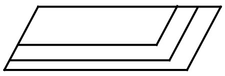
行列式與空間中三平面之幾何關係的分類

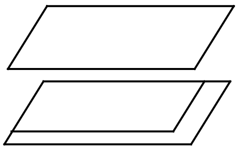
（資料來源：龍騰教師手冊）

關於空間中三個平面，我們可以利用下面的方法列出它們之間可能的幾何關係：

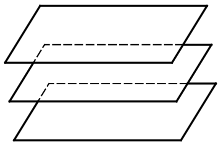
1. 三平面中任二平面不是平行就是重合（即任二平面均無交於一直線的情形），可分成：
   (1) 三平面重合
   (2) 二平面重合且與第三平面平行
   (3) 三平面平行



(1) 三平面重合



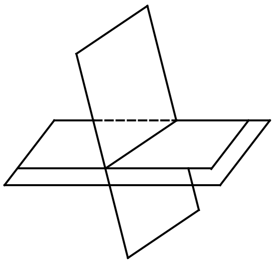
(2) 二平面重合且與第三平面平行



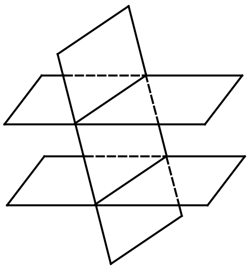
(3) 三平面平行

▲ 圖 3

2. 三平面中恰有兩平面平行或重合，可分成：
   (4) 二平面重合，第三平面與此二平面交於一直線．
   (5) 二平面平行，第三平面與此二平面各交於一直線．



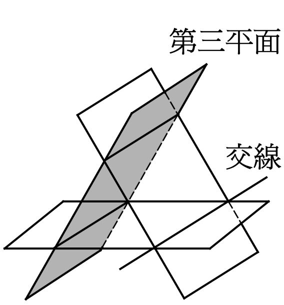
(4) 二平面重合且與第三平面交於一直線



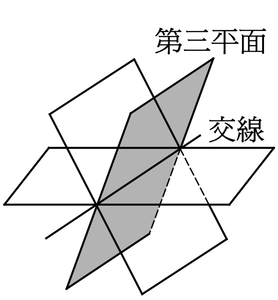
(5) 二平面平行且與第三平面分別交於一直線

▲ 圖 4

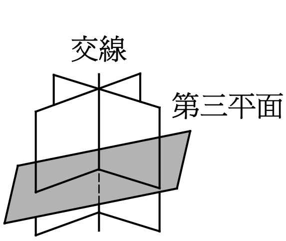
3. 三平面中無任二平面平行或重合．可先選取二平面交於一直線，並分成：
   (6) 第三平面與交線平行．
   (7) 第三平面包含交線．
   (8) 第三平面與交線交於一點．



(6) 三平面兩兩交於一直線但沒有共同交點



(7) 三平面兩兩不重合且相交於一直線



(8) 三平面共點

▲ 圖 5

如果$E_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$E_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，$E_3: a_3x+b_3y+c_3z=d_3$是空間中三個平面，它們的法向量分別為$\overrightarrow{n_1}=\left(a_1,b_1,c_1\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(a_2,b_2,c_2\right)$，$\overrightarrow{n_3}=\left(a_3,b_3,c_3\right)$，那麼

1. 當三平面中任二平面不是平行就是重合時，可得$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$三個向量均平行，即$\left(a_2,b_2,c_2\right)=k_2(a_1,b_1,c_1)$，$\left(a_3,b_3,c_3\right)=k_3\left(a_1,b_1,c_1\right)$，故(1)，(2)，(3)三種情形中，

   $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k_2a_1 & k_2b_1 & k_2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$，又$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & k_2b_1 & k_2c_1 \\ d_3 & k_3b_1 & k_3c_1 \end{vmatrix}=0$，

   同理可得$\Delta_y=0$，$\Delta_z=0$．

2. 當三平面中恰有兩平面平行或重合時，設E_1與E_2平行或重合．可得$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$二個向量平行，且與$\overrightarrow{n_3}$在同一平面上（但$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_3}$不平行）．因此

   $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ k_2a_1 & k_2b_1 & k_2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$．

   但(4)，(5)中Δ_x，Δ_y，Δ_z的情形有所不同．

   (4) 因為E_1與E_2重合，所以$\left(a_2,b_2,c_2,d_2\right)=k_2\left(a_1,b_1,c_1,d_1\right)$，因此

   $\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ k_2d_1 & k_2b_1 & k_2c_1 \\ d_3 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0$，同理可得$\Delta_y=0$，$\Delta_z=0$．

   (5) 因為E_1與E_2平行，所以$\left(a_2,b_2,c_2\right)=k_2\left(a_1,b_1,c_1\right)$，但$d_2\neq k_2d_1$，我們可以設$d_2=k_2d_1+\alpha$，且$\alpha\neq 0$．因此

   $\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ k_2d_1+\alpha & k_2b_1 & k_2c_1 \\ d_3 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\alpha\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$．

   因為$\alpha\neq 0$，所以當$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$時，得$\Delta_x\neq 0$，$\Delta_y$，$\Delta_z$也是類似的情形．

   但是，會不會$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$三個數都是 0 呢?

   如果$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$都是 0，那麼兩向量$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_3}$會互相平行，但是$\overrightarrow{n_1}$和$\overrightarrow{n_3}$不平行，因此我們得到的結論是：$\Delta_x$，$\Delta_y$，$\Delta_z$不會全部都等於 0．

3. 當三平面中無任二平面平行或重合時，(6)與(7)的情形中，三個法向量 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ ，$\overrightarrow{n_3}$ 在同一平面上，而(8)的情形中，三個法向量 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ ，$\overrightarrow{n_3}$ 不在同一平面上，因此，我們先討論(8)．

(8) 因為 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ ，$\overrightarrow{n_3}$ 不在同一平面上，所以由三向量 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ ，$\overrightarrow{n_3}$ 張出一個平行六面體，其體積 $|\Delta|$ 不為 0，即 $\Delta \neq 0$ ．

由克拉瑪公式可得：交點坐標為 $\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta},\dfrac{\Delta_z}{\Delta}\right)$ ．

(6) 因為 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ ，$\overrightarrow{n_3}$ 在同一平面上，所以 $\Delta = 0$ ．同時利用向量的線性組合，可得 $\overrightarrow{n_3} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2}$ ，即 $\left(a_3,b_3,c_3\right) = \alpha\left(a_1,b_1,c_1\right) + \beta\left(a_2,b_2,c_2\right)$ ．

但是，因為三個平面沒有共同的交點，所以 $d_3 \neq \alpha d_1 + \beta d_2$ ，否則 E_1 與 E_2 交線上的點會滿足

$E_3 : \left(\alpha a_1 + \beta a_2\right)x + \left(\alpha b_1 + \beta b_2\right)y + \left(\alpha c_1 + \beta c_2\right)z = \alpha d_1 + \beta d_2$ ，

這樣和「三平面沒有共同的交點」相牴觸．

因此可設 $d_3 = \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma$ ，$\gamma \neq 0$ ．

計算

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & b_2 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

因為 $\alpha \neq 0$ ，所以當 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 時，$\Delta_x \neq 0$ ．Δ_y ，Δ_z 也是類似的情形．

但是，會不會 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ ，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 三個數都是 0 呢?

如果 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ，$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ ，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 都是 0，那麼兩向量 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ 會互相平行，但是三平面中無任二平面平行或重合，因此我們得到的結論是：Δ_x ，Δ_y ，Δ_z 不會全部都等於 0．

(7) 因為 $\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ ，$\overrightarrow{n_3}$ 在同一平面上，所以 $\Delta = 0$ ．同時利用向量的線性組合，可得 $\overrightarrow{n_3} = \alpha\overrightarrow{n_1} + \beta\overrightarrow{n_2}$ ，即 $\left(a_3,b_3,c_3\right) = \alpha\left(a_1,b_1,c_1\right) + \beta\left(a_2,b_2,c_2\right)$ ．

因為三個平面共線，即 E_1 與 E_2 交線上的點會滿足

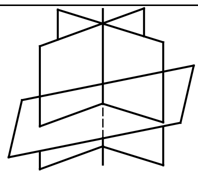
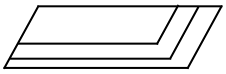
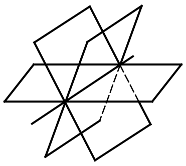
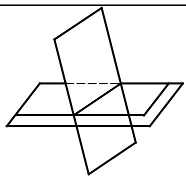
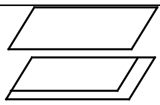
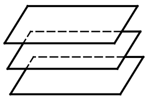
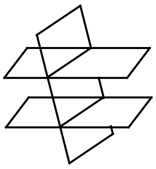
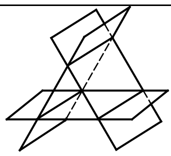
$E_3 : \left(\alpha a_1 + \beta a_2\right)x + \left(\alpha b_1 + \beta b_2\right)y + \left(\alpha c_1 + \beta c_2\right)z = \alpha d_1 + \beta d_2$ ，

所以 $d_3 = \alpha d_1 + \beta d_2$ ．計算

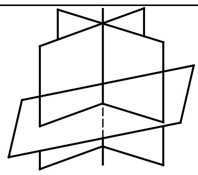
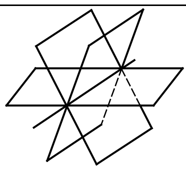
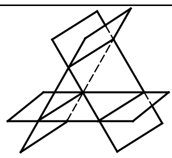
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha d_1 + \beta d_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

．同理可得 $\Delta_y = \Delta_z = 0$ ．

綜合上面的討論，我們有以下的結論：

<table>
<tr><td>Δ，Δ_x，Δ_y，Δ_z</td><td>空間中三平面的關係</td><td>聯立方程式的解</td></tr>
<tr><td>$\Delta \neq 0$</td><td></td><td>恰有一解</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$</td><td>  </td><td>無限多組解</td></tr>
<tr><td> </td><td>無解</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$，但 Δ_x，Δ_y，Δ_z
中至少有一非 0</td><td> </td><td>無解</td></tr>
</table>

因為上面的分類沒有一對一的關係，所以實際應用時，沒有辦法確定空間中三平面的關係．但是，如果我們將三平面中有平面平行或重合的情形去除掉，那麼就可以得到一對一的對應分類，如下表所示：

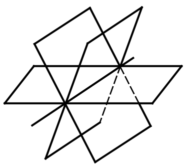
<table>
<tr><td>Δ，Δ_x，Δ_y，Δ_z</td><td>空間中三平面的關係</td><td>聯立方程式的解</td></tr>
<tr><td>$\Delta \neq 0$</td><td></td><td>恰有一解</td></tr>
<tr><td>$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$</td><td></td><td>無限多組解</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$，但 Δ_x，Δ_y，Δ_z
中至少有一非 0</td><td></td><td>無解</td></tr>
</table>

因此，**當你發現三個平面沒有互相平行或重合的情形時，可以利用計算 Δ，Δ_x，Δ_y，Δ_z 來判定三平面的關係**．

例：
判定三平面 $E_1: x+2y-z=1$，$E_2: 2x+5y+z=-1$，$E_3: x+4y+5z=-5$ 的相交情形．

解 計算：$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$，$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$，$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$，$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$．

因為三平面中沒有互相平行或重合的情形，又 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$，
所以此三平面兩兩不重合，且相交於一直線 L，如右圖所示．



使用電腦計算Δ，Δ_x，Δ_y，Δ_z的各值時，上面的判斷法則是很有效率的．在高中學科資訊科技融入教學資訊網（http://hsmaterial.moe.edu.tw/schema/ma/in-dex.html）中選取數學 IV，再選取三平面的幾何關係，可以下載描述三平面關係的動畫．

關於三平面的關係，也可以使用平面族的概念加以判定，請參閱：用向量來看平面族定理（龍騰數學新天地第 13 期）：蘇俊鴻．