Глава 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

Електромагнітними хвилями називають процес поширення в просторі електромагнітних коливань. Під час хвильового процесу відбуваються коливання електричного та магнітного полів електромагнітного поля хвилі. Отже, електромагнітні хвилі – це явище поширення в просторі електромагнітного поля.

Дослідження електромагнітних хвиль є надзвичайно важливою задачею, яка має велике практичне значення. Фактично всі сучасні засоби комунікації базуються на законах випромінювання, поширення та взаємодії з середовищем електромагнітних хвиль.

Джерелом електромагнітних хвиль є заряди чи струми, величини яких змінюються з часом. Низькочастотні (до інфрачервоних хвиль) електромагнітні хвилі описуються за допомогою класичної електродинаміки, коли оперують поняттями густини заряду та густини струму. Процеси, що супроводжуються випромінювання електромагнітних хвиль високих частот (світло, рентгенівське чи γ-випромінювання) мають квантово-механічну природу і пов'язані зі зміною стану електронів (носіїв елементарних зарядів) чи ядер в атомах.

На поширення електромагнітних хвиль суттєво впливає середовище. Тому просторовий розподіл електричного $\vec{E}(\vec{r},t)$ та магнітного $\vec{H}(\vec{r},t)$ полів електромагнітної хвилі визначається не тільки особливостями часової залежності заряду або струму її джерела, а й властивостями середовища, в якому поширюється хвиля. Часові залежності коливань полів в точності відповідають часовим залежностям струмів у джерел хвилі, тільки у тому випадку, коли середовище лінійне.

Довільну хвилю можна представити сумою гармонічних хвиль, але це виправдано лише у випадку лінійних середовищ. Тому для них основною задачею є встановлення закономірностей поширення гармонічних електромагнітних хвиль, просторово-часова поведінка полів у якій описується гармонічними функціями.

4.1. Хвильове рівняння електромагнітної хвилі

Запишемо систему рівнянь Максвела – основну систему рівнянь електродинаміки:

закон Фарадея

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

узагальнений закон повного струму

$$rot\vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

теорему Остроградського-Гауса для вектора індукції магнітного поля

$$div\vec{B} = 0;$$

теорему Остроградського-Гауса для вектора індукції електричного поля

$$div\vec{D} = \rho_{cm} \ ,$$

де використані такі позначення: $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – вектори напруженостей електричного та магнітного полів, $\vec{D}$ та $\vec{B}$ – вектори індукції електричного та магнітного полів, $\vec{j}_{np}$ – густина струму провідності, ρ_{cm} – густина сторонніх зарядів.

В лінійному середовищі за відсутності струмів, $\vec{j}_{np}$=0, та за відсутності сторонніх зарядів, ρ_{cm}=0, і коли вектори індукції полів пропорційні їх векторам напруженостей $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $B = \mu\mu_0\vec{H}$, система рівнянь Максвела, як легко переконатися, набуває вигляду:

$$rot\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$rot\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$div\vec{H} = 0,$$

$$div\vec{E} = 0,$$

де μ, ε – магнітна та електрична проникності середовища, μ_0, ε_0 – магнітна та електрична сталі.

Запис ротора та дивергенції можна здійснити з використанням вектора «набла», який позначають $\vec{\nabla}$ і компонентами якого є частинні похідні $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}\frac{\partial}{\partial z}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{n}$ – одиничні вектори (орти).

Знаходження ротора від векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ тотожне знаходженню векторного добутку вектора $\vec{\nabla}$ на вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$, або $[\vec{\nabla}\vec{E}]$ та $[\vec{\nabla}\vec{H}]$.

Знаходження дивергенції векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ тотожне скалярному добутку вектора $\vec{\nabla}$ на вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$, або $\vec{\nabla}\vec{E}$ та $\vec{\nabla}\vec{H}$.

Таким чином, для лінійного однорідного ізотропного середовища рівняння Максвела можна записати у вигляді

$$[\vec{\nabla}\vec{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$[\vec{\nabla}\vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\vec{H} = 0,$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0.$$

Знайдемо ротор від першого рівняння Максвела та візьмемо часову частинну похідну від другого рівняння Максвела. В прийнятій вище символіці маємо:

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu\mu_0 rot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$rot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

При знаходженні часової частинної похідної від другого рівняння було враховано, що ротор відповідає процедурі диференціювання по просторовим змінним (по координатам), а тому знаходження часової частинної похідної і знаходження ротора є незалежними діями, тобто їх можна переставити місцями, або, як кажуть фахівці, ці математичні операції *комутують*.

З останньої системи рівнянь легко отримати, що

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

При використанні вектора $\vec{\nabla}$, запис цього рівняння набуває іншого, але тотожного за змістом вигляду:

$$[\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{E}]] = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

де зліва у виразі стоїть подвійний векторний добуток.

Нагадаємо правило знаходження подвійного векторного добутку трьох векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$, за яким

$$[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}),$$

де скалярний добуток векторів, записано у круглих дужках. Згідно з цим правилом маємо

$$[\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{E} = -(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{E},$$

де було враховано, що відповідно до четвертого рівняння Максвела, $div\vec{E}=0$, або, що теж саме, скалярний добуток $\vec{\nabla}\vec{E}=0$.

Розглянемо скалярний добуток вектора набла самого на себе, $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$, який формально можна представити наступним чином

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}=(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{n}\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{n}\frac{\partial}{\partial z})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta,$$

де справа позначено лапсасіан.

Отже, в результаті здійснених математичних перетворень приходимо до хвильового рівняння щодо електричного поля

$$\Delta\vec{E}=\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

З отриманого хвильового рівняння прямо випливає, що швидкість поширення електромагнітної хвилі в однорідному лінійному та ізотропному середовищі визначається за формулою

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

У цій формулі середовище представлене своїми матеріальними константами – ε та μ. Водночас, на відміну від коливальних процесів іншої природи, які ми вивчали раніше, хвильове рівняння для електричного поля свідчить про фундаментальну властивість електромагнітних хвиль: вони для свого поширення не вимагають матеріального середовища і самовільний процес їх розповсюдження може відбуватися у вакуумі, де $\varepsilon=1$, $\mu=1$. Це, в свою чергу, означає, що швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі скінчена і дорівнює швидкості у ньому світла

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

В довільному лінійному ізотропному матеріальному середовищі з $\varepsilon\neq 1$ та $\mu\neq 1$ швидкість поширення електромагнітної хвилі може бути записана у вигляді

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

З цим означенням хвильове рівняння електромагнітної хвилі набуває стандартного вигляду

$$\Delta\vec{E}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Описану вище процедуру виведення з рівнянь Максвела хвильового рівняння можна провести з іншою послідовністю, коли спочатку знаходять похідну по часу від першого рівняння Максвела, а ротором діють на друге рівняння Максвела. В результаті, знову буде отримане хвильове рівняння з тією ж самою швидкістю v поширення хвилі, але записане для вектора напруженості магнітного поля:

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

Таким чином, маємо висновок: поширення обох складових $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітного поля хвилі описується однаковим хвильовим рівнянням. Кожна з проекцій векторів цих полів електромагнітної хвилі також задовольняє хвильовому рівнянню. Наприклад,

$$\Delta E_x = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, \; \Delta E_y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \; \Delta E_z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Точно такі ж три рівняння для проекцій можна записати і для вектора напруженості магнітного поля хвилі.

4.2. Плоска електромагнітна хвиля

При вивченні плоскої механічної хвилі було встановлено, що вона задовольняє хвильовому рівнянню, форма якого співпадає з хвильовим рівнянням електромагнітної хвилі. Було також отримано, що у загальному випадку розв'язком хвильового рівняння є гармонічна функція, фаза якої залежить від часу та координати у спосіб: $\omega t - \vec{k}\vec{r}$, де ω – частота хвилі, а $\vec{k}$ – її хвильовий вектор. Зрозуміло, що і для електромагнітної плоскої хвилі вектори напруженосте електричного та магнітного полів плоскої електромагнітної хвилі мають задовольняти такій самій функціональній залежності від часу та координати, як і зміщення у плоскій механічній хвилі, оскільки вони є розв'язком однакового (з точки зору математики) диференційного рівняння.

Таким чином, рівняння плоскої електромагнітної хвилі мають вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{E}_{\max}$ – постійний вектор (вектор амплітудної напруженості електричного поля), ω – частота хвилі, яка відповідає частоті коливань електричного поля під час хвильового процесу, а $\vec{k}$ – хвильовий вектор, модуль якого є хвильовим числом і величина якого визначається з формули $k = |\vec{k}| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

За означенням довжина хвилі λ відповідає найменшій відстані між точками простору, в яких вектор $\vec{E}$ напруженості електричного поля коливається однаково (синфазно).

Переконаємося, що записане рівняння плоскої електромагнітної хвилі дійсно задовольняє хвильовому рівнянню. Спочатку знайдемо лапсасіан від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі. Здійснюючи прості математичні дії, отримаємо

$$\Delta\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\Delta\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) =$$

$$= \vec{E}_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) =$$

$$= \vec{E}_{\max}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)\right] =$$

$$= -\vec{E}_{\max}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) =$$

$$= -k^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Отже, знаходження лапсасіану від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі зводиться до множення її рівняння на квадрат хвильового числа (хвильового вектора).

Знайдемо тепер другу частинну похідну від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі по часу:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Підставимо знайдені лапсасіан та другу часову частинну похідну в хвильове рівняння

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

що дає:

$$-k^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\frac{1}{v^2}\omega^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

Звідси легко приходимо до дисперсійного співвідношення для електромагнітних хвиль, яке записується у вигляді

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad \text{або} \quad \omega = kv,$$

де ми залишили лише додатні значення, оскільки частота завжди додатна.

Таким чином, для всіх електромагнітних хвиль, незалежно від їх довжини хвилі (що охоплює діапазон від радіохвиль до гамма-випрмінювання), які поширюються у лінійних ізотропних однорідних середовищах, включаючи вакуум, частота коливань електричного і магнітного полів у хвилі прямо пропорційна хвильовому числу.

Рівняння плоскої хвилі можна також записати у вигляді дійсної частини від експоненціальної функції з тією ж самою залежністю від аргументу:

$$\vec{E} = \vec{E}_{max} \operatorname{Re} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)},$$

де i – уявна одиниця.

4.3. Зв'язок між векторами напруженості електричного та магнітного полів в електромагнітній хвилі

Знову розглянемо плоску електромагнітну хвилю, рівняння якої має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{E}_{max}$ – вектор амплітудної напруженості електричного поля, а $\vec{k}$ – хвильовий вектор з проекціями $\vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{n}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{n}$ – орти.

У просторових компонентах рівняння хвилі має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) =$$

$$= (E^x_{max}\vec{i} + E^y_{max}\vec{j} + E^z_{max}\vec{n}) \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0),$$

де E^x_{max}, E^y_{max}, E^z_{max} – проекції вектора $\vec{E}_{max}$, а k_x, k_y, k_z – проекції хвильового вектора на осі, визначені ортами.

Нагадаємо, що перше рівняння Максвела містить операції ротора від напруженості електричного поля, яку записують у вигляді

$$rot\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Для знаходження ротору застосуємо формальне правило знаходження векторного добутку за допомогою визначника

$$rot\vec{E} = [\vec{\nabla}\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{n} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) + \vec{j}\,(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}) + \vec{n}\,(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y})\,.$$

Підставимо у вираз для ротора проекції рівняння хвилі. Отримаємо, що для проекцій $\vec{E}$ вираз для ротора має вигляд

$$rot\vec{E} = [\vec{i}\,(E^z_{\max}k_y - E^y_{\max}k_z) + \vec{j}\,(E^x_{\max}k_z - E^z_{\max}k_x) +$$

$$+ \vec{n}(E^y_{\max}k_x - E^x_{\max}k_y)]\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,.$$

Вираз у квадратних дужках, що стоїть перед синусом, є векторним добутком векторів $\vec{k}$ та $\vec{E}_{\max}$.

Отже, нами розраховано дію ротора на вектор $\vec{E}$ електричного поля плоскої хвилі, або

$$rot\vec{E} = [\vec{k}\vec{E}_{\max}]\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,.$$

Підставимо тепер знайдений нами вираз для ротора в перше рівняння Максвела. З цього випливає диференційне рівняння, в якому невідомим є напруженість $\vec{H}$ магнітного поля хвилі:

$$[\vec{k}\vec{E}_{\max}]\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\,.$$

Для знаходження поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ проінтегруємо отримане диференційне рівняння по часу. Тоді знайдемо, що явний вираз для магнітної складової електромагнітного поля хвиля має вигляд

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k}\vec{E}_{\max}]\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,.$$

Таким чином, приходимо до важливого висновку: коливання напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ та напруженості магнітного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ електромагнітної хвилі синфазно, тобто їх фази однакові.

Якщо рівняння для вектора напруженості магнітного поля цієї хвилі записати у вигляді

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,,$$

то приходимо до співвідношення $\vec{H}_{max} = \dfrac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k},\vec{E}_{max}]$ між амплітудними значеннями напруженостей магнітного та електричного полів хвилі.

Внесемо у попередньому рівнянні косинус під знак векторного добутку, звідки отримаємо схожий вираз, який пов'язує вже миттєві значення векторів напруженості електричного та магнітного поля хвилі,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k},\vec{E}].$$

Отже в цілому маємо, що вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним не тільки до напрямку поширення хвилі, а й перпендикулярний до вектора напруженості електричного поля.

Здійснену схему розрахунків можна повторити для вектора напруженості магнітного поля, взявши його у якості вихідної функції. Для цього треба розрахувати ротор від $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_{max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$, підставити його в друге рівняння Максвела

$$rot\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Далі необхідно за тією ж процедурою отримати диференційне рівняння для вектора напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r},t)$. З такого розрахунку знову буде видно, що коливання полів у хвилі є синфазними. Принципово важливо, що з проведення цих розрахунків слідує ще одне важливе співвідношення між векторами напруженостей полів у хвилі, а саме:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}[\vec{k},\vec{H}].$$

З нього випливає аналогічний попередньому висновок: вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним до напрямку поширення хвилі та до вектора напруженості електричного поля.

Отже, у підсумку маємо, що вектори напруженостей $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітного поля хвилі взаємно перпендикулярні між собою $\vec{E}\perp\vec{H}$, та перпендикулярні до напрямку поширення хвилі $\vec{E}\perp\vec{k}$, $\vec{H}\perp\vec{k}$.

В результаті, доведено, що електромагнітна хвиля є *поперечною хвилею* ($\vec{E}\perp\vec{k}$, $\vec{H}\perp\vec{k}$). В такій хвилі вектори напруженостей $\vec{E}$ та $\vec{H}$ перпендикулярні між собою та коливаються з однаковою фазою (рис. 46).

На рис. 46 показано миттєвий просторовий розподіл для векторів напруженостей електричного та магнітного полів плоскої електромагнітній хвилі, яка поширюється вздовж осі *Y*. Вектори напруженостей на рис. 46

позначено стрілками: вектори напруженості електричного поля суцільними стрілками, а вектори напруженості магнітного поля пунктиром.

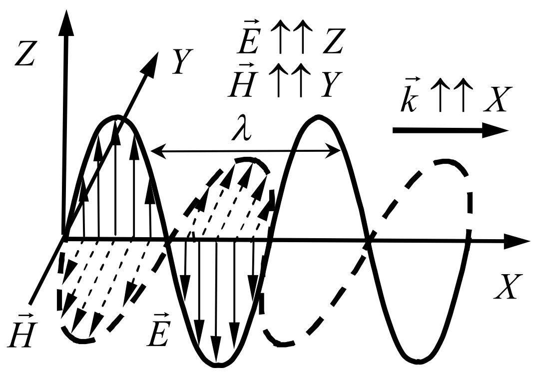

Рис. 46

Рівняння для напруженостей електричного та магнітних полів хвилі, поля якої зображені на рис. 46, мають вигляд

$$E_z = E_{\max} \cos(\omega t - kx),$$

$$H_y = H_{\max} \cos(\omega t - kx).$$

Вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ цієї хвилі коливається у площині XZ, а вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$ – у площині YX, тобто $\vec{E} \perp \vec{H}$.Обидва вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ перпендикулярні до осі X, вздовж якої поширюється хвиля ($\vec{k} \uparrow\uparrow X$).

Оскільки в електромагнітній хвилі $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$, то для модулів цих векторів виконується рівність

$$H = \frac{1}{\mu\mu_0}\frac{k}{\omega}E,$$

де $H = |\vec{H}|$, $E = |\vec{E}|$.

Коли врахувати дисперсійне співвідношення $\omega = kv$ та формулу для швидкості хвилі $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$, то легко отримати співвідношення

$$\sqrt{\mu\mu_0}H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E\ ,$$

яке виконується і для миттєвих, і для амплітудних значень напруженостей електричного та магнітного полів, що як складові утворюють електромагнітне поле хвилі.

4.4. Енергія електромагнітної хвилі

Електромагнітне поле хвилі складається з двох змінних у просторі та часі електричного та магнітного полів. Кожне з цих полів має енергію. Її характеризують за допомогою фізичної величини, яку називають густиною енергії.

Енергію електромагнітного поля хвилі також характеризують густиною енергії. *Густина енергії електромагнітної хвилі* визначається сумою густин енергії її електричного та магнітного полів. Для електромагнітної хвилі, що поширюється в ізотропному лінійному однорідному середовищі, густина енергії дорівнює

$$e = e_{ел} + e_{маг} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 \vec{H}^2}{2},$$

де ε, μ – електрична та магнітна проникності середовища, ε_0, μ_0 – електрична та магнітна сталі, а $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – вектори напруженостей електричного та магнітного полів.

Врахуємо, що для миттєвих значень напруженостей електричного та магнітного полів хвилі виконується рівність

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E.$$

Перевіримо, що у хвилі (біжучій, бо у стоячій це не так) миттєве значення густини енергії електричного поля дорівнює миттєвому значенню густини енергії магнітного поля, тобто

$$e_{ел} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \frac{\mu\mu_0 H^2}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = e_{маг},$$

де ми скористалися зв'язком між величинами напруженостей електричного та магнітного полів хвилі.

Отже, густина енергії електромагнітної хвилі дорівнює подвоєній густині енергії її електричного поля, або подвоєній густині енергії її магнітного поля

$$e = 2e_{ел} = 2e_{маг} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \mu\mu_0 \vec{H}^2.$$

Вираз для густини енергії електромагнітної хвилі можна також представити у вигляді

$$e = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} \left|\vec{E}\right| \left|\vec{H}\right| = \frac{EH}{v},$$

який враховує, що швидкість поширення хвилі визначається за формулою $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}}$.

Розглянемо плоску електромагнітну хвилю, рівняння якої має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{E}_{\max}$ $\vec{H}_{\max}$ – вектори амплітудних значень напруженостей електричного та магнітного полів, ω – частота хвилі, а $\vec{k}$ – хвильовий вектор.

Для плоскої електромагнітної хвилі миттєве значення густини енергії задовольняє співвідношенню

$$e=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_{max}^2\cos^2(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi_0) \quad \text{або} \quad e=\mu\mu_0\vec{H}_{max}^2\cos^2(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi_0),$$

де $\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_{max}^2$ та $\mu\mu_0\vec{H}_{max}^2$ – однакові амплітудні значення густин енергії електромагнітного поля хвилі. При записі виразу для густини енергії хвилі була використана рівність $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_{max}=\sqrt{\mu\mu_0}H_{max}$, яка виконується для амплітуд напруженостей полів.

Середнє значення густини енергії електромагнітного поля гармонічної хвилі можна визначити за формулами

$$\bar{e}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_{max}^2}{2}, \quad \text{або} \quad \bar{e}=\frac{\mu\mu_0\vec{H}_{max}^2}{2},$$

де враховано, що середнє значення квадрату косинуса на інтервалі часу, рівному періоду коливань, дорівнює $\frac{1}{2}$.

4.5. Вектор Пойтинга

Електромагнітна хвиля переносить енергію, бо з часом збільшується кількість точок простору, де починає та відбувається хвильовий процес, тобто збільшується об'єм простору, зайнятий електромагнітним полем хвилі.

Поверхню, яка розділяє частину простору, де має місце хвильовий процес, від тієї частини, де його ще нема, називають *фронтом хвилі*. Фронт хвилі у довільний момент часу задає поверхню, точки якої коливаються синфазно, а отже фронт хвилі є хвильовою поверхнею. Він рухається зі швидкістю поширення хвилі.

На рис. 47 показано положення фронту хвилі для двох моментів часу t_1 та t_2. Виділимо частину простору, яка має циліндричну форму. Будемо вважати, що вісь X цього циліндра направлена вздовж напрямку поширення електромагнітної хвилі, $\vec{k}\uparrow\uparrow X$, а його основи перпендикулярні до $\vec{k}$.

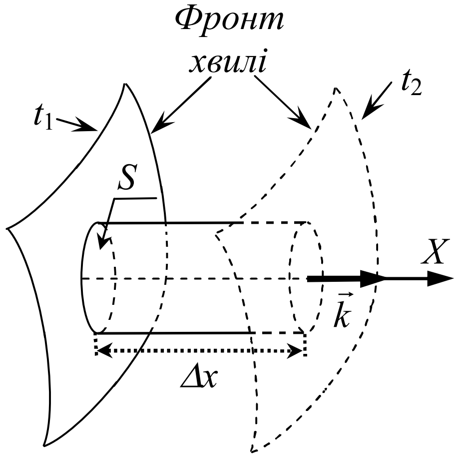

Рис. 47

Приймемо, що інтервал часу $\Delta t=t_2-t_1$ значно менший періоду хвилі $\Delta t<<T$. За цієї умови енергія, яку перенесла хвиля через основу циліндра на поверхні фронту для моменту часу t_1, буде дорівнювати енергії електромагнітного поля хвилі в об'ємі

виділеного на рис. 47 циліндру, тобто

$$\Delta E_{e-м} = eS\Delta x,$$

де S – площа основи циліндру.

Врахуємо, що довжина циліндру $\Delta x = v\Delta t$, де v – швидкість хвилі, та знайдемо

$$\Delta E_{e-м} = eSv\Delta t.$$

Процес перенесення енергії хвилею описують фізичною величиною, яку називають *густиною потоку енергії*, і яку визначають з відношення

$$\Phi_e = \frac{\Delta E_{e-м}}{S\Delta t}.$$

Як відомо, густина потоку енергії електромагнітної хвилі пропорційна добутку миттєвого значення густини енергії поля хвилі на швидкість її поширення, або

$$\Phi_e = \frac{eSv\Delta t}{S\Delta t} = ev.$$

Врахуємо, що густина цієї енергії визначається за формулою $e = \frac{EH}{v}$. Тоді можемо отримати, що густина потоку енергії, яку переносить електромагнітна хвиля, дорівнює добутку миттєвих значень величин напруженостей електричного та магнітного полів:

$$\Phi_e = EH.$$

Оскільки перенесення енергії хвилею здійснюється у напрямку поширення хвилі, який визначає вектор $\vec{k}$, а вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ та $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні, то векторний добуток $\vec{E}$ на $\vec{H}$ дає вектор направлений, вздовж $\vec{k}$. Таким чином, для характеристики процесу перенесення енергії хвилею користуються вектором, який визначається за формулою

$$\vec{S}_П = [\vec{E}\vec{H}].$$

Вектор $\vec{S}_П$ називають вектором *Пойтинга*. Видно, що $\left|\vec{S}_П\right| = \Phi_e$. Для біжучої хвилі (стоячі хвилі енергії не переносять) перенесення енергії здійснюється, як зазначалося, вздовж хвильового вектора, $\vec{S}_П \uparrow\uparrow \vec{k}$.

Коли у формулі означення густини потоку енергії $\Delta t >> T$, то з відношення $\frac{\Delta E}{S\Delta t}$ визначають усереднену характеристику процесу переносу енергії, яку називають *інтенсивністю хвилі*.

Інтенсивність хвилі дорівнює середньому значенню вектора Пойтинга, або усередненому по часу, більшому за період, значенню густини потоку енергії. Інтенсивність хвилі визначається середньою густиною її енергії та швидкістю у спосіб:

$$I = \bar{e}v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\vec{E}^2_{\max}.$$

Одиницею виміру для вектора Пойтинга чи інтенсивності хвилі є: $\frac{Вт}{м^2}$.

4.6. Потік імпульсу електромагнітної хвилі

Електромагнітні хвилі характеризуються не тільки енергією, а й імпульсом. Тому вони переносять імпульс. Перенесення хвилею імпульсу прямо свідчить, що електромагнітна хвиля здатна чинити силову дію на тіла, наприклад, при поглинанні чи відбивання ними електромагнітних хвиль.

У спеціальній теорії відносності було доведено, що імпульс та енергія будь-якого тіла зв'язані співвідношенням:

$$E^2_{тіла} - c^2 p^2_{тіла} = m_0^2 c^4,$$

де $E_{тіла}$ – повна енергія тіла, $p_{тіла}$ – його імпульс, а m_0 - його маса спокою.

Застосуємо цю формулу до електромагнітного поля хвилі, яке маси спокою не має, а тому можна записати:

$$\Delta p = \frac{\Delta E_{е-м}}{c},$$

де $\Delta E_{е-м}$ – енергія електромагнітного поля хвилі в об'ємі ΔV, а Δp – імпульс хвильового поля цієї частини простору.

Локальною характеристикою імпульсу хвилі є *густина імпульсу електромагнітної хвилі*. Після ділення Δp на ΔV, отримаємо, що густина імпульсу прямо пропорційна густині енергії хвилі

$$p = \frac{e}{c},$$

де $e = \frac{\Delta E_{е-м}}{\Delta V}$ – густина енергії хвилі, а $p = \frac{\Delta p}{\Delta V}$ – густина імпульсу.

Імпульс і густина імпульсу є векторними величинами, вектори яких спрямовані вздовж напрямку поширення хвилі.

Поширення хвилі призводить до перенесення імпульсу. Перенесення імпульсу хвилею характеризують фізичною величиною, яку називають *густиною потоку імпульсу*.

Густина потоку імпульсу дорівнює імпульсу, який переносить хвиля через одиничну площу за одиницю часу, і яка визначається з відношення

$$\Phi_p = \frac{\Delta p}{S\Delta t},$$

де Δp – імпульс перенесений хвилею за час Δt, через поверхню площею S, яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі.

Густина потоку імпульсу електромагнітної хвилі, що поширюється у вакуумі, дорівнює добутку густини імпульсу на швидкість світла

$$\Phi_p = pc.$$

Врахуємо рівність $p = \frac{e}{c}$ та отримаємо, що за модулем густина потоку імпульсу дорівнює густині енергії $\Phi_p = e$.

Далі врахуємо, що густина потоку енергії хвилі $\Phi_e = ec$. В результаті, знаходимо, що

$$\Phi_p = \frac{\Phi_e}{c}, \text{ або } \Phi_p = \frac{EH}{c}.$$

Густина імпульсу є векторна величина, тому густина потоку імпульсу також є векторною величиною, яку можна записати у вигляді

$$\vec{\Phi}_p = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c}, \qquad \text{або} \qquad \vec{\Phi}_p = \frac{\vec{S}_П}{c},$$

де $\vec{S}_П$ – вектор Пойтинга.

Розглянемо тіло, яке виготовлене з металу. Нехай на його поверхню падає електромагнітна хвиля (рис. 48). Будемо вважати, що хвиля поширюється вздовж нормалі до поверхні тіла і повністю поглинається ним. Хвиля за час Δt ділянці поверхні тіла площею S передасть імпульс Δp, величина якого визначається виразом

$$\Delta p = \Phi_p S\Delta t.$$

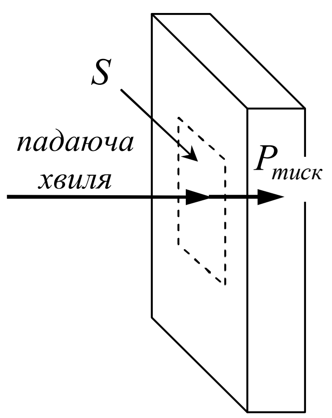

Рис. 48

Відношення переданого хвилею тілу імпульсу до проміжку часу дорівнює силі $F = \Delta p / \Delta t$, з якою електромагнітне поле хвилі тисне на поверхню тіла. Силу тиску, віднесену на одиницю поверхні, називають *тиском електромагнітної хвилі*

$$P_{тиск} = F / S.$$

З наведених означень отримуємо, що при нормальному падінні і повному поглинанні тиск електромагнітної хвилі на поверхню дорівнює густині потоку імпульсу хвилі, або густині потоку енергії

$$P_{тиск} = \Phi_p, \qquad \text{або} \qquad P_{тиск} = \frac{\Phi_e}{c}.$$

Очевидно, що при повному поглинанні середнє значення тиску електромагнітного поля хвилі пропорційне її інтенсивності $\overline{P}_{тиск} = \dfrac{I}{c}$.

4.7. Випромінювання електромагнітних хвиль

Випромінювання електромагнітних хвиль відбувається при прискореному русі електричних зарядів. Прикладом системи, що випромінює електромагнітні хвилі є *осцилюючий електричний диполь* (рис. 49), дипольний момент якого змінюється за гармонічним законом

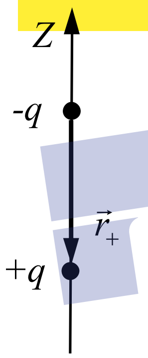

Рис. 49

$$\vec{p} = \vec{p}_{\max} \cos \omega t,$$

де $\vec{p}_{\max}$ – амплітудне значення дипольного моменту.

Нагадаємо, що дипольний момент утворюють два різнойменні заряди, модулі яких однакові: $|q_+| = |q_-| = q$. За означенням, дипольний момент дорівнює добутку додатного заряду диполя на визначений відносно від'ємного заряду радіус-вектор положення додатного заряду, $\vec{p} = q\vec{r}_+$. В такий спосіб введений вектор $\vec{r}_+$ тотожний до вектора плеча диполя $\vec{\ell}$. Нехай додатний заряд буде нерухомим, а від'ємний заряд здійснює коливний рух за гармонічним законом

$$z = z_{\max} \cos \omega t, \qquad \text{або} \qquad \vec{r}_+ = \vec{r}^{(+)}_{\max} \cos \omega t,$$

де ω – частота коливань, $z_{\max}$ – амплітуда зміщення від'ємного заряду відносно додатного заряду, відповідно, $\vec{r}^{(+)}_{\max}$ – амплітудне значення радіус-вектора $\vec{r}$. В цьому випадку амплітуда коливань дипольного моменту прямо пропорційна амплітуді зміщення від'ємного заряду диполя: $\vec{p}_{\max} = q\vec{r}^{(+)}_{\max}$.

На відстанях $r >> r_{max}$ диполь створює навколо себе електростатичне поле, напруженість якого обернено пропорційна їх кубу $E \sim \frac{1}{r^3}$, де r – обігає точки спостереження поля. Видно, що дипольне поле досить швидко спадає при збільшенні відстані.

Великі відстані від осцилюючого диполя як джерела важливі ще й тому, що на них електростатичне поле майже спадає до нуля, і в так званій *хвильовій* зоні, для якої $r >> \lambda$, утворюється (є джерелом) електромагнітне поле, що представляє собою сферичну електромагнітну хвилю. Хвильовий вектор цієї хвилі співпадає з радіус-вектором точки спостереження поля $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{r}$ (див. рис. 50). Залежність величини напруженості електричного поля такої хвилі описується рівнянням

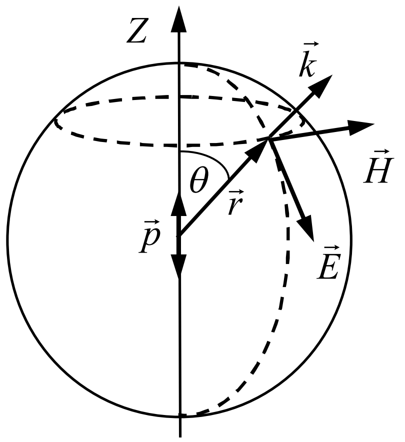

Рис. 50

$$\vec{E} = \vec{E}_{max}(r,\theta)e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})},$$

де ω – частота хвилі, яка дорівнює частоті коливань дипольного моменту, $\vec{E}_{max}$ – амплітудне значення напруженості електричного поля хвилі. Величина амплітудного значення поля хвилі залежить від кута θ між віссю Z та радіус-вектором $\vec{r}$ точки спостереження поля хвилі та обернено пропорційна відстані $|\vec{r}| = r$ до диполя,

$$|\vec{E}_{max}| \sim \frac{\sin\theta}{r}.$$

Вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним до вектора напруженості електричного поля та до хвильового вектора і визначається векторним добутком:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k}\vec{E}].$$

Видно, що вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ сферичної хвилі аналогічно плоскій електромагнітній хвилі перпендикулярні між собою та перпендикулярні до вектора $\vec{k}$, а амплітудне значення вектора напруженості магнітного поля

$$|\vec{H}_{max}| \sim \frac{\sin\theta}{r}.$$

Проведемо площину, яка проходить через вісь Z диполя. Перерізи цієї площини зі сферою фазової поверхні хвилі (хвиля сферична) називають *меридіанами*. Вектор $\vec{E}$ лежить на дотичній до меридіану (рис. 50).

Перерізи фазової поверхні з площиною, яка перпендикулярна до осі диполя, називають *паралелями*. Вектор $\vec{H}$ лежить на дотичній до паралелі.

Інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди напруженості електричного поля хвилі, тому можна записати

$$I(r,\theta) \sim \frac{\sin^2\theta}{r^2}.$$

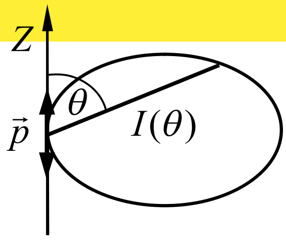

Рис. 51

Графічне зображення (див. рис. 51) кутової залежності для інтенсивності називають *діаграмою направленості диполя*. На діаграмі довжина відрізку від осцилюючого диполя джерела хвилі до кривої діаграми дорівнює інтенсивності хвилі для даного напрямку поширення хвилі.

Потужність випромінювання диполя визначається шляхом інтегрування інтенсивності по замкненій поверхні, що оточує диполь,

$$P = \int_S I(r,\theta)\vec{n}d\vec{S},$$

де S – площа цієї поверхні, а під знаком інтеграла стоїть скалярний добуток вектора елементарної ділянки цієї поверхні $d\vec{S}$ на одиничний вектор, що направлений вздовж хвильового вектора $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ і визначений у місці розташування ділянки.

Для диполя потужність випромінювання описується виразом

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 p_{\max}^2,$$

де $p_{\max} = q r_{\max}$.

Таким чином, бачимо, що чим більша частота, тим більшою є потужність випромінювання диполем. Крім того, величина $\omega^2 p_{\max}$ дорівнює добутку $q a_{\max}$, де $a_{\max}$ – амплітудне значення прискорення при коливальному русі заряду диполя. Тому можна записати

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} q^2 a_{\max}^2.$$

З цієї формули випливає, що потужність електромагнітного випромінювання пропорційна квадрату прискорення рухомого заряду. Такий зв'язок між потужністю хвилі та прискоренням є характерний для усіх випадків прискореного руху зарядів. Загальний висновок такий: довільний прискорений рух зарядів супроводжується випромінюванням електромагнітних хвиль.

4.8. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення електромагнітної хвилі.
2. Запишіть рівняння Максвела за відсутності струмів та зарядів.
3. Як властивості середовища впливають на швидкість поширення електромагнітної хвилі?
4. Отримайте хвильове рівняння для вектора напруженості магнітного поля.
5. Дайте означення та запишіть формули для плоскої електромагнітної хвилі.
6. Розрахуйте лапсасіан від вектора напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі.
7. Розрахуйте ротор від вектора напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі.
8. Як виглядає дисперсійне співвідношення для гармонічної електромагнітної хвилі?
9. Поясніть поперечність електромагнітних хвиль, наведіть формули зв'язку між векторами напруженостей електричного та магнітних полів у таких хвилях.
10. Нарисуйте графіки розподілу електричного та магнітного поля в електромагнітній хвилі.
11. Що таке фронт хвилі?
12. Дайте означення та поясніть фізичний зміст густини потоку енергії, вектора Пойтинга та інтенсивності. В чому різниця між цими фізичними величинами?
13. Дайте означення густини потоку імпульсу.
14. Наведіть формули зв'язку між густиною потоку імпульсу та густиною потоку енергії, вектором Пойтинга.
15. Запишіть формулу для тиску, що спричиняє електромагнітна хвиля.
16. Поясніть суть терміну осцилюючий електричний диполь.
17. Дайте означення діаграми направленості диполя.
18. Як вектори напруженості електричного та магнітного полів хвилі, яку випромінює осцилюючий диполь, залежать від відстані у хвильовій зоні?

19. Напишіть формулу зв’язку між потужністю випромінювання диполя та інтенсивністю хвилі.

4.9. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Рівняння Максвела для електромагнітної хвилі

$$rot\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad rot\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

2. Швидкість поширення електромагнітної хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} \qquad \text{або} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

де $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ - швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

3. Хвильове рівняння для електричної та магнітної складових електромагнітної хвилі

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

4. Рівняння плоскої електромагнітної хвилі

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0).$$

5. Формули для густини потоку енергії, вектора Пойтинга та інтенсивності

$$\Phi_e = EH, \quad \vec{S}_П = [\vec{E}\vec{H}], \qquad I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}\vec{E}^2_{\max}.$$

6. Формули для густини потоку імпульсу та тиску електромагнітної хвилі при її нормальному падінні на поверхню і при її повному поглинанні нею

$$\vec{\Phi}_p = \frac{[\vec{E}\vec{H}]}{c}, \qquad P_{тиск} = \Phi_p.$$

4.10. Задачі

4.1. Знайдіть довжину електромагнітної хвилі, період коливань якої становить 10^{-6} с, яка поширюється у середовищі з $\mu = 4/3$ та $\varepsilon = 1{,}5$ Знайдіть різницю фаз коливань двох точок, що лежать на відстані $5 \cdot 10^2$ м вздовж напрямку поширення хвилі.

4.2. Електромагнітна хвиля з частотою ν=3,0 МГц поширюється з вакууму в немагнітне діелектричне середовище з діелектричною проникністю ε=4,0. Знайдіть приріст довжини хвилі.

4.3. Рівняння коливань електричного поля плоскої електромагнітної хвилі поблизу її джерела мають (числові значення задані в СІ) вигляд

$E = 0{,}01\cos(0{,}5\cdot 10^6 \pi t + \pi / 4)$. Хвиля поширюється у вакуумі. Запишіть рівняння хвилі. Запишіть рівняння коливань вектора напруженості електричного поля та вектора напруженості магнітного поля в точці, що віддалена від джерела на відстань 600 м.

4.4. Плоска електромагнітна хвиля $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ поширюється у вакуумі. Вектори $\vec{E}_{\max}$ та $\vec{k}$ вважати відомими. Знайдіть вектор $\vec{H}$ як функцію часу в точці $\vec{r}$ =0.

4.5. У вакуумі поширюється плоска електромагнітна хвиля $\vec{E} = \vec{e}_x E_{\max}\cos(\omega t - ky)$, де $\vec{e}_x$ - орт вздовж осі X, $E_{\max}$ =160 В/м, k =0,51 м$^{-1}$. Знайдіть вектор $\vec{H}$ в точці з координатою y =7,7 м у моменти часу t =0 та t =33 нс.

4.6. Плоска електромагнітна хвиля з частотою ω поширюється в мало провідному середовищі з питомим опором ρ та діелектричною проникністю ε. Знайдіть відношення амплітуд густин струму провідності та струму зміщення. Магнітна проникність $\mu = 1$.

4.7. Плоска гармонічна електромагнітна хвиля, період коливань якої T, поширюється з швидкістю v в площині XY. Вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до цієї площини. Хвильовий вектор становить кут α з віссю y. Напишіть рівняння хвилі, та знайдіть різницю фаз коливань в точках з координатами x_1, y_1 та x_2, y_2.

4.8. Знайдіть довжину хвилі, хвильовий вектор та швидкість поширення електромагнітної хвилі, рівняння якої має вигляд $\vec{E}(x,y,t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \gamma x + \beta y)$.

4.9. Два джерела випромінюють дві гармонічні електромагнітні хвилі. Джерела коливаються з однаковою частотою, однаковою початковою фазою та однаковою амплітудою. Опишіть результуючу напруженість вектора напруженості електричного поля в точці, що знаходиться на відстані d_1 від першого джерела та відстані d_2 від другого джерела, якщо напрямок коливань векторів напруженості обох хвиль в цій точці однаковий.

4.10. Запишіть результуюче коливання вектора напруженості електричного поля при накладанні двох плоских хвиль, що поширюються назустріч одна одній. Частоти та хвильові числа хвиль однакові. Коливання векторів напруженості електричних полів здійснюються в одній площині, а їх амплітуди – однакові. Початкові фази коливань також однакові.

4.11. Доведіть, що при поширенні плоскої електромагнітної хвилі в однорідному ізотропному середовищі перерозподілу сторонніх зарядів не відбувається.

4.12. Доведіть, що для магнітного поля гармонічної плоскої хвилі, яка поширюється в однорідному ізотропному лінійному середовищі, виконується теорема Гауса.

4.13. У вакуумі вздовж осі X поширюється дві плоскі електромагнітні хвилі, електричні поля яких описуються рівняннями $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - ky)$ та $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - ky + \varphi)$, де φ – стала. Знайдіть середнє значення густини потоку енергії.

4.14. Куля, радіус якої R=40 см, знаходиться у немагнітному діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ε=4,0. У середовищі поширюється електромагнітна плоска хвиля, довжина хвилі якої $\lambda << R$. Амплітуда коливань вектора напруженості магнітного поля $E_{\max}$=200 В/м. Знайдіть, яка енергія хвилі потрапить на кулю за час t=10,0 хв.

4.15. Диск має радіус R. Вектор $\vec{k}$ плоскої електромагнітної хвилі з частотою ω та φ_0=0 складає кут α з вектором нормалі до поверхні диску. Амплітуда хвилі $E_{\max}$. Знайдіть значення енергії, яку хвиля перенесла до диску за час $t>>T$, де T – період коливань.

4.16. Диск має радіус R. Вектор $\vec{k}$ плоскої електромагнітної хвилі з частотою ω та φ_0=0 перпендикулярний до поверхні диску. Амплітуда хвилі $E_{\max}$. Знайдіть значення енергії, яку хвиля перенесла до диску за час рівний $t=T/8$, де T – період коливань, та за час $t=8\cdot T$.

4.17. У вакуумі поширюється плоска хвиля $\vec{E}(x,y,t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \gamma x + \beta y)$. Знайдіть миттєве та середнє значення вектора Пойтинга, а також визначте кут між вектором Пойтинга та довільним вектором $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j}$.

4.18. Плоска електромагнітна хвиля поширюється перпендикулярно до поверхні плоско-паралельного шару, товщина якого ℓ. Шар немагнітний, а його діелектрична проникність лінійно зменшується від значення ε_1 на передній поверхні шару, на яку спочатку потрапляє хвиля, до ε_2 на другій поверхні шару, куди вона потрапляє після проходження всієї товщини шару. Знайдіть час поширення фазової поверхні хвилі через цей шар.

4.19. Плоска електромагнітна хвиля поширюється перпендикулярно до поверхні плоско-паралельного шару, товщина якого ℓ. Шар немагнітний, а його діелектрична проникність експоненційно зменшується від значення ε_1 на передній поверхні шару, на яку спочатку потрапляє хвиля, до ε_2 на другій поверхні шару, куди вона потрапляє після проходження всієї товщини шару. Знайдіть час поширення фазової поверхні хвилі через цей шар.