РГР з теми "Випадкові вектори"

студента групи ДА-92

Наєкана Дмитра Юрійовича

Варіант № 11

РГР з теми "Випадкові вектори"

студента групи ДА-92

Насікана Дмитра Юрійовича

Варіант № 11

Завдання 1

Ряд розподілу $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ має вигляд:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-4	-3	-2	$-1 \to x_i$
-2	0,01	0,02	0,05	0,06
0	0,1	0,03	0,05	0,23
5	0,05	0,08	0,01	0,31
$\downarrow y_j$				

a) побудувати маргінальні ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2:

$$P\{\xi_1 = x_i\} = P\{(\xi_1 = x_i) \cap (\xi_2 = y_1 \cup \ldots \cup \xi_2 = y_n)\} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}, \quad \forall i = \overline{1,m}$$

$$P\{\xi_1 = -4\} = \sum_{j=1}^{3} P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = y_j\} = 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}16$$

Для інших аналогічно.

ξ_1	-4	-3	-2	-1
P	0.16	0,13	0,11	0,6

$$P\{\xi_2 = y_j\} = P\{(\xi_2 = y_j) \cap (\xi_1 = x_1 \cup \ldots \cup \xi_1 = x_m)\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} P\{\xi_2 = y_j, \xi_1 = x_i\}, \quad \forall j = \overline{1,n}$$

$P\{\xi_2 = -2\} = \sum_{i=1}^{4} P\{\xi_2 = -2, \xi_1 = x_i\} = 0{,}01 + 0{,}02 +$ (2)

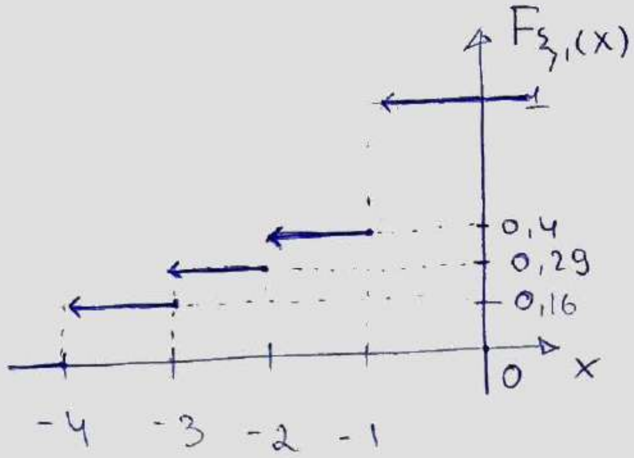
$+ 0{,}05 + 0{,}06 = 0{,}14$

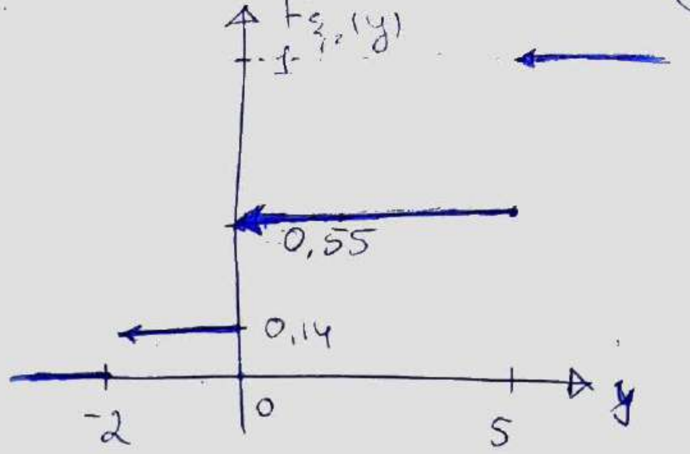
ξ_2	-2	0	5
P	$0{,}14$	$0{,}41$	$0{,}45$

б) визначити маргінальні ф-ції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ та побудувати їх графіки

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\} = \begin{cases} 0, & x \le -4 \\ 0{,}16, & -4 < x \le -3 \\ 0{,}29, & -3 < x \le -2 \\ 0{,}4, & -2 < x \le -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} = \begin{cases} 0, & y \le -2 \\ 0{,}14, & -2 < y \le 0 \\ 0{,}55, & 0 < y \le 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$





в) знайти математичні сподівання $E\xi_1$, $E\xi_2$ та дисперсії $D\xi_1$, $D\xi_2$:

$$E\xi_1 = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = -4\cdot 0{,}16 - 3\cdot 0{,}13 - 2\cdot 0{,}11 - 1\cdot 0{,}6 = -0{,}64 -$$
$$-0{,}39 - 0{,}22 - 0{,}6 = -1.25 - 0{,}6 = -1{,}85$$

$$E\xi_2 = \sum_{i=1}^{3} y_i p_i = -2\cdot 0{,}14 + 0\cdot 0{,}41 + 5\cdot 0{,}45 = 1{,}97$$

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - (E\xi_1)^2 = 16\cdot 0{,}16 + 9\cdot 0{,}13 +$$
$$+ 4\cdot 0{,}11 + 1\cdot 0{,}6 - 3{,}4225 = 2{,}56 + 1{,}17 + 0{,}44 + 0{,}6 - 3{,}4225 =$$
$$= 1{,}3475$$

$$D\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 p_i - (E\xi_2)^2 = 4\cdot 0{,}14 + 0 +$$
$$+ 25\cdot 0{,}45 - 3{,}8809 = 0{,}56 + 11{,}25 - 3{,}8809 = 7{,}9291$$

г) побудув. коваріаційну м-цю для $\vec{\xi}$, знайти коеф. кореляції $r_{\xi_1\xi_2}$, а також проаналіз. залежність та корельованість координат ξ_1, ξ_2.

$Cov(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 \cdot \xi_2) - E\xi_1 \cdot E\xi_2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_j y_i p_{ij} -$

$- E\xi_1 E\xi_2 = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 3\ 0{,}02 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}06 +$

$+ 0 + 0 + 0 + 0 + 5 \cdot (-4) \cdot 0{,}05 - 3 \cdot 5 \cdot 0{,}08 - 2 \cdot 5 \cdot 0{,}01 - 5 \cdot$

$\cdot 0{,}31 + 1{,}85 \cdot 1{,}97 = 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}2 + 0{,}12 - 1 - 1{,}2 - 0{,}1 -$

$- 1{,}55 + \cancel{1{,}88}\ 3{,}6445 = 0{,}3145$

$$K_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} D\xi_1 & Cov(\xi_1, \xi_2) \\ Cov(\xi_1, \xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3475 & 0{,}3145 \\ 0{,}3145 & 7{,}9291 \end{pmatrix}$$

$$r_{\xi_1, \xi_2} = \frac{Cov(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}} = \frac{0{,}3145}{1{,}1608 \cdot 2{,}8159} = 0{,}09622$$

Як бачимо, $-1 \le r_{\xi_1, \xi_2} \le 1$, та $r_{\xi_1, \xi_2} \ne 0$, отже, ξ_1, ξ_2 - корельовані, ~~відповідно~~ залежні.

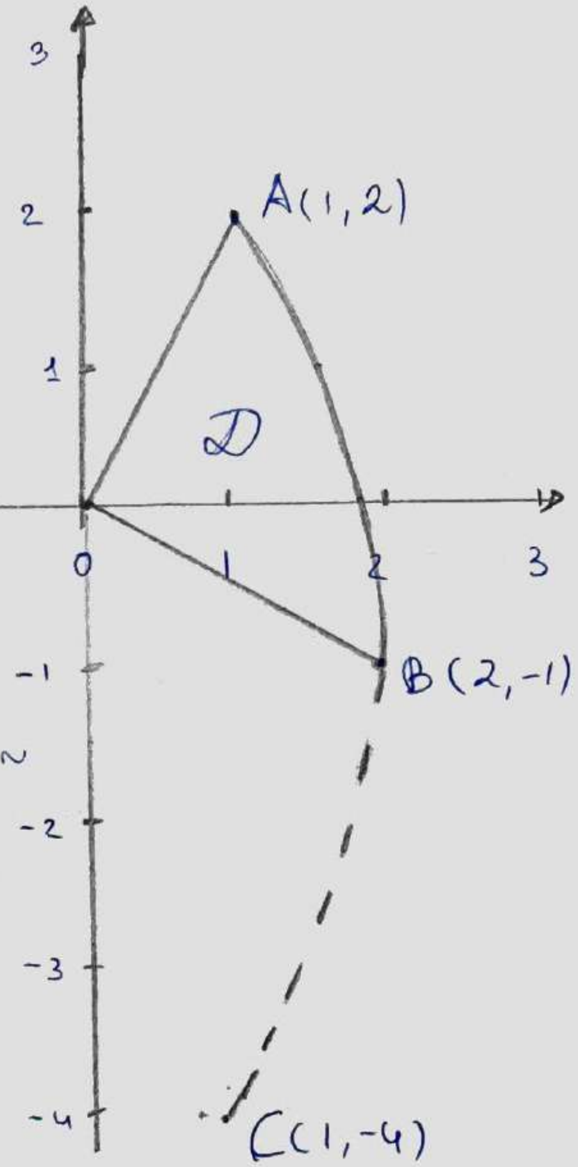
Завдання 2

Двовимірний вип. вектор $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ рівномірно розподілений в області D, що зображена на малюнку:

Знайдемо р-ня параболи у вигляді $x = ay^2 + by + c$.

Маємо систему:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 1 \\ a - b + c = 2 \\ 16a - 4b + c = 1 \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 16 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & -12 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -7/6 \\ 0 & 0 & -9 & -17 \end{array}\right)$$

$c = \frac{17}{9}$

$b = -\frac{7}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{9} = -\frac{2}{9}$

$a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{18} - \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{9} = -\frac{1}{9}$

$x = -\frac{1}{9} y^2 - \frac{2}{9} y + \frac{17}{9}$

Знайдемо р-ня прямих:

l_1: $A(1;2)$, $B(0;0)$

$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} \Rightarrow y = 2x$

l_2: $B(2;-1)$, $O(0;0)$

$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{-1-0} \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$

Отже, область $\mathcal{D}$ обмежена лініями: ⑥

$f_1: x = -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9}$

$l_1: y = 2x$

$l_2: y = -\frac{x}{2}$

а) записати сумісну щільність розподілу $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$.

Маємо розподіл рівномірний:

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S(\mathcal{D})}, & (x,y) \in \mathcal{D} \\ 0, & (x,y) \notin \mathcal{D} \end{cases}$$

Знайдемо $S(\mathcal{D})$:

т. перетину f_1 та l_1:

$A(1,2)$

т. перетину l_1 та l_2:

$O(0;0)$

т. перетину l_2 та f_1:

$B(2;-1)$

$$S(\mathcal{D}) = \int_0^2 \left(-\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} - \frac{y}{2}\right)dy + \int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} + 2y\right)dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{9\cdot 3}\cdot y^3 - \frac{2}{9\cdot 2}y^2 + \frac{17}{9}y - \frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^2 + \left(-\frac{1}{9\cdot 3}y^3 - \frac{2}{9\cdot 2}y^2 + \frac{17}{9}y + \right.$$

$$\left. + y^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{8}{9\cdot 3} - \frac{4}{9} + \frac{17\cdot 2}{9} - 1 + \left(0 - \left(\frac{1}{9\cdot 3} - \frac{1}{9} - \frac{17}{9} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 1\right)\right) = \frac{-8 - 4\cdot 3 + 17\cdot 2\cdot 3 - 9\cdot 3}{9\cdot 3} - \frac{1 - 3 - 17\cdot 3 + 9\cdot 3}{9\cdot 3} =$$

$$= \frac{-8 - 12 + 102 - 27}{27} - \frac{1 - 3 - 51 + 27}{27} = \frac{55}{27} - \frac{-26}{27} =$$

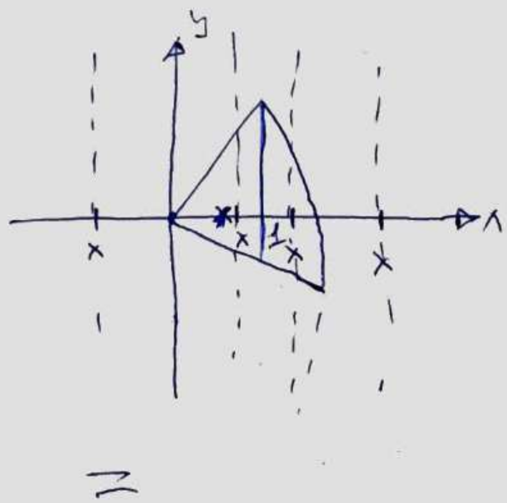
$$= \frac{81}{27} = 3.$$

Отже:

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

б) Визначити маргінальні щільності розподілу $f_{\xi_1}(x)$ та $f_{\xi_2}(y)$ й поб. їх графіки:

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dy.$$



$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \int_{-x/2}^{2x} \frac{1}{3}\,dy, & x \in [0;1] \\ \int_{-x/2}^{3\sqrt{2-x}-1} \frac{1}{3}\,dy, & x \in (1;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases} =$$

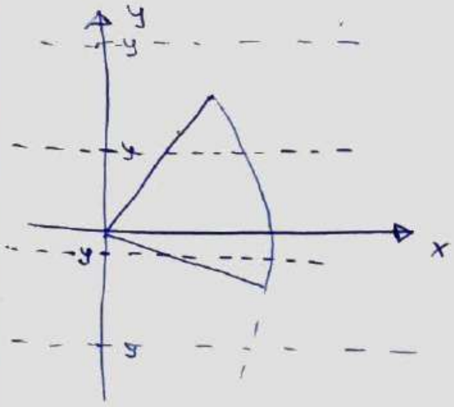
(8)

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{9}y + \frac{17}{9} \Rightarrow x = -\frac{1}{9}\left(y^2 + 2y - 17\right) \\ x = -\frac{1}{9}\left(y^2 + 2y + 1 - 18\right) \Rightarrow x = -\frac{1}{9}\left((y+1)^2 - 18\right) \\ x = 2 - \frac{(y+1)^2}{9} \Rightarrow x - 2 = -\frac{(y+1)^2}{9} \Rightarrow \sqrt{2-x} = \frac{y+1}{3} \\ y = 3\sqrt{2-x} - 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}(y)\Big|_{-\frac{x}{2}}^{2x}, & x \in [0;1] \\ \frac{1}{3}y\Big|_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1}, & x \in (1;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot 2x + \frac{1}{3\cdot 2}x, & x \in [0;1] \\ \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{2-x} - \frac{1}{3} + \frac{x}{2\cdot 3}, & x \in (1;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x, & x \in [0;1] \\ \frac{x}{6} + \sqrt{2-x} - \frac{1}{3}, & x \in (1;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$$

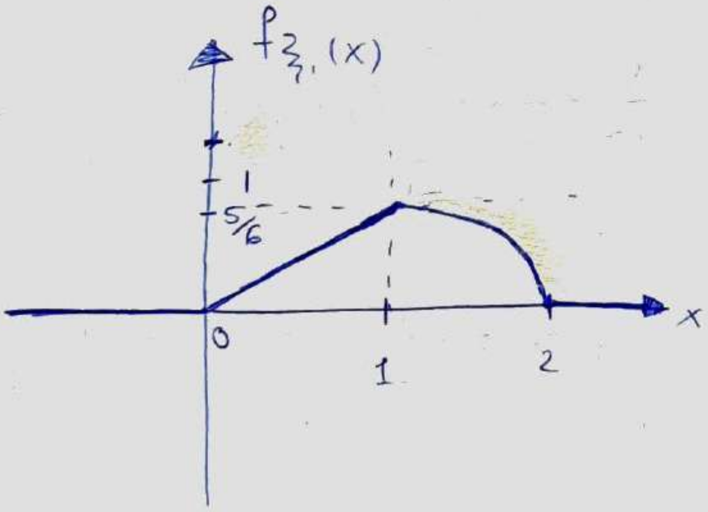
$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dx$$

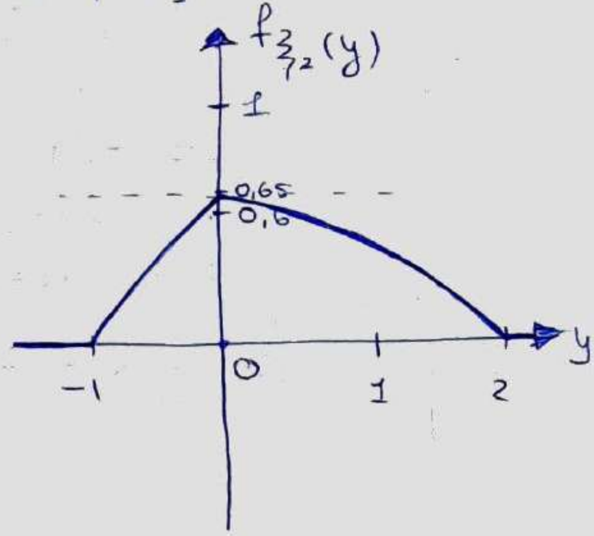


$$f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{y/2}^{-\frac{1}{9}y^2-\frac{2}{9}y+\frac{17}{9}} \frac{1}{3}\,dx, & y \in [0;2] \\ \displaystyle\int_{-2y}^{-\frac{1}{9}y^2-\frac{2}{9}y+\frac{17}{9}} \frac{1}{3}\,dx, & y \in [-1;0) \\ 0, & y \notin [-1;2] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{9}y^2-\frac{2}{9}y+\frac{17}{9}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{2}, & y \in [0;2] \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{9}y^2-\frac{2}{9}y+\frac{17}{9}\right)+\frac{2}{3}y, & y \in [-1;0) \\ 0, & y \notin [-1;2] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{27}y^2 \cancel{+\frac{2}{27}y} - \frac{13}{54}y + \frac{17}{27}, & y \in [0;2]. \\ -\frac{1}{27}y^2 + \frac{16}{27}y + \frac{17}{27}, & y \in [-1;0) \\ 0, & y \notin [-1;2] \end{cases}$$





в) визначити маргінальні ф-ції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ та поб. їх графіки: (10)

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)\,dt.$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ I_1 = \int_0^x \frac{5}{6}t\,dt, & 0 < x \le 1 \\ I_2 = \int_0^1 \frac{5}{6}t\,dt + \int_1^x \left(\frac{t}{6} + \sqrt{2-t} - \frac{1}{3}\right)dt, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_0^x \frac{5}{6}t\,dt = \frac{5}{2\cdot 6}t^2\Big|_0^x = \frac{5}{12}x^2$$

$$I_2 = \frac{5}{2\cdot 6}t^2\Big|_0^1 + \frac{1}{6}\int_1^x t\,dt + \int_1^x \sqrt{2-t}\,dt - \frac{1}{3}\int_1^x dt = \frac{5}{12} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} +$$

$$+ \frac{1}{6\cdot 2}t^2\Big|_1^x + \int_1^x \sqrt{2-t}\,dt = \left\{\begin{array}{l} 2-t = z \\ dz = -dt \\ t = x \Rightarrow z = 2-x \\ t = 1 \Rightarrow z = 1 \end{array}\right\} = \frac{9}{12} - \frac{1}{3}x +$$

$$+ \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{12} - \int_1^{2-x} z^{3/2}\,dz = \frac{8}{12} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} z^{3/2}\Big|_1^{2-x} =$$

$$= \frac{8}{12} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}(2-x)^{3/2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\cdot$$

$$\cdot (2-x)^{3/2} + \frac{\cancel{16}\,4}{\cancel{12}\,3}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ \frac{5}{12}x^2 & , \quad 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}(2-x)^{3/2} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{4}{3} & , \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le -1 \\ I_1 = \int_{-1}^{y} \left(-\frac{1}{27}t^2 + \frac{16}{27}t + \frac{17}{27}\right)dt & , \quad -1 < y \le 0 \\ I_2 = \int_{0}^{y} \left(-\frac{1}{27}t^2 - \frac{13}{54}t + \frac{17}{27}\right)dt + \int_{\cancel{0}-1}^{0} \left(-\frac{1}{27}t^2 + \frac{16}{27}t + \frac{17}{27}\right)dt & , \quad 0 < y \le 2 \\ 1 & , \quad y > 2 \end{cases}$$

$$I_1 = -\frac{1}{27\cdot 3}t^3\Big|_{-1}^{y} + \frac{\cancel{16}\,8}{27\cdot \cancel{2}}t^2\Big|_{-1}^{y} + \frac{17}{27}t\Big|_{-1}^{y} = -\frac{1}{27\cdot 3}(y^3+1) +$$

$$+ \frac{8}{27}(y^2-1) + \frac{17}{27}(y+1) = -\frac{1}{81}y^3 - \frac{1}{81} + \frac{8}{27}y^2 - \frac{8}{27} + \frac{17}{27}y +$$

$$+ \frac{17}{27} = -\frac{1}{81}y^3 + \frac{8}{27}y^2 + \frac{17}{27}y + \frac{26}{81}$$

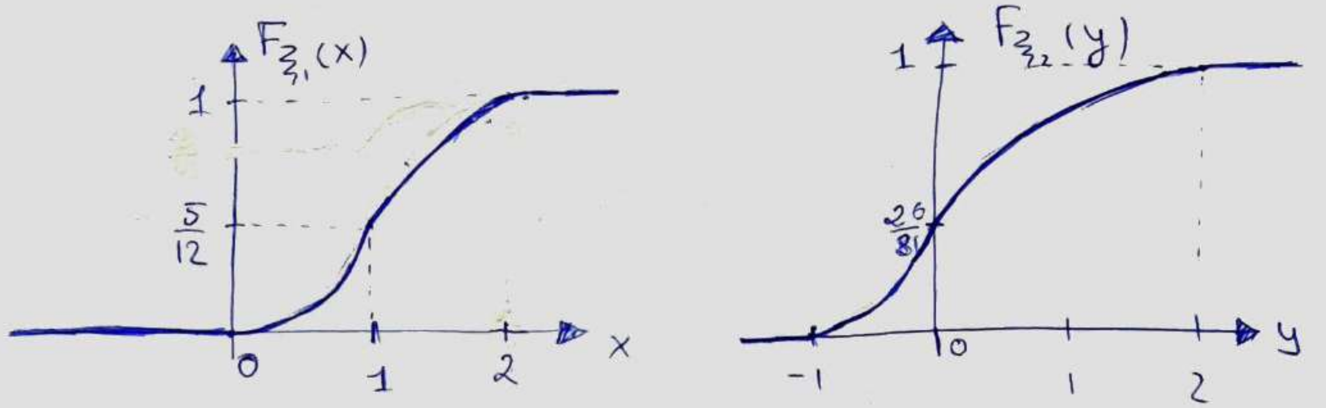
$$I_2 = -\frac{1}{3\cdot 27}t^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{8}{27}t^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{17}{27}t\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{3\cdot 27}t^3\Big|_{0}^{y} - \frac{13}{54\cdot 2}t^2\Big|_{0}^{y} +$$

$$+ \frac{17}{27}t\Big|_{0}^{y} = -\frac{1}{3\cdot 27}(0+1) + \frac{8}{27}(0-1) + \frac{17}{27}(0+1) - \frac{1}{3\cdot 27}y^3 -$$

$$- \frac{13}{54\cdot 2}y^2 + \frac{17}{27}y = -\frac{1}{81} - \frac{8}{27} + \frac{17}{27} - \frac{1}{81}y^3 - \frac{13}{108}y^2 + \frac{17}{27}y =$$

$$= -\frac{1}{81}y^3 - \frac{13}{108}y^2 + \frac{17}{27}y + \frac{26}{81}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ -\frac{1}{81}y^3 + \frac{8}{27}y^2 + \frac{17}{27}y + \frac{26}{81}, & -1 < y \le 0 \\ -\frac{1}{81}y^3 - \frac{13}{108}y^2 + \frac{17}{27}y + \frac{26}{81}, & 0 < y \le 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$



2) знайти математичні сподівання $E\xi_1$, $E\xi_2$ та дисперсії $D\xi_1$, $D\xi_2$:

$$E\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)\,dx = \frac{5}{6}\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x\left(\frac{x}{6} + \sqrt{2-x} - \frac{1}{3}\right)dx + 0 =$$

$$= \frac{5}{6\cdot 3}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{6}\int_1^2 x^2 dx + \underbrace{\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx}_{I_2} - \frac{1}{3}\int_1^2 x\,dx = \left\{\begin{matrix} \text{в } I_2: \\ 2-x=z \\ dx=-dz \\ x=1 \Rightarrow z=1 \\ x=2 \Rightarrow z=0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{5}{18} + \frac{1}{6\cdot 3}x^3\Big|_1^2 + \int_1^0 -(2-z)\sqrt{z}\,dz - \frac{1}{3\cdot 2}x^2\Big|_1^2 = \frac{5}{18} + \frac{8}{18} - \frac{1}{18} -$$

$$-2\int_1^0 \sqrt{z}\,dz + \int_1^0 z\sqrt{z}\,dz - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{18} - \frac{3}{6} - \frac{4}{3}z^{3/2}\Big|_1^0 +$$

$$+ \frac{2}{5}z^{5/2}\Big|_1^0 = \frac{12}{18} - \frac{3}{6} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10}$$

$$E\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)\,dy = 0 + \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{27}y^3 + \frac{16}{27}y^2 + \frac{17}{27}y\right)dy +$$

$$+\int_0^2\left(-\frac{1}{27}y^3-\frac{13}{54}y^2+\frac{17}{27}y\right)dy+0=0+I_1+I_2+0.$$ (13)

$$I_1=\int_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{27}y^3+\frac{16}{27}y^2+\frac{17}{27}y\right)dy=-\frac{1}{27\cdot 4}y^4\Big|_{-1}^{0}+\frac{16}{27\cdot 3}y^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{17}{27\cdot 2}y^2\Big|_{-1}^{0}=$$

$$=\frac{1}{27\cdot 4}+\frac{16}{27\cdot 3}-\frac{17}{27\cdot 2}=\frac{3}{27\cdot 4\cdot 3}+\frac{16\cdot 4}{27\cdot 3\cdot 4}-\frac{17\cdot 6}{27\cdot 2\cdot 6}=$$

$$=-\frac{35}{324}$$

$$I_2=\int_0^2\left(-\frac{1}{27}y^3-\frac{13}{54}y^2+\frac{17}{27}y\right)dy=-\frac{1}{27\cdot 4}y^4\Big|_0^2-\frac{13}{54\cdot 3}y^3\Big|_0^2+\frac{17}{27\cdot 2}y^2\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{16}{27\cdot 4}-\frac{13\cdot 8}{54\cdot 3}+\frac{17\cdot 4}{27\cdot 2}=-\frac{16\cdot 3}{27\cdot 4\cdot 3}-\frac{13\cdot 8\cdot 2}{54\cdot 6}+\frac{17\cdot 4\cdot 6}{27\cdot 2\cdot 6}=$$

$$=\cancel{-\frac{16\cdot 3}{324}}\ \frac{152}{324}=\frac{38}{81}$$

$$E\xi_2=-\frac{35}{324}+\frac{38}{81}=-\frac{35}{324}+\frac{152}{324}=\frac{117}{324}=\frac{13}{36}$$

$$E\xi_1^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_{\xi_1}(x)\,dx=\frac{5}{6}\int_0^1 x^3dx+\frac{1}{6}\int_1^2 x^3dx+$$

$$+\int_1^2\sqrt{2-x}\,x^2dx-\frac{1}{3}\int_1^2 x^2dx=\frac{5}{6\cdot 4}x^4\Big|_0^1+\frac{1}{6\cdot 4}x^4\Big|_1^2-$$

$$-\frac{1}{3^2}x^3\Big|_1^2+\int_1^2\sqrt{2-x}\,x^2dx=\left\{\begin{array}{l}2-x=z\\ dx=-dz\\ x=1\Rightarrow z=1\\ x=2\Rightarrow z=0\end{array}\right\}=\frac{5}{24}+\frac{16}{24}-$$

$$-\frac{1}{24}-\frac{8}{9}+\frac{1}{9}+\int_1^0-\sqrt{z}\,(2-z)^2dz=\frac{1}{18}-\int_0^1\sqrt{z}\,(4-4z+z^2)dz=$$

$$=\frac{1}{18}-\int_0^1 4z^{1/2}dz+\int_0^1 4z^{3/2}dz-\int_0^1 z^{5/2}dz=\frac{1}{18}-\frac{2\cdot 4}{3}z^{3/2}\Big|_0^1+$$

$$+\frac{4\cdot 2}{5} z^{5/2}\Big|_1^0 - \frac{2}{7} z^{7/2}\Big|_1^0 = \frac{1}{18} + \frac{8}{3} - \frac{8}{5} + \frac{2}{7} =$$

$$= \frac{887}{630}$$

$$D\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \frac{887}{630} - \frac{121}{100} = \frac{1247}{6300}$$

$$E\xi_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)\,dy = 0 + \int_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{27}y^4 + \frac{16}{27}y^3 + \frac{17}{27}y^2\right)dy +$$

$$+ \int_0^2\left(-\frac{1}{27}y^4 - \frac{13}{54}y^3 + \frac{17}{27}y^2\right)dy = -\frac{1}{27\cdot 5}y^5\Big|_{-1}^0 + \frac{16}{27\cdot 4}y^4\Big|_{-1}^0 +$$

$$+\frac{17}{27\cdot 3}y^3\Big|_{-1}^0 - \frac{1}{27\cdot 5}y^5\Big|_0^2 - \frac{13}{54\cdot 4}y^4\Big|_0^2 + \frac{17}{27\cdot 3}y^3\Big|_0^2 = -\frac{1}{27\cdot 5} -$$

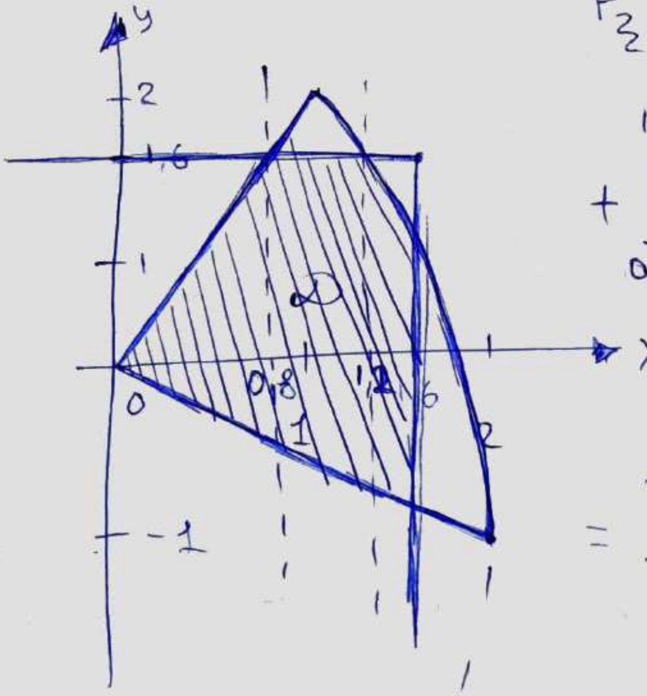
$$-\frac{16}{27\cdot 4} + \frac{17}{27\cdot 3} - \frac{1\cdot 32}{27\cdot 5} - \frac{13\cdot 16}{54\cdot 4} + \frac{17\cdot 8}{27\cdot 3} =$$

$$= -\frac{1}{135} - \frac{16}{108} + \frac{17}{81} - \frac{32}{135} - \frac{208}{216} + \frac{136}{81} =$$

$$= \frac{8}{15}$$

$$D\xi_2 = \frac{8}{15} - \left(\frac{13}{36}\right)^2 = \frac{2611}{6480}$$

g) Визначити сумісну ф-цію розподілу в точці: $F_{\xi_1,\xi_2}(1{,}6; 1{,}6)$.



$$F_{z_1,z_2}(1{,}6;1{,}6)=\int_0^{0{,}8}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{2x}\frac{1}{3}dy+\int_{0{,}8}^{1{,}2}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{1{,}6}\frac{1}{3}dy+\int_{1{,}2}^{1{,}6}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1}\frac{1}{3}dy=$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\int_0^{0{,}8}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{2x}\frac{1}{3}dy=\int_0^{0{,}8}\frac{1}{3}\left(2x+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^{0{,}8}\left(2x+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}\cdot x^2\Big|_0^{0{,}8}+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}\Big|_0^{0{,}8}=\frac{1}{3}(0{,}8)^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{(0{,}8)^2}{4}=0{,}26667$$

$$I_2=\int_{0{,}8}^{1{,}2}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{1{,}6}\frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}\int_{0{,}8}^{1{,}1}\left(1{,}6+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}1{,}6x\Big|_{0{,}8}^{1{,}2}+\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}\Big|_{0{,}8}^{1{,}2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot1{,}6\,(1{,}2-0{,}8)+\frac{1}{3}\left(\frac{(1{,}2)^2}{4}-\frac{(0{,}8)^2}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(1{,}6\cdot0{,}4+0{,}2\right)=$$

$$=0{,}28$$

$$I_3=\int_{1{,}2}^{1{,}6}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1}\frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}\int_{1{,}2}^{1{,}6}\left(3\sqrt{2-x}-1+\frac{x}{2}\right)dx=\cancel{\frac{1}{3}}\int_{1{,}2}^{1{,}6}\cancel{3}\sqrt{2-x}\,dx-$$

$$-\frac{1}{3}\int_{1{,}2}^{1{,}6}dx+\frac{1}{3}\int_{1{,}2}^{1{,}6}\frac{x}{2}dx=\left\{\begin{array}{l}2-x=z\\ dz=-dx\\ x=1{,}6\Rightarrow z=0{,}4\\ x=1{,}2\Rightarrow z=0{,}8\end{array}\right\}=-\int_{0{,}8}^{0{,}4}\sqrt{z}\,dz-\frac{1}{3}x\Big|_{1{,}2}^{1{,}6}+$$

$$+\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}\Bigg|_{1,2}^{1,6} = -z^{3/2}\Bigg|_{0,8}^{0,4}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(1,6-1,2) + \left(\frac{(1,6)^2}{4} - \frac{(1,2)^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left((0,4)^{\frac{3}{2}} - (0,8)^{3/2}\right) - \frac{1}{3}(1,6-1,2) + \left(\frac{(1,6)^2}{4} - \frac{(1,2)^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}0,46256 - \frac{1}{3}\cdot 0,4 + \frac{1}{3}\frac{1}{4}\cdot 1,12 = 0,268373$$

$$F_{\xi_1,\xi_2}(1,6;1,6) = 0,26667 + 0,28 + 0,268373 = 0,815043$$

е) побудувати коваріаційну м-цю вектора $\vec{\xi}$, знайти коеф. кореляції r_{ξ_1,ξ_2} та проаналіз. залежність та корельованість ~~величин~~ координат ξ_1 та ξ_2.:

$$K_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} D\xi_1 & cov(\xi_1,\xi_2) \\ cov(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 \end{pmatrix}$$

$$cov(\xi_1,\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$$

$$E\xi_1\xi_2 = \iint_D xy\, f_{\vec{\xi}}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{-\frac{x}{2}}^{2x} xy\frac{1}{3}dy +$$

$$+\int_1^2 dx\int_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1} xy\frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}\int_0^1 x\,dx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\frac{x}{2}}^{2x} + \frac{1}{3}\int_1^2 x\,dx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\frac{x}{2}}^{3\sqrt{2-x}-1} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x\left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{4\cdot 2}\right)dx + \frac{1}{3}\int_1^2 x\left(\frac{(3\sqrt{2-x}-1)^2}{2} - \frac{x^2}{4\cdot 2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(2x^3 - \frac{x^3}{8}\right)dx + \frac{1}{3}\int_1^2 x\cdot\frac{9(2-x)-6\sqrt{2-x}+1}{2} - \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x^3}{4\cdot 2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4}x^4 - \frac{x^4}{4\cdot 8}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{9x(2-x)}{2}dx - \frac{1}{\cancel{3}}\int_1^2 \frac{\cancel{6}\sqrt{2-x}\cdot x}{\cancel{2}}\cancel{dx} +$$

$$+ \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{x}{2}dx - \frac{1}{3}\frac{x^4}{4\cdot 4\cdot 2}\Big|_1^2 = \begin{Bmatrix} 2-x=z \\ dz=-dx \\ x=2 \Rightarrow z=0 \\ x=1 \Rightarrow z=1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4\cdot 8}\right) +$$

$$+ \frac{9}{6}\int_1^2 (2x-x^2)dx + \int_1^0 z^{1/2}(2-z)dz + \frac{1}{3}\frac{x^2}{4}\Big|_1^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{16\cdot 2} - \frac{1}{32}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}}\,\frac{9}{6}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 + \int_1^0 \left(2z^{1/2} - z^{\frac{3}{2}}\right)dz + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 0 =$$

$$= \frac{9}{6}\left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) + \left(2z^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{5}z^{5/2}\right)\Big|_1^0 + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{9}{6}\left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) + \left(-2\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{4} = \frac{19}{60}$$

$$Cov(\xi_1, \xi_2) = \frac{19}{60} - \frac{13}{36}\cdot\frac{11}{10} = -\frac{29}{360}$$

$$K_{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} \frac{1247}{6300} & -\frac{29}{360} \\ -\frac{29}{360} & \frac{2611}{6480} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1979 & -0{,}0806 \\ -0{,}0806 & 0{,}4029 \end{pmatrix}$$

$$r_{\xi_1,\xi_2} = \frac{Cov(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D_{\xi_1}}\cdot\sqrt{D_{\xi_2}}} = \frac{-\frac{29}{360}}{\sqrt{\frac{1247}{6300}}\cdot\sqrt{\frac{2611}{6480}}} = -0,2852$$

Як бачимо, $|r_{\xi_1,\xi_2}| < 1$, та $r_{\xi_1,\xi_2} \neq 0$, отже координати кореловані та залежні.