极大非奇异partial矩阵的自由元个数及partial矩阵N_0-填充的反例

任杰　　陈建龙

(东南大学数学系, 南京, 210096)

摘　要　2010年, Richard A. Brualdi, Zejun Huang 以及Xingzhi Zhan提出了刻画极大非奇异partial矩阵的问题. 本文利用加边矩阵的思想证明了, 任一阶极大非奇异partial矩阵的容许的自由元个数最小为0, 且$n \geqslant 1$时, 存在自由元个数为1的n阶极大非奇异partial矩阵; 并猜想, 对于n阶极大非奇异partial矩阵, 其可能的自由元个数为$0, 1, 2, \cdots, \frac{n(n-1)}{2}$. 本文还给出了partial矩阵的$N_0-$填充的几个反例. 我们研究

关键词　partial矩阵; 填充; 加边矩阵; 非奇异; partial N_0-矩阵

The indeterminates number of a maximal-nonsingular partial matrix and some counter examples of partial N_0 matrix

Jie Ren　　Jianlong Chen

(Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract：In 2010, Richard A. Brualdi，Zejun Huang and Xingzhi Zhan released a question about how to characterize a maximal-nonsingular partial matrix. It has been proved, useing idea of borderd matrix, there exists maiximal-nonsingular partial matrix of any order, with the number of the indeterminates being zero. When $n \geqslant 1$, there also exists maximal-nonsingular partialmatrix that has only one indeterminate. Then we guess that: for a n order maximal-nonsingular partial matrix, the probable numbers of its indeterminates are $0, 1, 2, \cdots, \frac{n(n-1)}{2}$.Morever, some counter examples about the completion of partial N_0-matrix are given.

Key words：Partial matrix；Completion；Bordered matrix；Nonsingular; N_0-partial matrix

§1　引　言

在域**F**上, 若一个矩阵的部分元素已经给定, 另一部分元素未指定, 则称这个矩阵为partial矩阵. 已给定的元素称为指定元, 而未指定的元素称为自由元, 并以x记之. 对一个partial矩阵, 若保持其指定元不变并并对自由元赋值, 则称为对partial 矩阵的填充. Partial矩阵的概念最初是在1977年, 由研究部分自动机理论的Chirkov, M.

K. 提出[1].

2010年末, Richard A. Brualdi, Zejun Huang和Xingzhi Zhan对partial矩阵的推广——ACI-矩阵（affine column independent matrix）进行了深入研究[2][3]. 文中给出了ACI-矩阵所有填充的秩都不大于给定数的充要条件并证明对partial矩阵也如是; 所有填充都是非奇异的partial矩阵其自由元个数至多为$\frac{n(n-1)}{2}$, 其中n为partial矩阵的阶数; 并在最后提出两个问题: 1、什么条件下ACI-矩阵的所有填充秩都为给定数; 什么条件下ACI-矩阵的所有填充秩都不小于给定数？2、刻画极大非奇异partial 矩阵.

§2 ♯0的极大非奇异partial矩阵

本节即针对问题2的粗浅研究. 其中$\sharp i$表示此极大非奇异partial矩阵的自由元个数为i. 本文中以B_a记划去B中元素a所在的行和列后得到的余子阵; 以$\hat{c_{ij}}$记列(行)向量c_j划去第i个分量后得到的列(行)向量,不引起歧义时简记为$\hat{c_j}$.

极大非奇异partial矩阵是指, 一个所有填充都是非奇异的partial矩阵A, 在把任何一个指定元替换为新的自由元从而得到partial矩阵B后, B至少有一个奇异的填充.

由[2], 我们有n阶极大非奇异partial矩阵自由元个数的上限为$\frac{n(n-1)}{2}$, 且达到上限时极大非奇异partial矩阵具有如下的结构:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_{n-1,1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{其中} a_{ii}\neq 0, i=1,\cdots,n.$$

既然极大非奇异partial矩阵自由元个数的上限已经清楚, 那么下限又是什么?

首先我们证明了，对于任何$n\in N$，存在n阶的♯0极大非奇异partial矩阵.

定理1.1 存在任意n阶的♯0的极大非奇异partial矩阵.

证明: $\forall n\in\mathbb{N}, \exists A_{n\times n}$, 满足$\det A\neq 0, a_{ij}\neq 0, \forall i,j.$ 那么有$\det A^*\neq 0$,其中A^*为A的伴随矩阵.

又由$A^*A=\det A\cdot I_n$,
以及$A^*(A^*)^*=\det A^*\cdot I_n$,
有$A^*A=kA^*(A^*)^*$, 且$k\neq 0$.
两边同时左乘$(A^*)^{-1}$, 有
$A=k(A^*)^*$. 那么, kA^*中任一元素的代数余子式为A中一个元素, 且非零. 那么A^*为n阶♯0的极大非奇异partial矩阵. □

注:本条定理的意义在于, 给出了极大非奇异partial矩阵容许未定元个数的最小值, 突破了"阶数越大越不可能未定元个数很小"的定势思维, 有助于开拓思路找到性质很好的极大非奇异partial矩阵.

§3 ♯1的极大非奇异partial矩阵

接下来给出的是$n>1$时, n阶♯1极大非奇异partial矩阵的存在性定理.

引理1.2设$A=(a_{ij})_n$为n阶极大非奇异partial矩阵, 且任一行(列) 至少有$\min\{2,n\}$个非零元, 那么$n+2$阶以A为子阵且满足条件:

(1)$b_j=\sum_{i=1}^{n}k_ia_{ij}, j=1,\cdots,n-1$, 所有$k_i$全部为非零常数,

(2)$c_k=\sum_{j=1}^{n-1}l_ja_{kj}, k=1,\cdots,n$, 所有$l_j$全部为非零常数,

(3)$b_0\neq\sum_{j=1}^{n-1}l_ib_j$,

(4)若有$\hat{c}=\sum_{j\in G}p_j\hat{a}_j$,
则有$b_0\neq\sum_{j\in G,j\neq n}p_jb_j$, 其中$a_j$为$A$的列向量, $G\subsetneq\{1,\cdots,n\}, p_j\neq 0, \forall j\in G.$
的矩阵B, 为♯1的极大非奇异partial矩阵. B的形式如下:

$\begin{bmatrix} b & x & b_0 \\ A & & c \end{bmatrix}$, 其中$b=(b_1,\cdots,b_{n-1})$为$1\times(n-1)$的行向量, $c=(c_1,\cdots,c_n)^T$为$n\times 1$的列向量.

证明: 由[3], B若是非奇异, 那么必须有$\det B=const$, 也即$\det B_x=0$, 且B满秩. 显见$\det B_x=0$, 由$c_k=\sum_{j=1}^{n-1} l_i a_{kj}, k=1,\cdots,n$. 同样由$c_k=\sum_{j=1}^{n-1} l_i a_{kj}, k=1,\cdots,n$, 那么要使得

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b_0 \\ c \end{bmatrix}$$

作为列向量线性相关, 必须有

$$b_0=\sum_{j=1}^{n-1} l_i b_j.$$

而$b_0\neq\sum_{j=1}^{n-1} l_i b_j$. 因此该向量组秩为$n$. 而由$A$非奇异有$a_n$不能被$a_1,\cdots,a_{n-1}$线性表示.因而

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ a_1 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix},\begin{bmatrix} x \\ a_n \end{bmatrix},\begin{bmatrix} b_0 \\ c \end{bmatrix}$$

这一向量组秩为$n+1$, B满秩. B的非奇异性得证.

下证B的极大性. 即把任意常数换为自由元y时, 对x,y适当赋值后有$\det B=0$. 也即$\det B=ky+b$, 把B的行列式按y所在行(或列)展开后, b为不含y的项之和, k为$\det B_y$, 且$k\neq 0$. 那么B的极大性也即, B的除A_x外的任一低一阶子阵, 若不含x, 则满秩; 若含x, 则对x适当赋值后, 满秩.

首先看b_0. $B_{b_0}=A$, 保证了B_{b_0}满秩.

然后验证b_1. 列向量组$a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots,a_n,c$秩为$n$, 由此有$\det B_{b_i}\neq 0$.

其余的b_j, $j=2,\cdots,n-1$与b_1类似.

然后验证c_1. 由行向量组

$f_1,\cdots,f_{j-1},f_{j+1},\cdots,f_n,\begin{bmatrix} b & x \end{bmatrix}$

秩为n, 由此有$\det B_{c_1}\neq 0$, 其中f_i为A的第i个行向量.

其余的c_i以及$a_{in}, i=1,\cdots,n$与c_1类似, 分别也有$\det B_{c_i}\neq 0$与$\det B_{a_{in}}\neq 0$.

最后验证$a_{ij}, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,n-1$, 仍不妨只验证$a_{n1}$.

记A中划去a_{n1}所在行、列得到的矩阵为A', A'的第i个行向量记为a'_i, 并且记$(c_1,\cdots,c_{n-1})^T$为c'.

由A为极大非奇异partial矩阵, 有其任一代数余子式非零. 那么就有, $\mathrm{rank}A'=n-1$, 则有$c'=\sum_{i=2}^{n} m_i a'_i$, 且$m_i$不全为0.

由条件(4), 在$m_n=0$时, 有$b_0\neq\sum_{i=2}^{n} m_i b_i$, 因此$\det B_{a_{n1}}\neq 0$.

在$m_n\neq 0$时, 令x的取值使得$b_0\neq\sum_{i=2}^{n-1} m_i b_i+m_n x$, 仍有$b_0\neq\sum_{i=2}^{n} m_i b_i$. 因此$\det B_{a_{n1}}\neq 0$.

综上, B的极大性得证. □

定理1.3 $n>1$时存在任意n阶的$\sharp 1$的极大非奇异partial矩阵.

证明:由于$n>1$时存在任意$n-1$阶极大非奇异partial矩阵, 且其任一行(列)至少有$\min\{2,n-1\}$个非零元, 那么由引理1.2, 有$n>1$时存在任意n阶的$\sharp 1$ 的极大非奇异partial矩阵. □

本条定理的意义在于, $\sharp 0$的极大非奇异partial矩阵中不含自由元, 在应用上颇有不便.在要求必须有至少一个自由元的情况下, 本定理给出了$n>1$时$\sharp 1$的极大非奇异partial矩阵的存在性.

§4 几个partial N_0-矩阵N_0-填充的反例

N_0-矩阵是指, 其所有的主子式都是非正的. Partial N_0-矩阵是指, 其每个完全指定的主子矩阵为N_0-矩阵. 一个partial N_0-矩阵有N_0-填充, 即存在对自由元的赋值, 使得赋值后的partial N_0-矩阵为N_0-矩阵. Jordán, C. ; Ara újo, C. Mendes; Torregrosa, Juan R. 在2009年借助弦图1、给出了主对角线无零元素的partialN_0-矩阵有N_0-填充的充分条件; 2、主对角线有零元素时，给出了一些条件，使得一些组合对

称的partial N_0-矩阵还有非组合对称的partialN_0- 矩阵有N_0-填充[4]. 但是其用来简化证明过程的一个集合定义有误.

例1.4 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

[4]文中提到的S_n定义如下:

$S_n = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \neq 0 \text{ and } sign(a_{ij}) = (-1)^{i+j+1}, \forall i, j\}$. 文中用到的是任一$n$阶对角线无零元的$N_0-$矩阵均对角相似于$S_n$中某一元素. 对角相似定义如下: $\tilde{A}$与A对角相似, 如果存在某个对角线全部为正对角元的对角矩阵Q, 使得$\tilde{A} = Q^{-1}AQ$.

很明显, 例1.4与S_3中任一元素均不对角相似, 但是却是对角线无零元的N_0-矩阵.

[4]文中命题2的证明建立在所有可以有N_0-填充的3阶partial N_0-矩阵均在填充后均相似于S_n. 下一个反例说明, 不仅有3阶的对角线无零元的partial N_0-矩阵, 而且此矩阵无N_0-填充.

例1.5 $A = \begin{bmatrix} -1 & -10 & x \\ -1 & -1 & -10 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

此矩阵符合partial N_0-矩阵的定义, 且对角线无零元.但是其$\det A[\{1,3\}] \leq 0$要求$x \geq 2$, 其$\det A \leq 0$却要求$x \leq -\frac{23}{2}$, 因此例1.6中的partial N_0-矩阵无N_0-填充, 与文中命题2相悖.

§5 结论与展望

极大非奇异partial矩阵自由元个数的上、下限已经得出, 那么, 下一步的问题就是, 是否上、下限之间的所有整数, 都是极大非奇异partial矩阵自由元个数的可能取值? 结论并非是明显的, 还需要更加普适的构造方法和理论证明.

[4]一文中的错误全因S_n定义不准确且不适用于所有partial N_0-矩阵, 因此在寻找到S_n的更完善的表示方法后, 一定可以全面改善其中的结论.

参考文献:

[1] Chirkov，M. K. Generalized partial vectors，matrices and automata. (Russian) Vyčisl. Tehn. i Voprosy Kibernet. Vyp. 14 (1977)，86 - 111，208.

[2] Richard A. Brualdi，Zejun Huang，Xingzhi Zhan .Singular，Nonsingular，and Bounded Rank Completions of ACI-Matrices.Linear Algebra Appl.，433(2010):1452-1462.

[3] Zejun Huang，Xingzhi Zhan ACI-matrices all of whose completions have the same rank，Linear Algebra Appl.，434 (2011)，1956-1967.

[4] Jordán，C.; Araújo，C. Mendes; Torregrosa，Juan R. N_0 completions on partial matrices. Appl. Math. Comput.211 (2009)，no. 2，303 - 312.

[5] Chirkov，M. K. Chastichnye avtomaty. (Russian) [Partial automata] Leningrad. Univ.，Leningrad，1983. 260 pp.

[6] Davis， Chandler Completing a matrix so as to minimize the rank. Topics in operator theory and interpolation， 87 - 95， Oper. Theory Adv. Appl.，29，Birkhäuser，Basel，1988.

[7] Johnson，Charles R.; Rodman，Leiba Chordal inheritance principles and positive definite completions of partial matrices over function rings. Contributions to operator theory and its applications (Mesa，AZ，1987)，107 - 127，Oper. Theory Adv. Appl.，35，Birkhäuser，Basel，1988.

[8] Liang，Jun-ping; He，Ming The totally non-positive matrix completion problem. Numer. Math. J. Chin. Univ. (Engl. Ser.) 15 (2006)，no. 4，312 - 319.

[9] Richard A. Brualdi，Zejun Huang，Xingzhi Zhan .Singular，Nonsingular，and Bounded Rank Completions of ACI-Matrices.Linear Algebra Appl.，433(2010):1452-1462.

[10] R.B. Bapat，Konig's theorem and bimatroids，Linear Algebra Appl.，212/213(1994)，353-365.