

Гайкава Дамтра Юпителуа  
Варіант 577

Bapiciarem w 79



# Завдання 1

1

Рег. розподілу  $\vec{Z} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  має вигляд:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-4	-3	-2	-1	$\rightarrow X_i$
-2	0,01	0,02	0,05	0,06	
0	0,1	0,03	0,05	0,23	
5	0,05	0,08	0,01	0,31	

а) подувувати маріанальні реди розподілу координат  $\xi_1$  та  $\xi_2$ :

$$P(\xi_1 = x_i) = P((\xi_1 = x_i) \cap (\xi_2 = y_1 \cup \dots \cup \xi_2 = y_n)) = \sum_{j=1}^n P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j), \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$P(\xi_1 = -4) = \sum_{j=1}^3 P(\xi_1 = -4, \xi_2 = y_j) = 0,01 + 0,1 + 0,05 = 0,16$$

↑ те саме аналогічно.

$\xi_1$	-4	-3	-2	-1
P	0,16	0,13	0,11	0,6

$$P(\xi_2 = y_j) = P((\xi_2 = y_j) \cap (\xi_1 = x_1 \cup \dots \cup \xi_1 = x_m)) = \sum_{i=1}^m P(\xi_2 = y_j, \xi_1 = x_i), \quad \forall j = \overline{1, n}$$

$$P\{\xi_2 = -2\} = \sum_{i=1}^4 P\{\xi_2 = -2, \xi_1 = x_i\} = 0,01 + 0,02 + 0,05 + 0,06 = 0,14 \quad (2)$$

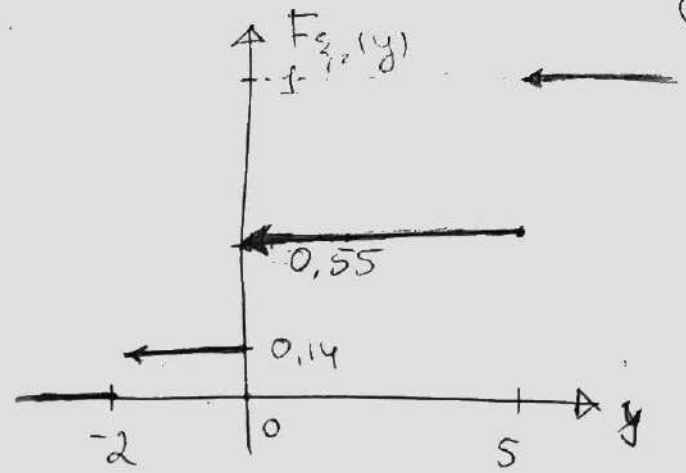
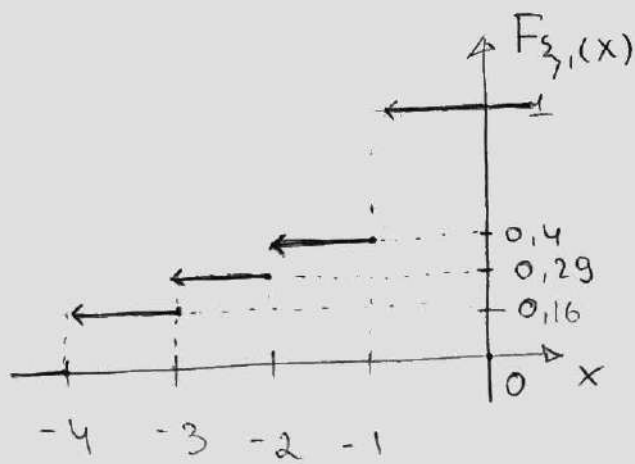
$\xi_2$	-2	0	5
P	0,14	0,41	0,45

5) визначити маргінальні ф-ції розподілу  $F_{\xi_1}(x)$  та  $F_{\xi_2}(y)$  та побудувати їх графіки.

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq -4 \\ 0,16, & -4 < x \leq -3 \\ 0,29, & -3 < x \leq -2 \\ 0,4, & -2 < x \leq -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} = \begin{cases} 0, & y \leq -2 \\ 0,14, & -2 < y \leq 0 \\ 0,55, & 0 < y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

(3)



б) знайти математичні сподівання  $E\xi_1, E\xi_2$  та дисперсії  $D\xi_1, D\xi_2$ :

$$E\xi_1 = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = -4 \cdot 0.16 - 3 \cdot 0.13 - 2 \cdot 0.11 - 1 \cdot 0.6 = -0.64 - 0.39 - 0.22 - 0.6 = -1.25 - 0.6 = -1.85$$

$$E\xi_2 = \sum_{i=1}^3 y_i p_i = -2 \cdot 0.14 + 0 \cdot 0.41 + 5 \cdot 0.45 = 1.97$$

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i - (E\xi_1)^2 = 16 \cdot 0.16 + 9 \cdot 0.13 + 4 \cdot 0.11 + 1 \cdot 0.6 - 3.4225 = 2.56 + 1.17 + 0.44 + 0.6 - 3.4225 = 1.3475$$

$$D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \sum_{i=1}^3 y_i^2 p_i - (E\xi_2)^2 = 4 \cdot 0.14 + 0 + 25 \cdot 0.45 - 3.8809 = 0.56 + 11.25 - 3.8809 = 7.9291$$

2) подумув. коваріаційну м-цю для  $\vec{\xi}$ , знайти коэф. кореляції  $\rho_{\xi_1, \xi_2}$ , а також проаналіз. залежності та корелюваність координат  $\xi_1, \xi_2$ .

(9)

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) &= E(\xi_1 \cdot \xi_2) - E\xi_1 \cdot E\xi_2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_j y_i p_{ij} - \\ &- E\xi_1 E\xi_2 = 2 \cdot 4 \cdot 0,01 + 2 \cdot 3 \cdot 0,02 + 2 \cdot 2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,06 + \\ &+ 0 + 0 + 0 + 0 + 5 \cdot (-4) \cdot 0,05 - 3 \cdot 5 \cdot 0,08 - 2 \cdot 5 \cdot 0,01 - 5 \cdot \\ &\cdot 0,31 + 1,85 \cdot 1,97 = 0,08 + 0,12 + 0,2 + 0,12 - 1 - 1,2 - 0,1 - \\ &- 1,55 + 3,6445 = 0,3145 \end{aligned}$$

$$K_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} D_{\xi_1} & \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \text{Cov}(\xi_1, \xi_2) & D_{\xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3475 & 0,3145 \\ 0,3145 & 7,9291 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\xi_1, \xi_2} = \frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D_{\xi_1}} \sqrt{D_{\xi_2}}} = \frac{0,3145}{1,1608 \cdot 2,8159} = 0,09622$$

Із запису,  $-1 \leq \rho_{\xi_1, \xi_2} \leq 1$ , та  $\rho_{\xi_1, \xi_2} \neq 0$ , отже,  $\xi_1, \xi_2$  - корельовані, ~~але~~ ~~не~~ зазалежні.

## Завдання 2

Двовимірний лн. вектор  $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$  рівномірно розподілений в області  $D$ , що зображена на малюнку:

Знайдено р-ие параболы  
у вершесі  $x = ay^2 + by + c$ .  
Введемо систему:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ a - b + c = 2 \\ 16a - 4b + c = 1 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & -12 & -3 & -3 \end{array} \right) \sim$$

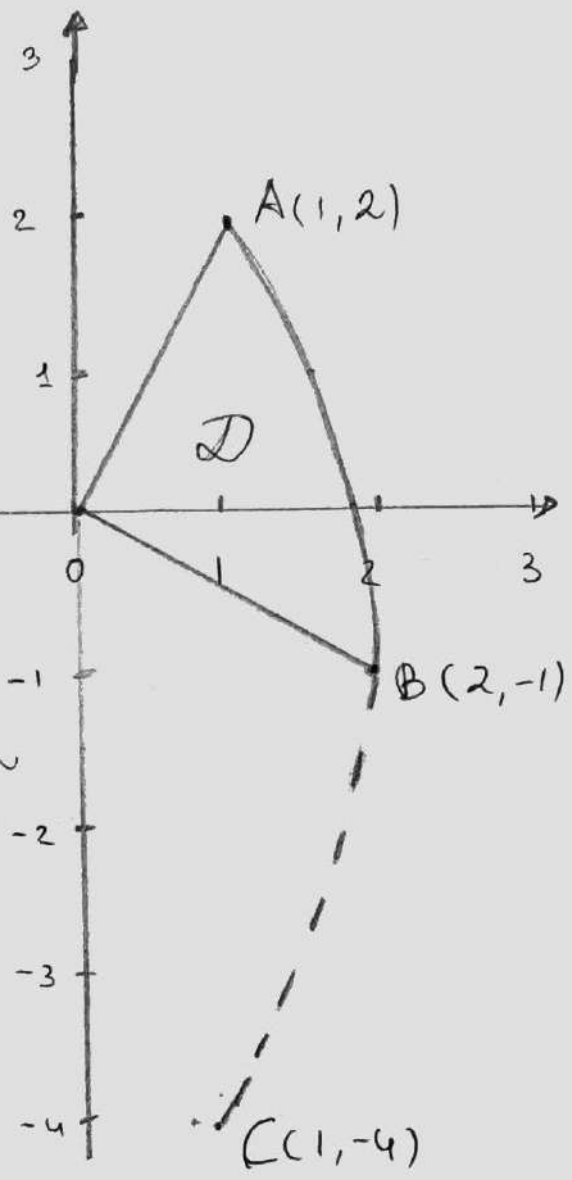
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -7/6 \\ 0 & 0 & -9 & -17 \end{array} \right)$$

~~17~~  $c = \frac{17}{9}$

$$b = -\frac{7}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{9} = -\frac{2}{9}$$

$$a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{18} - \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9}$$



Знайдено р-ие прямих:

$l_1: A(1; 2), O(0; 0)$

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow y = 2x$$

$l_2: B(2; -1), O(0; 0)$

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{-1-0} \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

(6)

Отже, область  $D$  обмежена лініями:

$$l_1: x = -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9}$$

$$l_2: y = 2x$$

$$l_3: y = -\frac{x}{2}$$

а) замислимо функцію шіфрності розподілу  $f_{z_1, z_2}(x, y)$ .

Тоді це розподіл рівномірний:

$$f_{z_1, z_2}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Знайдемо  $S(D)$ :

м. перетину  $l_1$  та  $l_2$ :

$$A(1, 2)$$

м. перетину  $l_1$  та  $l_3$ :

$$O(0, 0)$$

м. перетину  $l_2$  та  $l_3$ :

$$B(2, -1)$$

$$S(D) = \int_0^2 \left( -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} - \frac{y}{2} \right) dy + \int_{-1}^0 \left( -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} + 2y \right) dy =$$



$$\begin{aligned}
 &= \left( -\frac{1}{9 \cdot 3} y^3 - \frac{2}{9 \cdot 2} y^2 + \frac{17}{9} y - \frac{y^2}{4} \right) \Big|_0^2 + \left( -\frac{1}{9 \cdot 3} y^3 - \frac{2}{9 \cdot 2} y^2 + \frac{17}{9} y + y^2 \right) \Big|_{-1}^0 \\
 &= -\frac{8}{9 \cdot 3} - \frac{4}{9} + \frac{17 \cdot 2}{9} - 1 + \left( 0 - \left( \frac{1}{9 \cdot 3} - \frac{1}{9} - \frac{17}{9} + 1 \right) \right) = -\frac{8 - 4 \cdot 3 + 17 \cdot 2 \cdot 3 - 9 \cdot 3}{9 \cdot 3} - \frac{1 - 3 - 17 \cdot 3 + 9 \cdot 3}{9 \cdot 3} \\
 &= -\frac{8 - 12 + 102 - 27}{27} - \frac{1 - 3 - 51 + 27}{27} = \frac{55}{27} - \frac{26}{27} = \frac{29}{27} \\
 &\neq \frac{81}{27} = 3.
 \end{aligned}$$

Отже:

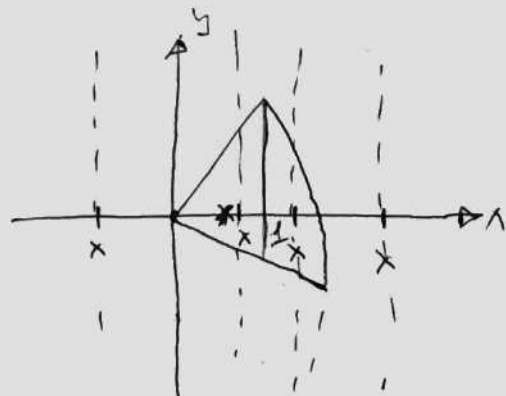
$$f_{Z_1, Z_2}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (x, y) \in \mathcal{D} \\ 0, & (x, y) \notin \mathcal{D} \end{cases}$$

5) Визначити маргінальні щільності розподілу  $f_{Z_1}(x)$  та  $f_{Z_2}(y)$  і побудувати їх графіки:

$$f_{Z_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1, Z_2}(x, y) dy.$$

$$\int_{-\infty}^{2x} \frac{1}{3} dy, \quad x \in [0; 1]$$

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{1}{3} dy, & x \in (1; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$$



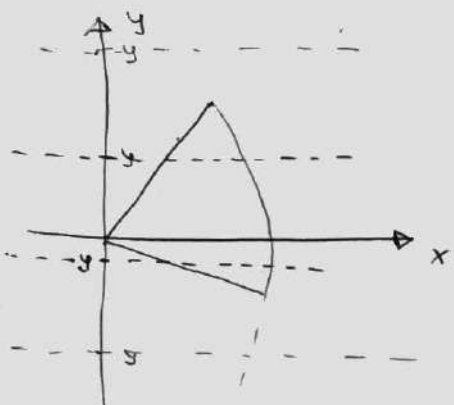
$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} \Rightarrow x = -\frac{1}{9}(y^2 + 2y - 17) \\ x &= -\frac{1}{9}(y^2 + 2y + 1 - 18) \Rightarrow x = -\frac{1}{9}((y+1)^2 - 18) \\ x &= 2 - \frac{(y+1)^2}{9} \Rightarrow x - 2 = -\frac{(y+1)^2}{9} \Rightarrow \sqrt{2-x} = \frac{y+1}{3} \\ y &= 3\sqrt{2-x} - 1 \end{aligned} \right. \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \begin{cases} \frac{1}{3}(y) \Big|_{-\frac{x}{2}}^{2x}, & x \in [0; 1] \\ \frac{1}{3}y \Big|_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1}, & x \in (1; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases} \\
 & = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 2x + \frac{1}{3 \cdot 2}x, & x \in [0; 1] \\ \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2-x} - \frac{1}{3} + \frac{x}{2 \cdot 3}, & x \in (1; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_{Z_1}(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x, & x \in [0; 1] \\ \frac{x}{6} + \sqrt{2-x} - \frac{1}{3}, & x \in (1; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$f_{Z_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_1, Z_2}(x, y) dx$$

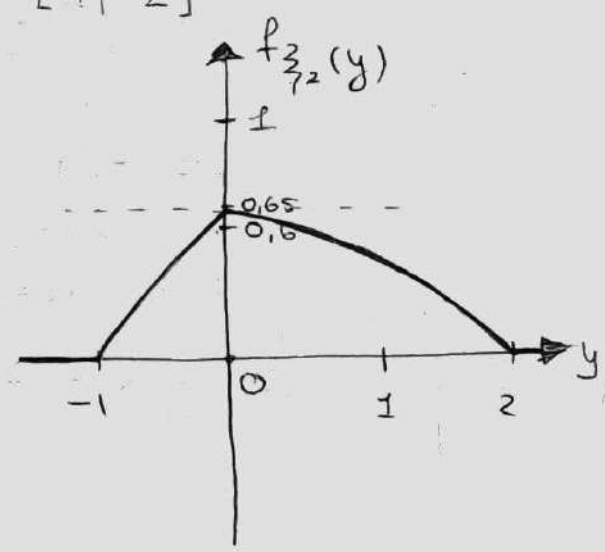
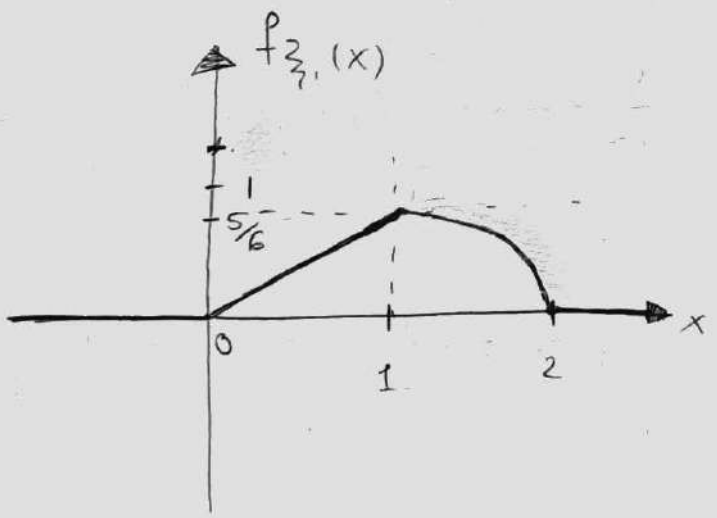
9



$$f_{Z_2}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} & \int \frac{1}{3} dx, y \in [0; 2] \\ -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} & \int \frac{1}{3} dx, y \in [-1; 0) \\ -2y & \\ 0 & , y \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(-\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9}) - \frac{1}{3} \cdot \frac{y}{2}, y \in [0; 2] \\ \frac{1}{3}(-\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9}) + \frac{2}{3}y, y \in [-1; 0) \\ 0 & , y \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{27}y^2 + \frac{13}{54}y + \frac{17}{27}, y \in [0; 2] \\ -\frac{1}{27}y^2 + \frac{16}{27}y + \frac{17}{27}, y \in [-1; 0) \\ 0 & , y \notin [-1; 2] \end{cases}$$



б) безразмерные непрерывные ф-ции плотности - (10)  
 у  $F_{Z_1}(x)$  ма  $F_{Z_2}(y)$  ма нод. их распредел.

$$F_{Z_1}(x) = \int_{-\infty}^x f_{Z_1}(t) dt.$$

$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ I_1 = \int_0^x \frac{5}{6} t dt, & 0 < x \leq 1 \\ I_2 = \int_0^1 \frac{5}{6} t dt + \int_1^x \left( \frac{1}{6} + \sqrt{2-t} - \frac{1}{3} \right) dt, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^x \frac{5}{6} t dt = \frac{5}{2 \cdot 6} t^2 \Big|_0^x = \frac{5}{12} x^2$$

$$I_2 = \frac{5}{2 \cdot 6} t^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{6} \int_1^x t dt + \int_1^x \sqrt{2-t} dt - \frac{1}{3} \int_1^x dt = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{6 \cdot 2} t^2 \Big|_1^x + \int_1^x \sqrt{2-t} dt = \begin{cases} z - t = z \\ dz = -dt \\ t = x \Rightarrow z = 2 - x \\ t = 1 \Rightarrow z = 1 \end{cases} = \frac{9}{12} - \frac{1}{3} x +$$

$$+ \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{12} - \int_1^{2-x} z^{\frac{3}{2}} dz = \frac{8}{12} - \frac{1}{3} x + \frac{1}{12} x^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^{-1} z^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{2-x} =$$

$$= \frac{8}{12} - \frac{1}{3} x + \frac{1}{12} x^2 - \frac{2}{3} (2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{3} x - \frac{2}{3}.$$

$$= (2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{12} \cdot \frac{4}{3}$$

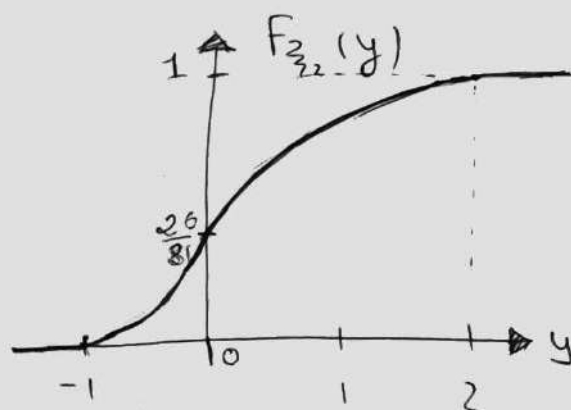
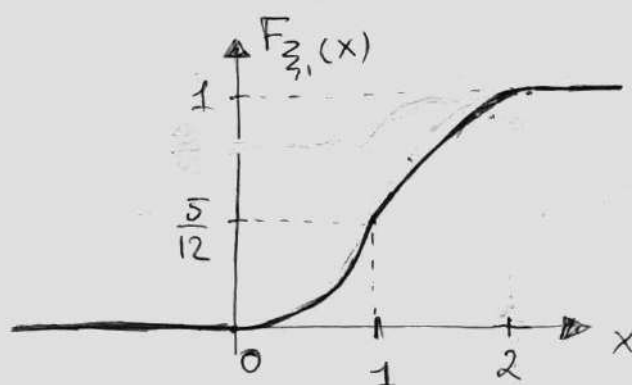
$$F_{Z_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{5}{12}x^2, & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}(2-x)^{3/2} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{4}{3}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$F_{Z_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ I_1 \int_{-1}^y \left(-\frac{1}{27}t^2 + \frac{16}{27}t + \frac{17}{27}\right) dt, & -1 < y \leq 0 \\ I_2 \int_0^y \left(-\frac{1}{27}t^2 - \frac{13}{54}t + \frac{17}{27}\right) dt + \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{27}t^2 + \frac{16}{27}t + \frac{17}{27}\right) dt, & 0 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

$$I_1 = -\frac{1}{27 \cdot 3} t^3 \Big|_{-1}^y + \frac{16}{27 \cdot 2} t^2 \Big|_{-1}^y + \frac{17}{27} t \Big|_{-1}^y = -\frac{1}{27 \cdot 3} (y^3 + 1) + \frac{8}{27} (y^2 - 1) + \frac{17}{27} (y + 1) = -\frac{1}{81} y^3 - \frac{1}{81} + \frac{8}{27} y^2 - \frac{8}{27} + \frac{17}{27} y + \frac{17}{27} = -\frac{1}{81} y^3 + \frac{8}{27} y^2 + \frac{17}{27} y + \frac{26}{81}$$

$$I_2 = -\frac{1}{3 \cdot 27} t^3 \Big|_{-1}^0 + \frac{8}{27} t^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{17}{27} t \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{3 \cdot 27} t^3 \Big|_0^y - \frac{13}{54 \cdot 2} t^2 \Big|_0^y + \frac{17}{27} t \Big|_0^y = -\frac{1}{3 \cdot 27} (0 + 1) + \frac{8}{27} (0 - 1) + \frac{17}{27} (0 + 1) - \frac{1}{3 \cdot 27} y^3 - \frac{13}{54 \cdot 2} y^2 + \frac{17}{27} y = -\frac{1}{81} - \frac{8}{27} + \frac{17}{27} - \frac{1}{81} y^3 - \frac{13}{108} y^2 + \frac{17}{27} y = -\frac{1}{81} y^3 - \frac{13}{108} y^2 + \frac{17}{27} y + \frac{26}{81}$$

$$F_{Z_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1 \\ -\frac{1}{81}y^3 + \frac{8}{27}y^2 + \frac{17}{27}y + \frac{26}{81}, & -1 < y \leq 0 \\ -\frac{1}{81}y^3 + \frac{13}{108}y^2 + \frac{17}{27}y + \frac{26}{81}, & 0 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$



2) знайти математичні сподівання  $E_{Z_1}, E_{Z_2}$  та дисперсії  $D_{Z_1}, D_{Z_2}$ :

$$\begin{aligned} E_{Z_1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Z_1}(x) dx = \frac{5}{6} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x \left( \frac{x}{6} + \sqrt{2-x} - \frac{1}{3} \right) dx + 0 = \\ &= \frac{5}{6 \cdot 3} x^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{6} \int_1^2 x^2 dx + \underbrace{\int_1^2 x \sqrt{2-x} dx}_{I_2} - \frac{1}{3} \int_1^2 x dx = \left\{ \begin{array}{l} 6 I_2: \\ 2-x=z \\ dx = -dz \\ x=1 \Rightarrow z=1 \\ x=2 \Rightarrow z=0 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{5}{18} + \frac{1}{6 \cdot 3} x^3 \Big|_1^2 + \int_1^2 (2-z) \sqrt{z} dz - \frac{1}{3 \cdot 2} x^2 \Big|_1^2 = \frac{5}{18} + \frac{8}{18} - \frac{1}{18} - \\ &- 2 \int_1^0 \sqrt{z} dz + \int_1^0 z \sqrt{z} dz - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{18} - \frac{3}{6} - \frac{4}{3} z^{3/2} \Big|_1^0 + \\ &+ \frac{2}{5} z^{5/2} \Big|_1^0 = \frac{12}{18} - \frac{3}{6} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10} \end{aligned}$$

$$E_{Z_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Z_2}(y) dy = 0 + \int_{-1}^0 \left( -\frac{1}{27}y^3 + \frac{16}{27}y^2 + \frac{17}{27}y \right) dy +$$

$$+ \int_0^2 \left( -\frac{1}{27} y^3 - \frac{13}{54} y^2 + \frac{17}{27} y \right) dy + 0 = 0 + I_1 + I_2 + 0. \quad (13)$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 \left( -\frac{1}{27} y^3 + \frac{16}{27} y^2 + \frac{17}{27} y \right) dy = -\frac{1}{27 \cdot 4} y^4 \Big|_{-1}^0 + \frac{16}{27 \cdot 3} y^3 \Big|_{-1}^0 + \frac{17}{27 \cdot 2} y^2 \Big|_{-1}^0 =$$

$$= -\frac{1}{27 \cdot 4} + \frac{16}{27 \cdot 3} - \frac{17}{27 \cdot 2} = -\frac{3}{27 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{16 \cdot 4}{27 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{17 \cdot 6}{27 \cdot 2 \cdot 6} =$$

$$= -\frac{35}{324}$$

$$I_2 = \int_0^2 \left( -\frac{1}{27} y^3 - \frac{13}{54} y^2 + \frac{17}{27} y \right) dy = -\frac{1}{27 \cdot 4} y^4 \Big|_0^2 - \frac{13}{54 \cdot 3} y^3 \Big|_0^2 + \frac{17}{27 \cdot 2} y^2 \Big|_0^2 =$$

$$= -\frac{16}{27 \cdot 4} - \frac{13 \cdot 8}{54 \cdot 3} + \frac{17 \cdot 4}{27 \cdot 2} = -\frac{16 \cdot 3}{27 \cdot 4 \cdot 3} - \frac{13 \cdot 8 \cdot 2}{54 \cdot 6} + \frac{17 \cdot 4 \cdot 6}{27 \cdot 2 \cdot 6} =$$

$$= -\frac{16 \cdot 3}{324} + \frac{152}{324} = \frac{38}{81}$$

$$E_{z_2} = -\frac{35}{324} + \frac{38}{81} = -\frac{35}{324} + \frac{152}{324} = \frac{117}{324} = \frac{13}{36}$$

$$E_{z_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{z_1}(x) dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^3 dx +$$

$$+ \int_1^2 \sqrt{2-x} x^2 dx - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx = \frac{5}{6} x^4 \Big|_0^1 + \frac{1}{6} x^4 \Big|_1^2 - \frac{1}{3^2} x^3 \Big|_1^2 + \int_1^2 \sqrt{2-x} x^2 dx =$$

$$= \frac{5}{24} + \frac{16}{24} - \frac{1}{3^2} x^3 \Big|_1^2 + \int_1^2 \sqrt{2-x} x^2 dx = \left\{ \begin{array}{l} 2-x=z \\ dx = -dz \\ x=1 \Rightarrow z=1 \\ x=2 \Rightarrow z=0 \end{array} \right\} = \frac{5}{24} + \frac{16}{24} -$$

$$- \frac{1}{24} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} + \int_1^0 -\sqrt{z} (2-z)^2 dz = \frac{1}{18} - \int_1^0 \sqrt{z} (4-4z+z^2) dz =$$

$$= \frac{1}{18} - \int_1^0 4z^{1/2} dz + \int_1^0 4z^{3/2} dz - \int_1^0 z^{5/2} dz = \frac{1}{18} - \frac{2 \cdot 4}{3} z^{3/2} \Big|_1^0 +$$

$$+ \frac{4 \cdot 2}{5} z^{5/2} \Big|_1^0 - \frac{2}{7} z^{7/2} \Big|_1^0 = \frac{1}{18} + \frac{8}{3} - \frac{8}{5} + \frac{2}{7} =$$

$$= \frac{887}{630}$$

$$D_{z_1} = E_{z_1}^2 - (E_{z_1})^2 = \frac{887}{630} - \frac{121}{100} = \frac{1247}{6300}$$

$$E_{z_2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 P_{z_2}(y) dy = 0 + \int_{-1}^0 \left( -\frac{1}{27} y^4 + \frac{16}{27} y^3 + \frac{17}{27} y^2 \right) dy +$$

$$+ \int_0^2 \left( -\frac{1}{27} y^4 - \frac{13}{54} y^3 + \frac{17}{27} y^2 \right) dy = -\frac{1}{27 \cdot 5} y^5 \Big|_{-1}^0 + \frac{16}{27 \cdot 4} y^4 \Big|_{-1}^0 +$$

$$+ \frac{17}{27 \cdot 3} y^3 \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{27 \cdot 5} y^5 \Big|_0^2 - \frac{13}{54 \cdot 4} y^4 \Big|_0^2 + \frac{17}{27 \cdot 3} y^3 \Big|_0^2 = -\frac{1}{27 \cdot 5} -$$

$$- \frac{16}{27 \cdot 4} + \frac{17}{27 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 32}{27 \cdot 5} - \frac{13 \cdot 16}{54 \cdot 4} + \frac{17 \cdot 8}{27 \cdot 3} =$$

$$= -\frac{1}{135} - \frac{16}{108} + \frac{17}{81} - \frac{32}{135} - \frac{208}{216} + \frac{136}{81} =$$

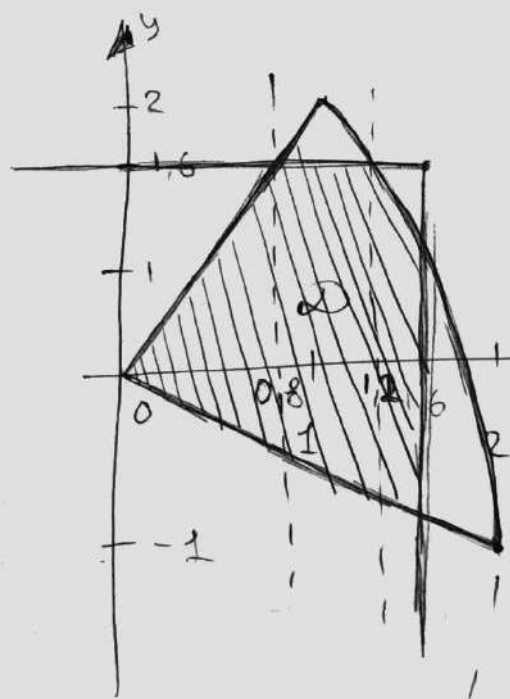
$$= \frac{8}{15}$$

$$D_{z_2} = \frac{8}{15} - \left( \frac{13}{36} \right)^2 = \frac{2611}{6480}$$

g) безразмерные симметричные  $p$ -ндо розногичу  
в момент:  $P_{z_1, z_2}(1,6; 1,6)$



(15)



$$F_{z_1, z_2}(1,6; 1,6) = \int_0^{0,8} dx \int_{-\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{3} dy +$$

$$+ \int_{0,8}^{1,2} dx \int_{-\frac{x}{2}}^{1,6} \frac{1}{3} dy + \int_{1,2}^{1,6} dx \int_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1} \frac{1}{3} dy =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int_0^{0,8} dx \int_{-\frac{x}{2}}^{2x} \frac{1}{3} dy = \int_0^{0,8} \frac{1}{3} (2x + \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{3} \int_0^{0,8} (2x + \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{3} \cdot x^2 \Big|_0^{0,8} +$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{x^2}{4} \Big|_0^{0,8} = \frac{1}{3} (0,8)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(0,8)^2}{4} = 0,26667$$

$$I_2 = \int_{0,8}^{1,2} dx \int_{-\frac{x}{2}}^{1,6} \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \int_{0,8}^{1,2} (1,6 + \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{3} 1,6 x \Big|_{0,8}^{1,2} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{4} \Big|_{0,8}^{1,2} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1,6 (1,2 - 0,8) + \frac{1}{3} \left( \frac{(1,2)^2}{4} - \frac{(0,8)^2}{4} \right) = \frac{1}{3} (1,6 \cdot 0,4 + 0,2) =$$

$$= 0,28$$

$$I_3 = \int_{1,2}^{1,6} dx \int_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1} \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \int_{1,2}^{1,6} (3\sqrt{2-x} - 1 + \frac{x}{2}) dx = \frac{1}{3} \int_{1,2}^{1,6} 3\sqrt{2-x} dx -$$

$$- \frac{1}{3} \int_{1,2}^{1,6} dx + \frac{1}{3} \int_{1,2}^{1,6} \frac{x}{2} dx = \begin{cases} 2-x = z \\ dz = -dx \\ x=1,6 \Rightarrow z=0,4 \\ x=1,2 \Rightarrow z=0,8 \end{cases} = \frac{1}{3} \int_{0,8}^{0,4} \sqrt{z} dz - \frac{1}{3} x \Big|_{1,2}^{1,6} +$$

$$+\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}\bigg|_{1,2}^{1,6} = -z^{3/2}\bigg|_{0,8}^{0,4} - \frac{1}{3}(1,6-1,2) + \left(\frac{(1,6)^2}{4} - \frac{(1,2)^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left((0,4)^{3/2} - (0,8)^{3/2}\right) - \frac{1}{3}(1,6-1,2) + \left(\frac{(1,6)^2}{4} - \frac{(1,2)^2}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{2}{3}0,46256 - \frac{1}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1,12 = 0,268373$$

$$F_{\xi_1, \xi_2}(1,6; 1,6) = 0,26667 + 0,28 + 0,268373 = 0,815043$$

е) підсудувати коваріаційну м-цю вектора  $\vec{\xi}$ ,  
 знайти коеф. кореляції  $r_{\xi_1, \xi_2}$  та проаналіз.  
 залежності та корелюваність ~~векторів~~  
 координат  $\xi_1$  та  $\xi_2$ .

$$K_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} D_{\xi_1} & \text{cov}(\xi_1, \xi_2) \\ \text{cov}(\xi_1, \xi_2) & D_{\xi_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = E_{\xi_1, \xi_2} - E_{\xi_1} E_{\xi_2}$$

$$E_{\xi_1, \xi_2} = \iint xy f_{\vec{\xi}}(x, y) dx dy = \int_0^{2x} dx \int_{-\frac{x}{2}}^x xy \frac{1}{3} dy +$$

$$+ \int_1^2 dx \int_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1} xy \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 x dx \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-\frac{x}{2}}^{2x} + \frac{1}{3} \int_1^2 x dx \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x \left( \frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2} \right) dx + \frac{1}{3} \int_1^2 x \left( \frac{(3\sqrt{2-x}-1)^2}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (2x^3 - \frac{x^3}{8}) dx + \frac{1}{3} \int_1^2 x \cdot \frac{9(2-x) - 6\sqrt{2-x} + 1}{2} dx - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x^3}{4 \cdot 2} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{4} x^4 - \frac{x^4}{4 \cdot 8} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{9x(2-x)}{2} dx - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{\cancel{6}\sqrt{2-x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{2}} dx +$$

$$+ \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{x}{2} dx - \frac{1}{3} \frac{x^4}{4 \cdot 4 \cdot 2} \Big|_1^2 = \left\{ \begin{array}{l} 2-x=z \\ dz=-dx \\ x=2 \Rightarrow z=0 \\ x=1 \Rightarrow z=1 \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{4} - \frac{1}{4 \cdot 8} \right) +$$

$$+ \frac{9}{6} \int_1^2 (2x - x^2) dx + \int_1^2 z^{1/2} (2-z) dz + \frac{1}{3} \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{16}{16 \cdot 2} - \frac{1}{32} \right) =$$

$$= \frac{9}{6} \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \int_1^2 (2z^{1/2} - z^{3/2}) dz + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + 0 =$$

$$= \frac{9}{6} \left( 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) + \left( 2z^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{5} z^{5/2} \right) \Big|_1^2 + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{9}{6} \left( 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) + \left( -2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) + \frac{1}{4} = \frac{19}{60}$$

$$\text{Cov}(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{19}{60} - \frac{13}{36} \cdot \frac{11}{10} = -\frac{29}{360}$$

$$K_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} \frac{1247}{6300} & -\frac{29}{360} \\ -\frac{29}{360} & \frac{2611}{6480} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1979 & -0,0806 \\ -0,0806 & 0,4029 \end{pmatrix}$$

$$r_{z_1, z_2} = \frac{\text{Cov}(z_1, z_2)}{\sqrt{D_{z_1}} \cdot \sqrt{D_{z_2}}} = \frac{-\frac{29}{360}}{\sqrt{\frac{1244}{6300}} \cdot \sqrt{\frac{2611}{6480}}} = -0,2852 \quad (18)$$

Не забувши,  $|r_{z_1, z_2}| < 1$ , та  $r_{z_1, z_2} \neq 0$ , отже координати корелюваті та залежні.