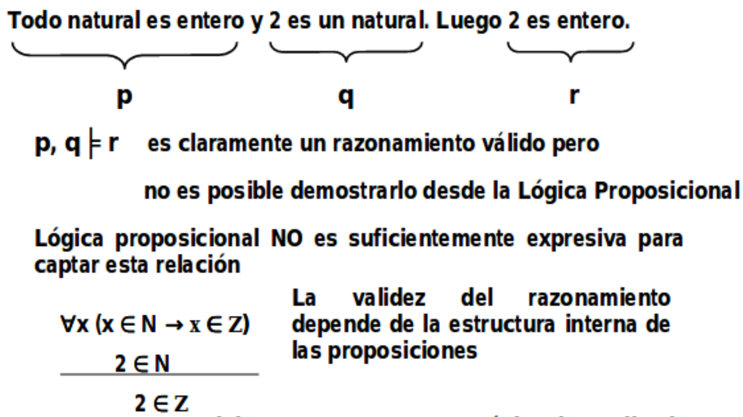
Lógica de primer orden

La lógica proposicional es un lenguaje declarativo porque su semántica se basa en la relación de verdad entre las sentencias y los mundos posibles. Lo que tiene el suficiente poder expresivo para tratar información incompleta, mediante la disyunción y conjunción.

La lógica proposicional carece del poder expresivo para describir de forma precisa un entorno con muchos objetos. Por ejemplo:



Los lenguajes naturales son, por el contrario, muy expresivos. Sin embargo los lenguajes naturales tienen un propósito como medio de comunicación más que como una pura representación. El significado de una sentencia en lenguaje natural depende tanto de la propia sentencia como del contexto al que se hace referencia. Los lenguajes naturales sufren de ambigüedad, que pueden causar ciertos obstáculos en su comprensión.

Cuando observamos la sintaxis del lenguaje natural, los elementos más obvios son los nombres de las sentencias nominales que se refieren a los objetos y los verbos y sentencias verbales que se refieren a las relaciones entre los objetos. Algunas de estas relaciones son funciones.

- Objetos: gente, casas, números, teorías, colores, guerras, siglos, ….
- Relaciones: Pueden ser relaciones unitarias o propiedades, como ser de color rojo, ser redondo, ser ficticio, ser número primo, …. o relaciones n-arias más generales como ser hermano de, ser más grande que, estar dentro de, formar parte de, tener color, ….
- Funciones: el padre de, el mejor amigo de, uno mayor que, el comienzo de, ….

Se puede pensar en casi cualquier aserción como una referencia a aobjetos y propiedades o relaciones.

- Uno sumado a dos es igual a tres
  - Objetos: uno, dos, tres, uno sumado a dos
  - Relaciones: es igual a
  - Funciones: sumado a
- El malvado rey Juan goberno Inglaterra en 1200
  - Objetos: Juan, Inglaterra, 1200
  - Relaciones: gobernar
  - Propiedades: malvado, rey

El lenguaje proposicional se compone sobre objetos y relaciones. También permite expresar hechos acerca de algunos o todos los objetos de un universo de discurso. La principal diferencia entre la lógica de primer orden y la lógica proposicional se apoya en el compromiso ontológico realizado por cada lenguaje (lo que asume cada uno acerca de la naturaleza de la realidad. Por ejemplo, la lógica proposicional asume que hay hechos que suceden o no suceden en el mundo. Cada hecho puede estar en uno de los dos estados, verdadero o falso. La lógica de primer orden asume mucho más, que el mundo se compone de objetos con ciertas relaciones entre ellos que suceden o no suceden.

Existen otro tipo de lógica que capturan más detalles sobre el mundo, en la figura 8.1 se muestra una comparación entre los diferentes tipo se lógica.

Lenguaje	Compromiso ontológico (lo que sucede en el mundo)	Compromiso epistemológico (lo que el agente cree acerca de los hechos)
Lógica proposicional	Hechos	Verdadero/falso/desconocido
Lógica de primer orden	Hechos, objetos, relaciones	Verdadero/falso/desconocido
Lógica temporal	Hechos, objetos, relaciones, tiempos	Verdadero/falso/desconocido
Teoría de las probabilidades	Hechos	Grado de creencia $\in$ [0, 1]
Lógica difusa	Hechos con un grado de verdad $\in$ [0, 1]	Valor del intervalo conocido

Figura 8.1 Lenguajes formales y sus compromisos ontológicos y epistemológicos.

Modelos en lógica de primer orden

Los modelos en un lenguaje lógico son las estructuras formales que establecen los mundos posibles que se tienen en cuenta. Los modelos de la lógica proposicional son los conjuntos de valores de verdad para los símbolos proposicionales. Los modelos de la lógica de primer orden contienen a los objetos. El dominio de un modelo es el conjunto de objetos que contiene; a estos objetos a veces se les denomina elementos del dominio. La Figura 8.2 muestra un modelo con cinco objetos: Ricardo Corazón de León, Rey de Inglaterra de 1189 a 1199; su hermano más joven, el malvado Rey Juan, quien reinó de 1199 a1215; las piernas izquierda de Ricardo y Juan; y una corona.

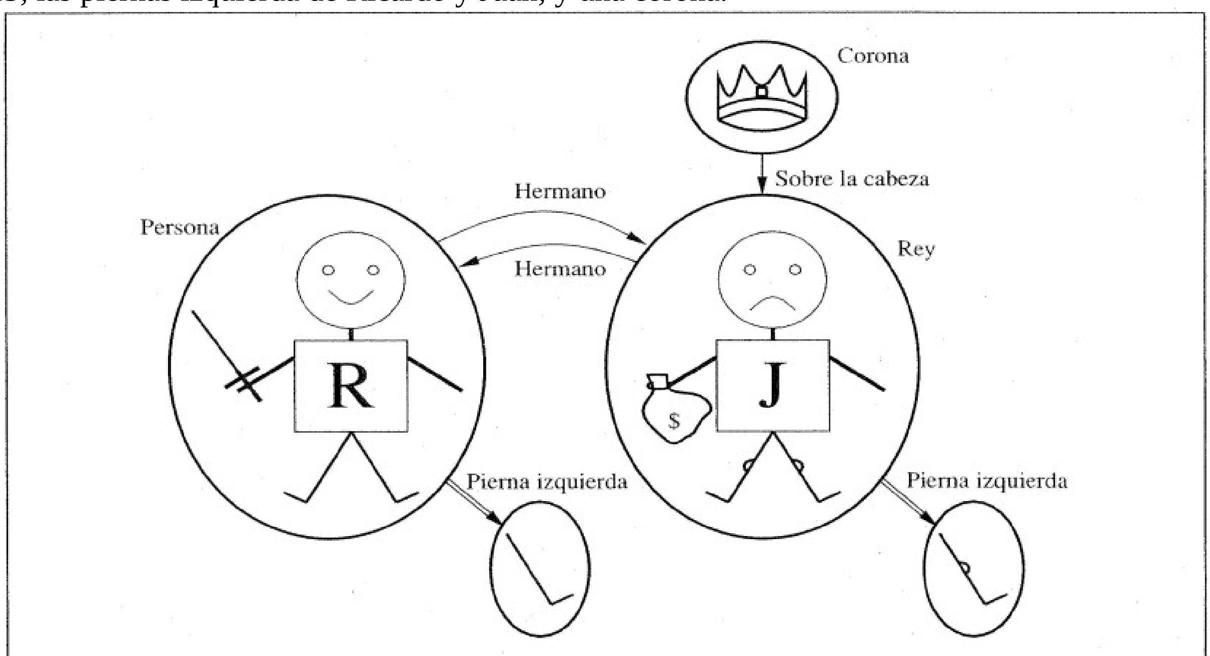


Figura 8.2 Un modelo que contiene cinco objetos, dos relaciones binarias, tres relaciones unitarias (indicadas mediante etiquetas sobre los objetos), y una función unitaria: pierna izquierda.

Los objetos en el modelo pueden estar relacionados de diversas formas. En la figura, Ricardo y Juan son hermanos. Hablando formalmente, una relación es sólo un conjunto de tuplas de objetos que están relacionados. De esta manera, la relación de “hermandad” en este modelo es el conjunto

[(Ricardo Corazón de León, Rey Juan), (Rey Juan, Ricardo Corazón de León)]

La corona está colocada sobre la cabeza del Rey Juan, así que la relación “sobre la cabeza” solo contiene una tupla, (Corona, Rey Juan). Las relaciones “hermano” y “sobre la cabeza” son relaciones binarias, es decir, relacionan parejas de objetos. El modelo también contiene relaciones unitarias o propiedades: la propiedad “ser persona” es verdadera tanto para Ricardo como para Juan; la propiedad “ser rey” es verdadera sólo para Juan (presumiblemente porque Ricardo está muerto en ese instante); y la propiedad “ser una corona” sólo es verdadera para la corona.

Hay cierto tiepo de relación que es mejor que se considerenc omo funciones; en estas relaciones un objeto dado debe relacionarse exactamente con otro objeto. Por ejemplo, cada persona tiene una pierna izquierda, entonces el modelo tiene la función unitaria “pierna izquierda” con ls siguientes aplicaciones:

Ricardo Corazón de León → pierna izquierda de Ricardo
Rey Juan → Pierna izquierda de Juan

Hablando de forma estricta, los modelos en la lógica de primer orden requieren funciones totales, es decir, debe haber un valor para cada tupla de entrada. Así, la corona debería tener una pierna izquierda y por lo tanto, también cada pierna izquierda debería tener una pierna izquierda. Hay una solución técnica para este problema, incluyendo un objeto “invisible” adicional, que es la pierna izquierda de cada cosa que no tiene pierna izquierda, incluyéndose a si misma.

Símbolos e interpretaciones

Los elementos sintácticos básicos de la lógica de primer orden son los símbolos que representan los objetos, las relaciones y las funciones. Por consiguiente, los símbolos se agrupan en tres tipos:

1. Símbolos de constante, que representan objetos. (Ricardo, Juan)
2. Símbolos de predicado, que representan relaciones. (Hermano, SobreCabeza, Persona, Rey, Corona)
3. Símbolos de función, que representan funciones. (PiernaIzquierda)

Al igual que con los símbolos proposicionales, la selección de nombres depende enteramente del usuario. Cada símbolo de predicado y de función tiene una aridad que establece el número de argumentos.

La semántica debe relacionar las sentencias con los modelos para determinar su calor de verdad. Para que esto ocurra, necesitamos de una interpretación que especifíque exactamente qué objetos, relaciones y funciones son referenciados mediante símbolos de constante, de predicados y de función respectivamente. Una interpretación posible para nuestro ejemplo (llamada interpretación deseada) podría ser la siguiente:

- Ricardo se refiere a Ricardo Corazón de León y Juan se refiere al malado Rey Juan.
- Hermano se refiere a la relación de hermandad, es decir, al conjunto de tuplas de objetos que se definieron anteriormente. SobreCabeza se refiere a la relación que sucede entre la corona y el Rey Juan. Persona, Rey y Corona se refieren a los conjuntos de objetos persona, reyes, y coronas.
- PiernaIzuierda se refiere a la función que establece la relación para la pierna izquierda de Ricardo y de Juan respectivamente.

El valor de verdad de cualquier sentencia se determina por un modelo y por una interpretación de los símbolos de la sentencia. Por lo tanto, la implicación, la validez, etc. se determinan con base en todos los modelos posibles y todas las interpretaciones posibles. Es importante resaltar que el número de elementos del dominio puede ser infinito, por ejemplo, los elementos del dominio pueden ser números reales o enteros. Por eso, el número de modelos posibles es infinito, igual que el número de interpretaciones. La comprobación de la implicación mediante la enumeración de todos los modelos posibles, que funcionaba en lógica proposicional, no es una opción acertada para la lógica de primer orden. Aunque el número de objetos este restringido, el número de combinaciones puede ser enorme. Con los símbolos de nuestro ejemplo, hay aproximadamente 10^{25} combinaciones para un dominio de cinco objetos.

Términos

Un término es una expresión lógica que se refiere a un objeto. Por lo tanto, los símbolos de constante son términos, pero no siempre es conveniente tener un símbolo distinto para cada objeto. Por ejemplo, en español podríamos utilizar la expresión "la pierna izquierda del Rey Juan", y sería mucho mejor que darle un nombre a su pierna izquierda. Para esto sirven los símbolos de función: en vez de utilizar un símbolo de constante utilizamos PiernaIzquierda(Juan). En general un término complejo está formado por un símbolo de función seguido de una lista de términos entre paréntesis que son los argumentos del símbolo de función. Es importante resaltar que un término complejo tan solo es un tipo de nombre un tanto complicado. No es una llamada a función o subrutina que devuelve un valor. No hay una subrutina PiernaIzquierda que tome una persona como entrada y devuelva una pierna.

Sentencias atómicas

Una sentencia atómica esta formada por un símbolo de predicado seguido de una lista de términos entre parentesis:

Hermano(Ricardo, Juan)

Esto representa, bajo la interpretación deseada que hemos dado antes, que Ricardo Corazón de León es el hermano del Rey Juan. Las sentencias atómicas pueden tener términos complejos. De este modo

CasadoCon(Padre(Ricardo),Madre(Juan))

representa que el padre de Ricardo Corazón de León está casado con la madre del Rey Juan.

Una sentencia atómica es verdadera en un modelo dado, y bajo una interpretación dada, si la relación referenciada por el símbolo de predicado sucede entre los objetos referenciados por los argumentos.

Sentencias compuestas

Podemos utilizar las conectivas lógicas para construir sentencias más complejas, igual que en la lógica proposicional. La semántica de las sentencias formadas con las conectivas lógicas es idéntica a la de la lógica proposicional. Por ejemplo:

$$\neg Hermano(PiernaIzquierda(Ricardo), Juan)$$
$$Hermano(Ricardo, Juan) \land Hermano(Juan, Ricardo)$$
$$Rey(Ricardo) \lor Rey(Juan)$$
$$\neg Rey(Ricardo) \Rightarrow Rey(Juan)$$

Cuantificadores

Una vez que tenemos una lógica que nos permite representar objetos, es natural querer expresar las propiedades de colecciones enteras de objetos en vez de enumerar los objetos por su nombre. Los cuantificadores nos permiten hacer eso. La lógica de primer orden contiene dos cuantificadores estándar, denominados universal y existencial.

Cuantificador universal ∀

General mente ∀ se pronuncia "para todo ...." Así, la sentencia "Para todo X, si x es un rey, entonces x es una persona" se debe escribir

$$\forall x\ Rey(x) \rightarrow Persona(x)$$

Al símbolo x se le llama variable. Por convenio, las variables se escriben en minusculas. Una variable es en si misma un término, y como tal, también puede utilizarse como el argumento de una función, por ejemplo, PiernaIzquierda(x). Un término que no tiene variables se denomina término base.

De forma intuitiva, la sentencia ∀xP, donde P es una expresión lógica, dice que P es verdadera para cada objeto x.

x = Ricardo Corazón de León
x = Rey Juan
x = pierna izquierda de Ricardo
x = pierna izquierda de Juan
x = la corona

Cuantificador existencial ∃

De forma similar, utilizando un cuantificador existencial, podemos construir enunciados acerca de algún objeto del universo en discurso sin nombrarlo. Para decir que el Rey Juan tiene una corona sobre su cabeza, escribimos

$$\exists x\ Corona(x) \wedge SobreCabeza(x,Juan)$$

∃x se pronuncia "Existe un x tal que...." o "Para algún x...."

De forma intuitiva la sentencia ∃xP dice que P es verdadera al menos para al menos un objeto x.

x = Ricardo Corazón de León
x = Rey Juan
x = pierna izquierda de Ricardo
x = pierna izquierda de Juan
x = la corona

Cuantificadores anidados

A menudo queremos expresar sentencias más complejas utilizando múltiples cuantificadores. El caso más sencillo es donde los cuantificadores son del mismo tipo por ejemplo, "los hermanos son familiares"

$$\forall x\ \forall y\ Hermano(x,y) \rightarrow Familiar(x,y)$$

También puede escribirse

$$\forall x,y\ Hermano(x,y) \rightarrow Familiar(x,y)$$

Si los cuantificadores no son del mismo tipo también se pueden combinar, por ejemplo “Todo mundo ama a alguien”

$$\forall x\ \exists y\ Amar(x,y)$$

Si escribimos

$$\exists y\ \forall x\ Amar\ (x,y)$$

Diría “Hay alguien que es amado por todos”. Por lo tanto el orden de los cuantificadores es muy importante.

Equivalencias entre ∀ y ∃

Los dos cuantificadores realmente estan conectados el uno con el otro, mediante la negación. Afirmar que a todo mundo no le gustan las espinacas es lo mismo que afirmar que no existe alguien a quien le gusten.

$$\forall x\ \neg Gusta(x, Espinacas) \text{ es quivalente a } \neg\exists x\ Gusta(x,Espinacas)$$

De manera general tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\forall x\ \neg P &\equiv \neg\exists x\ P \\
\neg\forall x\ P &\equiv \exists x\ \neg P \\
\forall x\ P &\equiv \neg\exists x\ \neg P \\
\exists x\ P &\equiv \neg\forall x\ \neg P
\end{aligned}$$

Igualdad

La lógica de primer orden incluye un mecanismo extra para construir sentencias atómicas, uno que no utiliza un predicado y unos términos como se describió antes. En lugar de ello, podemos utilizar el símbolo de igualdad para construir enunciados describiendo que dos terminos se refieren al mismo objeto. Por ejemplo:

$$Padre(Juan) = Enrique$$

dice que el objeto referenciado por Padre(Juan) y el objeto referenciado por Enrique son el mismo.

El símbolo de igualdad se puede utilizar también con la negación para indicar que dos términos no son el mismo objeto. Por ejemplo para decir que Ricardo tiene al menos dos hermanos escribiriamos:

$$\exists x,y\ Hermano(x, Ricardo) \wedge Hermano(y, Ricardo) \wedge \neg(x=y)$$

Sintaxis de la lógica de primer orden

La lógica de primer orden queda definida entonces de la siguiente manera

$$
\begin{array}{rcl}
\textit{Sentencia} & \rightarrow & \textit{SentenciaAtómica} \\
 & | & (\textit{Sentencia Conectiva Sentencia}) \\
 & | & \textit{Cuantificador Variable} \ldots \textit{Sentencia} \\
 & | & \neg\textit{Sentencia} \\
 & & \\
\textit{SentenciaAtómica} & \rightarrow & \textit{Predicado}(\textit{Término} \ldots) \mid \textit{Término} = \textit{Término} \\
 & & \\
\textit{Término} & \rightarrow & \textit{Función}(\textit{Término} \ldots) \\
 & | & \textit{Constante} \\
 & | & \textit{Variable} \\
 & & \\
\textit{Conectiva} & \rightarrow & \Rightarrow \mid \wedge \mid \vee \mid \Leftrightarrow \\
\textit{Cuantificador} & \rightarrow & \forall \mid \exists \\
\textit{Constante} & \rightarrow & A \mid X_1 \mid \textit{Juan} \mid \cdots \\
\textit{Variable} & \rightarrow & a \mid x \mid s \mid \cdots \\
\textit{Predicado} & \rightarrow & \textit{AntesDe} \mid \textit{TieneColor} \mid \textit{EstáLLoviendo} \mid \cdots \\
\textit{Función} & \rightarrow & \textit{Madre} \mid \textit{PiernaIzquierda} \mid \cdots
\end{array}
$$

Ejemplos:

1. Juan afeita a los que no se afeitan solos

$$\forall x(\neg A(x,x) \rightarrow A(j,x))$$

2. Existe un estudiante que afeita a todos los que no se afeitan a si mismos

$$\exists x(E(x) \wedge \forall y(\neg A(y,y) \rightarrow A(x,y)))$$

3. Hay un estudiante que no afeita a nadie, pero Juan se afeita a si mismo

$$\exists x(E(x) \wedge \neg \exists y A(x,y)) \wedge A(j,j)$$

4. Todos los estudiantes afeitan a Juan sólo si Juan no se afeita a si mismo

$$(\forall x(E(x) \rightarrow A(x,j)))) \rightarrow \neg A(j,j)$$

5. Todos los felinos son mamiferos

$$(\forall x)(Fx \rightarrow Gx)$$

F = es felino
G = es mamifero

6. Todos los tiranos son crueles, algunas personas son tiranos, por lo tanto algunos civiles son crueles

$$(\exists\ x)\ (Fx \wedge Gx)$$

F = es civil
G = es cruel

Formalizad las frases que damos a continuación. Utilizar los predicados indicados entreparéntesis.

- Las manzanas y las naranjas son sabrosas y nutritivas (P(x): “x es una manzana”; T(x): “x es una naranja”; G(x): “x es sabrosa”; N(x): “x es nutritiva”).

$$\forall x\ P(x)\ v\ T(x) \rightarrow G(x) \wedge N(x)$$

- Hay alimentos que sólo se pueden comer si han sido cocinados (A(x): “x es un alimento”; M(x): “x se puede comer”; C(x): “x ha sido cocinado”).

$$\exists x\ A(x) \wedge (M(x) \rightarrow C(x))$$

- Sin frenos, no hay ningún auto seguro (F(x): “x tiene frenos”; A(x): “x es un auto”; S(x): “x es seguro”).

$$\forall x\ A(x) \rightarrow (S(x) \rightarrow F(x))$$

- No todas las cosas compradas a bajo precio son delicadas y quebradizas (C(x): “x es una cosa”; B(x): “x ha sido comprada a bajo precio”; F(x): “x es delicada”; T(x): “x es quebradiza”).

$$\neg\forall x\ C(x) \wedge B(x) \rightarrow F(x) \wedge T(x)$$

- No todo hombre que deserta es un cobarde (H(x): “x es un hombre”; D(x): “x deserta”; C(x):“x es cobarde”).

$$\neg\forall x\ H(x) \wedge D(x) \rightarrow C(x)$$