	5
20	1	$\frac{a+bc}{(a-b)^2}$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+c}{\sqrt{a-b}}(1+c)\lg(bc)$	0.02456	0.01823	2.348	4
21	1	$\frac{a^2+bc}{(ab)^2}$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a^2+b}{\sqrt{a-b}}(1+bc)\lg(c)$	0.02456	0.01823	0.348	3
22	1	$\frac{a^3-b^2}{(ab)^2}c$	0.22456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b^2}{\sqrt{a-b}}(1+c)\lg(c)$	0.02456	0.01823	0.348	3
23	1	$\frac{a^2-b^2}{(ab)^2}c$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\arctan(\ln(a+c))$	0.12456	0.01823	2.08	4
24	1	$\frac{a^4-b^4}{(ab)^2}c$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\ln(\sin(a+c))$	0.02456	0.01823	0.348	5
25	1	$\frac{a^4-b^2}{(ab)^2}\sqrt{c}$	0.12456 ±0.0005	0.12078 ±0.00003	2.08 ±0.015	
	2	$\frac{\ln(a+b)}{\sqrt{a-b}}(1+c)\ln(ac)$	0.12456	0.11823	2.08	5