№3736 Скориставшись формулою

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язок.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)} \right) dx = \left\{ \text{міняємо порядок інтегрув.} \right.$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)} \right) dy =$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)} = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt; \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t; \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array} \end{array} \right.$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cancel{\cos t}\, dt}{\cancel{\cos t}\,(1+y^2 \cdot \sin^2 t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} + y^2 \right)} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Заміна:} \quad u = \operatorname{ctg} t; \\ du = -\frac{dt}{\sin^2 t}; \quad \frac{1}{\sin^2 t} = 1+u^2; \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/2 \\ \hline u & +\infty & 0 \end{array} \end{array} \right\} =$$

$$= -\int_{+\infty}^{0} \frac{du}{1+y^2+u^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{du}{1+y^2+u^2} = \left\{ \begin{matrix} \text{табличний!} \\ \text{інтеграл} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \{\text{табличний!}\} = \frac{\pi}{2} \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Чи мали ми право міняти порядок інтегрування? Так, оскільки цього випадку стосується <u>теорема 6</u>, лише там розглянутий невласний інтеграл $\int$ на $[c; +\infty)$, але якщо $+\infty$ поміняти на B — особлива верхня межа інтегрування, як я розглядав весною невласні інтеграли, то нічого не зміниться. і, звісно, міняються ролями змінні x і y.

$\Big(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ — збігається, $\frac{1}{1+x^2y^2}$ — обмежена на $[0;1]\times[0;1] \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2y^2)}$ збігається рівномірно по y на $[0;1]$.