
MATEMÁTICAS
PARA
CIENCIAS DE LA CONDUCTA

ESCRITO POR
LUIS ALEJANDRO MÁLAGA ALLCA
*Director de Investigación y Desarrollo
Alappont S.A.C.*

FONDO EDITORIAL ALAPPONT
WWW.ALAPPONT.COM

Luis Alejandro Málaga Allca

Matemáticas para Ciencias de la Conducta

© 2022, [Alappont S.A.C.](#) Todos los derechos reservados.

Historial de ediciones

Primera edición: Septiembre del 2022

Índice general

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 1.1 | Ramas de las matemáticas que se emplean en ciencias de la conducta | 2 |
| 1.1.1 | Estadística | 2 |
| 1.1.2 | Cálculo | 2 |
| 1.1.3 | Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y caóticos | 4 |
| 1.1.4 | Álgebra lineal | 4 |
| 1.1.5 | Lógica | 5 |
| 1.1.6 | Topología | 5 |
| 1.1.7 | Teoría de juegos | 5 |
| 1.2 | Modelos formales en psicología | 5 |
| 2 | Datos en la de las ciencias de la conducta | 7 |
| 2.1 | Las escalas de Stevens | 7 |
| 2.1.1 | Escala nominal | 7 |
| 2.1.2 | Escala ordinal | 9 |
| 2.1.3 | Escala de intervalo | 10 |
| 2.1.4 | Escala de razón | 10 |
| 2.2 | Teoría representacional de la medición | 10 |
| 3 | Medición en ciencias de la conducta | 12 |
| 3.1 | Psicometría | 12 |
| 3.1.1 | Teoría clásica de los test | 12 |
| 3.1.2 | Teoría G o Teoría de la generalizabilidad | 13 |
| 3.1.3 | Teoría de respuesta al ítem | 14 |
| 3.2 | Técnicas psicométricas | 15 |
| 3.2.1 | Alfa de Cronbach | 15 |
| 3.2.2 | Fórmulas Kuder–Richardson KR-20 y KR-21 | 15 |
| 3.2.3 | Coeficiente Omega de McDonald | 16 |
| 3.2.4 | Confiabilidad Test-retest | 16 |
| 3.2.5 | Método de las dos mitades o Split Half de Guttman | 16 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2.6 | Fórmula de predicción de Spearman-Brown | 17 |
| 3.2.7 | Coeficiente kappa de Cohen | 17 |
| 3.2.8 | V de Aiken | 18 |
| 4 | Muestreo | 19 |
| 4.1 | Pruebas de bondad de ajuste | 20 |
| 4.1.1 | Prueba de Kolmogorov-Smirnov | 20 |
| 4.1.2 | Prueba de Lilliefors | 21 |
| 4.1.3 | Test Shapiro-Wilk | 21 |
| 5 | Técnicas para comparar grupos | 23 |
| 5.1 | Las pruebas t de Student | 23 |
| 5.1.1 | Prueba t para una muestra | 23 |
| 5.1.2 | Prueba t para muestras relacionadas | 23 |
| 5.1.3 | Prueba t para muestras independientes | 24 |
| 5.1.4 | Pruebas para proporciones o pruebas z | 24 |
| 5.2 | U de Mann-Whitney | 25 |
| 5.3 | Wilcoxon T | 26 |
| 5.4 | ANOVA de un factor | 27 |
| 5.5 | H de Kruskal-Wallis | 28 |
| 5.6 | ANOVA de medidas repetidas | 29 |
| 5.7 | Test de Friedman | 30 |
| 6 | Técnicas de correlación y asociación | 31 |
| 6.1 | r de Pearson | 31 |
| 6.2 | Rho de Spearman | 32 |
| 6.3 | τ de Kendall | 32 |
| 6.4 | Prueba de Chi-cuadrado | 33 |
| 6.5 | Prueba de McNemar | 34 |
| 7 | Modelo lineal general | 35 |
| 7.1 | Regresión lineal simple | 35 |
| 7.2 | Regresión lineal múltiple | 36 |
| 7.3 | Análisis de la covarianza ANCOVA | 36 |
| 7.4 | Análisis factorial | 37 |
| 7.4.1 | Análisis factorial exploratorio | 39 |
| 7.4.2 | Análisis factorial confirmatorio | 41 |
| 7.4.3 | Adecuación de los datos para el análisis factorial | 42 |
| 7.5 | Modelos de ecuaciones estructurales | 43 |

Índice de tablas

| | | |
|-----|--|---|
| 2.1 | Clasificación de las variables propuesta por Stevens | 8 |
|-----|--|---|

Capítulo 1

Introducción

El uso de las matemáticas y los modelos formales en la ciencia tiene larga data, ya en el siglo XVI se reconoce a Galileo como una de las primeras personas en modelar fenómenos físicos en términos matemáticos cuando postuló su ley de caída libre de los cuerpos. El empleo de matemáticas en física, química, biología y otras ciencias naturales se encuentra ampliamente extendido, siendo casi imposible desligar dichos campos de estudio de su parte formal. Según [Bunge \(1992\)](#) las ciencias pueden clasificarse en formales y fácticas. Las formales corresponden a las matemáticas y a la lógica, mientras que las fácticas corresponden a las ciencias empíricas. Una subclasificación de las ciencias fácticas es aquella que las divide en ciencias naturales y ciencias sociales. Como ya se hizo mención, las ciencias naturales han hecho uso extendido del modelado de los datos provenientes de sus objetos de estudio, y de esta forma han postulado, en términos formales, sus principales teorías e hipótesis. Las ciencias de la conducta también son susceptibles de emplear modelos formales para representar sus objetos de estudio. Pero su empleo es infraestimado por sus practicantes, pese a que no es posible superar los problemas que se presentan en la investigación sin considerar el cuerpo matemático sobre el cual se encuentra asentada la teoría psicológica. La complejidad del objeto de estudio de las ciencias de la conducta, no puede abordarse sin hacer uso de modelos formales.

Predecir la trayectoria de un proyectil requiere traducir el problema a ecuaciones que representen los aspectos más resaltantes de la realidad que describen. Por otra parte, la explicación de las causas del embarazo adolescente o la deserción escolar, son problemas de complejidad equiparable o superior al problema del proyectil ([Skinner, 1987](#)), y no pueden explicarse por medio del lenguaje natural. Requieren del uso de abstracción, formalización matemática, modelado computacional de los datos, y todo el bagaje de herramientas que son utilizadas al momento de explicar fenómenos complejos.

La matemática es un cuerpo de conocimientos que no refiere a objetos reales, sino

a entes abstractos y sus relaciones. Su capacidad para poder representar la realidad la ha convertido en el lenguaje de la ciencia.

En principio, no es correcto decir que existe una matemática para la psicología, una matemática para la física o una matemática particular para cada área de investigación, la matemática como cuerpo de conocimiento es independiente de las disciplinas que la aplican, de esta manera, toda la matemática es aplicable en cualquier ciencia (Bunge y Ardila, 2002), pero existen ciertas técnicas que debido a sus características son más adecuadas para representar determinados objetos de estudio, como el espacio euclidiano en tres dimensiones \mathbb{R}^3 y las dimensiones del espacio en la física.

De esta forma, en las ciencias de la conducta, se han desarrollado procedimientos que están especialmente orientados a representar las particularidades de su objeto de estudio. Las aplicaciones matemáticas en este campo no solamente se circunscriben a la estadística, sino que su aplicación y correcto uso requiere de una sólida formación en diversos campos que están profundamente interconectados. Por lo tanto, se procederá a revisar, de manera general, las ramas de las matemáticas, que dadas sus particularidades son necesarias al momento de abordar los problemas que presentan las ciencias de la conducta.

1.1. Ramas de las matemáticas que se emplean en ciencias de la conducta

1.1.1. Estadística

La estadística es la rama de las matemáticas que se encarga de la recolección, análisis, interpretación y deducción de conclusiones a partir de los datos. Cuenta con dos grandes ramas que son la estadística descriptiva y la estadística inferencial (Franzese y Iuliano, 2018). Además, esta es la rama de las matemáticas más utilizada en las ciencias de la conducta y a la cual psicólogos, economistas y sociólogos han aportado prolíficamente, encontrándose entre estas contribuciones el análisis factorial, los modelos de ecuaciones estructurales, la teoría acerca de la medición de variables latentes desarrollada en psicometría y los modelos econométricos. Todo esto hace que la mayor parte de las técnicas matemáticas que se emplean en las ciencias de la conducta provengan de la estadística.

1.1.2. Cálculo

El cálculo es una de las ramas de las matemáticas más utilizadas en todas las ciencias. Estudia los cambios continuos de las variables en función de otras. Sus

aplicaciones están interrelacionadas con los distintos campos de las matemáticas. Entre las aplicaciones del cálculo a las ciencias de la conducta se encuentran la obtención del p -valor en una prueba de hipótesis estadística. Lo que se está haciendo es calcular la probabilidad del estadístico obtenido, por lo que se debe hallar el área bajo la función de densidad $f(x)$ a la que pertenece dicho estadístico, en otras palabras $p = \int_a^b f(x)dx$, donde a y b son los límites de integración. Otra de las aplicaciones clásicas del cálculo en psicofísica es la Ley de Weber-Fechner la cual establece la relación entre la cantidad de estímulo y la percepción del mismo por parte de una persona. Está formulada de la siguiente manera:

$$ds = k \frac{dr}{r} \quad (1.1)$$

Donde k es una constante, s es la sensación y r es el estímulo, dr es el incremento en la cantidad de estímulo y ds es el incremento de la sensación correspondiente. Por lo tanto, resolviendo la ecuación:

$$\int ds = k \int \frac{dr}{r} \quad (1.2)$$

Resolviendo la ecuación se tiene que:

$$s = k \ln r + c \quad (1.3)$$

Donde c es la constante de integración. Para determinar su valor se emplea el umbral de estímulo r_0 , es decir, el nivel de estímulo por debajo del cual no se percibe una sensación.

$$0 = k \ln r_0 + c \quad (1.4)$$

Despejando c :

$$c = -k \ln r_0 \quad (1.5)$$

Reemplazando Text (1.5) en (1.3):

$$s = k \ln r - k \ln r_0 \quad (1.6)$$

Acomodando la expresión:

$$s = k \left(\ln \frac{r}{r_0} \right) \quad (1.7)$$

Por lo tanto, entre la sensación y el estímulo existe una relación logarítmica (Batchelder, Colonius, Dzhafarov, y Myung, 2017).

1.1.3. Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y caóticos

En estas ecuaciones la incógnita no es un número o una cantidad sino una función, más específicamente, la derivada. La utilidad del estudio de los sistemas dinámicos en psicología radica en que muchos de los fenómenos en esta ciencia no son estáticos, sino que evolucionan en el tiempo y resulta relevante tener un modelo que explique la dinámica del fenómeno estudiado. Las aplicaciones de estos modelos en ciencias de la conducta son las siguientes: Los modelos de ecuaciones diferenciales con variable latente, estos generalizan los modelos de medida vistos en los modelos de ecuaciones estructurales añadiendo derivadas en su formulación, lo cual permite la incorporación del tiempo como variable (Boker y Wenger, 2012). También se emplean en neurociencias para modelar la dinámica de la actividad neuronal, uno de los trabajos más resaltantes es el modelo de Hodgkin y Huxley (1952) que está formulado en términos de ecuaciones diferenciales y modela como se inician y transmiten los potenciales de acción de las neuronas. Los modelos de ecuaciones diferenciales también son de interés para la psicología del desarrollo, en la cual se busca explicar el cambio de distintas variables en función de la edad (Guastello et al., 2009). Asimismo, los modelos de ecuaciones diferenciales son utilizados en ciencias cognitivas (Walmsley, 2008), también tienen aplicaciones en el modelado de la interacción social (Luce et al., 1963).

1.1.4. Álgebra lineal

Esta rama de las matemáticas estudia los espacios vectoriales, los sistemas de ecuaciones lineales, las matrices, los determinantes y las transformaciones lineales. La importancia del álgebra lineal radica en que permite el estudio de n dimensiones, y esto es de utilidad cuando se quieren hacer modelos que tengan más de tres variables, las cuales no pueden representarse geométricamente, solo matricialmente. Las aplicaciones del álgebra lineal en psicología están relacionadas con la estadística, ya que provee de notación para técnicas como la correlación múltiple, el análisis factorial y los modelos de ecuaciones estructurales. También resulta útil al momento de abordar métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. En psicometría, los algoritmos psicométricos, están formulados como transformaciones de matrices, lo cual los hace susceptibles de emplear esta rama de las matemáticas para abordar su estudio formal.

1.1.5. Lógica

La lógica estudia el razonamiento y las formas en las cuales se llega a realizar inferencias que son verdaderas. La importancia de esta rama de las matemáticas radica en que es esencial para comprender el funcionamiento de los sistemas formales, los cuales tienen un funcionamiento basado en la lógica, además es útil al momento de abordar las demostraciones que se presentan en el estudio de las matemáticas.

1.1.6. Topología

Esta rama de las matemáticas estudia las propiedades geométricas que se conservan tras deformaciones continuas en los cuerpos. La aplicación de esta rama de las matemáticas en psicología puede verse en el análisis factorial, los modelos de ecuaciones estructurales, las redes bayesianas, en donde, además de tener una representación matricial, los modelos tienen una representación de redes, también denominados diagramas de senderos o grafos, los cuales cuentan con herramientas para su estudio desarrolladas en el seno de la topología.

1.1.7. Teoría de juegos

Esta es una rama aplicada de las matemáticas, la cual resulta importante en psicología y economía ya que se emplea para modelar las interacciones de varios jugadores en situaciones competitivas denominadas juegos. Ya que muchas situaciones, especialmente de interacción social, pueden denominarse juegos, pueden modelarse empleando teoría de juegos.

1.2. Modelos formales en psicología

En la ciencia los modelos formales se encuentran bastante extendidos, especialmente en las ciencias naturales. Su utilidad radica en que hacen posible representar fenómenos complejos, lo cual no puede hacerse empleando el lenguaje natural. Las ciencias sociales y especialmente la psicología no están exentas del empleo de modelos formales, y se señala que el avance en la ciencia psicológica no es posible sin estos (Busemeyer et al., 2015). Por lo tanto, a continuación, se presentará una definición de modelo formal en psicología. Deben entenderse los modelos formales como sistemas de hipótesis, sujetos a condiciones de verdad o falsedad, aunque es posible otros estados que pueden ser representados empleando lógica difusa. Para los fines de esta investigación, se presentará los sistemas de hipótesis que pueden ser verdaderos o falsos, es decir aquellos sistemas que pueden

representarse empleando álgebra Booleana. Las hipótesis son funciones $H_i(f_i)$ cuyos resultados son booleanos representados por e_i estados.

$$\begin{pmatrix} H_1(f_1) \\ H_2(f_2) \\ \vdots \\ H_n(f_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Matricialmente la expresión anterior puede escribirse como $H(F) = E$. Cada $H_i(f_i)$ debe cumplir ciertas condiciones para ser una hipótesis. En primer lugar, todas las hipótesis del sistema deben poder someterse a prueba empírica, es decir, debe ser posible suministrar evidencia a favor o en contra. Otra característica es que las hipótesis deben poder plantearse de manera formal, es decir, las transformaciones que se hacen de los datos para concluir sobre la verdad o falsedad de las hipótesis deben ser objetivas y replicables. Ambas características están vinculadas ya que cuando se somete a prueba una hipótesis de la clase la variable X e Y están relacionadas, se espera que, tras el análisis de los datos bajo un procedimiento objetivo, se lleguen a resultados a favor o en contra de la hipótesis planteada y que cualquiera que siga el mismo procedimiento llegue a los mismos resultados.

Para ejemplificar esto, piénsese en las hipótesis del tipo X e Y están relacionadas. Un investigador recolecta un vector de datos por cada variable y luego aplica una transformación conveniente como una r de Pearson o una prueba Chi-cuadrado. Piénsese en las transformaciones como las funciones del tipo $r(X, Y) = W$ o $\chi^2(X, Y) = Z$, los resultados de estas funciones son los valores que se reemplazan en las funciones de hipótesis $H(W) = e_W$ o $H(Z) = e_Z$. De esta forma se puede observar que las hipótesis son susceptibles de someterse a prueba empírica. Ya que X e Y son vectores de datos obtenidos realmente. Además, las hipótesis que se someten a prueba están definidas formalmente por las transformaciones que les hacen a los datos las funciones $r(X, Y)$ y $\chi^2(X, Y)$ y su función de hipótesis $H_i(f_i)$.

Estos son los tipos más simples de modelos que pueden encontrarse. Como se verá más adelante, técnicas como el análisis factorial o los modelos de ecuaciones estructurales constituyen formas más complejas que extienden este tipo de modelos. Dado que las teorías se someten a prueba contrastándose con los datos provenientes de la realidad, será necesario definir y describir los tipos de datos que generalmente son empleados en las ciencias sociales y especialmente en la psicología.

Capítulo 2

Datos en la de las ciencias de la conducta

2.1. Las escalas de Stevens

Las escalas propuestas por Stevens (1946), son actualmente el paradigma predominante para clasificar los datos provenientes de las ciencias del comportamiento. Este autor dividió a las variables según las propiedades numéricas que presentan. Además, esta clasificación ha resultado ser muy influyente en cuanto que los softwares de procesamiento de datos como el IBM SPSS la emplean ampliamente y los lenguajes de programación como R y Python pueden recrear esta estructura de información. La definición que emplea Stevens (1946) está hecha en base a las propiedades numéricas que poseen las variables, proponiendo una clasificación acorde a estas propiedades.

A continuación, se desarrollará los aspectos más importantes de las escalas de medición propuestas por Stevens:

2.1.1. Escala nominal

Sea \mathcal{C} una clase, x_1, x_2, \dots, x_n un conjunto de objetos y $A(x)$ una función que asigna un número a estos objetos, las siguientes propiedades formales se cumplen por las escalas nominales:

$$A(x_i) = A(x_j) \Rightarrow x_i, x_j \in \mathcal{C} \quad (2.1)$$

$$A(x_i) \neq A(x_j) \Rightarrow x_i \notin \mathcal{C} \wedge x_j \in \mathcal{C} \vee x_i \in \mathcal{C} \wedge x_j \notin \mathcal{C} \quad (2.2)$$

Para Siegel y Castellan (2005), las escalas nominales son un sistema de

Tabla 2.1

Clasificación de las variables propuesta por Stevens

| Escala | Operaciones empíricas básicas | Estructura matemática del grupo | Estadísticas permitidas (invariante) |
|-----------|---|---|---|
| Nominal | Determinación de igualdad | Grupo de permutaciones $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función de sustitución uno a uno o una biyección | - Número de casos - Moda - Correlaciones de tablas de contingencia |
| Ordinal | Determinación de mayor o menor | Grupo isotónico $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función de incremento monotónico | - Mediana - Percentiles |
| Intervalo | Determinación de igualdad de intervalos y diferencias | Grupo lineal general $y = ax + b, a > 0$ | - Media - Desviación estándar - Correlaciones de rangos ordenados - Correlaciones producto momento |
| Razón | Determinación de igualdad de razones | Grupo de similaridad $y = ax, a > 0$ | - Coeficiente de variación |

Nota: Traducido de Stevens (1946)

clasificación denotado por $\mathcal{L}(x)$ que cumple lo siguiente:

$$\mathcal{L}(x_i) = \mathcal{L}(x_j) \Leftrightarrow A(x_i) = A(x_j) \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}(x_i) \neq \mathcal{L}(x_j) \Leftrightarrow A(x_i) \neq A(x_j) \quad (2.4)$$

Obsérvese que solo es posible asignar clases, por lo que ni la suma ni la cantidad están definidas, solo las igualdades y desigualdades. Los análisis más relevantes que se hacen con variables en esta escala de medición son la frecuencia y las pruebas basadas en frecuencias.

2.1.2. Escala ordinal

Una escala ordinal s es una función que asigna a los elementos del conjunto P un número real, $s : P \rightarrow \mathbb{R}$, tal que se cumplen las siguientes condiciones (Velleman y Wilkinson, 1993):

$$i \succ j \Leftrightarrow s(i) > s(j), \forall i, j \in P \quad (2.5)$$

Esta escala admite transformaciones f que preservan el orden.

$$s(i) > s(j) \Rightarrow f[s(i)] > f[s(j)] \quad (2.6)$$

Siegel y Castellan (2005) indican que esta escala cumple todas las propiedades de las escalas nominales (4) y (5), además cumple que:

$$A(x_i) > A(x_j) \Rightarrow x_i > x_j \quad (2.7)$$

Se define una escala ordinal como un sistema de clasificación $\mathcal{L}(x)$, que incluye las propiedades del sistema de clasificación nominal (6) y (7) más una propiedad:

$$\mathcal{L}(x_i) > \mathcal{L}(x_j) \Rightarrow A(x_i) > A(x_j) \quad (2.8)$$

En esta escala se han liberado las desigualdades. Esto quiere decir que en los datos de este tipo se puede establecer orden, existen datos que son menores y existen otros que son mayores. Esto es importante ya que añade mayor información respecto a los datos, además permite realizar análisis como la comparación o correlaciones para datos ordinales.

2.1.3. Escala de intervalo

Las escalas de intervalo incluyen todas las características de las escalas ordinales, pero además las transformaciones preservan las diferencias relativas. En otras palabras, las distancias de los intervalos están definidas. Las escalas de Intervalo son un sistema clasificatorio $\mathcal{L}(x_i)$ que incluye las propiedades de las anteriores escalas (4), (5) y (8), además de las propiedades de los sistemas clasificatorios anteriores (6), (7) y (9):

$$\mathcal{L}(x) = cA(x) + b; c > 0 \quad (2.9)$$

Las diferencias se preservan de manera que:

$$\mathcal{L}(x_i) - \mathcal{L}(x_j) = c[A(x_i) - A(x_j)] \quad (2.10)$$

Nótese que existe una razón entre la diferencia de cualesquiera dos intervalos (Siegel y Castellan, 2005).

2.1.4. Escala de razón

Estas escalas preservan las razones relativas, tienen la ausencia de magnitud definida con 0 y son isomórficas a los reales. Por lo tanto, incluyen todas las propiedades de las escalas anteriores y, además:

$$\mathcal{L}(x) = cA(x); c > 0 \quad (2.11)$$

Tal que la razón de las clasificaciones es igual a la razón de los atributos.

$$\frac{\mathcal{L}(x_i)}{\mathcal{L}(x_j)} = \frac{A(x_i)}{A(x_j)} \quad (2.12)$$

A modo de crítica, esta teoría continúa siendo predominante actualmente en la investigación en psicología al punto de que se ha convertido en el paradigma de la medición, pero hay que resaltar que, tras un análisis exhaustivo, es posible encontrar ejemplos que no encajen en las categorías de Stevens (1946), además de existencia de clasificaciones alternativas, lo cual no es tomado en cuenta en la investigación psicológica actual.

2.2. Teoría representacional de la medición

Medir implica asignar un número a las propiedades de los objetos y eventos. La moderna teoría de la medición es representacional ya que los números que son

asignados a los objetos y los eventos deben representar las relaciones percibidas entre tales objetos o eventos. Las teorías de medición representacionales tienen los siguientes elementos: Una descripción empírica de un sistema relacional, un teorema de representación y una condición de unicidad (Finkelstein y Leaning, 1984). La definición formal de una escala en la teoría representacional de la medición es:

Dado un conjunto de relaciones empíricas $R = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ en un conjunto de entidades no matemáticas Y y un conjunto de relaciones empíricas $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ en el conjunto de números N (generalmente es un sub conjunto o el conjunto de los reales), una función ϕ mapea Y en N tomando cada R_i en P_i , siempre que los elementos Y_1, Y_2, \dots en Y están en relación con R_i sí y solo sí los correspondientes números $\phi(Y_1), \phi(Y_2), \dots$ están en relación con P_i . La medición se concibe como un homeomorfismo de estructuras de relaciones empíricas $\Psi = \langle Y, R \rangle$ a estructuras de relaciones numéricas $N = \langle N, P \rangle$. Por lo tanto, definimos una escala como la terna ordenada $\langle \Psi, N, \phi \rangle$ (Boumans, 2012). No es propósito de esta investigación profundizar en los aspectos formales de la teoría representacional de la medición, por lo que se refieren la siguiente bibliografía de consulta Finkelstein y Leaning (1984); Muravyov y Savolainen (1997); Benoit y Foulloy (2013); Michell (2021).

Capítulo 3

Medición en ciencias de la conducta

En las ciencias de la conducta se han desarrollado varias vertientes teóricas orientadas a la medición de sus respectivos objetos de estudio como son la psicometría, la sociometría y la econometría.

3.1. Psicometría

Los problemas que atañen la recolección de datos en psicología hacen que sea necesario el empleo de modelos formales. Una rama entera de la psicología, denominada psicometría, se encarga del desarrollo teórico y tecnológico de los instrumentos para recolectar datos del comportamiento. Estos instrumentos cuentan con una justificación teórica planteada formalmente, la cual se presentará en términos generales en la presente sección.

3.1.1. Teoría clásica de los test

El modelo más básico acerca de la medición de variables inobservables o latentes, las cuales son predominantes en psicología, es la teoría clásica de los test. Esta menciona que las puntuaciones obtenidas mediante un procedimiento de medida (y_n) pueden descomponerse en dos partes, una parte de la puntuación observada es ocasionada por errores cometidos en el proceso de medición (e_n) y otra parte es la puntuación verdadera del atributo que se está midiendo (t_n) (Tornimbeni et al., 2008). Por lo tanto, este modelo puede escribirse de la siguiente manera:

$$y_n = t_n + e_n \tag{3.1}$$

Este modelo hace las siguientes asunciones:

1. Sean x_{ni} que asume valores enteros $\{0, 1, 2, \dots\}$ la puntuación de una persona n en el ítem $i \in I$.
2. Cada persona n tiene un valor verdadero t_n .
3. El mejor indicador general de la puntuación verdadera de una persona es $y_n = \sum_{i=1}^I x_{ni}$.
4. Los errores e_n no están relacionados entre sí, ni con las puntuaciones verdaderas de las personas.
5. Entre las personas los errores suman 0 y se encuentran distribuidos normalmente.

Debido a que los errores no están relacionados entre sí, ni con las puntuaciones verdaderas (donde s^2 es la varianza), se cumple que (Andrich y Marais, 2019):

$$s_y^2 = s_t^2 + s_e^2 \quad (3.2)$$

Entonces la varianza de la puntuación verdadera en relación a la varianza de la puntuación observada (la confiabilidad) es el cuadrado de la correlación entre la puntuación observada y la verdadera ($\rho^2(y, t)$) (Andrich y Marais, 2019):

$$\rho^2(y, t) = \frac{s_t^2}{s_y^2} = \frac{s_y^2 - s_e^2}{s_y^2} \quad (3.3)$$

La estimación de las puntuaciones verdaderas para la n -ésima persona es:

$$\hat{t}_n = \bar{y} + \rho^2(y, t)(y_n - \bar{y}) \quad (3.4)$$

Además, el error estándar de la estimación \hat{t}_n es:

$$s_e = s_y \sqrt{1 - \rho^2(y, t)} \quad (3.5)$$

3.1.2. Teoría G o Teoría de la generalizabilidad

Este modelo desarrolla la teoría clásica de los test, reconociendo la naturaleza multidimensional del error de medición y añadiendo más fuentes de error al modelo. Es una teoría estadística de la confiabilidad de las mediciones. En esta teoría un estudio G estima la magnitud de las distintas fuentes de error. El modelo más simple es el de una faceta, el cual incorpora cuatro fuentes de variabilidad, como las diferencias individuales entre los evaluados, o puntaje en el universo (p). La diferencia en la dificultad de los ítems o debida a las condiciones (i). La interacción

entre las personas y los ítems ($p \times i$). Por último, la debida a otros factores no conocidos o aleatorios (e). La tercera y cuarta fuente de variación se denomina también residual. Por lo tanto, tenemos las siguientes fuentes de variación σ_p^2 , σ_i^2 , $\sigma_{pi,e}^2$. Estas fuentes de variación se desean estimar (Zúñiga y Montero, 2007). Es importante señalar que hay modelos de más facetas, que incorporan más fuentes de variación. Para profundizar en la teoría de G se refiere a Shavelson y Webb (1991) y a Brennan (2001).

3.1.3. Teoría de respuesta al ítem

La teoría de respuesta al ítem son un grupo de modelos que buscan medir rasgos latentes. Estos permiten predecir la probabilidad de la respuesta a un ítem en base a la cantidad de rasgo latente que presenta el sujeto. A continuación, se presentará tres modelos, los cuales son los más representativos de esta teoría.

El modelo logístico de un parámetro

Estima la probabilidad de una respuesta correcta en el ítem i , dado el nivel de rasgo latente θ del sujeto j .

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j, b) = \frac{1}{1 + e^{-D(\theta_j - b_i)}} \quad (3.6)$$

En este modelo, D es el parámetro de la pendiente y b_i es la dificultad o parámetro de ubicación (Van der Linden, 2016).

El modelo logístico de dos parámetros

Este modelo es para ítems de respuesta dicotómica y esta formulado de la siguiente manera:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j, a, b) = \frac{1}{1 + e^{-Da_i(\theta_j - b_i)}} \quad (3.7)$$

Donde a_i es un parámetro de discriminación del ítem i , proporcional a la pendiente de la función en el punto b_i .

El modelo logístico de tres parámetros

Este está formulado de la siguiente manera:

$$P(U_{ij} = 1|\theta_j, a, b, c) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-Da_j(\theta_j - b_i)}} \quad (3.8)$$

c_i : Parámetro pseudo-azar para el ítem i . Es decir, la probabilidad de responder al ítem de manera azarosa.

Estos tres modelos presentados son los más conocidos y extendidos en teoría de respuesta al ítem. Pero no son los únicos, existiendo una gran variedad de estos modelos. Para profundizar se sugiere la siguiente bibliografía: Van der Linden (2016) DeMars (2010). También considérense los modelos de respuesta graduada, especialmente el descrito por Samejima (Tarazona, 2013).

La teoría clásica de los test, la teoría G y la teoría de respuesta al ítem son complementarias entre sí. Todas juntas brindan un panorama mucho más amplio para sustentar teóricamente las medidas obtenidas tras la aplicación de un test.

3.2. Técnicas psicométricas

La psicometría es la rama de la psicología encargada de los aspectos teóricos y tecnológicos que implican la medición de las variables. En la investigación psicológica se hace uso extensivo de instrumentos de medición, los cuales están asentados en la teoría psicométrica. A partir de esta teoría se han desarrollado métodos para estimar las propiedades de las puntuaciones de los instrumentos, lo que comúnmente se conoce como confiabilidad y validez. En este apartado se describirán las más utilizadas.

3.2.1. Alfa de Cronbach

Este coeficiente es una medida de la consistencia interna que indica el grado de covarianza de los ítems. La formulación es la siguiente:

$$\alpha = \frac{K}{K-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{s_t^2} \right); \alpha \in [0, 1] \quad (3.9)$$

Donde:

K : Es el número de ítems

s_i^2 : Es la varianza de cada ítem

s_t^2 : Es la varianza del total

3.2.2. Fórmulas Kuder–Richardson KR-20 y KR-21

Estas son estimaciones de la confiabilidad de los test psicológicos, se utilizan cuando las alternativas de respuesta son dicotómicas. También, la fórmula KR-20 tiene condiciones más débiles que el KR-21, además, requiere que los ítems tengan

la misma dificultad (aciertos contra errores), supuesto que no siempre se cumple (Sarwiningsih, 2017).

La fórmula KR-20 está dada por:

$$KR_{20} = \frac{K}{K-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n p_i q_i}{s_x^2} \right); KR_{20} \in [0, 1] \quad (3.10)$$

Donde:

p_i : Es el número de aciertos en el ítem i

q_i : Es el número de errores en el ítem i

$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2$, es la varianza de las puntuaciones empíricas.

La fórmula KR-21 está dada por:

$$KR_{21} = \frac{K}{K-1} \left(1 - \frac{\bar{X}(K - \bar{X})}{K s_x^2} \right); KR_{21} \in [0, 1] \quad (3.11)$$

3.2.3. Coeficiente Omega de McDonald

Otros nombres con los que puede encontrarse en la literatura es Rho de Dillon-Goldstein o Rho de Jöreskog. Este coeficiente surge como una alternativa al Alfa de Cronbach, se debe señalar que esta última está afectada por el número de ítems (Ventura y Caycho, 2017). La formulación es la siguiente:

$$\omega = \frac{(\sum_{i=1}^i \lambda_i)^2}{(\sum_{i=1}^i \lambda_i)^2 + (\sum_{i=1}^i 1 - \lambda_i^2)}; \omega \in [0, 1] \quad (3.12)$$

Donde: λ_i es la carga factorial estandarizada en i .

3.2.4. Confiabilidad Test-retest

Se toman los datos en dos periodos de tiempo, lo suficientemente distanciados entre sí. La confiabilidad test-retest se obtiene correlacionando las puntuaciones de las pruebas en los momentos i y j . Para establecer esta relación se aplica el coeficiente de Pearson (Véase 3.2.9.a.).

3.2.5. Método de las dos mitades o Split Half de Guttman

Esta es una prueba para el cálculo de la consistencia interna de las pruebas. Consiste en dividir en dos los ítems del test y tratarlos como si fuesen formas paralelas. Guttman propuso seis fórmulas para este coeficiente (Hayes y Pritchard, 2013), las cuales se describirán en términos generales:

Las siguientes definiciones son necesarias: k es el número de ítems; s_i^2 es el estimador insesgado de los ítems; s_p^2 es el estimador insesgado de las personas; v_{ij}^2

es la covarianza de los ítems i, j ; $\frac{1}{(V^{-1})_{ii}}$ es la varianza de los errores del ítem i .

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k s_i^2}{s_p^2} \quad (3.13)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\sqrt{\frac{2k}{k-1} \sum_j^k \sum_{i<j}^k v_{ij}^2}}{s_p^2} \quad (3.14)$$

$$\lambda_3 = \frac{k}{k-1} \lambda_1 \quad (3.15)$$

$$\lambda_4 = \lambda_1 + \frac{4 \sum_j^k \sum_{i<j}^k v_{ij}^2}{s_p^2} \quad (3.16)$$

$$\lambda_5 = \lambda_1 + \frac{2 \sqrt{\max \sum_j^k v_{ij}^2}}{s_p^2} \quad (3.17)$$

$$\lambda_6 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{(V^{-1})_{ii}} \right]}{s_p^2} \quad (3.18)$$

3.2.6. Fórmula de predicción de Spearman-Brown

Cuando una misma prueba se divide en dos mitades, la correlación entre estas dos mitades debe corregirse para hacer una estimación más precisa de la consistencia interna de la prueba (Charter, 2001). Esta técnica calcula la confiabilidad prevista empleando:

$$r_{kk} = \frac{2r_{12}}{1 + r_{12}} \quad (3.19)$$

Donde:

r_{12} : Es la correlación entre las mitades de la prueba

r_{kk} : Es la estimación de la confiabilidad de la prueba

3.2.7. Coeficiente kappa de Cohen

Es empleado para medir el índice de acuerdo entre jueces (no necesariamente humanos) que clasifican E elementos dentro de C categorías. Proporciona un índice de fiabilidad de las evaluaciones realizadas (Fonseca et al., 2013).

$$k = \frac{p_0 - p_c}{1 - p_c} \quad (3.20)$$

Donde:

p_0 : Es la probabilidad de acuerdo relativo entre los evaluadores

p_c : Es la probabilidad de que los acuerdos se deban al azar

3.2.8. V de Aiken

Esta prueba permite cuantificar la relevancia de los ítems respecto a un dominio de contenido en función de la valoración de N jueces (Robles, 2018). En psicología es utilizada como un indicador de validez de contenido.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{N(c-1)}; V \in [0, 1] \quad (3.21)$$

Donde:

n_i : Valor que asigna el juez i

N : Número de jueces

c : Número de valores de la escala que valora el juez

Capítulo 4

Muestreo

La necesidad de obtener una muestra radica en que no siempre resulta posible tomar datos de toda la población, por lo tanto, es necesario obtener una muestra que resulte lo más representativa posible que permita realizar una generalización de los resultados a toda la población. La representatividad se garantiza cuando se obtiene una muestra de manera aleatoria, algo que no siempre se cumple en la investigación en ciencias sociales, y especialmente en psicología. A continuación, se presentarán las ecuaciones de muestreo más utilizadas en psicología, las que corresponden para estimar una proporción, para estimar la media y las versiones para los casos en los que la población es conocida o es desconocida. En primer lugar, está el caso en el cual la población es conocida:

Estimar una proporción

$$n = \left\lceil \frac{Z^2 N p q}{e^2 (N - 1) + Z^2 p q} \right\rceil \quad (4.1)$$

Estimar la media

$$n = \left\lceil \frac{Z^2 N \sigma^2}{e^2 (N - 1) + Z^2 \sigma^2} \right\rceil \quad (4.2)$$

En el caso de población desconocida, se asume que esta es infinita por lo que al evaluar la función en el límite se tiene que:

Estimar una proporción

$$n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\lceil \frac{Z^2 N p q}{e^2 (N - 1) + Z^2 p q} \right\rceil = \left\lceil \frac{Z^2 p q}{e^2} \right\rceil \quad (4.3)$$

Estimar la media

$$n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\lceil \frac{Z^2 N \sigma^2}{e^2 (N - 1) + Z^2 \sigma^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{Z^2 \sigma^2}{e^2} \right\rceil \quad (4.4)$$

Donde:

N : Población

Z : Nivel de confianza

e : Precisión

p : Probabilidad de éxito

q : Probabilidad de fracaso

σ : Desviación estándar

Por su parte, una vez obtenida una muestra para de datos, se hace necesario el estudio de la distribución de dicha muestra con la finalidad de evaluar los procedimientos de análisis más pertinentes. Por lo tanto, a continuación se procederá a presentar dichos procedimientos.

4.1. Pruebas de bondad de ajuste

Estas pruebas buscan identificar si los datos provienen de una determinada distribución de probabilidades. En psicología generalmente se prueba la normalidad de los datos con el fin de poder determinar qué tipo de prueba utilizar para el análisis. A continuación, se presentarán las más empleadas.

4.1.1. Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Esta prueba es empleada cuando el tamaño de los datos es mayor a 30, sirve para verificar si estos provienen de una distribución normal. Tiene la siguiente formulación:

$$D = \sup_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}_n(x_i) - F_0(x_i)| \quad (4.5)$$

Donde:

x_i : El i -ésimo valor observado, ordenado previamente de menor a mayor

$\hat{F}_n(x_i)$: Es el estimador de la probabilidad de observar valores que sean menores o iguales a x_i

$F_0(x_i)$: Probabilidad de observar valores menores o iguales a x_i cuando H_0 es cierta

En otras palabras, D viene a ser la mayor diferencia observada entre la frecuencia acumulada observada $\hat{F}_n(x_i)$ y la teórica $F_0(x_i)$.

4.1.2. Prueba de Lilliefors

Esta es una prueba de normalidad que se utiliza para mejorar la prueba de Kolmogorov-Smirnov para valores pequeños en las colas de las distribuciones de probabilidad. Esta prueba puede emplearse cuando no se conoce la media o la desviación estándar de la población. Sus hipótesis son:

H_0 : Los datos provienen de una distribución normal

H_1 : Los datos no provienen de una distribución normal

Las asunciones que hace la prueba es que los datos han sido obtenidos de manera aleatoria. Cuando el estadístico es significativamente largo se puede rechazar H_0 y concluir que los datos provienen de una distribución normal. Su cálculo requiere la obtención de las puntuaciones Z que son dadas por:

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{s}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.6)$$

Donde:

Z_i : Puntaje Z del i -ésimo caso

x_i : i -ésimo caso

\bar{X} Media

s : Desviación estándar

El cálculo de la prueba de Lilliefors es realizado bajo la siguiente ecuación.

$$T = \sup_x |F^*(x) - S(x)| \quad (4.7)$$

Donde:

$F^*(x)$: La función de distribución normal estándar

$S(x)$: La distribución empírica de los puntajes Z_i

4.1.3. Test Shapiro-Wilk

Esta prueba sirve para poder probar la normalidad de un conjunto de datos. La hipótesis nula es que los datos son normales ($H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$).

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \quad (4.8)$$

Donde:

$x_{(i)}$ indica que los valores de x están ordenados de menor a mayor

$a_i = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m'V^{-1}}{m'V^{-1}V^{-1}m}$ es una constante de la prueba

$m = (m_1, \dots, m_m)'$ es el vector de valores esperados del estadístico ordenado

$V = (v_{ij})$ es la matriz de covarianzas de dimensión $n \times n$

Comúnmente este estadístico es empleado para probar la normalidad de un conjunto de datos pequeño, de tamaño menor a 30.

Capítulo 5

Técnicas para comparar grupos

El grueso de las técnicas matemáticas empleadas en psicología es utilizado para el análisis de los datos y para la realización de modelos. Un grupo de modelos bien establecidos son aquellos que buscan comparar grupos entre sí y verificar si existen diferencias entre ellos.

5.1. Las pruebas t de Student

Son un grupo de pruebas que tienen como base la distribución t de Student. A continuación, se describirá cada una de estas pruebas.

5.1.1. Prueba t para una muestra

Su formulación es la siguiente:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (5.1)$$

Donde: \bar{X} es el promedio muestral, μ es la media teórica, s es la desviación estándar muestral y n es el tamaño de muestra. Además, los grados de libertad vienen dados por $gl = n - 1$.

5.1.2. Prueba t para muestras relacionadas

De igual forma, es posible obtener una prueba t para verificar si existen diferencias entre dos muestras relacionadas, donde \bar{X}_D es la media de las diferencias, los grados de libertad vienen dados por $gl = n - 1$, la formulación es la siguiente:

$$t = \frac{\bar{X}_D}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (5.2)$$

5.1.3. Prueba t para muestras independientes

Existen tres casos, el primero es cuando los tamaños muestrales son iguales y las varianzas son iguales:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} \quad (5.3)$$

Donde \bar{X}_1 y \bar{X}_2 son el promedio de las muestras, μ_1 y μ_2 son las medias poblacionales, si son desconocidas se asumen como 0. s_1^2 y s_2^2 son las varianzas muestrales. Los grados de libertad están dados por $gl = 2n - 2$.

Otra prueba t para muestras independientes es cuando se asume que las varianzas son iguales y los tamaños muestrales pueden ser iguales o diferentes.

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (5.4)$$

Los grados de libertad para esta prueba son $gl = n_1 + n_2 - 2$.

Luego está la prueba t para muestras independientes cuando se asume varianzas diferentes y los tamaños muestrales pueden ser iguales o diferentes:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (5.5)$$

Donde n_1 y n_2 son los tamaños muestrales de cada grupo. Así mismo, los grados de libertad son:

$$gl = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2} \quad (5.6)$$

5.1.4. Pruebas para proporciones o pruebas z

Otro tipo de prueba t es empleada para comparar una proporción observada con una proporción teórica. Esta prueba es similar a la prueba t para una muestra.

$$z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \quad (5.7)$$

Donde p es la proporción observada, $\mu_p = \mu = \pi$ es la proporción teórica.

Otra prueba t para muestras independientes es la que se utiliza para comparar dos proporciones:

$$z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \quad (5.8)$$

Donde p_1 y p_2 son las proporciones observadas de cada una de las muestras.

5.2. U de Mann-Whitney

Esta prueba es un procedimiento no paramétrico empleado para comparar dos grupos independientes y ver si son estadísticamente significativos. Está representada por la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \\ U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

Donde: U_1 y U_2 son los dos posibles valores U calculados; n_1 y n_2 son los tamaños de los dos grupos a comparar; R_1 y R_2 son la suma de los rangos de los puntajes de cada grupo. Luego debe asignársele el rango a cada una de las puntuaciones del vector ordenado en caso de que el número de datos sea mayor a 1 es necesario promediar los rangos que corresponden a cada uno de los valores repetidos para obtener un rango medio, esto se conoce como rangos fraccionarios.

En caso de empates, debe calcularse una corrección. Para esto se debe calcular la frecuencia absoluta de cada uno de los elementos del vector ordenado, llamaremos a este vector F . El siguiente paso es calcular un parámetro denominado T que se define como:

$$T = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \frac{f_i^3 - f_i}{12} \quad (5.10)$$

Finalmente se asigna el valor correspondiente a cada vector y se suma de manera independiente para obtener R_1 y R_2 . El valor de U se elige según la siguiente regla:

$$U = \begin{cases} U_1 \Leftrightarrow U_1 < U_2 \\ U_2 \Leftrightarrow U_2 < U_1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Para calcular la significancia de la prueba se tiene que calcular la media definida por:

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{U_1 + U_2}{2} \quad (5.12)$$

Y el error estándar, el cual, en caso de no haber empates se define como:

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} \quad (5.13)$$

En el caso de haber empates debe utilizarse la siguiente corrección:

$$\sigma_U = \sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}\right) \left(\frac{N^3 - N}{12} - T\right)} \quad (5.14)$$

Donde $N = n_1 + n_2$. Luego puede obtenerse el puntaje estandarizado a partir del cual se puede calcular el p -valor:

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} \quad (5.15)$$

5.3. Wilcoxon T

Este es un procedimiento no paramétrico empleado para comparar dos grupos relacionados, su principal aplicación en la psicología es al momento de verificar las diferencias entre las puntuaciones tras la aplicación de un programa o una intervención. El cálculo consiste, en primer lugar, en obtener las diferencias entre las puntuaciones de los dos vectores, en caso la diferencia sea 0 se elimina la fila y el tamaño de n decrece en una unidad. Luego se obtiene el valor absoluto de estas diferencias. A este último vector calculado se le aplica el algoritmo de rangos fraccionarios. Luego se agrupan y suman los rangos obtenidos dependiendo si fueron obtenidos de una diferencia con signo positivo (T_+) o de una diferencia con signo negativo (T_-). El estadístico se obtiene seleccionando el valor mínimo de estas sumas, $T = \min(T_+, T_-)$.

Debe calcularse un término E en caso de empates, para esto se obtienen las frecuencias de los valores absolutos de las diferencias f_i y se realiza el siguiente procedimiento:

$$E = \sum_{i=1}^g \frac{f_i^3 - f_i}{2} \quad (5.16)$$

Para calcular la significancia de la prueba se tiene que calcular la media y la desviación estándar empleando las siguientes fórmulas:

Para la media:

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} \quad (5.17)$$

En caso de empates la desviación estándar es:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - E} \quad (5.18)$$

En caso de no haber empates la desviación estándar queda de la siguiente manera:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} \quad (5.19)$$

Finalmente se obtiene un puntaje z , el cual tiene una distribución normal estándar y sobre la cual es fácil calcular la probabilidad asociada. Este se define por:

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \quad (5.20)$$

5.4. ANOVA de un factor

Se estudia el efecto de un único factor sobre la media de la variable respuesta. Busca dividir la varianza en tres una varianza total V_t que es la suma de la variabilidad debido al factor V_F y la variabilidad residual V_R .

$$V_t = V_F + V_R \quad (5.21)$$

Se puede estimar V_t a partir de la suma total de cuadrados STC , V_F se puede estimar mediante la suma de cuadrados del factor SCF (dentro) y V_R se estima a partir de la suma de cuadrados residual SCR (entre).

Las hipótesis a contrastar son:

$$\begin{aligned} H_0 : m_i &= \dots = m_n \\ H_1 : \exists i, \dots, k; i &\neq \dots \neq k | m_i \neq m_n \end{aligned} \quad (5.22)$$

Los cálculos que se realizan para el contraste son primero hallar la STC , está requiere del cálculo de la gran media, que es la media de todos los datos o la media de las medias de cada columna y se denota como $\bar{\bar{X}}$.

La suma total de cuadrados está dada por la siguiente operación matricial sobre la matriz de datos del factor.

$$STC = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 \quad (5.23)$$

Los grados de libertad vienen dados por el número de grupos k del factor multiplicado por el número de sujetos n y restando la unidad $gl = kn - 1$. La suma de cuadrados del factor o dentro de los grupos se calcula a partir de la siguiente

expresión, nótese que ahora la diferencia se hace en función de la media de cada columna.

$$SCF = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{X}_j)^2 \quad (5.24)$$

Los grados de libertad en este caso vienen dados por $k(n - 1)$. La suma de cuadrados residual o suma de cuadrados entre grupos viene dada por:

$$SCR = n \sum_{j=1}^k (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 \quad (5.25)$$

En este caso los grados de libertad vienen dados por $k - 1$. Es importante notar que en este caso $STC = SCF + SCR$ por lo que se cumple con que se puede estimar la varianza total y descomponer. Para probar la hipótesis de diferencias se emplea una distribución F y el estadístico de contraste viene dado por:

$$F = \frac{SCR(n^2 - n)}{SCF(m - 1)} \quad (5.26)$$

Las asunciones que hace este modelo son que: 1) Las muestras deben ser independientes 2) Se asume normalidad de los datos 3) Las varianzas, aunque desconocidas, se asumen como iguales.

5.5. H de Kruskal-Wallis

Es una prueba no paramétrica que se aplica para más de dos grupos independientes, busca determinar si existen diferencias entre estos grupos. La variable dependiente puede ser ordinal o de intervalo. Para el caso de empates debe hacerse una corrección. En primer lugar, se ordenan todos los valores de los k grupos. Se obtiene su frecuencia absoluta y se calcula la corrección por empates de la siguiente forma:

$$E = \sum_{i=1}^g f_i^2 - f_i \quad (5.27)$$

Luego se asignan rangos a cada uno de los grupos empleando el algoritmo de rangos fraccionarios. La suma de los rangos de cada grupo es R_j y n_j es el número de casos de cada grupo. El estadístico H de Kruskal-Wallis sin corrección por empates se define como:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1) \quad (5.28)$$

El estadístico H de Kruskal-Wallis con corrección por empates es:

$$H = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)}{1 - \frac{E}{N^3 - N}} \quad (5.29)$$

Este estadístico tiene una distribución χ^2 con $k - 1$ grados de libertad.

5.6. ANOVA de medidas repetidas

En los casos en los cuales las muestras no son independientes entre sí, no es posible emplear el ANOVA de un factor. Los grupos en estos casos están relacionados, por lo que se pueden definir como distintas mediciones en el tiempo y es una generalización de las pruebas t para muestras relacionadas. Al igual que en el ANOVA debe calcularse la suma total de cuadrados de la ecuación (49). Aunque también es útil incluir la siguiente fórmula, donde s_{Total}^2 es la varianza total:

$$SCT = (kn - 1)s_{Total}^2 \quad (5.30)$$

Además, debe incluirse la suma de cuadrados entre las medidas (SCM) y la suma de cuadrados entre los sujetos (SCS).

$$SCM = n \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 \quad (5.31)$$

Con $gl_{SCM} = k - 1$ grados de libertad.

$$SCS = k \sum_{j=1}^k (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 \quad (5.32)$$

Los grados de libertad son $gl_{SCS} = n - 1$. También, debe calcularse la suma de cuadrados residual (SCR), con $gl = (kn - 1) - (k - 1) - (n - 1)$.

$$SCR = SCT - SCM - SCS \quad (5.33)$$

El estadístico F viene dado por:

$$F = \frac{SCM/gl_{SCM}}{SCS/gl_{SCS}} \quad (5.34)$$

5.7. Test de Friedman

Es la alternativa no paramétrica a la prueba ANOVA para medidas repetidas. Verifica que por lo menos uno de los grupos es diferente del resto. Emplea el algoritmo de rangos fraccionarios, pero en vez de asignarlo a las columnas, lo hace por filas. R_j es la suma de los rangos por columnas. En caso de empates debe calcularse una corrección que es:

$$e = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f_{ij}^3 \quad (5.35)$$

El estadístico, en caso de no haber empates es:

$$F_r = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k R_j^2 - 3n(k+1) \quad (5.36)$$

En caso de empates el estadístico es:

$$F_r = \frac{12 \sum_{j=1}^k R_j^2 - 3n^2(k+1)^2}{nk(k+1) + \frac{nk-e}{k-1}} \quad (5.37)$$

El estadístico sigue una distribución χ^2 con $gl = k - 1$ grados de libertad.

Capítulo 6

Técnicas de correlación y asociación

Además de comparar grupos, los investigadores están interesados en conocer cuál es la relación o asociación entre dos o más variables.

6.1. r de Pearson

$$r_{xy} = \frac{n \sum_{i=1}^n xy - \sum_{i=1}^n x \sum_{i=1}^n y}{[n \sum_{i=1}^n x^2 - (\sum_{i=1}^n x)^2][n \sum_{i=1}^n y^2 - (\sum_{i=1}^n y)^2]} \quad (6.1)$$

El estadístico $r_{xy} \in [-1, 1]$, mientras más se aproxime a los extremos del intervalo más fuerte es la asociación, mientras más se aproxime al centro del intervalo, es decir a 0 la correlación se hace más débil. El signo del estadístico indica el sentido de la correlación. Es posible calcular la significancia de este estadístico, la cual indica la posibilidad de generalizar el coeficiente de correlación muestral a la población. Las hipótesis son:

$$\begin{aligned} H_0 : \rho &= 0 \\ H_1 : \rho &\neq 0 \vee \rho < 0 \vee \rho > 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

El estadístico tiene distribución t con $gl = n - 2$ grados de libertad y n es el número de pares de casos.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (6.3)$$

Cabe señalar que esta prueba es bastante mal utilizada en la investigación psicológica, al punto de que los investigadores asumen que significa ajuste o existencia de la correlación cuando es significativa. Pero debe señalarse que solo

tiene interpretación en el caso se haya realizado un muestreo aleatorio y si se presta atención a (64) la hipótesis que se está probando es que la correlación en la población es distinta de 0.

6.2. Rho de Spearman

Es una medida de la correlación entre dos variables, constituye una de las alternativas no paramétricas al test r de Pearson. Para el cálculo del coeficiente Rho de Spearman se deben ranquear los pares de vectores empleando el algoritmo de rangos fraccionarios. Luego se debe obtener la diferencia entre los rangos de los vectores al cuadrado d_i^2 . La prueba viene expresada por:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^2(n-1)}; \rho \in [-1, 1] \quad (6.4)$$

Donde:

d_i : Son las diferencias entre los rangos de la variable x e y

n : Corresponde al número de pares de datos

La interpretación del coeficiente ρ es la misma que la del r de Pearson, así mismo, la significancia de la prueba se calcula empleando la fórmula (65).

6.3. τ de Kendall

Este coeficiente se utiliza para establecer la correlación entre dos variables ordinales, o en el caso de tener una variable ordinal y otra continua. Existen tres formas de realizar el cálculo del coeficiente. En primer lugar, la forma τ_a esta definida de la siguiente manera.

$$\tau_a = \frac{2(n_c - n_d)}{n(n-1)} \quad (6.5)$$

Donde:

n_c : Es el número de pares concordantes

n_d : Es el número de pares discordantes

Su cálculo implica la obtención de pares concordantes y discordantes. Un par de observaciones (X_i, Y_i) y (X_j, Y_j) son concordantes si: $X_i > X_j \wedge Y_i > Y_j \vee X_i < X_j \wedge Y_i < Y_j$. Por otra parte, un par es discordantes si: $X_i > X_j \wedge Y_i < Y_j \vee X_i < X_j \wedge Y_i > Y_j$.

El número total de pares viene dado por la siguiente fórmula:

$$n_c + n_d = \frac{n(n-1)}{2} \quad (6.6)$$

Para el caso de tener valores repetidos en los vectores debe realizarse una corrección, es en estos casos en los que se emplea la fórmula τ_b :

$$\tau_b = \frac{(n_c - n_d)}{\sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - T_x} \sqrt{\frac{1}{2}n(n-1) - T_y}} \quad (6.7)$$

Donde:

$T_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_x} (t_i^2 - t_i)$ es el ajuste para valores repetidos en x

$T_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s_y} (u_i^2 - u_i)$ es el ajuste para valores repetidos en y

En primer lugar, deben obtenerse los rangos ordenados para ambos vectores, esto con el algoritmo de rangos fraccionarios. Luego por cada columna se obtiene el número de grupos s_x y s_y junto con el número de valores iguales en cada grupo t_x y u_x respectivamente. Luego el total de pares concordantes y discordantes se obtiene a partir de los vectores con rangos ordenados. Finalmente, la prueba τ_c tiene la siguiente formulación:

$$\tau_c = \frac{m(n_c - n_d)}{n^2(m-1)} \quad (6.8)$$

Donde:

f : número de filas

c : número de columnas

$m = \min(f, c)$

6.4. Prueba de Chi-cuadrado

La prueba chi es una prueba de asociación entre dos variables nominales u ordinales, las cuales pueden representarse en una tabla de doble entrada. El estadístico se obtiene calculando los valores esperados y aplicando la siguiente ecuación:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^f \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}; \chi^2 \in [0, \infty) \quad (6.9)$$

Donde:

O : Son los valores observados

E : Son los valores esperados

f : Es el número de filas

c : Es el número de columnas

El valor χ^2 calculado tiene una distribución Chi-cuadrado, por lo cual luego se puede obtener su significancia realizando la integral del área bajo la curva en el

intervalo $[\chi^2, \infty)$. Además, para el cálculo de esta integral se requieren de los grados de libertad de la prueba que están dados por $k = (f - 1)(c - 1)$.

6.5. Prueba de McNemar

Esta prueba se aplica cuando se cuentan con muestras pareadas, comúnmente es usada en estudios experimentales o cuasiexperimentales en los que se quiere evaluar un tratamiento. Matricialmente consiste en el cálculo de los valores esperados en las casillas de una tabla 2×2 . Sea la siguiente matriz los recuentos A , B , C y D de la tabla cruzada.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

La prueba de McNemar tiene la siguiente formulación:

$$\chi = \frac{(B - C)^2}{B + C} \quad (6.11)$$

Además, cuando los recuentos dentro de las casillas son pequeños debe utilizarse la corrección por continuidad de Yates:

$$\chi = \frac{(|B - C| - 1)^2}{B + C} \quad (6.12)$$

Estos estadísticos tienen una distribución chi-cuadrado con $gl = 1$ grados de libertad.

Capítulo 7

Modelo lineal general

En primer lugar, es necesario señalar que dentro de estos modelos también se encuentra el ANOVA, pero debido a que ya fue abordado en 3.2.8.d. y en 3.2.8.f., no se tocará en esta sección. Por modelo lineal general se entiende a un tipo de modelo que está escrito en los siguientes términos:

$$datos = modelo + error \quad (7.1)$$

Todos los modelos que se verán a continuación tienen esta forma, e incluso, los modelos de los siguientes puntos, como el análisis factorial y los modelos de ecuaciones estructurales (Rutherford, 2001).

7.1. Regresión lineal simple

La regresión lineal simple constituye uno de los modelos más básico para poder predecir una variable a partir de otra que se encuentra relacionada con la misma. El modelo viene dado por la siguiente expresión (nótese que corresponde a la ecuación punto pendiente):

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x \quad (7.2)$$

Donde:

β_0 : Es el punto de coordenadas $(0, \beta_0)$.

β_1 : Es la pendiente.

Además, las constantes β_0 y β_1 se calculan a partir de las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\beta_0 = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (7.3)$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (7.4)$$

También pueden estimarse estos parámetros haciendo uso del método de mínimos cuadrados descrito en la ecuación (78).

7.2. Regresión lineal múltiple

Es una generalización del modelo de regresión lineal simple. Incorpora k variables independientes al modelo.

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \quad (7.5)$$

Matricialmente el modelo puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{kn} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Expresado de forma compacta $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{E}$.

La estimación del vector de los parámetros \mathbf{B} se hace mediante el método de mínimos cuadrados:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (7.7)$$

Una demostración de esta estimación puede encontrarse en Rojo (2007). La varianza de este modelo puede descomponerse empleando ANOVA en: suma de cuadrados total, suma de cuadrados explicada y suma de cuadrados residual.

7.3. Análisis de la covarianza ANCOVA

Constituye una intersección entre los modelos de regresión y el ANOVA. Son modelos lineales, como los de regresión que incorporan por lo menos una variable continua y por lo menos una variable nominal u ordinal. En primer lugar, es necesario definir a la covarianza como:

$$\text{cov}_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{n - 1} \quad (7.8)$$

El ANCOVA, tiene una formulación similar a la regresión lineal múltiple:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta(x_{ij} - \hat{X} \dots) + \varepsilon_{ij} \quad (7.9)$$

Donde:

y_{ij} : Valor de la variable de respuesta que corresponde al tratamiento i en la repetición j .

μ : Promedio general

α_i : Efecto del tratamiento i

x_{ij} : Valor de la variable x en la parcela de tratamiento i y la repetición j

$\hat{X} \dots$: Media general de la covariable

β : Coeficiente de regresión lineal

ε_{ij} : Error experimental

Es necesario señalar que estos no son los únicos modelos dentro de los modelos lineales generales, es posible encontrar generalizaciones tanto del ANOVA como del ANCOVA, denominadas MANOVA y MANCOVA respectivamente, las cuales son técnicas multivariadas.

7.4. Análisis factorial

Se presentará la interpretación psicométrica de este modelo, teniendo en cuenta que puede dársele otras interpretaciones dependiendo del campo de estudio donde se aplique. El análisis factorial es una técnica multivariada, que incluye en su formulación, variables latentes, es decir, variables que no son directamente observables, sino que se infieren a partir de variables que si son directamente observables y que explicarían las correlaciones que las variables observables presentan. El modelo está representado por un sistema de ecuaciones lineales, que tienen la misma forma que una ecuación de regresión.

$$\begin{pmatrix} X_1 = \mu_1 + \lambda_{11}f_1 + \lambda_{12}f_2 + \dots + \lambda_{1k}f_k + u_1 \\ X_2 = \mu_2 + \lambda_{21}f_1 + \lambda_{22}f_2 + \dots + \lambda_{2k}f_k + u_2 \\ \vdots \\ X_p = \mu_p + \lambda_{p1}f_1 + \lambda_{p2}f_2 + \dots + \lambda_{pk}f_k + u_p \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Este modelo puede resumirse empleando notación matricial expresándose de la siguiente manera:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{F} + \mathbf{U} \quad (7.11)$$

Si además los factores son independientes entre sí, este modelo es denominado modelo factorial ortogonal.

Donde:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \text{ es la matriz de datos.}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \text{ es el vector de medias de las variables.}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1k} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pk} \end{pmatrix} \text{ es la matriz de cargas factoriales.}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \text{ es el vector de factores comunes (comunalidad).}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \text{ es el vector de factores específicos.}$$

Además, tiene que tenerse en cuenta que este modelo presenta una serie de supuestos los cuales se enlistarán a continuación (Primi, 2012). La esperanza de los factores es cero $\mathbf{E}[F] = 0$. La varianza de las comunales es la matriz identidad de dimensión $k \times k$.

$$\mathbf{var}[U] = \mathbf{E}[UU'] = \Psi \quad (7.12)$$

En forma matricial:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_p \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

Además, la covarianza entre los factores comunes y los factores específicos es 0, esto es $\mathbf{cov}[U, F] = \mathbf{E}[UF'] = 0$. La estructura de covarianza del modelo factorial ortogonal está dada por:

$$\Sigma = \text{cov}[X] = \Lambda\Lambda' + \Psi \quad (7.14)$$

Además:

$$\text{cov}[F, X] = \Lambda \quad (7.15)$$

Existen dos vertientes del análisis factorial, estas son el análisis factorial exploratorio y el análisis factorial confirmatorio. No son distintos modelos, sino que son diferentes formas de desarrollar el mismo modelo y tienen utilidades específicas y complementarias entre sí.

7.4.1. Análisis factorial exploratorio

El análisis factorial exploratorio es una variante del análisis factorial. En este se busca conocer en cuantos factores puede resumirse el conjunto de datos. Esta técnica, junto con el análisis factorial confirmatorio, provee la base formal en la que está basada la validez de constructo en psicometría. Cuando se habla de dimensiones de un instrumento, debe poder demostrarse su existencia, la manera de hacer esto es mediante el análisis factorial. Al realizar un análisis factorial exploratorio emerge una estructura de ítems que están fuertemente relacionados entre sí y débilmente relacionados con el resto, estos grupos son denominados factores. Ya que las dimensiones de los instrumentos están conformadas por ítems los factores deberían poder recrear la estructura del instrumento, proporcionando evidencia de la existencia del constructo.

Por lo tanto, el análisis factorial exploratorio es básicamente una técnica de reducción de dimensiones, ya que se busca explicar un conjunto grande de datos, mediante un número reducido de variables, que mantenga la mayor cantidad posible de información del conjunto original.

Existen varios métodos para calcular el número de factores, a continuación, se describirán los más utilizados, recordando al lector que esto no es una presentación exhaustiva, y se recomienda profundizar en las referencias citadas.

Análisis de componentes principales

Esta técnica sirve para reducir dimensiones, su cálculo se hace de la siguiente manera. Primero se calcula $\mathbf{B} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}$ en donde \mathbf{X} es un vector de variables aleatorias y $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_j]$, luego se obtienen las covarianzas del vector \mathbf{B} , las cuales vienen dadas por la siguiente expresión $\mathbf{C} = \frac{1}{(n-1)}\mathbf{B}'\mathbf{B}$ (Brunton y Kutz, 2017). El primer componente principal v_1 es:

$$v_1 = \underset{\|v_1\|=1}{\operatorname{argmax}} v' \mathbf{B}' \mathbf{B} \quad (7.16)$$

Donde argmax es la función argumento del máximo. La ecuación (83) representa el autovector de $\mathbf{B}' \mathbf{B}$ que corresponde al autovalor más grande. Por otra parte, obteniendo la descomposición de \mathbf{C} es posible obtener los componentes principales:

$$\mathbf{C} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{D} \quad (7.17)$$

Donde \mathbf{V} son los autovectores y \mathbf{D} son los autovalores. Esta descomposición está garantizada siempre que \mathbf{C} sea una matriz hermitiana. Por lo tanto, el vector de componentes principales de \mathbf{T} es:

$$\mathbf{T} = \mathbf{B} \mathbf{V} \quad (7.18)$$

Método de máxima verosimilitud

Consiste en encontrar las cargas factoriales y las varianzas específicas que maximicen la función de verosimilitud (Chen, 2010), viene dado por:

$$\log(L(\Lambda, \Psi)) = -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log|\Sigma| - \frac{1}{2} X' \Sigma^{-1} X \quad (7.19)$$

Método de mínimos cuadrados

Son dos métodos los principalmente utilizados, el método de mínimos cuadrados no ponderados y el método de mínimos cuadrados generalizados. Ambos métodos buscan minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre la matriz de correlación observada y la matriz de correlación reproducida (De la Fuente, 2011).

Rotación factorial

Para conseguir una estructura más simple de las cargas factoriales obtenidas por los métodos de estimación es necesario rotarlas. Para esto se han desarrollado varios métodos que permiten obtener esta estructura más simple. En la literatura se señalan:

Rotación ortogonal: Conserva la independencia de los factores. Entre estas se encuentran: Rotación VARIMAX, Rotación QUATRIMAX, Rotación EQUAMAX (De la Fuente, 2011).

Rotación oblicua: No se requiere que la matriz sea ortogonal, solamente singular, se encuentran: Rotación Oblim y el Método PROMAX (De la Fuente, 2011).

7.4.2. Análisis factorial confirmatorio

En este tipo de análisis factorial lo que se busca es confirmar el ajuste de los datos a un modelo factorial propuesto por el investigador. A diferencia del análisis factorial exploratorio no se busca identificar en cuantos factores puede resumirse el conjunto de datos, sino si el conjunto de datos se ajusta de manera adecuada a un modelo previamente establecido. Una vez realizada la especificación del modelo, se procede a obtener los indicadores de ajuste.

Chi cuadrado del modelo

Indica las diferencias entre los valores observados y la matriz de covarianzas esperadas (Costa y Sarmiento, 2019). Las hipótesis que se prueban son:

H_0 : El modelo propuesto y la estructura de los datos son similares

H_1 : Existen diferencias entre el modelo propuesto y la estructura de los datos

Normed Fit Index [Índice de ajuste normalizado] (NFI)

También denominado índice de ajuste normalizado de Bentler-Bonett. Analiza las discrepancias entre el chi cuadrado del modelo propuesto y el chi cuadrado del modelo nulo. Un valor NFI de entre 0.9 y 0.95 es considerado muy bueno (Costa y Sarmiento, 2019). Donde MP son las siglas de modelo propuesto y MN las siglas de modelo nulo.

$$NFI = 1 - \frac{\chi_{MP}^2}{\chi_{MN}^2} \quad (7.20)$$

Índice de Tucker-Lewis (TLI)

También es conocido como índice de ajuste no normalizado ($NNFI$). Añade una penalización por cantidad de parámetros, tendiendo a aceptar modelos con mayor parsimonia (Costa y Sarmiento, 2019).

$$TLI = \frac{\frac{\chi_{MN}^2}{gl_{MN}} - \frac{\chi_{MP}^2}{gl_{MP}}}{\frac{\chi_{MN}^2}{gl_{MN}} - 1} \quad (7.21)$$

Comparative Fit Index (CFI)

Analiza el ajuste del modelo, para todos los tamaños de muestra, resuelve los problemas para muestras pequeñas ocasionados por la sensibilidad de la prueba chi-cuadrado al tamaño muestral (Costa y Sarmiento, 2019). Valores cercanos a 1 son considerados buen índice de ajuste.

Relative Fit Index (*RFI*)

Al igual que los otros índices de ajuste, mientras más se aproxima a 1 mejor ajuste (Costa y Sarmiento, 2019). Su formulación es la siguiente:
2019).

$$RFI = \frac{\chi_{MP}^2 / gl_{MP}}{\chi_{MN}^2 / gl_{MN}} \quad (7.22)$$

Raíz cuadrada del error cuadrático medio de aproximación (*RMSEA*)

Este indicador de ajuste es sensible al número de parámetros estimados, pero relativamente insensible al tamaño de la muestra (Costa y Sarmiento, 2019).

$$\sqrt{\max \left(\frac{\chi_{MP}^2 - gl_{MP}}{gl_{MP}(n-1)}, 0 \right)} \quad (7.23)$$

Además, cuenta con una prueba de hipótesis

H_0 : Indica un ajuste del modelo

H_1 : Indica que el modelo no se ajusta a los datos

Standardized root mean square residual (*SRMR*)

Es un índice del promedio de los residuales estandarizados entre la matriz de covarianzas observadas y la hipotetizada.

$$SRMR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^i \left(\frac{s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}}{s_i s_j} \right)^2}{\frac{p(p+1)}{2}}} \quad (7.24)$$

Donde:

s_i : Desviación estándar para la medida i

s_j : Desviación estándar para la medida j

7.4.3. Adecuación de los datos para el análisis factorial

Al momento de realizar un análisis factorial debe verificarse si los datos cumplen una serie de requisitos y son adecuados para realizar los cálculos que posteriormente serán ejecutados.

Prueba de Kaiser-Meyer-Olkin (*KMO*)

Esta es una medida de la adecuación de los datos para el análisis factorial.

$$KMO_j = \frac{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2}{\sum_{i \neq j} r_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} u_{ij}^2} \quad (7.25)$$

Donde:

r_{ij} : Es la matriz de correlaciones

u_{ij} : Es la matriz de covarianzas parciales

Prueba de esfericidad de Bartlett

Esta prueba compara la matriz de correlaciones observadas con la matriz identidad. Decimos que si una matriz de correlaciones es la identidad las correlaciones entre las variables son cero. La hipótesis nula es que las variables no están relacionadas.

$$\begin{aligned} d_R &= - \left[n - 1 - \frac{1}{6}(2p + 5) \right] \log |R| \\ &= - \left[n - \frac{(2p + 11)}{6} \right] \sum_{j=1}^p \log \lambda_j \end{aligned} \quad (7.26)$$

Donde:

d_R : Es la matriz de correlaciones entre las variables

λ_j : Son los autovalores de la matriz d_R

El estadístico calculado tiene una distribución Chi-cuadrado con $\frac{(p^2-p)}{2}$ grados de libertad. Si se acepta la hipótesis nula no debería aplicarse un análisis factorial.

7.5. Modelos de ecuaciones estructurales

Como desarrollo del análisis factorial, los modelos de ecuaciones estructurales o SEM por las siglas en ingles de structural equation models, son una técnica que además de establecer las relaciones de los ítems directamente observables, establece las relaciones entre los factores o variables latentes.

Considérese los siguientes vectores aleatorios:

$$\begin{aligned} \eta' &= [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \\ \xi' &= [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \end{aligned} \quad (7.27)$$

Estos provienen de variables latentes dependientes e independientes.

$$\eta = B\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (7.28)$$

Donde $B_{m \times m}$ y $\Gamma_{m \times n}$ son matrices de coeficientes y $\zeta' = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m]$ es un

vector aleatorio de errores residuales. B representa el efecto causal directo sobre las η variables y Γ representa el efecto causal directo sobre las ξ variables. Se asume que $\text{cov}[\zeta, \xi] = 0$ y que $I - B$ es no singular.

Los vectores η y ξ no son observables y están definidos por vectores directamente observables $X' = [x_1, x_2, \dots, x_q]$ y $Y' = [y_1, y_2, \dots, y_p]$. Estos vectores directamente observables se definen como:

$$\begin{aligned} X &= \Lambda_x \xi + \delta \\ Y &= \Lambda_y \eta + \varepsilon \end{aligned} \tag{7.29}$$

Donde ε y δ son vectores de error de medida. $\Lambda_{x_p \times m}$ y $\Lambda_{y_q \times n}$ son las matrices de regresión de X en ξ y Y en η .

Nótese que los vectores aleatorio listados en (97) son los factores del modelo de análisis factorial. Es decir, el modelo de ecuaciones estructurales incluye las variables latentes de los modelos de análisis factorial y, además, especifica las relaciones entre estas variables. Los modelos de ecuaciones estructurales pueden verse como una extensión del análisis factorial confirmatorio, en la medida en que se identifica un modelo para luego estimar los parámetros mediante un método adecuado como el de máxima verosimilitud o mínimos cuadrados, para luego calcular una serie de indicadores de ajuste del modelo que permitirán estimar que tan adecuado resulta el modelo para los datos proporcionados. La base de la mayoría de los índices de ajuste usados en SEM es la discrepancia que hay entre la matriz de covarianzas de los datos observados S y la matriz de covarianzas que está implícita en el modelo $\hat{\Sigma}$. Cuando la discrepancia entre ambas matrices es cero $S - \hat{\Sigma} = 0$ implica que existe un ajuste perfecto del modelo (Hancock y Mueller, 2006). Estos estimadores han sido vistos en el apartado de análisis factorial confirmatorio en 3.2.11.b. donde se presentan los indicadores de ajuste más utilizados.

Finalmente, hay que señalar un desarrollo de los modelos de ecuaciones estructurales que incluye derivadas en su formulación y por lo tanto brinda una representación del fenómeno estudiado en el tiempo. Estos modelos son denominados modelos de ecuaciones diferenciales con variables latentes. Puede verse una exposición detallada de estos en Boker y Wenger (2012).

Referencias

- Batchelder, W., Colonius, H., Dzhafarov, E., y Myung, J. (Eds.). (2017). *New handbook of mathematical psychology. Volume 1. Foundations and methodology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Boker, S., y Wenger, M. (2012). *Data analytic techniques for dynamical systems*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. doi: 10.4324/9780203936757
- Bunge, M. (1992). *La ciencia: su método y su filosofía*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Bunge, M., y Ardila, R. (2002). *Filosofía de la psicología*. Mexico: Siglo Veintiuno Editores.
- Franzese, M., y Iuliano, A. (2018). *Descriptive Statistics* (Inf. Téc.). Elsevier Inc.
- Hodgkin, A., y Huxley, A. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, 117(4), 500–544. doi: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764
- Skinner, B. (1987). *Más allá de la libertad y la dignidad*. Barcelona: Salvat Editores.