Reglas de inferencia para cuantificadores

Suponga que nuestra base de conocimiento contiene el axioma que afirma que los reyes que son codiciosos también son malvados.

$$\forall x \;\; Rey(x) \wedge Codicioso(x) \Rightarrow Malvado(x).$$

Entonces parece bastante permicible inferir cualquiera de las siguientes sentencias:

$$\begin{array}{l} Rey(Juan) \wedge Codicioso(Juan) \Rightarrow Malvado(Juan). \\ Rey(Ricardo) \wedge Codicioso(Ricardo) \Rightarrow Malvado(Ricardo). \\ Rey(Padre(Juan)) \wedge Codicioso(Padre(Juan)) \Rightarrow Malvado(Padre(Juan)). \\ \vdots \end{array}$$

La regla de la especificación universal dice que podemos inferir cualquier sentencia obtenida de la sustitución de la variable por un término base. Para anotar la regla de inferencia formalmente utilizamos el concepto de sustitución

$$\frac{\forall v \;\; \alpha}{\textsc{Sust}(\{v/g\}, \alpha)}$$

Que nos dice que para cualquier variable v y término base g se sustituye g por v en la sentencia α. Por ejemplo, las tres sentencias mostradas anteriormente se obtienen con las sustituciones {x/Juan}, {x/Ricardo] y {x/Padre(Juan)}.

La correspondiente regla de especificación existencial para el cuantificado existencial es la siguiente:

$$\frac{\exists v \;\; \alpha}{\textsc{Sust}(\{v/k\}, \alpha)}$$

Que nos dice que para cualquier sentencia α, variable v, y símbolo de constante k que no aparezca en ninguna otra parte de la base de conocimiento, se sustituye k por v. Por ejemplo, la sentencia

$$\exists x \;\; Corona(x) \wedge SobreCabeza(x, Juan)$$

podemos inferir la sentencia

$$Corona(C_1) \wedge SobreCabeza(C_1, Juan)$$

mientras que C_1 no aparezca en ningún otro sitio de la base de conocimiento. Básicamente, la sentencia existencial nos dice que hay algún objeto que satisface una condición, y el proceso de especificación tan solo le da un nombre a dicho objeto.

Reducción a la inferencia proposicional

Una vez que tenemos las reglas para inferir sentencias no cuantificadas a partir de sentencias cuantificadas, nos es posible reducir la inferencia de primer orden a la inferencia proposicional.

La primer idea consiste en que como una sentencia cuantificada existencialmente se puede sustituir por una especificación, una sentencia cuantificada universalmente se puede sustituir por el conjunto de todas las especificaciones posibles. Por ejemplo, suponga que nuestra base de conocimiento contiene las siguientes sentencias

$$\forall x \ Rey(x) \wedge Codicioso(x) \Rightarrow Malvado(x)$$
$$Rey(Juan)$$
$$Codicioso(Juan)$$
$$Hermano(Ricardo, Juan)$$

Entonces aplicamos la especificación universal a la primer sentencia, utilizando todas las sustituciones de términos base posibles, tomadas del vocabulario de la base de conocimiento, en este caso {x/Juan} y {x/Ricardo}. Obtenemos

$$Rey(Juan) \wedge Codicioso(Juan) \Rightarrow Malvado(Juan),$$
$$Rey(Ricardo) \wedge Codicioso(Ricardo) \Rightarrow Malvado(Ricardo),$$

y descartamos la sentencia cuantificada universalmente. Ahora, la base de conocimiento es esencialmente proposicional, si vemos las sentencias atómicas como símbolos proposicionales. Por lo tanto, podemos inferir como en la lógica proposicional para obtener conclusiones.

Unificación

La unificación es el proceso de encontrar las sustituciones que hacen que expresiones lógicas diferentes se hagan idénticas. La unificación es el componente clave de todos los algoritmos de inferencia en lógica de primer orden. El algoritmo UNIFICA toma dos sentencias y devuelve un unificador para ellas si existe:

$$\textsc{Unifica}(p, q) = \theta \text{ donde } \textsc{Sust}(\theta, p) = \textsc{Sust}(\theta, q).$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos una consulta Conoce(Juan,X). Algunas respuestas a esta pregunta se pueden hallar encontrando todas las sentencias de la base de conocimiento que se unifiquen con Conoce(Juan,x).

$$\textsc{Unifica}(Conoce(Juan, x), Conoce(Juan, Juana)) = \{x/Juana\}$$
$$\textsc{Unifica}(Conoce(Juan, x), Conoce(y, Guillermo)) = \{Guillermo, y/Juan\}$$
$$\textsc{Unifica}(Conoce(Juan, x), Conoce(y, Madre(y))) = \{y/Juan, x/Madre(Juan)\}$$
$$\textsc{Unifica}(Conoce(Juan, x), Conoce(x, Elisabet)) = fallo.$$

La última unificación falla porque x no puede ser Juan y Elisabet al mismo tiempo.El problema es que las dos sentencias tienen que utilizar el mismo nombre de variable x. Si cambiamos el nombre de alguna de las variables entonces la unificación funciona

$$\textsc{Unifica}(Conoce(Juan, x), Conoce(z_{17}, Elisabet)) = \{x/Elisabet, z_{17}/Juan\}$$