$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}}$$

Звідси отримуємо, що якщо поверхня Ω задається неявним р-ням $F(x,y,z)=0$ і F — диференційовна в т. M_0 ф-я, причому $F'_z(M_0)\neq 0$, то таке р-ня в околі т. M_0 визначає ф-ю $z=f(x,y)$, причому, $f'_x(x_0;y_0) = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}$.

$f'_y(x_0;y_0) = -\frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}$ $\Rightarrow$ р-ня дотичної пл-ни приймає вигляд: $z-z_0 = -\frac{F'_x}{F'_z}(M_0)(x-x_0) + \frac{F'_y}{F'_z}(M_0)(y-y_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0}$$

(дотична пл-на до поверхні Ω в т. M_0)

$\Rightarrow$ р-ня нормалі: $\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}}$ — р-ня нормалі

Теорема про обернену ф-ю

Спираючись на теорему про неявну ф-ю, отримуємо:

Т: Якщо відображення $\bar{f}: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ $\boxed{\bar{y}=\bar{f}(\bar{x}),\ \bar{y}\in\mathbb{R}^n;\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n}$

таке, що: 1) $\bar{f}\in C^p(G)$, $p\geq 1$; 2) $\bar{y}^0 = \bar{f}(\bar{x}^0)$

3) $\bar{f}'_{\bar{x}}(\bar{x}^0)$ має обернену, то $\exists$ окіл $U(\bar{x}^0)\subset G$ і окіл $V(\bar{y}^0)$ такі, що: $\bar{f}: U \to V$ є бієкцією $\Rightarrow \exists$ обернена $\bar{f}^{-1}: V \to U$, $\bar{f}^{-1}\in C^p(V)$ і при цьому, $(\bar{f}^{-1}_{\bar{y}})' = (\bar{f}'_{\bar{x}}(\bar{x}))^{-1}$.

D: Запишемо р-ня $\bar{y}=\bar{f}(\bar{x})$ в вигляді $\bar{f}(\bar{x})-\bar{y}=\bar{0}$ неявно заданої ф-ї. Для $\bar{F}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{f}(\bar{x})-\bar{y}$ виконані всі умови теореми про неявну ф-ю (змінні $\bar{x}$ і $\bar{y}$ помінялися ролями!) ($F'_{\bar{x}} = f'_x(\bar{x}^0;\bar{y}^0)$ має обернену!) і враховуючи, що $F'_{\bar{y}} = -I$ — одинична матриця, отримуємо твердження теореми. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$: $(f^{-1}(y))'_y = (f'_x)^{-1}$

Числові ряди

Нехай $\{a_n\}$ — деяка числова посл-ть.

Визн: Числовим рядом наз. вираз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

Доданки a_n в цьому випадку наз. членами ряда.
a_5 - $5^й$ член ряда...
Сума перших m членів ряда наз. $m^{ою}$ частковою сумою ряда і позначається $S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$. ($S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$ і т.д.)
=> кожному ряду відповідає посл-ть його часткових сум:
$\sum a_n \to \{S_n\}$

<u>Визн</u>: Якщо $\exists$ скінчена границя: $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \neq \infty$, то кажуть, що ряд $\sum a_n$ <u>збігається</u>, а число S наз. його <u>сумою</u>.
Якщо $\lim_{n\to+\infty} S_n = \nexists$ або $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$, то кажуть, що ряд <u>розбігається</u>.

<u>Приклад</u>: Знайти суму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+6n+8}$

Знайдемо часткові суми: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k^2+6k+8} = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+6k+8} =$

$$= \left\{ \frac{1}{k^2+6k+8} = \frac{1}{(k+2)(k+4)} = \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4}\right)\cdot\frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4}\right) = \frac{3}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}\right) = \frac{3}{2}\left(\sum_{p=3}^{n+2}\frac{1}{p} - \sum_{p=5}^{n+4}\frac{1}{p}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{5}^{n+2}\frac{1}{p} - \left(\sum_{p=5}^{n+2}\frac{1}{p} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)\right) =$$

$p := k+2$, $p := k+4$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right).$$ Таким чином, $S = \lim_{n\to+\infty} S_n =$

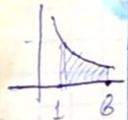
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{n+3}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n+4}}_{\to 0}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{12} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

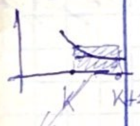
З критерію Коші існування границі числової посл-ті =>
<u>Т</u> (Критерій Коші для рядів):
Ряд $\sum a_n$ - збігається $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : \forall m \geq n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$.

<u>Д</u>: 1)(=>) Дано: ряд $\sum a_n$ - збігається => $\exists$ скінченна границя, $\lim_{n\to+\infty} S_n \Leftrightarrow \{S_n\}$ - фундаментальна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon : \forall m \geq n \geq n_\varepsilon$ виконується: $|S_m - S_n| < \varepsilon. \Leftrightarrow |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall\ m \geq k \geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_k + a_{k+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$.

3. <u>Інтегральна ознака збіжності числових</u> $\boxed{\text{в минулому}}$ рядів

<u>Т</u>: Якщо $f(x)$ визначена, ε, невід'ємна і незростаюча на $[1; +\infty)$, інтегрована на $\forall\ [1; b] \subset [1; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігаються і розбігаються одночасно.





площа прямокутника

Д: Оскільки $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [1; +\infty)$, то $F(b) = \int_1^b f(x)dx$ - неспадна на $[1; +\infty)$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ - неспадна пос-ть, причому, $\forall k \ f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \Rightarrow f(2) \leq \int_1^2 f(x)dx \leq f(1)$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2).$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$, просумуємо це все

$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$. Таким чином, $\forall n$ маємо

$$\underbrace{S_n - f(1) \leq \int_1^n f(x)dx}_{\text{нер-ть I}} \underbrace{\leq S_{n-1}}_{\text{нер-ть II}}.$$

1) Якщо $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ - збігається $\Rightarrow F(b)$ - обмежена зверху $\Rightarrow$ $\Rightarrow \{S_n\}$ (нер. I) теж обмежена зверху $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ - збіг.

2) Якщо $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ - розбіг. $\Rightarrow F(b) \to +\infty$ при $b \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$ (нер. II) $\Rightarrow \sum f(k)$ - розбіг.

3) Якщо $\sum^{\infty} f(k)$ - розбіг. $\Rightarrow S_n \to +\infty \Rightarrow F(b) \to +\infty$ (нер. I) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ - розбіг.

4) Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ - збіг. $\Rightarrow \{S_n\}$ - обмежена зверху $\Rightarrow F(b)$ - обмежена зверху (нер. II) $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ - збігається. ч.т.д.

<u>Приклад застосування</u>: Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

1) При $\alpha < 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \to +\infty$ при $n \to +\infty$. $\Rightarrow$ ряд розбігається, бо $a_n \not\to 0$.

2) При $\alpha = 0 \Rightarrow a_n = 1 \ \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбігається.

3) При $\alpha > 0$: ф-я $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} > 0$, $\forall x \geq 1$, $\frac{1}{x_1^\alpha} > \frac{1}{x_2^\alpha} \ \forall x_2 > x_1 > 0$ - спадна, інтегровна на $\forall [1; b] \subset [1; +\infty) \Rightarrow$ виконані умови інтегральної ознаки. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ - $\begin{cases} \text{збіг. при } \alpha > 1 \\ \text{розбіг. при } \alpha \leq 1 \end{cases}$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ - $\begin{cases} \text{збіг. при } \alpha > 1 \\ \text{розбіг. при } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Вправа: Аналогічно дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

Приклад 2: Дослідити на збіжність: $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)\sin\frac{1}{\sqrt{n^5+7n}}$

$a_n = (n+2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n^5+7n}}$. При $n \to +\infty$: $\frac{1}{\sqrt{n^5+7n}} \to 0 \Rightarrow \sin\frac{1}{\sqrt{n^5+7n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^5+7n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = (n+2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n^5+7n}} \sim \frac{n+2}{\sqrt{n^5+7n}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - збігається ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow \sum (n+2)\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n^5+7n}}$ - теж збігається (II^{a} порівняльна ознака)

4. Ознака Даламбера

(використовують, коли є багато спільних множників $n!$)

Т: Нехай: $a_n > 0$ $\forall n$. Тоді:

1) Якщо $\exists$ число q: $0 < q < 1$ і $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, то ряд $\sum a_n$ - збігається;

2) Якщо $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд $\sum a_n$ - розбігається

Д: 1) ~~Нехай~~ Дано: $0 < q < 1$ і $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, зокрема:

$\frac{a_{n_0}}{a_{n_0+1}} \leq q \Leftrightarrow a_{n_0+1} \leq q\cdot a_{n_0}$

$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq q \Leftrightarrow a_{n_0+2} \leq q\cdot a_{n_0+1} \leq q^2\cdot a_{n_0}$

— — — — — — — —

$a_{n_0+k} \leq q\cdot a_{n_0+k-1} \leq q^k\cdot a_{n_0}$

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0} q^k = a_{n_0}\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ - збігається (геометрична прогресія) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (за $\mathrm{I}^{ю}$ порівняльною ознакою): $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0+k}$ теж збігається.

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0+k}$ - збігається. щ.т.д.

2) Дано: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geq 1 \Rightarrow a_{n_0+1} \geq a_{n_0}$

$\Downarrow \qquad a_{n_0} > 0$

$a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \geq n_0$.

$a_{n_0+2} \geq a_{n_0+1} \geq a_{n_0}$

$a_{n_0+3} \geq a_{n_0+2} \geq a_{n_0}$.

$a_{n_0+k} \geq a_{n_0}$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} a_{n_0+k} \geq a_{n_0} \neq 0 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ розбігається, щ.т.д.

Наслідок ("гран. ознака Даламбера"): Якщо $a_n > 0$ $\forall n$ і $\exists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то:

1) $q < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ - збігається;

2) $q > 1 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ - розбігається.

3) $q = 1 \Rightarrow$ невідомо.

$\boxed{Д}$: 1) $q<1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0: q_1 = q+\varepsilon < 1$ і $\exists\, n_\varepsilon: \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} - q < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon = q_1 < 1.$

$\Rightarrow$ (за теоремою): ряд $\sum a_n$ – збігається.

2) $q>1 \Rightarrow$ аналогічно: $\exists\, \varepsilon>0: q_1 = q-\varepsilon > 1$ і $\exists\, n_\varepsilon$:

$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \Rightarrow 1 < q_1 =$

$= q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}. \Rightarrow$ (за теоремою (п.2)) $\Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ – розбігається.

3) Візьмемо ряд $\sum \frac{1}{n}$ – розбігається, а $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$

$\sum \frac{1}{n^2}$ – збігається ($\alpha=2>1$), але $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$

$\boxed{\text{5. Ознака Коші}}$ (використовують, коли легко добувати корінь)

$\boxed{Т}$: Нехай $a_n \geq 0$ і $q = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. Тоді:

1) При $q<1$ ряд $\sum a_n$ – збіг.;

2) При $q>1$ ряд $\sum a_n$ – розбіг.

3) При $q=1 \Rightarrow$ невідомо.

$\boxed{Д}$: 1) $q<1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0: q_1=q+\varepsilon<1.$ Оскільки $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на інтервалі $[q_1; +\infty)$ – граничних точок посл-ті $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ нема $\Rightarrow$ на цьому проміжку є лише скінченне число членів посл-ті $\{\sqrt[n]{a_n}\}$. $\Rightarrow \exists\, n_\varepsilon: \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q_1 = q+\varepsilon<1$ $\Leftrightarrow a_n < q_1^n$. $\sum q_1^n$ – збіг. $\Rightarrow$ (I^a порівн. озн.) $\sum a_n$ теж збіг.

(наслідок: скінченне число доданків не впливає на збігн., розбігн. ряду)

2) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1. \Rightarrow \exists$ підпосл-ть $\{a_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n_k} > 1 \quad \forall k \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0. \Rightarrow \sum a_n$ – розбіг.

3) $\sum \frac{1}{n}$ – розбіг., а $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$

$\sum \frac{1}{n^2}$ – збіг., а $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1.$

Наслідок (ознака Коші): Якщо $a_n \geq 0 \ \forall n$ і $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$,

то: 1) $q<1 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ – збіг;

2) $q>1 \Rightarrow$ ряд $\sum a_n$ – розбіг;

3) $q=1$ – невідомо

Д|: Оскільки $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \Rightarrow \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \Rightarrow$ теорема.

|Знакозмінні ряди|

I. Знакопочергові ряди

Т (ознака Лейбніца): Якщо:

1) ряд має вигляд: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (або $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$) і $a \geq 0\ \forall n$.

2) $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n$;

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, то такий ряд наз. рядом Лейбніца і ~~він збіг.~~

а) він збігається;

б) його сума відрізняється від часткової суми не більше ніж на величину першого відкинутого доданку: $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

Д|: а) Розглянемо парні часткові суми цього ряду:

$S_{2k} = \underset{\vee}{a_1 - a_2} + \underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_3 - a_4} + \ldots + \underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_{2k-1} - a_{2k}} \geq 0$. Крім того,

$S_{2(k+1)} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} = S_{2k} + \underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_{2k+1} - a_{2k+2}} \geq S_{2k}\ \forall k$

$\Rightarrow \{S_{2k}\}$ – неспадна.

Але $S_{2k} = a_1 - (\underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_2 - a_3}) - \ldots - (\underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_{2k-2} - a_{2k-1}}) - \underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_{2k}} \leq a_1 \Rightarrow \{S_{2k}\}$ – обмежена зверху.

$\Rightarrow$ (теор. Вейєрштраса) $\exists$ скінченна $\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = S$.

Але $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1} \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} (S_{2k} + a_{2k+1}) =$

$= \lim_{k\to+\infty} S_{2k} + \underbrace{\lim_{k\to+\infty} a_{2k+1}}_{\to 0} = S + 0 = S \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ щ.т.д.

б) $\forall k$: $S_{2k+1} = \underline{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2k-1}} - a_{2k} + a_{2k+1} = S_{2k-1} - (\underset{\vee\!\!\!\ 0}{a_{2k} - a_{2k+1}}) \leq$

$\leq S_{2k-1} \Rightarrow \{S_{2k+1}\}$ – незростаюча $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} S = \lim_{k\to+\infty} S_{2k} = \sup_k \{S_{2k}\} \\ S = \lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = \inf_k \{S_{2k+1}\} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k$: $S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1} \Rightarrow$ Якщо $n = 2k$, то $|S_n - S| = |S_{2k} - S| =$

$= S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}$.

Якщо $n = 2k+1$, то $|S_n - S| = |S_{2k+1} - S| = S_{2k+1} - S \leq S_{2k+1} - S_{2k+2} = -(-a_{2k+2})$?

$= a_{2k+2}$.

$\Rightarrow |S_n - S| \leq a_{n+1}$ щ.т.д.