

**Національний Технічний університет України
“Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»**

Лабораторна робота №01_DC_02

**Дослідження розгалужених електричних кіл постійного струму
методом вузлових потенціалів**

Виконав ст. групи АА-00

Коваленко К.К.

Перевірів

Іваненко І.І.

Київ —20__

Лабораторна робота №01_DC_02. "Дослідження розгалужених електричних кіл постійного струму методом вузлових потенціалів"

Мета роботи: Оволодіти методами аналізу і отримати навички експериментального дослідження розгалужених електричних кіл постійного струму.

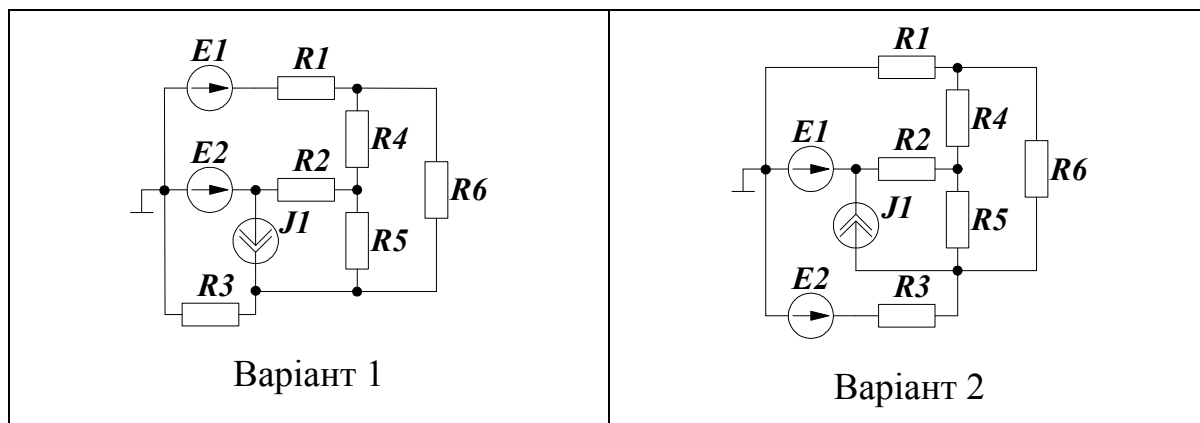
Завдання

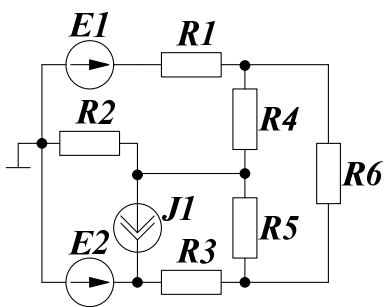
Розрахувати, користуючись методом вузлових потенціалів, струми у вітках кола. Розрахунки перевірити числовим експериментом комп'ютерними стимуляторами *Electronic Workbench*, *Multisim*.

Послідовність виконання

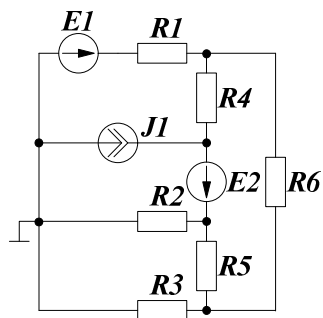
Вибрати електричне коло відповідно до заданого викладачем варіанту N , який визначається номером студента у журналі групи.

Варіанти індивідуального завдання

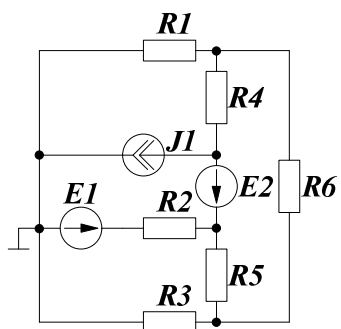




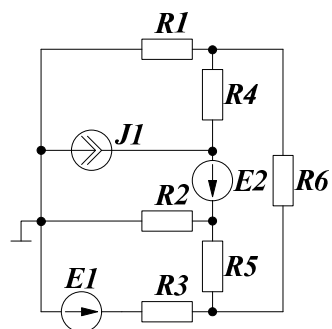
Варіант 3



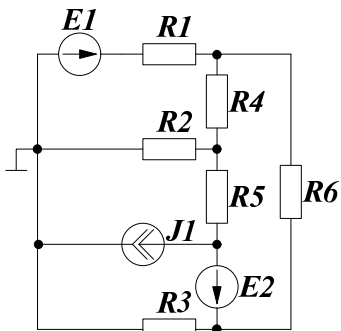
Варіант 4



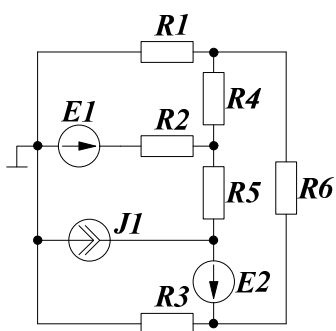
Варіант 5



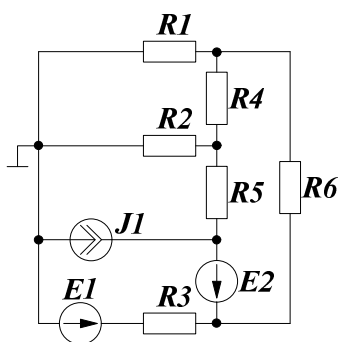
Варіант 6



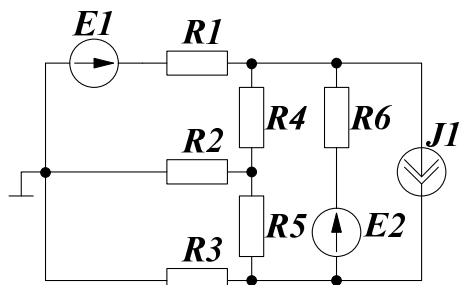
Варіант 7



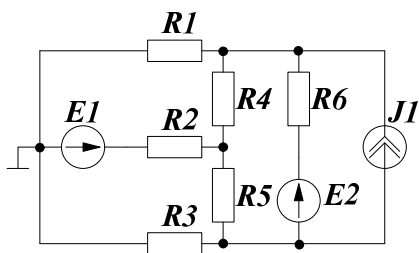
Варіант 8



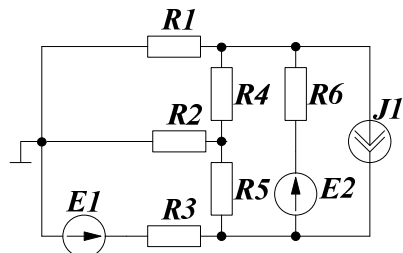
Варіант 9



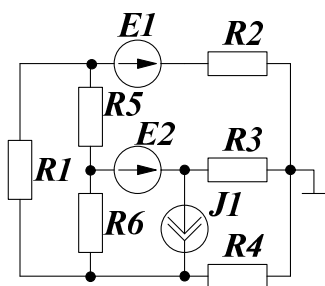
Варіант 10



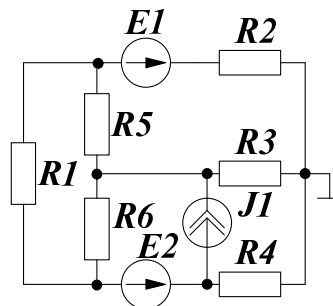
Вариант 11



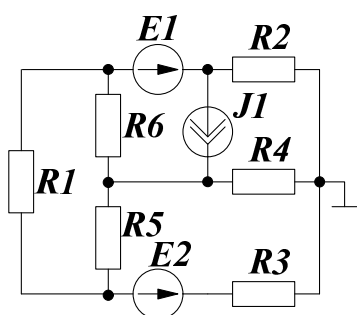
Вариант 12



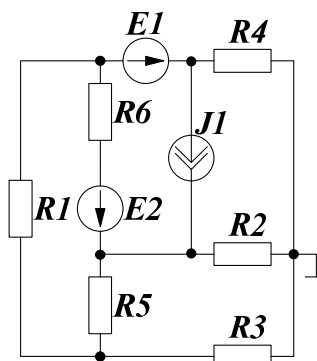
Вариант 13



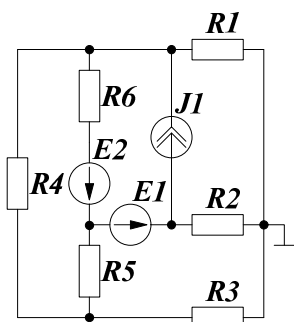
Вариант 14



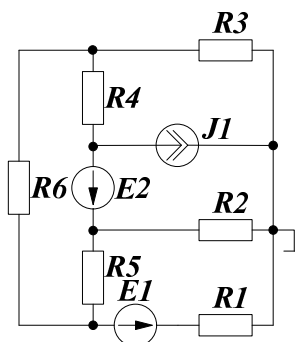
Вариант 15



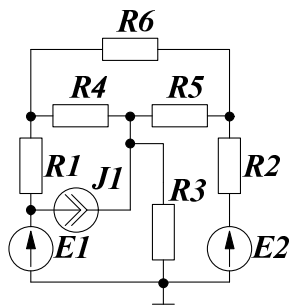
Вариант 16



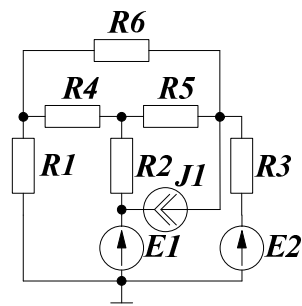
Вариант 17



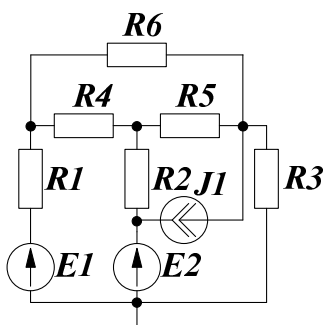
Вариант 18



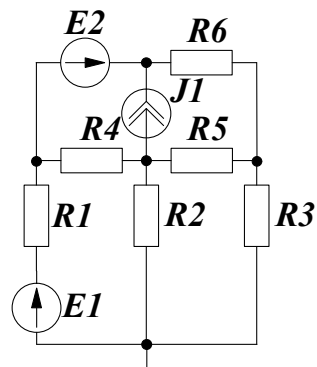
Варіант 19



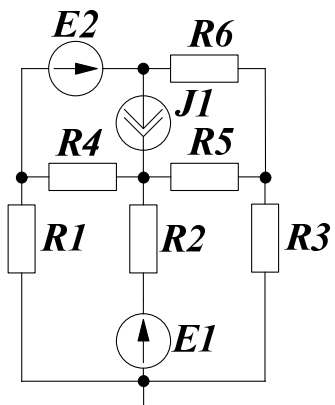
Варіант 20



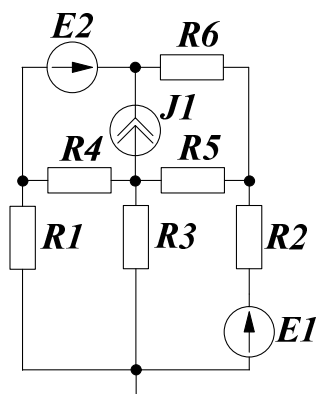
Варіант 21



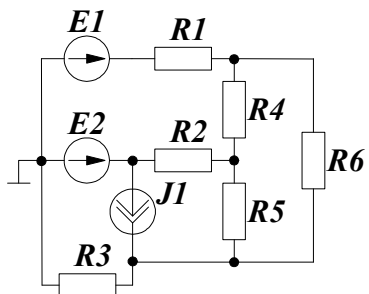
Варіант 22



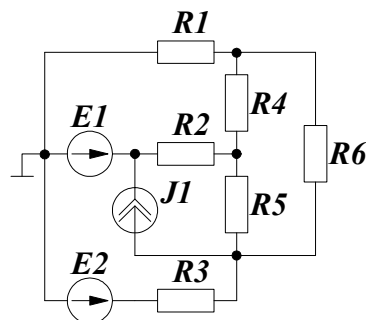
Варіант 23

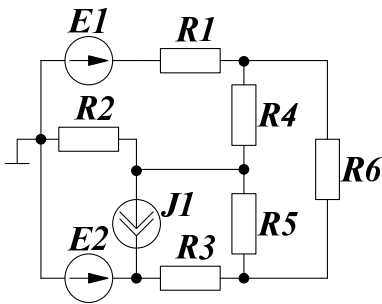
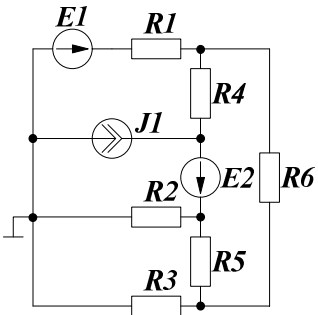
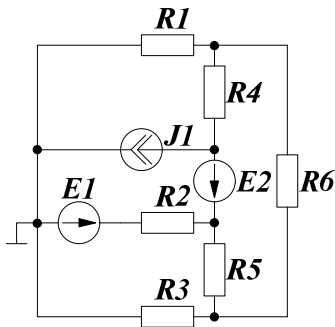
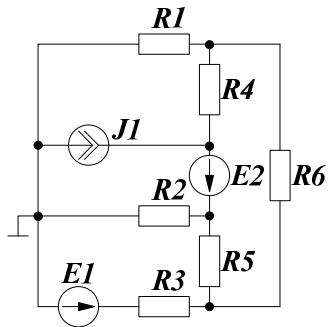


Варіант 24



Варіант 25



	Варіант 26
 <p>Варіант 27</p>	 <p>Варіант 28</p>
 <p>Варіант 29</p>	 <p>Варіант 30</p>

Задати параметри елементів заданого електричного поля відповідно до свого варіанта:

$R1 = 22 \Omega$ $R2 = 28 \Omega$ $R3 = 34 \Omega$ $R4 = 40 \Omega$ $R5 = 46 \Omega$ $R6 = 52 \Omega$ $E1 = 6 \text{ V}$ $E2 = 9 \text{ V}$ $J_1 = 3 \text{ mA}$ Варіанти 1,11, 21,31	$R1 = 24 \Omega$ $R2 = 31 \Omega$ $R3 = 38 \Omega$ $R4 = 45 \Omega$ $R5 = 52 \Omega$ $R6 = 59 \Omega$ $E1 = 7 \text{ V}$ $E2 = 10 \text{ V}$ $J_1 = 4 \text{ mA}$ Варіант 2, 12, 22,32
--	---

$R1 = 26 \Omega$ $R2 = 34 \Omega$ $R3 = 42 \Omega$ $R4 = 50 \Omega$ $R5 = 58 \Omega$ $R6 = 66 \Omega$ $E1 = 8 \text{ V}$ $E2 = 11 \text{ V}$ $J_1 = 5 \text{ mA}$ Варіант 3,13, 23,33	$R1 = 28 \Omega$ $R2 = 37 \Omega$ $R3 = 46 \Omega$ $R4 = 55 \Omega$ $R5 = 64 \Omega$ $R6 = 73 \Omega$ $E1 = 9 \text{ V}$ $E2 = 12 \text{ V}$ $J_1 = 6 \text{ mA}$ Варіант 4,14, 24,34
--	--

$R1 = 30 \Omega$ $R2 = 40 \Omega$ $R3 = 50 \Omega$ $R4 = 60 \Omega$ $R5 = 70 \Omega$ $R6 = 80 \Omega$ $E1 = 10 \text{ V}$ $E2 = 13 \text{ V}$ $J_1 = 7 \text{ mA}$ Вариант 5,15, 25,35	$R1 = 32 \Omega$ $R2 = 43 \Omega$ $R3 = 54 \Omega$ $R4 = 65 \Omega$ $R5 = 76 \Omega$ $R6 = 87 \Omega$ $E1 = 11 \text{ V}$ $E2 = 14 \text{ V}$ $J_1 = 8 \text{ mA}$ Вариант 6,16, 26,36
--	--

$R1 = 34 \Omega$ $R2 = 46 \Omega$ $R3 = 58 \Omega$ $R4 = 70 \Omega$ $R5 = 82 \Omega$ $R6 = 94 \Omega$ $E1 = 12 \text{ V}$ $E2 = 15 \text{ V}$ $J_1 = 9 \text{ mA}$ Вариант 7,17, 27,37	$R1 = 36 \Omega$ $R2 = 49 \Omega$ $R3 = 62 \Omega$ $R4 = 75 \Omega$ $R5 = 88 \Omega$ $R6 = 101 \Omega$ $E1 = 13 \text{ V}$ $E2 = 16 \text{ V}$ $J_1 = 10 \text{ mA}$ Вариант 8,18, 28,38
--	--

$R1 = 38 \Omega$ $R2 = 52 \Omega$ $R3 = 66 \Omega$ $R4 = 80 \Omega$ $R5 = 94 \Omega$ $R6 = 108 \Omega$ $E1 = 14 \text{ V}$ $E2 = 17 \text{ V}$ $J_1 = 11 \text{ mA}$ Вариант 9,19, 29,39	$R1 = 40 \Omega$ $R2 = 55 \Omega$ $R3 = 70 \Omega$ $R4 = 85 \Omega$ $R5 = 100 \Omega$ $R6 = 115 \Omega$ $E1 = 15 \text{ V}$ $E2 = 18 \text{ V}$ $J_1 = 12 \text{ mA}$ Вариант 0,10, 20,30
--	---

Розрахункова частина

Метод вузлових потенціалів

Визначити струми у вітках заданого електричного кола методом вузлових потенціалів у такій послідовності:

- розрахувати значення вузлових струмів;
- розрахувати значення власних і взаємних провідностей вузлів;
- обчислити значення визначника матриці власних і взаємних провідностей вузлів;
- визначити потенціали вузлів кола, прийнявши за нульовий потенціал одного з вузлів;
- визначити струми у вітках кола за законом Ома, скориставшись отриманими значеннями потенціалів вузлів.

Результати розрахунків занести у табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Метод вузлових потенціалів											
Вузлові струми											
J_{11}			J_{22}			J_{33}			J_{44}		
Власні і взаємні провідності вузлів											
G_{11}	G_{22}	G_{33}	G_{44}	G_{12}	G_{13}	G_{14}	G_{23}	G_{24}	G_{34}		
Визначник матриці власних і взаємних провідностей вузлів						$\Delta_G =$					
Потенціали вузлів											
V_{11}			V_{22}			V_{33}			V_{44}		

Струми у вітках							
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8

Для розрахунків доцільно скористатися комп'ютерною програмою **MathCAD**

Експериментальна частина

Послідовність виконання роботи

Побудувати засобами *Electronics Workbench* електричне коло, приклад якого наведене на рис. 02-DC.01.

На рис. 02-DC.01 показані:

E1, E2, — джерела постійної напруги. Джерела напруги і струму знаходяться на вкладці *Sources*;

J1 — джерело постійного струму

R1, R2, R3, R4, R5, R6 — резистори. Резистори знаходяться на

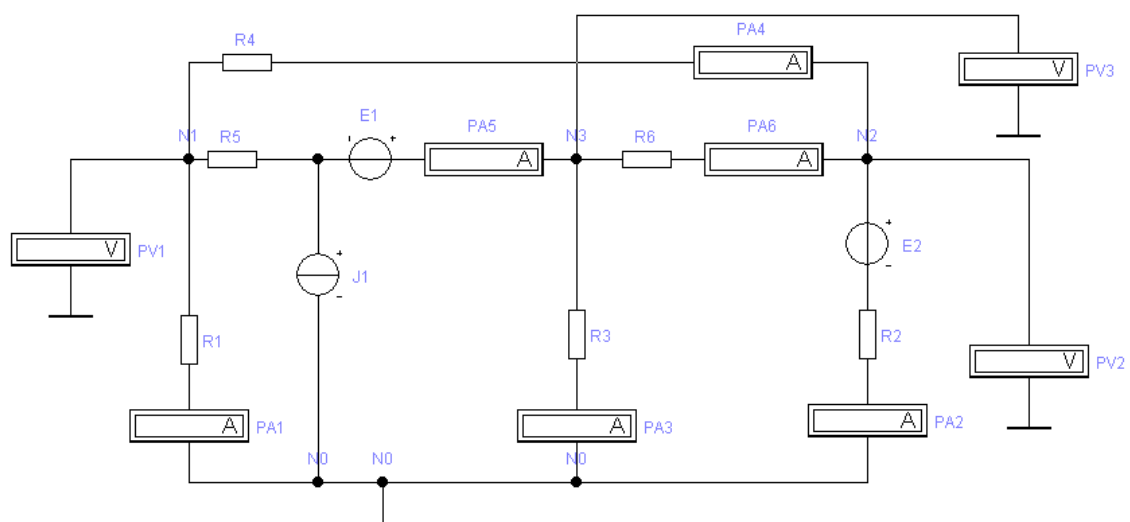


Рис. 02-DC.01

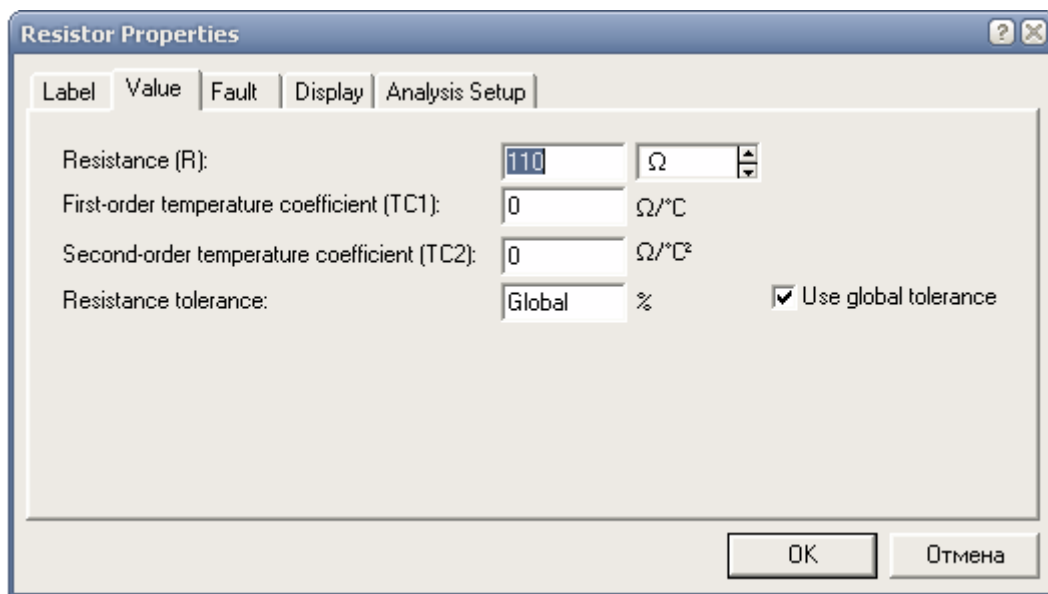


Рис. 01-DC.02

вкладці *Basic*;

PV1, PV2, PV3 — вольтметри у режимі вимірювання постійної напруги (режим DC). Вольтметри знаходяться на вкладці *Indicator*;

PA1, PA2, PA3, PA4, PA5, PA6 — амперметри у режимі вимірювання постійного струму (режим DC) Амперметри знаходяться на вкладці *Indicators*.

Задати значення параметрів елементів кола, відповідно до варіанту. Щоб задати параметри елементу кола потрібно подвійним клацанням на елементі викликати вікно параметрів елемента (рис. 01-DC.02) і на вкладці *Value* задати значення і одиницю вимірювання. На вкладці *Label* задати позначення елемента на принципових електричних схемах згідно вітчизняних стандартів.

Запустити процес моделювання, натиснувши на кнопку I/O у верхньому правому куті екрану.

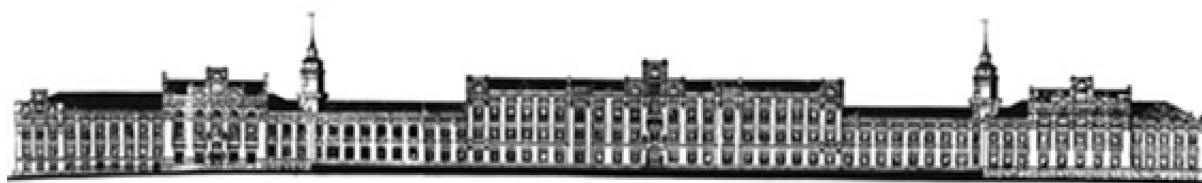
Зняти покази амперметрів і вольтметрів і занести їх у відповідні клітинки табл. 2.3.

Порівняти результати обчислень і вимірювань і зробити висновки.

Таблиця 3

	Вітки кола					
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
Струми віток						
Результати обчислень						
Результати вимірювань						
Потенціали вузлів	V1	V2	V3	V4	V5	
Результати обчислень						
Результати вимірювань						

На захист представити паперовий і електронний варіанти.



Національний Технічний університет України (КПІ)

Кафедра теоретичної електротехніки

Зразок

Лабораторна робота №01_DC_02

з дисципліни "Основи електротехніки та електроніки"

**" Дослідження розгалужених електричних кіл постійного струму
методом вузлових потенціалів "**

Виконав:
Студент групи ЕЕ-00
Петренко П.П.
Перевірив:
доц. Коваленко К.К.

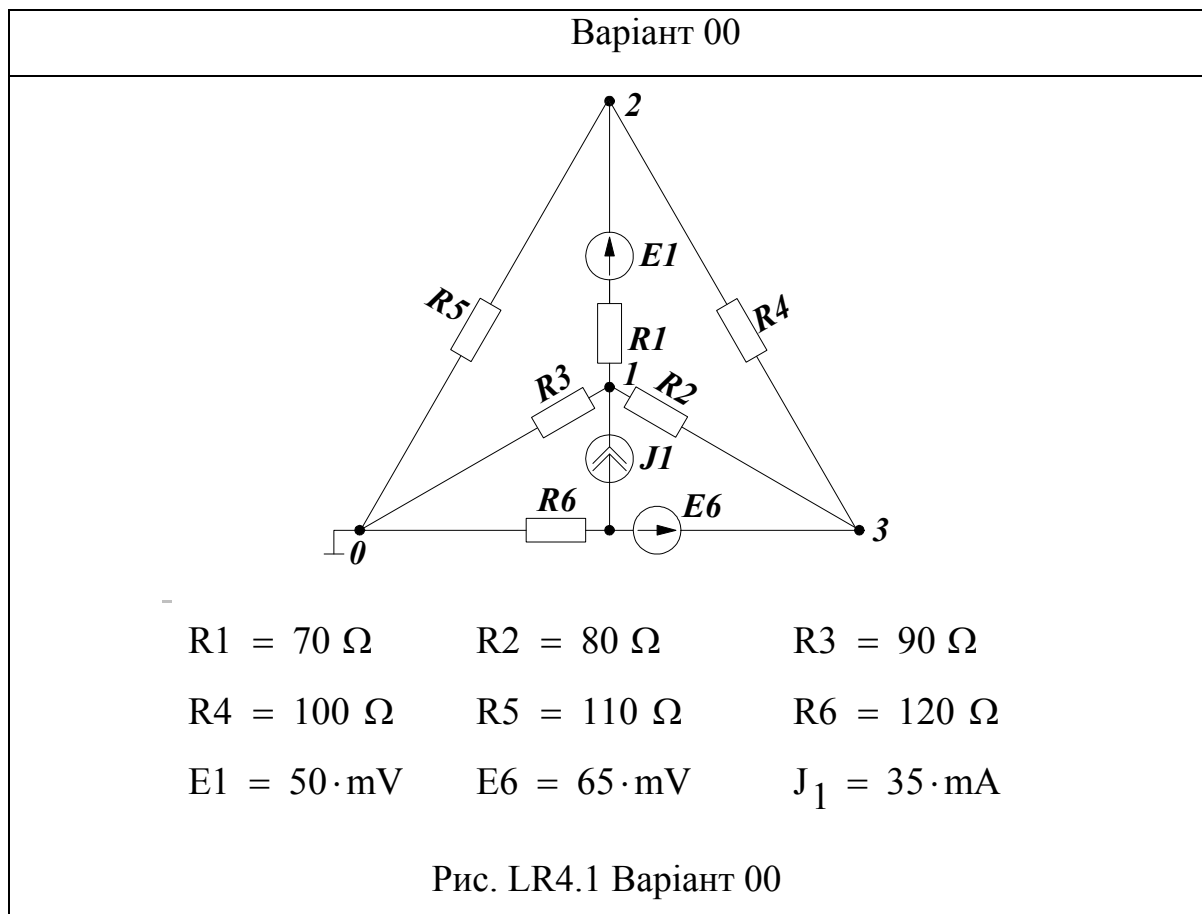
Київ —20__

Мета роботи: Оволодіти методами аналізу і отримати навички експериментального дослідження розгалужених електричних кіл постійного струму з одним джерелом енергії

Завдання

Розрахувати, користуючись методом вузлових потенціалів, струми у вітках кола і напруги на елементах кола. Розрахунки перевірити числовим експериментом комп'ютерними стимуляторами ***Electronic Workbench, Multisim.***

Завдання для варіанту 00



Розрахункова частина

Розрахунок струмів у вітках кола і напруг на елементах кола виконуємо методом вузлових потенціалів, використовуючи математичну комп'ютерну програму **Mathcad**.

Визначаємо струми у вітках заданого електричного кола за індивідуальним варіантом методом вузлових потенціалів у такій послідовності:

1. Нумеруємо вузли заданого електричного кола
2. Потенціал вузла 0 приймаємо рівним нулю
3. Складаємо систему рівнянь відносно невідомих потенціалів вузлів 1, 2, 3

$$G_{11} \cdot V_{11} + G_{12} \cdot V_{22} + G_{13} \cdot V_{33} = J_{11}$$

$$G_{21} \cdot V_{11} + G_{22} \cdot V_{22} + G_{23} \cdot V_{33} = J_{22}$$

$$G_{31} \cdot V_{11} + G_{32} \cdot V_{22} + G_{33} \cdot V_{33} = J_{33}$$

4. Записуємо систему рівнянь у матричному виді

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{22} \\ V_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \end{pmatrix}$$

5. Визначаємо власні провідності вузлів і обчислюємо їх значення

$$G_{11} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 0.038 \frac{1}{\Omega}$$

$$G_{22} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0.033 \frac{1}{\Omega}$$

$$G_{33} := \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} = 0.031 \frac{1}{\Omega}$$

6. Визначаємо взаємні провідності вузлів і обчислюємо їх значення

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{R_1} = -0.014 \frac{1}{\Omega}$$

$$G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{R_4} = -0.01 \frac{1}{\Omega}$$

$$G_{31} = G_{13} = -\frac{1}{R_2} = -0.013 \frac{1}{\Omega}$$

7. Визначаємо струми вузлів і обчислюємо їх значення

$$J_{11} := \frac{-E_1}{R_1} + J_1 = 34.286 \cdot \text{mA}$$

$$J_{22} := \frac{E_1}{R_1} = 0.714 \cdot \text{mA}$$

$$J_{33} := \frac{E_6}{R_1} - J_1 = -34.071 \cdot \text{mA}$$

8. Записуємо розв'язок системи рівнянь через обернену матрицю

$$V_{11} = R_{11} \cdot J_{11} + R_{12} \cdot J_{22} + R_{13} \cdot J_{33}$$

$$V_{22} = R_{21} \cdot J_{11} + R_{22} \cdot J_{22} + R_{23} \cdot J_{33}$$

$$V_{33} = R_{31} \cdot J_{11} + R_{32} \cdot J_{22} + R_{33} \cdot J_{33}$$

9. Передавальні опори виражаються через визначник матриці власних і взаємних провідностей вузлів та алгебраїчні доповнення

$$R_{11} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot M_{11}}{\Delta G} \quad R_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot M_{12}}{\Delta G} \quad R_{13} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot M_{13}}{\Delta G}$$

$$R_{21} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot M_{21}}{\Delta G} \quad R_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot M_{22}}{\Delta G} \quad R_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot M_{23}}{\Delta G}$$

$$R_{31} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot M_{31}}{\Delta G} \quad R_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \cdot M_{32}}{\Delta G} \quad R_{33} = \frac{(-1)^{3+3} \cdot M_{33}}{\Delta G}$$

10. Обчислимо значення визначника матриці власних і взаємних провідностей вузлів

$$\Delta G = \left| \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \right| = 2.013 \times 10^{-5} \frac{1}{\Omega^3}$$

11. Обчислюємо значення передавальних опорів

$$R_{11} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot M_{11}}{\Delta G} \quad R_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot M_{12}}{\Delta G} \quad R_{13} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot M_{13}}{\Delta G}$$

$$R_{21} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot M_{21}}{\Delta G} \quad R_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot M_{22}}{\Delta G} \quad R_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot M_{23}}{\Delta G}$$

$$R_{31} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot M_{31}}{\Delta G} \quad R_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \cdot M_{32}}{\Delta G} \quad R_{33} = \frac{(-1)^{3+3} \cdot M_{33}}{\Delta G}$$

$$R_{11} = 46.155 \, \Omega \quad R_{12} = 28.092 \, \Omega \quad R_{13} = 27.824 \, \Omega$$

$$R_{21} = 28.092 \, \Omega \quad R_{22} = 50.273 \, \Omega \quad R_{23} = 27.695 \, \Omega$$

$$R_{31} = 27.824 \, \Omega \quad R_{32} = 27.695 \, \Omega \quad R_{33} = 52.707 \, \Omega$$

12. Обчислюємо значення часткових потенціалів

$$V_{11_{11}} := R_{11} \cdot J_{11} = 1.582 \, \text{V} \quad V_{11_{12}} := R_{12} \cdot J_{22} = 0.02 \, \text{V} \quad V_{11_{13}} := R_{13} \cdot J_{33} = -0.959 \, \text{V}$$

$$V_{22_{21}} := R_{21} \cdot J_{11} = 0.963 \, \text{V} \quad V_{22_{22}} := R_{22} \cdot J_{22} = 0.036 \, \text{V} \quad V_{22_{23}} := R_{23} \cdot J_{33} = -0.954 \, \text{V}$$

$$V_{33_{31}} := R_{31} \cdot J_{11} = 0.954 \, \text{V} \quad V_{33_{32}} := R_{32} \cdot J_{22} = 0.02 \, \text{V} \quad V_{33_{33}} := R_{33} \cdot J_{33} = -1.816 \, \text{V}$$

13. Обчислюємо значення потенціалів вузлів через часткові потенціали

$$V_{11} := V_{11_{11}} + V_{11_{12}} + V_{11_{13}} = 0.644 \, \text{V}$$

$$V_{22} := V_{22_{21}} + V_{22_{22}} + V_{22_{23}} = 0.045 \, \text{V}$$

$$V_{33} := V_{33_{31}} + V_{33_{32}} + V_{33_{33}} = -0.842 \, \text{V}$$

14. Визначаємо струми у вітках через потенціали вузлів за законом Ома і обчислюємо їх значення

$$I_1 := \frac{V_{11} - V_{22} + E1}{R1} = 9.271 \cdot \text{mA}$$

$$I_2 := \frac{V_{11} - V_{33}}{R2} = 18.578 \cdot \text{mA}$$

$$I_3 := \frac{V_{11} - V_{00}}{R3} = 7.153 \cdot \text{mA}$$

$$I_4 := \frac{V_{22} - V_{33}}{R4} = 8.872 \cdot \text{mA}$$

$$I_5 := \frac{V_{22} - V_{00}}{R5} = 0.407 \cdot \text{mA}$$

$$I_6 := \frac{V_{00} - V_{33} + E6}{R6} = 7.562 \cdot \text{mA}$$

15. Для перевірки правильності розрахунків складемо баланс потужностей

$$P_1 := -I_1 \cdot E1 + I_6 \cdot E6 + J_1 \cdot R2 \cdot I_2 = 52.045 \cdot \text{mW}$$

$$P_2 := I_1^2 \cdot R1 + I_2^2 \cdot R2 + I_3^2 \cdot R3 + I_4^2 \cdot R4 + I_5^2 \cdot R5 + I_6^2 \cdot R6 = 52.984 \cdot \text{mW}$$

16. Потужність джерел енергії P_1 дорівнює потужності P_2 споживачів енергії, що свідчить, що розрахунок струмів у колі методом вузлових потенціалів виконаний правильно

17. Результати розрахунків занести у табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Метод вузлових потенціалів					
Вузлові струми, mA					
J_{11}		J_{22}		J_{33}	
34.3		0.714		-34.0	
Власні і взаємні провідності вузлів, Ω^{-1}					
G_{11}	G_{22}	G_{33}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
0.038	0.033	0.031	— 0.014	— 0.01	— 0.013
Визначник матриці власних і взаємних провідностей вузлів			$\Delta_G = 2.013 \times 10^{-5}$		
Потенціали вузлів, V					
V_{11}		V_{22}		V_{33}	
0.644		0.045		— 0.842	
Струми у вітках, mA					
I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
9.271	18.578	7.153	8.872	0.407	7.562

Експериментальна частина

Послідовність виконання роботи

Побудуємо засобами *Electronic Workbench* електричне коло, вибране у відповідності до варіанту 00 індивідуального завдання.

Задаємо значення параметрів елементів кола, обчислені у пункті 1

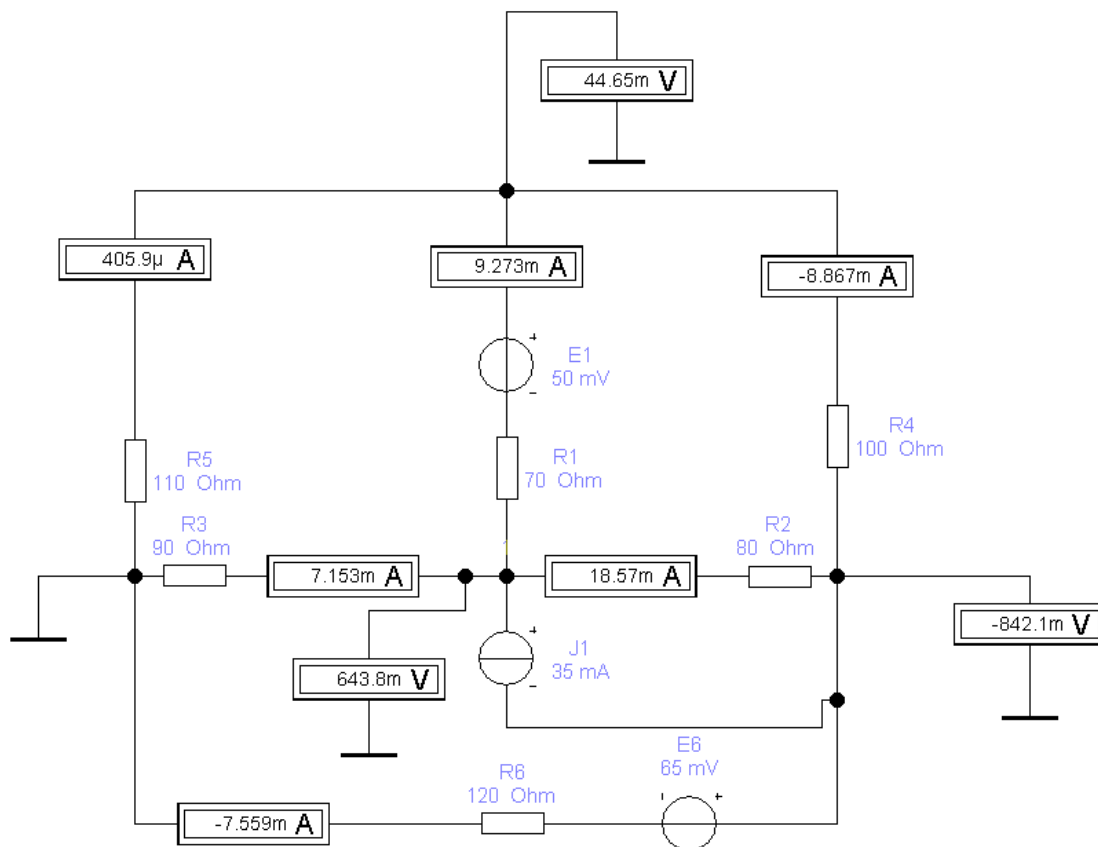


Рис. 1.2

розрахункової частини.

Запускаємо процес моделювання, натиснувши на кнопку I/O у верхньому правому куті екрану.

Знімаємо покази амперметрів і вольтметрів і заносимо їх у відповідні клітинки табл. 2.2.

Теоретичні відомості

Метод вузлових потенціалів (вузлових напруг)

Знаходження струмів у вітках заданого електричного кола за методом вузлових потенціалів (вузлових напруг) полягає у тому, що спочатку визначають потенціали вузлів кола.

Щоб визначити потенціали вузлів, у систему рівнянь складених за першим законом Кірхгофа

$$\begin{array}{l} \pm I_1 \pm I_2 \pm \dots \pm I_n = 0 \\ \pm I_1 \pm I_2 \pm \dots \pm I_n = 0 \\ \\ \pm I_1 \pm I_2 \pm \dots \pm I_n = 0 \end{array} \quad (\text{T.1})$$

підставляємо вирази для струмів I_1, I_2, \dots, I_n , складені за законом Ома

$$I_n = \frac{V_k - V_m \pm E_n}{R_n} \quad (\text{T.2})$$

Виконавши потрібні еквівалентні перетворення, можна звести систему рівнянь (Т.1) до такого виду

$$\begin{aligned}
& +G_{11}\cdot V_1-G_{12}\cdot V_2-G_{13}\cdot V_3-\dots-G_{1n}\cdot V_n-\dots-G_{1N}\cdot V_N=J_{11}\\
& -G_{21}\cdot V_1+G_{22}\cdot V_2-G_{23}\cdot V_3-\dots-G_{2n}\cdot V_n-\dots-G_{2N}\cdot V_N=J_{22}\\
& -G_{31}\cdot V_1-G_{32}\cdot V_2+G_{33}\cdot V_3-\dots-G_{3n}\cdot V_n-\dots-G_{3N}\cdot V_N=J_{33}\\
& \dots\dots\dots\\
& -G_{m1}\cdot V_1-G_{m2}\cdot V_2-G_{m3}\cdot V_3-\dots-G_{mn}\cdot V_n-\dots-G_{mN}\cdot V_N=J_{mm}\\
& \dots\dots\dots\\
& -G_{N1}\cdot V_1-G_{N2}\cdot V_2-G_{N3}\cdot V_3-\dots-G_{Nn}\cdot V_n-\dots+G_{NN}\cdot V_N=J_{NN}
\end{aligned}
\tag{T.3}$$

Якщо задане електричне коло має $(N+1)$ вузлів, то система (Т.3) міститиме N рівнянь.

У систему рівнянь (Т.3) входять N потенціалів вузлів $V_1, V_2, V_3, \dots, V_N$, значення яких підлягають визначенню. Потенціал одного з вузлів приймається рівним нулю ($V_0=0$).

Крім потенціалів вузлів кола у систему рівнянь (Т.3) входять величини $G_{11}, G_{22}, G_{33}, \dots, G_{NN}$, які називаються власними провідностями вузлів.

Власною провідністю вузла G_{nn} називається сума провідностей віток, що входять у цей вузол. Власні провідності вузлів входять у рівняння (Т.3) зі знаком „+”.

Взаємною провідністю G_{nm} вузлів m і n називається сума провідностей віток, які безпосередньо з’єднують ці два вузла, тобто віток, які одночасно входять як в один, так і у інший вузли. Якщо жодна вітка не з’єднує певні два вузла, то взаємна провідність у такому разі дорівнює нулю. Для взаємних провідностей справедливе твердження

$$G_{mn} = G_{nm} \quad (\text{Т.4})$$

Взаємні провідності входять у рівняння (Т.3) зі знаком „-”.

Величини $J_{11}, J_{11}, J_{11}, \dots, J_{11}$, у правій частині рівнянь (Т.3) називаються струмами вузлів. **Струмом вузла** називається алгебраїчна сума струмів джерел віток. Струм джерела вітки входить у суму зі знаком «+», якщо джерело струму спрямоване до вузла, і зі знаком «-», якщо джерело струму вітки спрямоване від вузла. Якщо вітка заданого електричного кола містить не джерело струму, а джерело напруги, то за допомогою еквівалентного перетворення його перетворюють у джерело струму. Якщо вітка не містить джерел енергії, то відповідний доданок в алгебраїчній сумі дорівнює нулю.

Відомо, що розв’язок системи лінійних рівнянь (Т.3) має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{\Delta_G} (\Delta_{11} \cdot J_{11} + \Delta_{12} \cdot J_{22} + \dots + \Delta_{1n} \cdot J_{nn} + \dots + \Delta_{1N} \cdot J_{NN}) \\ V_2 = \frac{1}{\Delta_G} (\Delta_{21} \cdot J_{11} + \Delta_{22} \cdot J_{22} + \dots + \Delta_{2n} \cdot J_{nn} + \dots + \Delta_{2N} \cdot J_{NN}) \\ \dots \\ V_m = \frac{1}{\Delta_G} (\Delta_{m1} \cdot J_{11} + \Delta_{m2} \cdot J_{22} + \dots + \Delta_{mn} \cdot J_{nn} + \dots + \Delta_{mN} \cdot J_{NN}) \\ \dots \\ V_N = \frac{1}{\Delta_G} (\Delta_{N1} \cdot J_{11} + \Delta_{N2} \cdot J_{22} + \dots + \Delta_{Nn} \cdot J_{nn} + \dots + \Delta_{NN} \cdot J_{NN}) \end{array} \right. \quad (T.5)$$

Величина Δ_G , що входить в (1.56), називається **визначником матриці власних і взаємних провідностей кола** і визначається через власні і взаємні провідності вузлів за формулою

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \dots & G_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{N1} & G_{N2} & G_{N3} & \dots & G_{NN} \end{vmatrix} \quad (T.6)$$

Δ_{mn} є **алгебраїчне доповнення визначника Δ** , яке можна отримати, якщо викреслити у визначнику m -тий стовпчик і n -тий рядок і помноживши отриманий таким чином визначник на $(-1)^{(m+n)}$.

Якщо розкрити дужки у рівняннях (1.56), то отримаємо величини Δ_{mn}/Δ_G , що мають розмірність опору, називаються **передаточними опорами** вузлів і позначаються R_{mn} . Передаточний опір зв'язує потенціал m -того вузла зі струмом J_n і показує як діє n -те джерело струму на потенціал m -того вузла.

Якщо підставити передаточні опори у систему рівнянь (T.5), то вона набуде вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = R_{11} \cdot J_{11} + R_{12} \cdot J_{22} + \dots + R_{1n} \cdot J_{nn} + \dots + R_{1N} \cdot J_{NN} \\ V_2 = R_{21} \cdot J_{11} + R_{22} \cdot J_{22} + \dots + R_{2n} \cdot J_{nn} + \dots + R_{2N} \cdot J_{NN} \\ \dots \dots \dots \\ V_m = R_{m1} \cdot J_{11} + R_{m2} \cdot J_{22} + \dots + R_{mn} \cdot J_{nn} + \dots + R_{mN} \cdot J_{NN} \\ \dots \dots \dots \\ V_N = R_{N1} \cdot J_{11} + R_{N2} \cdot J_{22} + \dots + R_{Nn} \cdot J_{nn} + \dots + R_{NN} \cdot J_{NN} \end{array} \right. \quad (T.7)$$

Величини $R_{mn}J_{nn}$ мають розмірність потенціалу, називаються **частковими потенціалами** вузла i позначаються V_{i-l} . Частковий потенціал показує, яку частку у потенціал m -того вузла вносить дія n -того вузлового струму J_{nn} .

Таким чином, потенціали вузлів виражаються через суму часткових потенціалів

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_{1-1} + V_{1-2} + \dots + V_{1-n} + \dots + V_{1-N} \\ V_2 = V_{2-1} + V_{2-2} + \dots + V_{2-n} + \dots + V_{2-N} \\ \dots \dots \dots \\ V_m = V_{m-1} + V_{m-2} + \dots + V_{m-n} + \dots + V_{m-N} \\ \dots \dots \dots \\ V_N = V_{N-1} + V_{N-2} + \dots + V_{N-n} + \dots + V_{N-N} \end{array} \right. \quad (T.8)$$

Отримавши із розв'язку системи рівнянь (Т.5) значення потенціалів N вузлів заданого електричного кола і врахувавши, що потенціал $(N+1)$ вузла прийнятий рівним нулю, визначаємо струми у вітках кола за законом Ома

$$I_k = \frac{V_m - V_n \pm E_k}{R_k} \quad (T.9)$$

Приклад Т.1. Розрахувати струми у вітках електричного кола

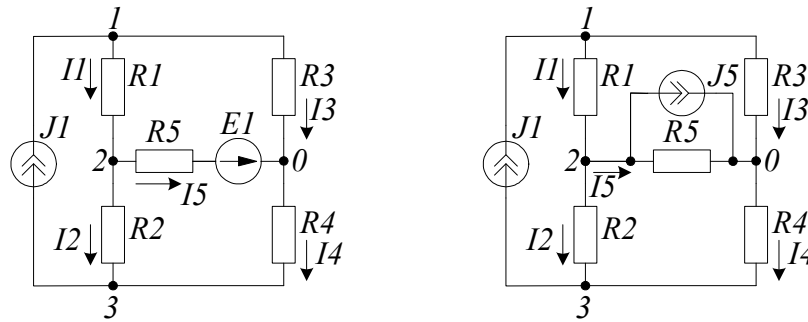


Рис. Т.1

(рис.Т.1) методом вузлових потенціалів.

Параметри елементів кола мають такі значення:

$E1=9.0\text{ V}$, $J1=6.0\text{ mA}$, $R1=1.2\text{ k}\Omega$, $R2=1.6\text{ k}\Omega$, $R3=2.7\text{ k}\Omega$, $R4=3.6\text{ k}\Omega$, $R5=1.8\text{ k}\Omega$.

Розв'язок

Для зручності розрахунків перетворимо джерело постійної електричної напруги у еквівалентне джерело струму (рис. Т.1)

$$J_5 = \frac{E_1}{R_5} = \frac{9.0}{1.8 \cdot 10^3} = 5.0\text{ mA} \quad (\text{T.10})$$

Потенціал вузла 0 приймаємо рівний нулю $V_0=0$, а відносно потенціалів решти вузлів складаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} +G_{11} \cdot V_1 - G_{12} \cdot V_2 - G_{13} \cdot V_3 &= J_{11} \\ -G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 - G_{23} \cdot V_3 &= J_{22} \\ -G_{31} \cdot V_1 - G_{32} \cdot V_2 + G_{33} \cdot V_3 &= J_{33} \end{aligned} \quad (\text{T.11})$$

Визначаємо власні і взаємні провідності вузлів і обчислюємо їх значення

$$G_{11} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = 1.204 \times 10^{-3} \cdot \text{S} \quad (\text{T.12})$$

$$G_{22} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = 2.014 \times 10^{-3} \cdot S$$

$$G_{33} := \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = 9.028 \times 10^{-4} \cdot S$$

$$G_{23} := \frac{1}{R_2} = 6.25 \times 10^{-4} S \quad G_{32} := G_{23}$$

$$G_{12} := \frac{1}{R_1} = 8.333 \times 10^{-4} S \quad G_{21} := G_{12}$$

$$G_{13} := 0 \cdot S \quad G_{31} := G_{13} = 0$$

Визначаємо струми вузлів і обчислюємо їх значення

$$J_{11} := J_1 \quad J_{22} := \frac{E_1}{R_5} = 5 \times 10^{-3} A \quad J_{33} := -J_1 \quad (T.13)$$

Підставляємо обчисленні значення власних і взаємних провідностей вузлів, а також значення струмів джерел віток у систему рівнянь і розв'язуємо її за допомогою системи MathCAD

Given

$$\begin{aligned} G_{11} \cdot V_1 - G_{12} \cdot V_2 - G_{13} \cdot V_3 &= J_{11} \\ -G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 - G_{23} \cdot V_3 &= J_{22} \\ -G_{31} \cdot V_1 - G_{32} \cdot V_2 + G_{33} \cdot V_3 &= J_{33} \end{aligned} \quad (T.14)$$

$$\text{Find}(V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} 13.681 \\ 12.562 \\ 14.235 \end{pmatrix} V$$

Таким чином потенціали вузлів кола матимуть такі значення:

$$\begin{aligned} V_1 &= 13.681 V \\ V_2 &= 12.562 V \\ V_3 &= 14.235 V \end{aligned} \quad (T.15)$$

Маючи значення потенціалів вузлів кола (нагадаємо, що потенціал вузла 0 прийнятий рівним нулю $V_0=0$), знаходимо струми у вітках кола за законом Ома

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{V_1 - V_2}{R_1} = 0.932 \text{ mA} & I_2 &:= \frac{V_2 - V_3}{R_2} = -1.046 \text{ mA} \\ I_3 &:= \frac{V_1 - V_0}{R_3} = 5.067 \text{ mA} & I_4 &:= \frac{V_0 - V_3}{R_4} = -3.954 \text{ mA} \\ I_5 &:= \frac{V_2 - V_0 + E_1}{R_5} = 11.979 \text{ mA} \end{aligned} \quad (\text{T.16})$$

Приклад Т.2. У заданому електричному колі (рис Т.2) розрахувати струми у вітках методом вузлових потенціалів.

Параметри елементів кола мають такі значення:

$$\begin{aligned} E_1 &= 12.0 \text{ V}, & J_1 &= 9.0 \text{ mA}, \\ R_1 &= 1.2 \text{ k}\Omega, & R_2 &= 2.7 \text{ k}\Omega, & R_3 &= 3.6 \text{ k}\Omega, & R_4 &= 4.3 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

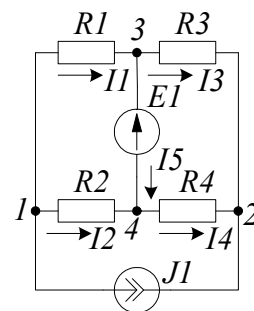


Рис. Т.2

Розв'язок

Задане електричне коло має 4 вузла. Особливістю заданого електричного кола є наявність вітки між 3 і 4 вузлами вітки з нульовим опором, або нескінченно великою провідністю. Цей факт унеможливорює складання рівняння вузлових потенціалів для 3 і 4 вузла.

Щоб розв'язати цю проблему, потенціал одного з цих вузлів, наприклад четвертого, приймаємо рівним нулю ($V_4=0$). Тоді потенціал третього вузла буде відомий ($V_3=E_1$) і складати для нього рівняння не потрібно.

Отже, складаємо рівняння тільки для 1 і 2 вузлів

$$\begin{aligned} +G_{11} \cdot V_1 - G_{12} \cdot V_2 - G_{13} \cdot V_3 &= J_{11} \\ -G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 - G_{23} \cdot V_3 &= J_{22} \end{aligned} \quad (\text{T.17})$$

Визначаємо власні і взаємні провідності вузлів і обчислюємо їх значення

$$\begin{aligned}
 G_{11} &:= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 1.204 \times 10^{-3} \cdot S & G_{22} &:= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 5.103 \times 10^{-4} \cdot S \\
 G_{13} &:= \frac{1}{R_1} = 8.333 \times 10^{-4} \cdot S & G_{31} &:= G_{13} = 8.333 \times 10^{-4} \frac{1}{\Omega} \\
 G_{23} &:= \frac{1}{R_3} = 2.778 \times 10^{-4} \cdot S & G_{32} &:= G_{23} \\
 G_{12} &:= 0 \cdot S & G_{21} &:= G_{12}
 \end{aligned} \tag{T.18}$$

Визначаємо струми вузлів і обчислюємо їх значення

$$\begin{aligned}
 J_{11} &:= -J_1 = -9 \text{ mA} & J_{22} &:= J_1 = 9 \cdot \text{mA}
 \end{aligned} \tag{T.19}$$

Підставляємо обчисленні значення власних і взаємних провідностей вузлів, а також значення струмів джерел віток у систему рівнянь і розв'язуємо її за допомогою системи MathCAD

Given

$$\begin{aligned}
 G_{11} \cdot V_1 - G_{12} \cdot V_2 - G_{13} \cdot V_3 &= J_{11} \\
 -G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 - G_{23} \cdot V_3 &= J_{22}
 \end{aligned} \tag{T.20}$$

$$\text{Find}(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} 0.831 \\ 24.167 \end{pmatrix} V$$

Розв'язок системи рівнянь дає такі значення потенціалів вузлів

$$V_1 = 0.831 V, \quad V_2 = 24.167 V.$$

Врахувавши, що потенціал четвертого вузла прийнято рівним нулю ($V_4=0$), а потенціал третього вузла рівний ($V_3=E_1$), обчислюємо струми у вітках кола за законами Ома і Кірхгофа

$$I_1 := \frac{V_1 - V_3}{R_1} = -9.307 \cdot \text{mA} \quad I_2 := \frac{V_1 - V_4}{R_2} = 0.308 \cdot \text{mA}$$

$$I_3 := \frac{V_3 - V_2}{R_3} = -3.38 \cdot \text{mA} \quad I_4 := \frac{V_4 - V_2}{R_4} = -5.62 \cdot \text{mA} \quad (\text{T.21})$$

$$I_5 := I_4 - I_2 = -5.928 \cdot \text{mA}$$