

梯形图

1. 问题背景

平面点定位是计算几何中的一类经典问题，其研究的目的是通过对平面子区域的预处理，使我们能够快速获得平面上特定点所处的位置。在许多不同的场合中，都会遇到类似点定位查询的问题。例如，我们有一张电子格式的航海地图，希望利用计算机来帮助确定方位。这样，无论何时何地，计算机都能够动态地显示出现在所处位置的水流情况。在这种情况下，我们可能会拥有一套相当详细的专题图，我们希望能够频繁地进行点定位查询，从而在航行的过程中，不断地更新显示当前信息。这就意味着，我们希望对航海图进行预处理，然后将有关信息组织为某种数据结构，从而使得点定位查询可以很快完成。

点定位问题可以出现在不同的领域。假设我们想要实现一个通过屏幕显示地图的交互式地理信息系统。用户只要用鼠标点击某个国家，就可以查阅该国的信息。随着鼠标在屏幕的不同位置之间移动，该系统应该能够始终提供鼠标所在国家的名称。显然，对于屏幕上所显示的那张地图而言，这就是一个点定位问题；在这里，鼠标的位置就相当于查询点。这类查询进行的频率很高，毕竟，我们希望能够实时地更新屏幕上的信息。因此，这种查询必须很快得到回答。这样，我们就再次需要借助某种数据结构，来支持这种快速的点定位查询[1]。

为了解决该问题，人们从子区域的每个顶点出发引入一条垂线，引入的垂线、原子区域的边以及设定的矩形区域外边共同组成了该区域的梯形图（如图 1 所示），梯形图组成的任意子区域均为原区域的一个细分。通过对梯形图的数据结构存储（如图 2 所示），实现对平面点的快速精确定位。在本次试验中，我们将实现梯形图的构造，通过查询结构实现点的定位，并对实现的过程进行实验分析。

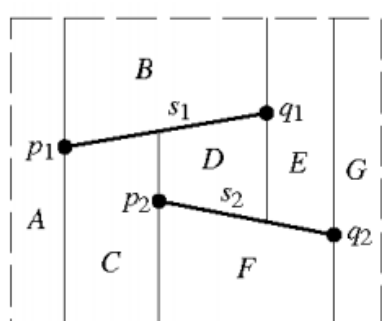


图 1 梯形图

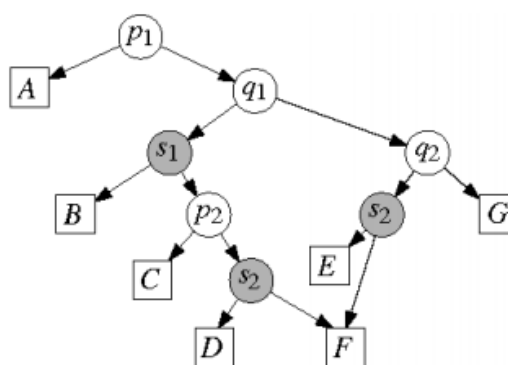


图 2 梯形图查找结构

2. 系统设计

2.1 开发环境

Windows XP + Visual studio 2005。

2.2 编译与链接

工程中使用了 MFC+OpenGL 进行开发。

2.3 总体框架

系统主要分为三大模块：

① 系统框架模块

这部分是整个程序框架，负责数据的输入及输出，与其余两大模块进行连接发，完成所有控件操作。

② 核心算法模块

这部分主要实现核心算法，对输入线段集构建梯形图和有向无环图的查找结构，并将结果返回给系统。

③ 图形绘制模块

这部分主要完成图形界面的绘制，实现对算法结果的图形演示。

3. 数据结构

3.1 基本数据结构

```
//顶点信息
typedef struct point
{
    int x;
    int y;
}Point;

//边集信息
typedef struct edge
{
    Point start;
    Point end;
    int edgenum;
}Edge;
```

3.2 DCEL 数据结构

```

//顶点信息
class Vertex
{
public:
    //坐标信息
    double x;
    double y;

    //该边指向从当前顶点出发的任意一条半边
    HalfEdge* pEdge;

    //构造器和析构器
    Vertex(double newX, double newY);
    Vertex(double newX, double newY, void * newPoint);
    Vertex(void);
    ~Vertex(void);

    //比较操作符，便于排序，
    //原则：先比较横坐标，再比较纵坐标，坐标小者返回true
    bool operator<(Vertex& v);
    bool operator<(Vertex* pV);

    //计算到另一点的距离(平方)
    double distance(Vertex& v);
    double distanceSquare(Vertex& v);

    void * point;
};

//半边信息
class HalfEdge
{
public:
    //半边起点在vector里的编号
    //Vertex* ori;
    int oriNum;
    //孪生边
    HalfEdge* twin;
    //沿着顺时针方向遇到的第一条同起点半边
    HalfEdge* pre;

    //沿着逆时针方向遇到的第一条同起点半边
    HalfEdge* next;
private:
    HalfEdge(void);
public:
    //构造一个半边而不构造其对应的孪生边，其pre和next都被初始化为NULL
    HalfEdge(int pOriNum, HalfEdge* pre, HalfEdge* next, vector<Vertex>& vertexSet);

    //在构造了当前半边的同时也构造了其孪生边，当前半边及其孪生边的pre和next都被初始化为NULL
    HalfEdge(int pOriNum, int pDestNum, vector<Vertex>& vertexSet);

    //析构器
    ~HalfEdge(void);

    bool operator!=(const HalfEdge& edge);
};

```

3.3 梯形图数据结构

```

typedef struct Trap_Face
{
    int facenum; //梯形编号
    edge* Edge_top; //梯形上边
    edge* Edge_bottom; //梯形下边
    D_Point* leftp; //梯形左点
    D_Point* rightp; //梯形右点
    Trap_Face* upleft; //左上梯形
    Trap_Face* lowleft; //左下梯形
    Trap_Face* upright; //右上梯形
    Trap_Face* Trap_Face *Trap_Face::uprigh
    D_Edge *HEdge; //梯形的上DCEL半边
    D_Edge *LEdge; //梯形的下DCEL半边
    SearchStruct* SNode; //对应的查找结点
    bool used;
}T_Face;

```

3.4 查找结点数据结构

```

typedef struct SearchStruct
{
    int mode; //0:结点 1:线段 2:叶子
    SearchStruct *left; //左孩子
    SearchStruct *right; //右孩子
    D_Point* point; //点结点信息
    Edge* edge; //边结点信息
    T_Face* face; //面结点信息
    SearchStruct* prev; //父亲结点
    bool leftchild; //左孩子标志
    P_L *parentlink; //面结点父亲结点链表
    int level; //树层
}S_Struct;

//面结点父结点链表
typedef struct ParentLink
{
    SearchStruct *value; //父结点的值
    bool left; //父结点的左孩子
    ParentLink * next; //下一父结点
}P_L;

```

4. 算法介绍

本实验采用了随机增量式算法实现梯形图。该算法逐一加入各条线段，每增加一条线段都相应的更新梯形图，并构造出所需的数据查找结构。同时，为了克服算法中因线段引入次序导致的算法性能不均，在线段次序选择上采用了随机化方法。

4.1 随机增量式算法

对任意一组线段 S ，通过逐一引入各条线段，为任意一组线段 S 构造出对应的梯形图 $T(S)$ ，同时构造出点定位所需的数据查找结构 D 。通过随机增量式算法构造出的数据查找结构 D ，为一有向无环图（directed acyclic graph-DAG），其中有唯一的根结点，同时对应于线段集 S 的梯形图中的每个梯形，有且仅有一片叶子。每个内部节点的出度都是 2。所有内部节点分为两类： x 节点和 y 节点。每个 x 节点都被标记为 S 中某条线段的一个端点；而每个 y 节点都被标记为某条线段。

在对点 q 进行查询时，要从根节点出发，沿着某条有向路径到达某匹叶子。最终到达的那匹叶子，就对应于 $T(S)$ 中包含 q 的那个梯形。

算法描述：

输入：一组 n 条互不相交的线段

输出：梯形图 $T(S)$ ，以及与之对应的、限制于一个包围框之内的查找结构 D

1、构造一个包围框 R ，大小足以容纳全部线段 S 。初始化梯形图结构 T 为包围框 R 本身，构造对应的查找结构 D 为对应于 R 的一片叶子。

2、将 S 中的所有线段随机打乱，得到一个随机序列： s_1, s_2, \dots, s_n 。

3、for $i=1$ to n

4、do 在当前的梯形图 T 中，找到与 s_i 相交的所有梯形， $\triangle_0, \triangle_1, \dots, \triangle_k$ （算法 4.2）

5、将 $\triangle_0, \triangle_1, \dots, \triangle_k$ 从 T 中删除，并替换为由于 s_i 的引入而新生出的若干梯形（算法 4.3）

6、将与 $\triangle_0, \triangle_1, \dots, \triangle_k$ 对应的叶子从 D 中删除，对应于每个新生成的梯形，生成一片新的叶子，将新生叶子与已有的内部节点相联接。

算法流程如图 3 所示

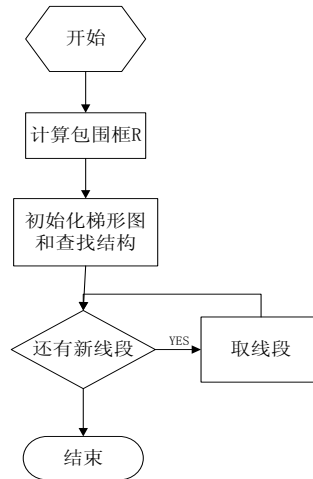


图 3 随机增量算法流程图

4.2 梯形查找算法

输入：梯形图 T ，与 T 相对应的查找结构 D ，以及新引入的一条线段 s_i

输出：由所有与 s_i 真相交的梯形（自左向右）组成的一个序列： $\triangle_0, \dots, \triangle_k$

1、分别令 p 和 q 为 s_i 的左右端点

2、在查找结构 D 中对 p 进行查找，最终找到梯形 \triangle_0

3、 $j \leftarrow 0$

4、while (q 位于 $\text{rightp}(\triangle_j)$ 的右侧

5、do if ($\text{rightp}(\triangle_j)$ 位于 s_i 的上方

6、then 令 \triangle_{j+1} 为 \triangle_j 的右下方邻居

7、else 令 \triangle_{j+1} 为 \triangle_j 的右上方邻居

8、 $j \leftarrow j+1$

9、return($\triangle_0, \triangle_1, \dots, \triangle_j$)

10、

算法流程如图 4 所示：

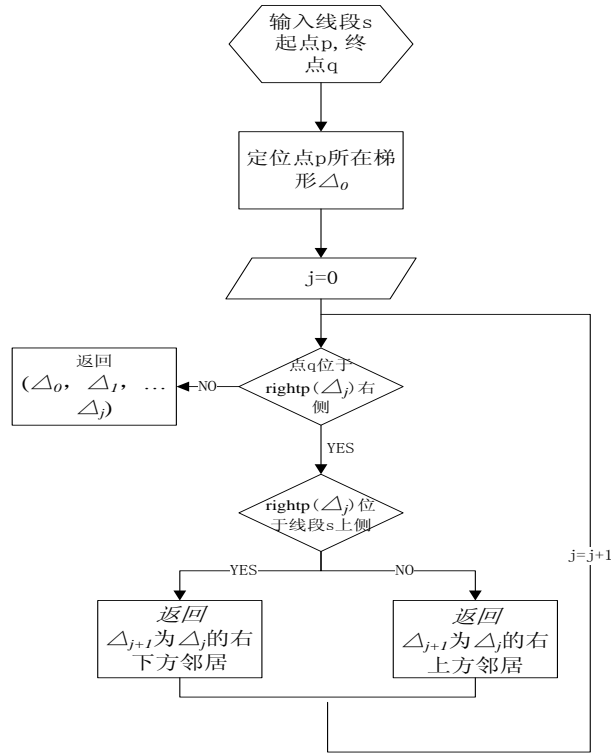


图 4 梯形查找算法流程图

4.3 新生梯形算法

输入：新引入的一条线段 s_i ，以及所有与 s_i 真相交的梯形（自左向右）组成的序列： $\Delta_0, \dots, \Delta_k$

输出：新生的梯形序列 $\Delta_0, \dots, \Delta_j$

- 1、 **if** s_i 完全落入某个梯形 Δ_0 中，
- 2、 **if** s_i 的端点不是 Δ_0 的端点，
- 3、 从 s_i 的端点分别发垂直延长线，将 Δ_0 分为 2-4 个新生梯形
- 4、 **if** s_i 穿越多个梯形
- 5、 **if** s_i 的端点不是 Δ_0 与 Δ_j 的端点，从 s_i 的两个端点分别发垂直延长线，将 Δ_0 和 Δ_j 一分为三。
- 6、 考查每个梯形 Δ_j 的右端点
- 7、 **if** 右端点在 s_i 之上，
- 8、 **if** 上方无临时梯形的，上方产生新梯形
- 9、 **else** 补充上方临时梯形的右端点，构成梯形
- 10、 **if** 下方无临时梯形的，生成一临时梯形（梯形右点待定）
- 11、 **else**
- 12、 **if** 下方无临时梯形，下方产生新梯形
- 13、 **else** 补充下方临时梯形的右点，构成梯形
- 14、 **if** 上方无临时梯形，生成一临时梯形(梯形右点待定)

线段穿越梯形的情形如图 5~图 7 所示

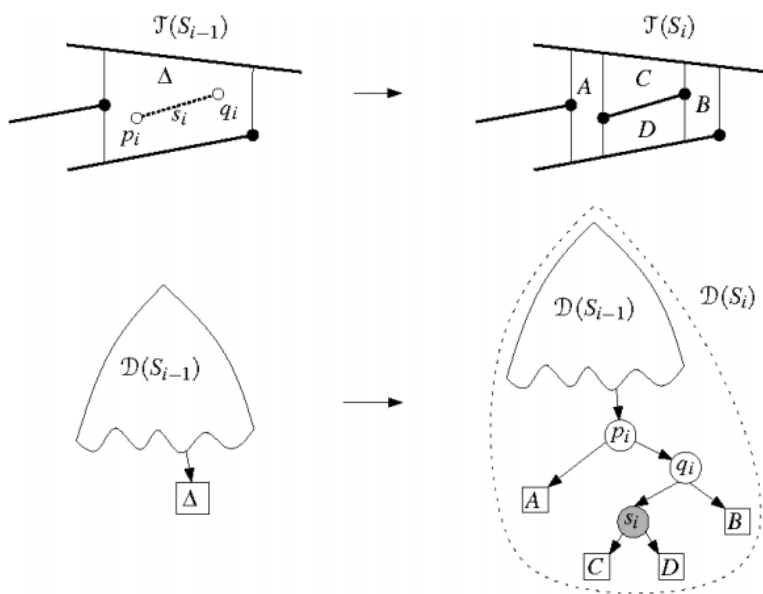


图 5 线段落入唯一梯形

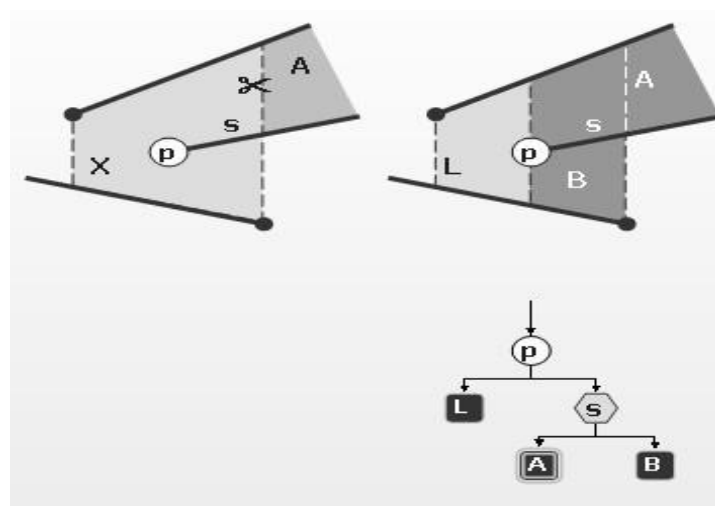


图 6 仅一个端点落入梯形中

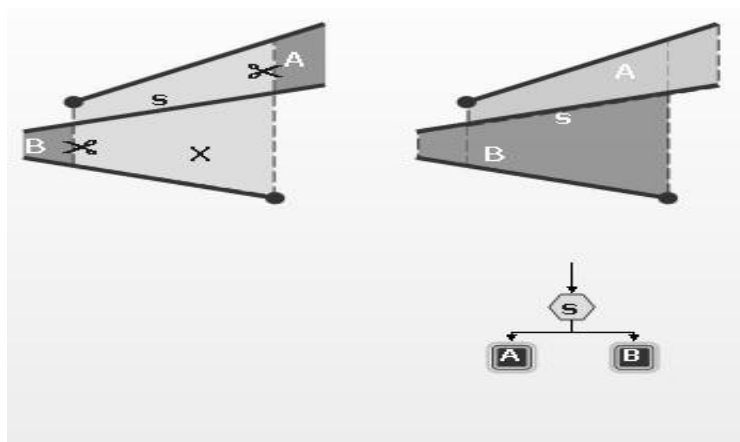


图 7 线段穿越梯形

4.4 不相交线段的随机生成算法

在屏幕上随机生成若干条不相交的线段是一件比较困难的事情。在本实验中，我们借助三角剖分完成这件事情。其基本思想是，借助三角剖分中线段的不相交性，在 $O(n\log n)$ 的时间内获得所需数量的不相交线段。

我们知道，对于任意 n 的点的三角剖分，其生成的边的数量一定是大于或等于 n 的。这样，从理论上来说，如果需要随机生成 n 条不相交的线段，我们就可以首先随机生成 n 个点，然后求得这 n 个点的三角剖分，之后在这个三角剖分中随机选取 n 条边。

但是，这样做的效果并不理想，因为这样可能生成许多共端点的边。在实际应用中，我们在 $5n$ 的点的三角剖分中随机选取 n 条边，并以一定的概率抑制共同点的边的出现。通过试验，取得了比较好的效果。下图是随机生成 20 条边和 1000 条边的效果图：

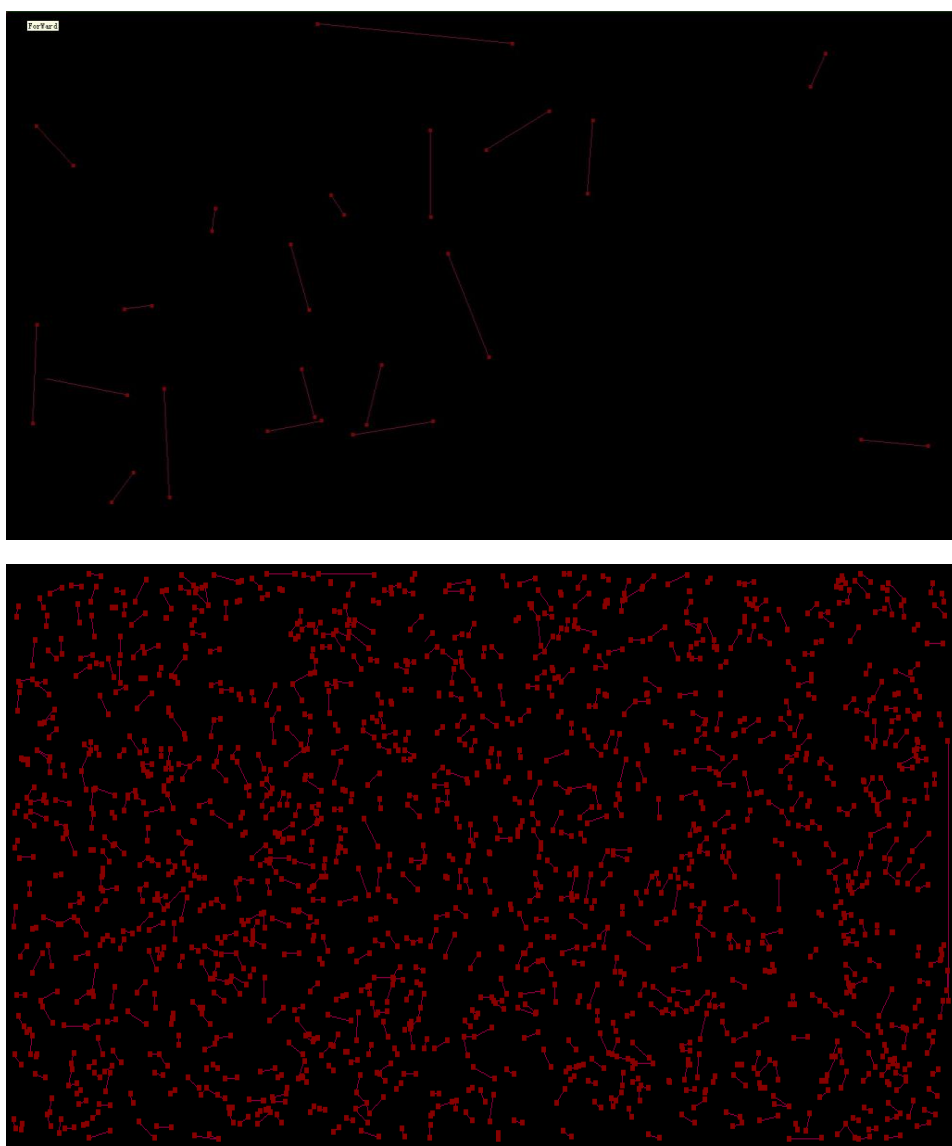


图 8 不相交线段效果图

5 退化情况处理 - 输入线段为竖直垂线

我们采用的方法是，将垂线做为一般性线段处理。由于垂线仅穿越一个梯形，处理方法可与仅落入一个梯形的一般性线段保持一致，即垂线仍然将梯形分解为四个梯形，其中左梯形的参数为 $(e1, e2, p1, p3)$ 、右梯形的参数为 $(e1, e2, p4, p2)$ 、上梯形的参数为 $(e1, e3, p3, p4)$ 、下梯形的参数为 $(e3, e2, p3, p4)$ 。

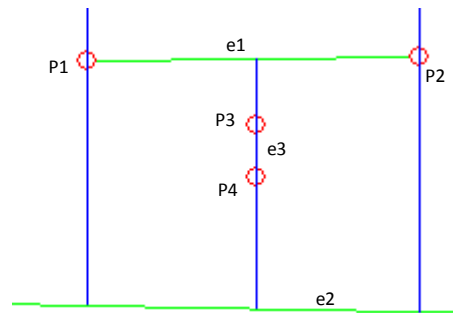


图 8 线段为垂线情形

6 项目遇到的问题及解决方案

1. 生成随机线段

随机生成不相交线段是比较困难的事情。项目之初我们试图使用 Brute-Force 的办法，每次随机生成一条线段，然后与当前全部线段进行相交性检验，若生成的线段与所有线段均不相交，则将其保留下来，之后进行下一条线段的生成。经过实验，这种方法效果并不理想，尤其在线段数目较多的时候会非常慢。

经过几天的思考与尝试，我们想到了利用三角剖分生成随机线段的方法。这种方法既可以保证线段之间彼此不相交，又可以保证较低的时间复杂度 $O(n \log n)$ 。通过实际工程的检验，这种方法取得了很好的效果。

2. OpenGL 与 MFC 的整合

虽然经过前两个项目的锻炼，小组成员已经基本熟悉了 OpenGL 与 MFC 的使用，但是，由于本身均非图形学方向，基础比较弱，因此在尝试做出漂亮的界面和复杂的动画效果方面遇到了较大困难，花费了大量时间。本来算法已经写好，单纯使用 MFC 验证也没有错误，但是加入了 OpenGL 之后同样的场景就产生了各种各样的 BUG，直至最后也没有全部解决，这是我们非常遗憾的事情。

3. 系统崩溃

在项目截止的最后一天，我们在调试的过程中不小心覆盖了代码，导致已经临近完成的代码受到重大损失，不得不匆忙重写大量代码。时间所限，为了及时提交项目，在提交时还有若干 BUG 没有解决，非常遗憾。

这次教训使我们深刻意识到程序备份的重要性。在以后的工作中，我们一定会做好程序的备份工作，保证类似事件不再发生。

7 总结

本次项目的提交，标志着为期一个学期的计算几何课程已经结束。

在这一个学期的时间里，我们本着对计算几何的兴趣，尽自己的最大努力进行学习和项目的开发。在这期间，曾经遇到许许多多的困难，也曾因为方向不同被自己的老板训斥。但是，我们义无反顾，坚持到了最后。在课堂上，邓俊辉老师交给了我们许多以前不知道也不会想到的知识，极大地扩展了我们的视野；在项目中，我们学会了开发图形界面的基本方法；在互评中，我们对自己的不足有了更清醒的认识，同时从其他同学那里学到了许多宝贵的知识和经验。

虽然这个过程是艰辛的，但收获是巨大的。在这一个学期的时间里，我们极大地提高了自己的能力，更重要的是，我们从邓俊辉老师与其他同学那里获得了一笔宝贵的精神财富，我们相信这会使我们受益终生。

对于每一个项目，尽管做了最大努力，但是，我们仍有许多不尽人意的地方，留下了许多遗憾。虽然课程已经结束，但我们对计算几何的兴趣不会消减，对自己的不足也不会忘却。在今后的学习与工作中，我们会努力将课程所学与本专业结合，将知识转化为解决实际问题的钥匙，同时，弥补自己在项目中的不足，争取取得更大的进步。

参考文献

[1] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars 著，邓俊辉译，计算几何。北京：清华大学出版社，2009.8。