Calcul Scientifique

Cours 6: Dérivée et gradient de fonction

Alexis Lechervy

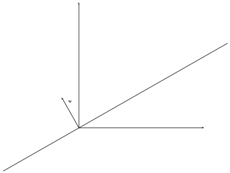
Sommaire

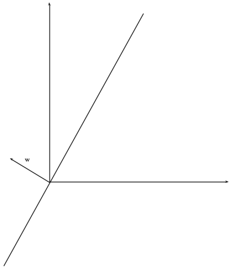
Droite

Définition d'une droite

Pour définir une droite, il nous faut un vecteur w orthogonale à la droite et un biais b correspondant au décalage de la droite à la droite parallèle passant par l'origine du repère.

Influence du vecteur normale w





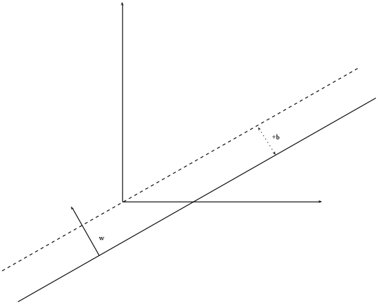
Remarque : il y a une infinité de vecteur orthogonaux à la droite qui conviennent tous.

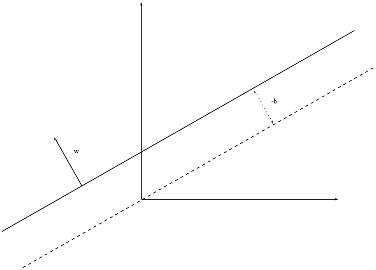
Droite

Définition d'une droite

Pour définir une droite, il nous faut un vecteur w orthogonale à la droite et un biais b correspondant au décalage de la droite à la droite parallèle passant par l'origine du repère.

Influence du biais b





Droite

Formulation mathématique

Soit le vecteur w et le biais b. Un point m appartient à la droite si $\langle w, m\rangle + b = 0$.

Équation en 2D

Soit le vecteur $w = [w_1, w_2]$ et le biais b. Un point $m = [x, y]$ appartient à la droite si et seulement si

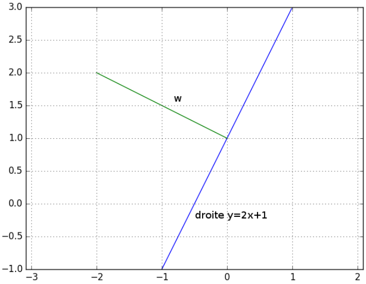
$$
\begin{aligned}
\langle w, m\rangle + b &= 0 && (1)\\
w_1x + w_2y + b &= 0 && (2)\\
w_2y &= -w_1x - b && (3)\\
y &= -\frac{w_1}{w_2}x - \frac{b}{w_2} && (4)\\
y &= a'x + b' \text{en posant } a' = \frac{-w_1}{w_2} \text{ et } b' = \frac{-b}{w_2} && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Retrouver un vecteur normale à la droite en 2D

Comment retrouver un vecteur et le biais ?

Soit une droite définis par $y = a'x + b'$, il existe une infinité de vecteur w orthogonale à la droite, prenons donc un particulier par exemple celui dont la coordonnée en y vaut 1. On a d'après le slide précédent :

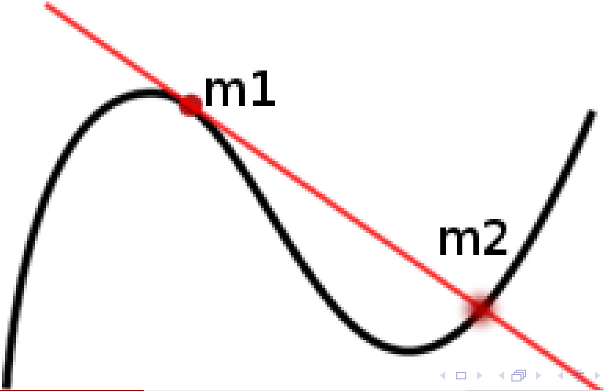
$$\begin{cases} a' = \frac{-w_1}{w_2} \\ b' = \frac{-b}{w_2} \\ w_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} w_1 = -a' \\ w_2 = 1 \\ b = -b' \end{cases}$$



Corde d'une fonction

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, m_1 et m_2 deux points de la courbe. La corde est le segment passant par m_1 et m_2.
Nous nous intéresserons par la droite passant par cette corde. On peut voir cette droite comme une approximation de la courbe par une droite.



Corde d'une fonction

Droite passant par une cordes

On sais que les vecteurs normales à la droite passant par la corde doit être normale au vecteur $\overrightarrow{m_1 m_2}$. On sais aussi que la droite doit passer par m_1 et m_2. Par conséquence :

$$\left\{\begin{array}{c} \langle w, m_1 - m_2 \rangle = 0 \\ \langle w, m_1 \rangle + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} w_1(x_{m_1} - x_{m_2}) + w_2(y_{m_1} - y_{m_2}) = 0 \\ w_1 x_{m_1} + w_2 y_{m_1} + b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} w_2 = & 1 \\ w_1 = & -\dfrac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}} \\ b = & -w_1 x_{m_1} - y_{m_1} \end{array}\right.$$

Droite passant par une cordes sous la forme $y = ax + b$

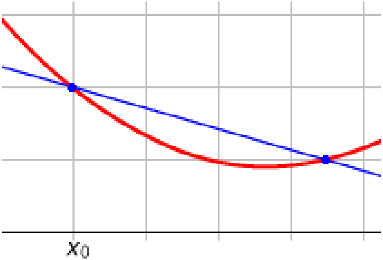
On avait $y = a'x + b'$en posant $a' = \frac{-w_1}{w_2}$ et $b' = \frac{-b}{w_2}$
Donc

$$y = \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}}(x - x_{m_1}) + y_{m_1}$$

Définition de la tangente

Définition de la tangente

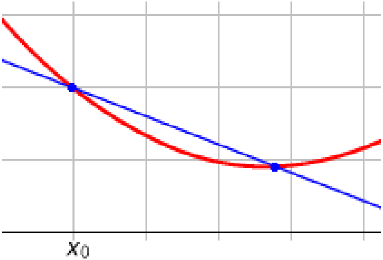
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

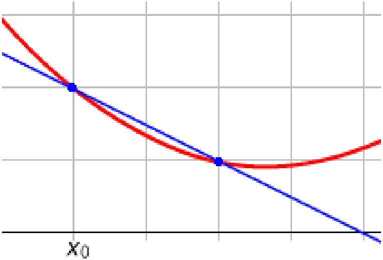
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

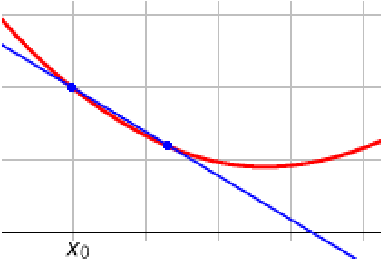
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

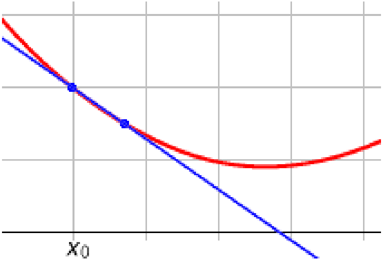
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

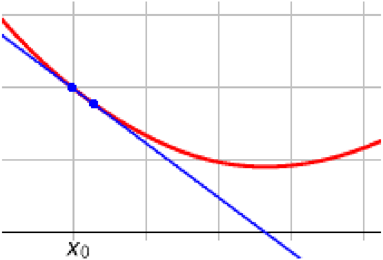
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

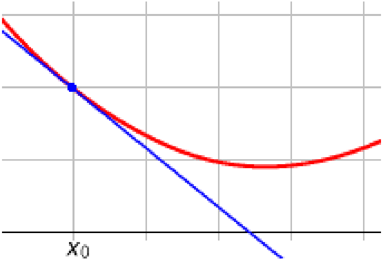
La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Définition de la tangente

Définition de la tangente

La tangente d'une fonction en un point est la droite qui approxime le mieux la courbe en ce point. Elle correspond à la droite passant par la corde de deux points quand les deux points tendent à ce confondre.



Tangente et dérivée

Formulation mathématique de la tangente

$$y = \lim_{m_2 \longrightarrow m_1} \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}}(x - x_{m_1}) + y_{m_1}$$

Définition de la dérivée

La dérivée f' d'une fonction f en x est le coefficient directeur de la tangente à la fonction f au point $(x, f(x))$.

$$f'(x_{m_1}) = \lim_{m_2 \longrightarrow m_1, m_2 \neq m_1} \frac{y_{m_1} - y_{m_2}}{x_{m_1} - x_{m_2}}$$

Formulation de la tangente avec la dérivée

$$y = f'(x_{m_1})(x - x_{m_1}) + f(x_{m_1})$$

Calcul de la dérivée en informatique

Formulation de la dérivée par variation de x

Soit h une léger décalage de x. La dérivée correspond à :

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

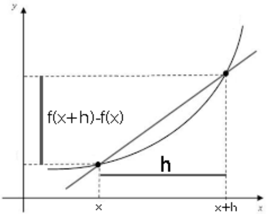
Estimation de la dérivée en informatique

Pour h suffisamment petit :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivée sous scipy

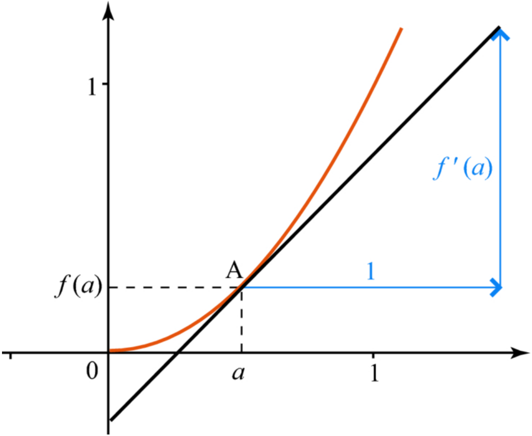
```
import scipy as sc
import scipy.misc
def f(x) :
    return x**3
x= np.arange(-1,1,1./100)
df = sc.misc.derivative(f,x, dx=1e-6)
```



Applications de la dérivée

Applications

- Approximation locale d'une fonction par une droite.
- Étude des variations d'une fonction.

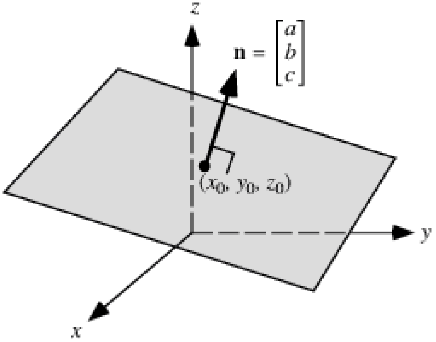


Sommaire

Définition d'une plan en 3D

Définition d'une droite

Pour définir une plan, il nous faut un vecteur w orthogonale au plan et un biais b correspondant au décalage du plan par rapport au plan parallèle passant par l'origine du repère.



Droite

Formulation mathématique

Soit le vecteur w et le biais b. Un point m appartient à la droite si $\langle w, m \rangle + b = 0$.

Équation en 3D

Soit le vecteur $w = [w_1, w_2, w_3]$ et le biais b. Un point $m = [x, y, z]$ appartient au plan si et seulement si

$$\langle w, m \rangle + b = 0 \quad (7)$$

$$w_1 x + w_2 y + w_3 z + b = 0 \quad (8)$$

Remarque

Le plan dans un espace 3D est "l'équivalent" de la droite dans l'espace 2D. On va pouvoir approximer localement une surface 3D par un plan un tangent à la surface.

Plan tangent à une fonction 3D

Idée

Pour définir la tangente, on était partie de 2 points de la courbes que l'on avait fait tendre l'un vers l'autre. Pour définir un plan, il faut trois points de la courbe que l'on va également faire tendre vers un unique point.

Plan tangent

$$\langle \triangledown f(a), x - a \rangle - (f(x) - f(a)) = 0$$

avec $\triangledown f(a)$ le gradient de f en a.

Le gradient 2D de f en un point m

Le gradient f en m est le vecteur

$$\triangledown f(m) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial f(y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Exemple d'application du gradient

Détection des contours dans une image

On peut utiliser la norme du vecteur gradient d'une image pour avoir une image de contours.