

Снимаю с себя всю ответственность за нули на коллоквиуме, полученные из-за прочтения фактов с этого конспекта. По всем неточностям и предложениям: [@helloclock](#).

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1 (введение)</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Лекция 2 (модели, ДНФ)</b>	<b>3</b>
2.1	Модели . . . . .	3
2.2	Виды формул . . . . .	3
2.3	ДНФ . . . . .	4
2.4	Алгоритмическая сложность . . . . .	4
2.4.1	Задача о нахождении ДНФ по таблице истинности . . . . .	4
2.4.2	Задача о проверке тавтологичности . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Лекция 3 (полнота и максимальность)</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Лекция 4 (теорема Поста)</b>	<b>8</b>
4.1	Продолжение про классы функций . . . . .	8
4.2	Замены . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Лекция 5 (выводы)</b>	<b>11</b>
5.1	Правила вывода . . . . .	11
5.2	Конкретные правила . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Лекция 6 (продолжение про выводы)</b>	<b>13</b>
6.1	Примеры допустимых правил . . . . .	13
6.2	Противоречивость и непротиворечивость . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>16</b>
7.1	Основное множество правил . . . . .	16
<b>8</b>	<b>Лекция 8</b>	<b>20</b>
8.1	Доказательства аксиом . . . . .	21

# 1 Лекция 1 (введение)

**Определение 1.1.** Алфавит  $\Sigma = \{ (, ), \wedge, \vee, \neg, \rightarrow \} \cup \text{Prop}$ , где  $\text{Prop}$  — множество пропозициональных переменных. В курсе  $\text{Prop} = \{ p, \dots, z, p_1, \dots, z_1, \dots \}$ .

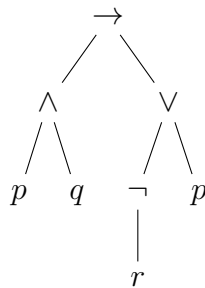
**Определение 1.2.** Формула — последовательность символов из алфавита, определяемая по индукции:

1.  $\top$  и  $\perp$  — формулы;
2.  $p \in \text{Prop}$  — формула;
3.  $A$  — формула  $\implies \neg A$  — формула;
4.  $A, B$  — формулы  $\implies (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$  — формулы.

Формулы удобно представлять в виде дерева, например для формулы

$$((p \wedge q) \rightarrow (\neg r \vee p))$$

дерево выглядит следующим образом:



**Определение 1.3.** Пусть  $A$  — последовательность символов в алфавите  $\Sigma$ :

$$A = a_1 \dots a_n \ (a_j \in \Sigma).$$

Тогда  $B$  — префикс ( $B \sqsubseteq A$ ), если  $B = a_1 \dots a_k \ (k \leq n)$ .

**Лемма 1.1.** Если  $A$  — корректная формула и  $A'$  — её префикс, то  $A'$  — не корректная формула.

**Лемма 1.2** (Об однозначности разбора). Если  $A$  — корректно построена, то верно ровно одно из следующего:

1.  $A \in \text{Prop}$
2.  $A \in \{ \top, \perp \}$
3.  $\exists! B: A = \neg B$
4.  $\exists! B, C: A = (B * C)$ , где  $*$   $\in \{ \wedge, \vee, \rightarrow \}$

## 2 Лекция 2 (модели, ДНФ)

### 2.1 Модели

**Определение 2.1.** *Модель* — функция  $\text{Var} \rightarrow \mathbb{B} = \{0, 1\}$ . Но т.к.  $\text{Var}$  бесконечно, в программах будем считать моделью любую функцию из конечного множества переменных. В таком случае некоторым переменным значение не приписывается.

Модель задаёт интерпретацию истинности всех формул.

Для формулы  $A$  *истинность* формулы в модели  $M$  задаётся по индукции и обозначается  $M(A)$ :

- $M(\top) = 1$ ,  $M(\perp) = 0$ ;
- На переменных уже задано;
- $M(\neg B) = 1 - M(B)$ , если  $A = \neg B$ ;
- $M(B_1 \odot B_2) = M(B_1) \odot M(B_2)$ , если  $A = (B_1 \odot B_2)$ ,  $\odot \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ .

**Определение 2.2.** *Булева функция* — отображение  $\mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B}$ , задаёт булеву функцию данной формулу для фиксированного порядка переменных.

### 2.2 Виды формул

**Определение 2.3.** *Тавтология* — формула, истинная во всех моделях

**Пример:**  $p \rightarrow p$ ,  $p \vee \neg p$

**Определение 2.4.** *Тождественно ложная/противоречивая* формула — формула, ложная во всех моделях.

**Пример:**  $p \wedge \neg p$

**Определение 2.5.** *Выполнимая* формула — формула, истинная хотя бы в одной модели.

**Пример:**  $p \wedge q$

Пример:

Если в пробах с Европы (спутник Юпитера) обнаружены бактерии, то на Европе есть жизнь или бактерии были занесены с Земли. Если бактерии были занесены с Земли, то на Земле есть похожие бактерии. В пробах с Европы обнаружены бактерии, похожие на Земные, следовательно на Европе нет жизни.

- $p$  — "В пробах с Европы обнаружены бактерии"
- $q$  — "На Европе есть жизнь"
- $r$  — "Бактерии с Земли"
- $s$  — "Бактерии похожи на Земные"

Утверждение можно записать следующей формулой:

$$((p \rightarrow q \vee r) \wedge (r \rightarrow s) \wedge s) \rightarrow \neg q$$

Если она тавтологична, то утверждение верно, иначе — нет.

Чтобы проверить на тавтологичность, надо проверить, есть ли набор переменных, для которого формула ложна, тогда она будет не тавтологична. Для этого первая скобка должна быть истинной, а вторая — ложной. Отсюда  $q = \top$ ,  $(p \rightarrow q \vee r) = \top$ ,  $(r \rightarrow s) = \top$ ,  $s = \top$ . Из имеющегося получаем  $p = q = r = s = \top$ . Для этого набора переменных утверждение ложно, т.е. оно не тавтологично, а значит — не истинно во всех моделях.  $\square$

## 2.3 ДНФ

**Определение 2.6.** *Литерал* — переменная или её отрицание.

**Определение 2.7.** *Элементарная конъюнкция/конъюнкт* — конъюнкция литералов.

**Определение 2.8.** *Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)* — дизъюнкция конъюнктов.

**Определение 2.9.** *Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ):*

- Определена для фиксированного множества переменных;
- ДНФ, в которой в каждом конъюнкте участвуют все переменные из множества и только один раз.

Построение СДНФ:

- Можно построить по таблице истинности при условии, что в ней есть хотя бы одна 1;
- Каждая строка преобразуется в элементарную конъюнкцию, которая истинна только на данном наборе переменных и ложна на всех остальных;
- Итоговая формула — дизъюнкция построенных конъюнктов.

**Теорема 2.1.** Для любой булевой функции существует булева

## 2.4 Алгоритмическая сложность

### 2.4.1 Задача о нахождении ДНФ по таблице истинности

- Прямой алгоритм перебирает строки таблицы истинности;
- Полиномиальная сложность по размеру таблицы истинности.

### 2.4.2 Задача о проверке тавтологичности

- Проверяет, истинна ли формула во всех моделях;
- Связана с проблемой SAT (проблема выполнимости);
- NP-полнота: нахождение эффективного алгоритма неизвестно;
- Есть очень хорошие SAT-решатели, которые применяют различные эвристики и быстро работают на формулах, которые появляются в реальных задачах.

### 3 Лекция 3 (полнота и максимальность)

**Определение 3.1.** *Арность* операции (функции) — количество аргументов.

Арность может быть равной 0 — это константы.

Арность:

- 0 — операций всего 2 ( $\top, \perp$ )

$x$	$\perp$	$x$	$\neg x$	$\top$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- 1 —

$x$	$y$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	0	0	0	0	...

- 2 —

$x$	$y$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
0	0	0	0	0	...
0	1	0	0	0	...
1	0	0	0	1	...
1	1	0	1	0	...

**Утверждение 3.1.** *Штрих Шеффера, имеющий следующую таблицу истинности:*

$x$	$y$	$x \uparrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

— полная операция, для системы  $\{\uparrow\}$  верна теорема о функциональной полноте:

- $x \uparrow x = \neg x$
- $x \uparrow y = \neg(x \wedge y)$
- $\neg(x \uparrow y) = \neg\neg(x \wedge y) = x \wedge y$
- $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$

**Утверждение 3.2.** *Стрелка Пирса, имеющая следующую таблицу истинности:*

$x$	$y$	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

— также полная операция и для неё выполнена теорема о функциональной полноте.

**Определение 3.2.**  $G$  — множество булевых функций, тогда  $[G]$  — замыкание множества  $G$ , т.е. все булевы функции, которые можно выразить формулами, использующими операции из  $G$ .

Эквивалентно,  $[G]$  — минимальное множество булевых функций, которое удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $G \subset [G]$ ;
2. 1.  $[G]$  замкнуто относительно композиции;
2.  $\forall f_1, \dots, f_n \in [G] \wedge g(x_1, \dots, x_n) \in G \hookrightarrow g(f_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, f_n(x_1, \dots, x_{m_n})) \in [G]$
3.  $[G]$  содержит все тождественные проекции, т.е.  $\forall n \in \mathbb{N}, i < n: p_i^n(x_1, \dots, x_n) \equiv x_i$

**Определение 3.3.** Множество (класс) функций  $G$  называется *замкнутым*, если  $[G] = G$ .

**Определение 3.4.** Класс функций  $G$  называется *полным*, если  $[G] = F_n$ , где  $F_n$  — множество всех булевых функций  $n$  переменных.

**Определение 3.5.** Класс  $G$  называется *максимальным*, если это замкнутый собственный ( $\neq F_n$ ) класс, такой, что  $\forall f \in F_n \setminus G \hookrightarrow G \cup \{f\}$  — полный класс. Эквивалентно,  $[G \cup \{f\}] = F_n$ .

**Определение 3.6.** Класс функций  $H$  *неполный*, если  $\exists G$  — замкнутый, такой, что  $G \neq F_n \wedge H \subset G$ .

**Лемма 3.1.** *Свойства замыкания:*

1.  $G \subset [G]$
2.  $G \subset H \implies [G] \subset [H]$
3.  $[G] = [[G]]$

*Доказательство.* 1. Очевидно

2. Пусть  $f \in [G]$ , тогда она получена по 1 и 2 свойствам замыкания из функций в  $G$ . Тогда очевидно, что  $f \in [H]$ .

3.  $\subset$  — следует из первых двух пунктов

$\supset$  — докажем по индукции. Пусть  $f \in [[G]]$ . Тогда пункты 1 и 3 из определения тривиальны. Проверим 2.

Факт: проекции позволяют увеличивать число переменных некоторыми мнимыми. Например,  $g(p_1^3(x_1, x_2, x_3), p_2^3(x_1, x_2, x_3))$ .

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ . По предположению индукции  $f_i \in [G] \forall i$ . Таким образом,  $f \in [G]$  как композиция.

□

**Лемма 3.2.**  $H$  не является полной  $\iff \exists G$  — максимальная и  $H \subseteq G$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  — очевидно ©

$\implies$  если  $H$  — неполная, тогда  $[H]$  — замкнута и неполна.

1. Случай 1:  $[H]$  — максимальна, тогда всё хорошо.
2. Случай 2:  $[H]$  — не максимальна  $\implies \exists f \in F_n \setminus [H]: [[H] \cup \{f\}] \neq F_n$ . Тогда пусть  $H := [H] \cup \{f\}$  и вернёмся в начало. Теоретически, этот процесс может не сойтись. Сходимость доказывается леммой Цорна и трансфинитной индукцией или из теоремы Поста.

□

**Теорема 3.1** (Поста).  $T_0 = \{f \mid f(0, \dots, 0) = 0\}$

**Лемма 3.3.**  $T_0$  — максимальный замкнутый класс.

Доказательство. • Замкнутость:

$$\underbrace{g}_{\in T_0}(\underbrace{f_1(\vec{0})}_{\in T_0}, \dots, \underbrace{f_n(\vec{0})}_{\in T_0}) = 0$$

- Максимальность: Пусть  $h \notin T_0$ , тогда  $h(0, \dots, 0) = 1$ . Получаем два случая:

- $h(1, \dots, 1) = 1 \implies h(x, \dots, x) \equiv 1$

Возьмём полную систему  $\{\oplus, \wedge, 1\}$ . 1 уже имеем, а для каждой из остальных функций множества принадлежность к классу  $T_0$  очевидна.

- $h(1, \dots, 1) = 0 \implies h(x, \dots, x) \equiv \neg x$

Заметим, что также имеем в  $T_0$  конъюнкцию (т.к.  $0 \wedge 0 \equiv 0 \implies \wedge \in T_0$ ). Тогда с помощью неё и отрицания выразим все остальные операции.

□

**Определение 3.7.**  $T_1 = \{f \mid f(1, \dots, 1) = 1\}$ . Лемма и её доказательство аналогичны  $T_0$ , за исключением того, что если  $h(x, \dots, x) = 0$ , то берём полную систему  $\{\rightarrow, \perp\}$ .

## 4 Лекция 4 (теорема Поста)

### 4.1 Продолжение про классы функций

**Определение 4.1.**  $M$  — класс монотонных функций, содержащий функции, неубывающие по каждому аргументу. Т.е., если для наборов аргументов

$$f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)$$

верно

$$x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n,$$

то выполняется

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{y}).$$

Пример монотонной функции:  $x_1 \wedge x_2$ .

Пример немонотонной функции:  $x_1 \rightarrow x_2$ .

**Лемма 4.1.**  $M$  является максимальным замкнутым классом.

*Доказательство.* Докажем замкнутость. Возьмём набор функций

$$g(x_1, \dots, x_n), f_1(y_1, \dots, y_m), \dots, f_n(y_1, \dots, y_m) \in M.$$

Рассмотрим  $g(f_1(\vec{y}), \dots, f_n(\vec{y}))$ , и возьмём  $\vec{y}'$  такой, что  $\forall i: y_i \leq y'_i$ . Тогда  $\forall i: f_i(\vec{y}) \leq f_i(\vec{y}')$ , откуда получаем  $g(f_1(\vec{y}), \dots, f_n(\vec{y})) \leq g(f_1(\vec{y}'), \dots, f_n(\vec{y}'))$ .

Теперь докажем максимальность. Возьмём  $h \notin M$ . Заметим, что  $0, 1 \in M$ . Тогда  $\exists x_1 \leq y_1, \dots, x_m \leq y_m: h(\vec{x}) > h(\vec{y})$ , т.е.  $h(\vec{x}) = 1$  и  $h(\vec{y}) = 0$ . Пусть  $\vec{x} \preceq \vec{y} \iff x_1 \leq y_1 \wedge \dots \wedge x_n \leq y_n$ .

**Лемма 4.2** (Вспомогательная лемма). Пусть  $\vec{x} \preceq \vec{y}$ . Тогда  $\exists \vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k: \vec{x}^1 = \vec{x} \wedge \vec{x}^k = \vec{y}$  и  $\vec{x}^i$  отличается от  $\vec{x}^{i+1}$  в одной координате и  $\vec{x} = \vec{x}^1 \preceq \vec{x}^2 \preceq \dots \preceq \vec{x}^k = \vec{y}$ .

*Доказательство.* Доказательства не было, интуитивно — путь в  $n$ -мерном булевом кубе от вершины  $\vec{x}$  до вершины  $\vec{y}$ .  $\square$

Посмотрим значение функции  $h$  на точках  $\vec{x}^i$ . Тогда  $h(\vec{x}^1) = 1$ ,  $h(\vec{x}^k) = 0$ . Понятно, что тогда  $\exists i: h(\vec{x}^i) = 1 \wedge h(\vec{x}^{i+1}) = 0$ . Пусть у  $\vec{x}^i$  на  $j$ -ой позиции стоит 0, а у  $\vec{x}^{i+1}$  — 1. Получаем

$$h(\dots \underbrace{0}_j \dots) = 1, h(\dots \underbrace{1}_j \dots) = 0 \implies h(\dots \underbrace{p}_j \dots) = \neg p$$

Таким образом получили отрицание. С другой стороны, конъюнкция также монотонна, а с помощью этих двух функций уже выразим все остальные.  $\square$

**Определение 4.2.**  $S$  — класс самодвойственных функций, т.е. функций, удовлетворяющих условию

$$f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$$

Пример несамодвойственной функции:  $x \wedge y$ .

Пример самодвойственной функции:  $\neg x, x \oplus y \oplus z$ .



**Лемма 4.3.**  *$S$  является максимальным замкнутым классом.*

*Доказательство.* Докажем замкнутость. Пусть

$$f_1, \dots, f_n: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{B}; g: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B} \in S$$

Рассмотрим  $g(f_1(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}), \dots, f_n(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})) = g(\overline{f_1(\vec{y})}, \dots, \overline{f_n(\vec{y})}) = \overline{g(f_1(\vec{y}), \dots, f_n(\vec{y}))}$ .

Докажем максимальность. Пусть  $h \notin S$ , тогда  $\exists x_1, \dots, x_n: h(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = h(x_1, \dots, x_n)$ .

Обозначим  $p^0 = \neg p$ ,  $p^1 = p$ . Тогда  $h(p^{x_1}, \dots, p^{x_n}) = h(\overline{p^{x_1}}, \dots, \overline{p^{x_n}})$ . Заметим, что

$$h(0^{x_1}, \dots, 0^{x_n}) = h(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}), \quad h(1^{x_1}, \dots, 1^{x_n}) = h(x_1, \dots, x_n)$$

Пусть  $g(p) := h(p^{x_1}, \dots, p^{x_n})$ , тогда возможно два случая:

1.  $g(p) \equiv 1$ , тогда получаем  $\neg 1 = 0$
2.  $g(p) \equiv 0$ , тогда получаем  $\neg 0 = 1$

То есть имеем константы 0 и 1.

Рассмотрим  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_3$ . Тогда в поле  $\mathbb{F}_2$  получаем:

$$\begin{aligned} (x_1 + 1)(x_2 + 1) + (x_2 + 1)(x_3 + 1) + (x_1 + 1)(x_3 + 1) &= \dots = \\ &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + 1 = \\ &= \overline{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3} \end{aligned}$$

Т.е.  $V \in S$ . Заметим, что  $V(x_1, x_2, 0) = x_1 \wedge x_2$ , а также, что  $\neg \in S$ . В итоге получаем полную систему  $\{\neg, V, 0\}$ .  $\square$

**Определение 4.3.** *Многочлен Жегалкина* — многочлен над полем  $\mathbb{F}_2$ . Эквивалентно можно считать, что это формула с операциями  $\wedge, \oplus, 1$ , представляющая из себя сумму  $\oplus$  элементарных конъюнкций (одночленов Жегалкина) и, возможно, 1.

**Лемма 4.4.** *Все булевы функции однозначны (с точностью до перестановки слагаемых и сомножителей) представляются в виде многочлена Жегалкина.*

*Доказательство.* Всего одночленов Жегалкина от  $n$  переменных  $2^n$ . Всего многочленов Жегалкина, соответственно,  $2^{2^n}$ . Булевых функций  $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  тоже  $2^{2^n}$ . А т.к. каждая булева функция представима в виде многочлена Жегалкина (т.е. есть сюръекция) и их число одинаково, то имеем и биекцию между ними.  $\square$

**Определение 4.4.** *Степень* многочлена Жегалкина равна количеству переменных в нём. *Линейными* называются многочлены, в которых все одночлены степени не больше 1.

**Определение 4.5.**  $L$  — класс функций, эквивалентных некоторому линейному многочлену Жегалкина.

**Лемма 4.5.**  *$L$  является максимальным замкнутым классом.*

*Доказательство.* Пусть  $g \notin L$ ;  $0, 1 \in L$  и определим  $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_m + \dots$ . Рассмотрим  $g(x_1, x_2, 1, \dots, 1)$ :

$$g(x_1, x_2, 1, \dots, 1) = \begin{cases} x_1 x_2 \\ x_1 x_2 + 1 \\ x_1 x_2 + x_1 \\ x_1 x_2 + x_2 \\ x_1 x_2 + x_1 + 1 \\ x_1 x_2 + x_2 + 1 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \in L$ , тогда в каждом случае можем добавить нужное число раз  $x_1, x_2, 1$  к выражению, чтобы получить  $x_1 x_2 \equiv x_1 \wedge x_2$ . Получаем полную систему  $\{\wedge, \neg\}$ .  $\square$

**Теорема 4.1** (Поста). Множество булевых функций  $H$  не является полным тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из классов  $T_0, T_1, M, S, L$ .

*Доказательство.* План доказательства:

- $\Leftarrow$  : Если  $H$  содержится в каком-то собственном замкнутом классе, то он не полон;
- $\Rightarrow$  : Покажем обратное. Пусть  $H$  не лежит целиком ни в одном из перечисленных классов:
  - Возьмём функцию  $f_0 \in H$ :  $f_0 \notin T_0$ . Тогда  $f_0(x, \dots, x)$  либо равна 0, либо  $\neg x$ .
  - Возьмём функцию  $f_1 \in H$ :  $f_1 \notin T_1$ . Тогда  $f_1(x, \dots, x)$  либо равна 0, либо  $\neg x$ .
  - Если есть  $\neg x$ : используем несамодвойственную функцию  $f_S$  и получим одну из констант.
  - Если есть 0 и 1, тогда используем немонотонную функцию  $f_M$  и получим отрицание  $\neg x$ .
  - У нас есть 0, 1 и  $\neg$ . Используя нелинейную функцию  $f_L$  можем получить  $\wedge$

$\square$

## 4.2 Замены

**Определение 4.6.** Замену переменной  $p$  на формулу  $\psi$  в формуле  $\varphi$  обозначается  $\varphi[p/\psi]$ .

**Теорема 4.2.** Пусть формулы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  имеют одинаковые таблицы истинности ( $\psi_1 \equiv \psi_2$ ), тогда для любой формулы  $\varphi$

$$\varphi[p/\psi_1] \equiv \varphi[p/\psi_2]$$

*Доказательство.* По индукции:

**База:** для  $\varphi = \perp / \top$  очевидно, как и для  $\varphi = q \neq p$ . Для  $\varphi = p$  получаем  $\varphi[p/\psi_1] = \psi_1$  и  $\varphi[p/\psi_2] = \psi_2$ , а они равны.

**Шаг:**  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

$\varphi[p/\psi_1] = \varphi_1[p/\psi_1] \wedge \varphi_2[p/\psi_1]$ , аналогично для  $\psi_2$ . Тогда, по предположению индукции,  $\varphi_1[p/\psi_1] \equiv \varphi_1[p/\psi_2]$  и  $\varphi_2[p/\psi_1] \equiv \varphi_2[p/\psi_2]$ , а объединение этих формул не влияет на эквивалентность.  $\square$

## 5 Лекция 5 (выводы)

### 5.1 Правила вывода

**Определение 5.1.** *Правилом вывода* будем называть пару, состоящую из множества формул  $\Gamma$  и одной формулы  $\varphi$ . При этом  $\Gamma$  может быть пустым.  $\Gamma$  будем называть множеством *посылок*, а формулу  $\varphi$  *заключением*. Правила вывода обычно записывают так:

$$\frac{\Gamma}{\varphi} \text{ или } \frac{\psi_1, \dots, \psi_n}{\varphi}$$

Теоретически можно рассматривать правила, в которых  $\Gamma$  бесконечно, такие правила называются *инфинитарными*, но мы так делать не будем, у нас всё конечно.

Пусть  $\Gamma$  — множество формул (необязательно конечное), и  $\varphi$  — формула. Будем говорить, что из  $\Gamma$  *логически следует*  $\varphi$ , если в любой модели  $M$ , в которой истинны все формулы из  $\Gamma$  истинна и формула  $\varphi$  (обозначение:  $\Gamma \models \varphi$ ). Правило  $\frac{\Gamma}{\varphi}$  называется *корректным*, если  $\Gamma \models \varphi$ .

Пример корректных правил:  $\frac{p}{p}, \frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$  (силлогизм); пример некорректных правил:  $\frac{p}{p}, \frac{p}{p \wedge q}$ .

**Определение 5.2.** Правило вывода  $\frac{\Delta}{\psi}$  является частным случаем правила  $\frac{\Gamma}{\phi}$ , если существуют формулы  $\theta_1, \dots, \theta_n$  и переменные  $p_1, \dots, p_n$ , такие что первое правило получается из второго путём одновременной подстановки формул  $\theta_i$  вместо каждого вхождения переменной  $p_i$  во всех посылках правила  $\psi$  (с сохранением их порядка), а также в его заключении.

Например,  $\frac{(x \rightarrow x) \wedge (\neg y)}{x \rightarrow x}$  — частный случай правила  $\frac{p \wedge q}{p}$ .

Мы будем рассматривать наши правила выводов как схемы, т.е. одно правило — по сути бесконечно много правил, включающее все частные случаи данного правила.

**Определение 5.3.** Пусть у нас есть множество правил вывода  $\mathcal{R}$ , *выводом* в  $\mathcal{R}$  из множества *гипотез*  $\Gamma$  будем называть последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит  $\Gamma$ , либо получена с помощью частного случая некоторого правила из  $\mathcal{R}$ , при этом множество посылок должно состоять только из формул, которые появлялись в выводе раньше.

Формула  $\varphi$  *выводится* из  $\Gamma$  в  $\mathcal{R}$  ( $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$ ), если существует вывод из  $\Gamma$  в  $\mathcal{R}$ , заканчивающийся формулой  $\varphi$ .

Если формула  $\varphi$  выводится из пустого множества гипотез в  $\mathcal{R}$ , то мы говорим, что  $\varphi$  выводима в  $\mathcal{R}$  и записывается как  $\vdash_{\mathcal{R}} \varphi$ .

Пример:

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}, \frac{p}{\neg \neg p} \right\}, \quad \Gamma = \{p \rightarrow \neg p\}$$

Тогда примером вывода будет:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg p \\ \neg \neg(p \rightarrow \neg p) \end{array}$$

Первое правило из  $\mathcal{R}$  мы использовать для вывода не можем. Добавим в  $\Gamma$  гипотезу  $\neg p \rightarrow q$ . Тогда, можем дополнить вывод до

$$\begin{array}{c} \neg p \rightarrow q \\ p \rightarrow q. \end{array}$$

Таким образом,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} p \rightarrow q$

**Теорема 5.1.** Если все правила в  $\mathcal{R}$  корректны и  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$ , то  $\Gamma \models \varphi$ .

*Доказательство.* По индукции. Знаем, что для  $\varphi_1, \dots, \varphi_n: \forall i: \Gamma \models \varphi_i$ .

**База:**  $i = 1 \implies$

1.  $\varphi_1 \in \Gamma \implies \varphi_1$  истинная в модели;
2.  $\frac{}{\varphi_1}$  — частный случай правила из  $\mathcal{R}$ . Отсюда  $\varphi_1$  — тавтология  $\implies \mathcal{M} \models \varphi_1$ .

**Шаг:** пусть  $\forall j < i: \Gamma \models \varphi_j$ . Докажем для  $\varphi_i$ .

1.  $\varphi_i \in \Gamma \implies \mathcal{M} \models \varphi_i$
2.  $\exists j_1, \dots, j_k < i: \frac{\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_k}}{\varphi_i}$  — частный случай правила из  $\mathcal{R}$ . Тогда по предположению индукции  $\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_k}$  истинны в  $\mathcal{M}$ .

**Лемма 5.1.** Если  $\frac{\phi_1, \dots, \phi_n}{\phi}$  корректно и  $\frac{\eta_1, \dots, \eta_n}{\eta}$  — частный случай  $(P)$ , то оно тоже корректно.

*Доказательство.* Имеем  $\eta_1 = \psi_1[p_1/\theta_1, p_2/\theta_2, \dots, p_n/\theta_n], \dots, \xi = \varphi[p_1/\theta_1, p_2/\theta_2, \dots, p_n/\theta_n]$   
 $P$  — корректна  $\implies \forall \mathcal{M}: \psi_1, \dots, \psi_n$  истинны  $\implies \varphi$  — истинна.

Пусть  $\eta_1, \dots, \eta_n$  истинны в модели  $\mathcal{M}$ . Возьмём  $\mathcal{M}'$  такую, что  $\forall i: \mathcal{M}' \models p_i \iff \mathcal{M} \models \theta_i$ .

Утверждение:  $\forall \varphi: \mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi[p/\theta_1]$ . Доказывается индукцией по длине  $\varphi$ . □

Тогда по лемме  $\varphi_i$  истинна в  $\mathcal{M}$ . □

## 5.2 Конкретные правила

**Определение 5.4.** *Modus Ponens:*

$$\frac{p, p \rightarrow q}{q}$$

**Определение 5.5.** *Аксиомы Гильберта:*

1.  $(I1)$ :

$$q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

2.  $(D)$ :

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

3.  $(N)$ :

$$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

## 6 Лекция 6 (продолжение про выводы)

**Определение 6.1.** Правило  $\frac{\Gamma}{\varphi}$  называется *допустимым* в множестве правил вывода  $\mathcal{R}$ , если

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$$

**Лемма 6.1.** Если  $\frac{\Gamma}{\varphi}$  — допустимое в  $\mathcal{R}$  правило, а  $\frac{\Delta}{\psi} \triangleq \frac{\Gamma}{\varphi}$  — частный случай правила  $\frac{\Gamma}{\varphi}$ , то

$$\Delta \vdash_{\mathcal{R}} \psi$$

**Теорема 6.1** (The Lemma Theorem). Если правило  $\rho$  допустимо (доказуемо) в множестве правил вывода  $\mathcal{R} \cup \lambda$  и при этом  $\lambda$  допустимо в  $\mathcal{R}$ , то и  $\rho$  допустимо в  $\mathcal{R}$ .

*Доказательство.* TODO □

### 6.1 Примеры допустимых правил

Пусть  $\mathcal{R} = \{I1, D, N, MP\}$ , тогда в  $\mathcal{R}$  допустимы правила

$$(I0) \frac{}{p \rightarrow p}, \frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}, \frac{p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q}{\neg p}$$

**Теорема 6.2** (Теорема о дедукции). Если  $\mathcal{R}$  — множество правил вывода, содержащее  $(MP)$ ,  $(I1)$  и  $(D)$ , и все остальные правила являются аксиомами (пустое множество посылок), то для любых формул  $\varphi$ ,  $\psi$  и множества формул  $\Gamma$  верно

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{R}} \psi \iff \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \psi)$$

*Доказательство.* В одну сторону можно усилить утверждение

**Лемма 6.2.** Если  $\mathcal{R}$  — множество правил вывода, содержащее  $(MP)$ , то для любых формул  $\varphi$ ,  $\psi$  и множества формул  $\Gamma$  верно

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \psi) \implies \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{R}} \psi$$

*Доказательство.* Пусть есть набор формул  $\Gamma$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$ ,  $\varphi$ . Тогда по modus ponens  $\psi$ . □

Осталось доказать, что  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathcal{R}} \psi \implies \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \psi)$ .

Будем доказывать индукцией по длине вывода. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = \psi$  — вывод из  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Будем доказывать, что для любого  $i \leq n$  верно

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \xi_i)$$

Разберём случаи:

- Возьмём  $\xi_i = \varphi$ . Докажем, что  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \varphi)$ . Но уже доказывали (в ДЗ), что из пустого множества посылок доказуемо выражение  $p \rightarrow p$ , а  $\varphi \rightarrow \varphi$  — его частный вид.
- Пусть теперь  $\xi_i \in \Gamma$ . Тогда нужно построить вывод  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \xi_i)$ . Тогда

1.  $\xi_i$
2.  $\xi_i \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi_i)$  (I0)
3.  $\varphi \rightarrow \xi_i$  (MP)

- $\xi_i$  получена по правилу (I1) или (D) (с пустым множеством посылок). То же самое вроде.
- $\xi_i$  получена по правилу (MP) из  $\xi_j$  и  $\xi_k$ . Тогда  $\xi_k$  имеет вид  $\xi_j \rightarrow \xi_i$ . По предположению индукции  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\varphi \rightarrow \xi_j)$  и  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \underbrace{(\varphi \rightarrow (\xi_j \rightarrow \xi_i))}_{\xi_k}$ . Тогда вывод будет иметь вид  $\dots \varphi \rightarrow \xi_j \dots \varphi \rightarrow (\xi_j \rightarrow \xi_i)$ .

Формула  $(\varphi \rightarrow (\xi_j \rightarrow \xi_i)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \xi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi_i))$  есть частный случай (D). Тогда, применив modus ponens к нему и последнему правилу предыдущего абзаца получаем  $((\varphi \rightarrow \xi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi_i))$ . Получаем  $(\varphi \rightarrow \xi_i)$  (MP).

□

## 6.2 Противоречивость и непротиворечивость

Рассмотрим аксиому

$$(I2) (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$$

Пусть  $\mathcal{R}$  — множество правил вывода, которое включает MP, I0 и I2, а также может дополнительно включать только правила вывода без посылок. Множество формул  $\Gamma$  называется (синтаксически) *противоречивым* (*inconsistent*) (относительно  $\mathcal{R}$ ), если выполняется одно из следующих пяти эквивалентных условий:

- Формула  $\neg(p \rightarrow p)$  выводится из  $\Gamma$  в  $\mathcal{R}$  ( $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \neg(p \rightarrow p)$ )
- Отрицание некоторой аксиомы выводимо из  $\Gamma$
- $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$  и  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \neg\varphi$  для некоторой формулы  $\varphi$
- Из  $\Gamma$  можно вывести в  $\mathcal{R}$  любую формулу (вообще любую)
- Отрицание всех аксиом доказуемы в  $\mathcal{R}$  из  $\Gamma$

Множество формул, которое не является противоречивым, называется *непротиворечивым* (*consistent*).

*Доказательство.*  $5 \implies 1, 1 \implies 2$ : очевидно.

$2 \implies 3$ :

Пусть есть  $\alpha$  — аксиомы из  $\mathcal{R}$  и  $\varphi = \alpha$ , тогда  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \alpha$ . С другой стороны,  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \neg\alpha$  из предположения.

$3 \implies 4$ :

Имеем вывод вида  $\dots \varphi \dots \neg\varphi$ . Тогда пусть  $\psi$  — любая формула, тогда можем записать  $(\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$  (I2),  $\varphi \rightarrow \psi$  (MP),  $\psi$  (MP)

$4 \implies 5$ : опять очевидно. □

**Теорема 6.3.** Пусть  $\{MP, I1, D, N\} \subseteq \mathcal{R}$  и, кроме MP, все правила в  $\mathcal{R}$  без посылок. Для любого множества формул  $\Gamma$  и формулы  $\varphi$  верно, что  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  противоречиво в  $\mathcal{R}$ , тогда  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$ . Т.е.,

$$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathcal{R}} \neg(p \rightarrow p) \implies \Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \varphi$$

*Доказательство.* По теореме о дедукции, левая часть последнего утверждения равносильна  $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} (\neg\varphi \rightarrow \neg(p \rightarrow p))$ .

Тогда имеем вывод

1.  $\neg\varphi \rightarrow \neg(p \rightarrow p)$
2.  $(\neg\varphi \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow \varphi) \text{ (N)}$
3.  $(p \rightarrow p) \rightarrow \varphi \text{ (MP)}$
4.  $p \rightarrow p$
5.  $\varphi$

□

**Лемма 6.3.** Пусть  $\mathcal{R} = \{MP, I1, D, N\}$ , тогда правило I2 допустимо в  $\mathcal{R}$ , т.е.

$$\vdash_{\mathcal{R}} (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$$

*Доказательство.* Хотим доказать  $\neg p \vdash_{\mathcal{R}} (p \rightarrow q)$ .

Построим вывод. Гипотеза —  $\neg p$ , тогда

1.  $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \text{ (I1)}$
2.  $\neg q \rightarrow \neg p \text{ (MP)}$
3.  $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q) \text{ (N)}$
4.  $p \rightarrow q \text{ (MP)}$

□

## 7 Лекция 7

### 7.1 Основное множество правил

TODO: про полноту че то

Modus Ponens (MP):

$$\frac{p, p \rightarrow q}{q}$$

$$(I0) (p \rightarrow p)$$

$$(I1) (q \rightarrow (p \rightarrow q))$$

$$(D) ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$$

$$(I2) (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$$

$$(N) ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q))$$

$$(NI) (p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q)))$$

$$(NN) (p \rightarrow \neg\neg p)$$

$$(R) ((q \rightarrow p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow p))$$

Будем писать  $\vdash$  (без индекса) для выводимости в этом множестве правил.

На самом деле, обязательными являются лишь правила I1, D, N.

Обозначим систему аксиом Гильберта как  $\mathcal{H}$ .

**Определение 7.1.** Пусть  $\varphi$  — формула, и  $b \in \{\text{True}, \text{False}\}$ , тогда

$$\varphi^b = \begin{cases} \varphi, & b = \text{True} \\ \neg\varphi, & b = \text{False} \end{cases}$$

**Определение 7.2.** Пусть  $M$  — некоторая конечная модель, т.е. отображение из конечного множества переменных в множество  $\{\text{True}, \text{False}\}$ .

Определим множество формул

$$\Gamma_M = \bigcup_{M[p]=b} \{p^b\}$$

**Лемма 7.1.** Пусть  $\varphi$  — формула, и  $M$  оценивает все формулы из  $\varphi$  и  $M[\varphi]$  — истинностное значение формулы  $\varphi$  при оценке  $M$ , тогда

$$\Gamma_M \vdash \varphi^{M[\varphi]}$$

*Доказательство.* Доказательство индукцией по длине формулы:

**База:**  $\varphi = p$ . Утверждение следует из того, что  $p \vdash p$  и  $\neg p \vdash \neg p$ .

**Шаг:**



- $\varphi = \neg\psi$

Если  $M[\psi] = \text{True}$ , то  $M[\varphi] = \text{False}$ . Тогда по предположению индукции  $\Gamma_M \vdash \psi^{\text{True}} = \psi$ . Надо доказать, что  $\Gamma_M \vdash \varphi^{\text{False}} = \neg\neg\psi$ . Достаточно доказать, что  $\vdash (\psi \rightarrow \neg\neg\psi)$  (правило NN). Вывод для  $\neg\neg\psi$  выглядит так:

1. ...
2.  $\psi$
3.  $\psi \rightarrow \neg\neg\psi$
4.  $\neg\neg\psi$   $\square$

Если  $M[\psi] = \text{False}$ , то  $M[\varphi] = \text{True}$ . По ПИ имеем  $\Gamma_M \vdash \neg\psi$ , нужно доказать  $\Gamma_M \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$ .

- $\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ . По предположению индукции  $\Gamma_M \vdash \psi_1^{M[\psi_1]}$  и  $\Gamma_M \vdash \psi_2^{M[\psi_2]}$ . Надо разобрать 4 случая:

1.  $M[\psi_1] = \text{False}$ ,  $M[\psi_2] = \text{False}$ . Докажем  $\neg\psi_1, \neg\psi_2 \vdash (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  с помощью I2 ( $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ ).

Имеем вывод

1. ...
2.  $\neg\psi_1$
3.  $\neg\psi_1 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  (I2)
4.  $\psi_1 \rightarrow \psi_2$  (MP)
2. False, True. Докажем  $\neg\psi_1, \psi_2 \vdash (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  (I2) или (I1). То же самое
3. True, False. Докажем  $\psi_1, \neg\psi_2 \vdash \neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  (NI). Получим вывод
  1. ...
  2.  $\psi_1$
  3. ...
  4.  $\neg\psi_2$
  5.  $\psi_1 \rightarrow (\neg\psi_2 \rightarrow \neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2))$  (NI)
  6.  $\neg\psi_2 \rightarrow \neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  (MP)
  7.  $\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  (MP)
4. True, True. Докажем  $\psi_1, \psi_2 \vdash (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ . Соответствующий вывод:
  1. ...
  2.  $\psi_2$
  3.  $\psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  (I1)
  4.  $\psi_1 \rightarrow \psi_2$  (MP)

$\square$

**Лемма 7.2.** Если  $\Gamma \cup \{p\} \vdash \varphi$  и  $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \varphi$ , то  $\Gamma \vdash \varphi$ .

*Доказательство.* Следует из аксиомы (R).

По теореме о дедукции из первого утверждения  $\Gamma \vdash p \rightarrow \varphi$ , а из второго  $\Gamma \vdash \neg p \rightarrow \varphi$ . Получим вывод:

1.  $(p \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
2.  $(\neg p \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
3.  $\varphi$

$\square$

**Теорема 7.1** (О полноте). Если  $\varphi$  — тавтология, то  $\vdash \varphi$ , а значит и  $\vdash_{\mathcal{H}} \varphi$ .

*Доказательство.*  $\forall$  модели  $M$ , содержащей все переменные из  $\varphi$  имеем  $M[\varphi] = \text{True}$ , Тогда по лемме

$$\Gamma_M \vdash \varphi \text{ для любой модели } M.$$

Пусть  $p$  — некоторая переменная из  $\varphi$ , тогда все модели разобьются на пары, т.ч.то в паре оценка отличается только в переменной  $p$ . Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — две такие модели. Пусть

$$\Gamma_{M_1} = \Gamma' \cup \{p\} \text{ и } \Gamma_{M_2} = \Gamma' \cup \{\neg p\}$$

По предыдущей лемме получим  $\Gamma' \vdash \varphi$ . Прделавав так с каждой парой моделей мы уменьшим на 1 количество посылок. Действуя так мы сможем избавиться от всех посылок.  $\square$

**Теорема 7.2** (О сильной полноте). Пусть  $\Gamma$  — конечное множество формул и  $\varphi$  — формула, тогда

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  было в теореме о корректности.

$\Rightarrow$  Пусть  $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ . По теореме о дедукции (применив  $n$  раз)

$$\Gamma \vdash \iff \vdash (\psi_1 \rightarrow (\dots (\psi_n \rightarrow \varphi) \dots))$$

Осталось показать, что

$$\Gamma \models \varphi \iff (\psi_1 \rightarrow (\dots (\psi_n \rightarrow \varphi) \dots)) \text{ — тавтология}$$

В правую сторону импликация известна, осталось доказать в левую. Пусть это не тавтология, тогда  $\exists$  модель, её опровергающая. Тогда надо чтобы  $\psi_i$  были истинными, а  $\varphi$  — ложной. Тогда  $\Gamma \not\models \varphi$ .  $\square$

Переформулируем это утверждение в симметричной форме.

$\Gamma \models \varphi$  эквивалентно тому, что  $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  не имеет модели.

$\Gamma \vdash \varphi$  эквивалентно тому, что  $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$  противоречиво:

$$\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \vdash \neg \varphi, \Gamma \cup \{\neg \varphi\} \vdash \varphi \implies \Gamma \cup \{\neg \varphi\} \text{ — противоречиво}$$

В другую сторону знаем, что  $\Gamma \cup \{\neg \varphi\} \vdash \neg(p \rightarrow p)$ . Тогда:

1.  $\Gamma \vdash \neg \varphi \rightarrow \neg(p \rightarrow p)$
2.  $(\neg \varphi \rightarrow \neg(p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow \varphi)$  (N)
3.  $(p \rightarrow p) \rightarrow \varphi$
4.  $p \rightarrow p$  (I0)
5.  $\varphi$

Тогда изначальное утверждение эквивалентно следующему:

$$\Gamma \text{ не имеет модели} \iff \Gamma \text{ противоречиво}$$

или

$\Gamma$  выполнимо  $\iff \Gamma$  непротиворечиво

**Теорема 7.3** (О компактности (синтаксическая)). Бесконечное множество формул непротиворечиво тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество непротиворечиво.

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma$  противоречиво, тогда можно вывести  $\Gamma \vdash \neg(p \rightarrow p)$ , т.е. имеем вывод

1. ...
2.  $\neg(p \rightarrow p)$ ,

он использует конечное число формул из  $\Gamma$ . Пусть  $\Gamma_0$  — все формулы, используемые в доказательстве. Тогда  $\Gamma_0 \vdash \neg(p \rightarrow p)$ .

В другую сторону, если существует  $|\Gamma_0| < \infty$ ,  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  и  $\Gamma_0$  противоречива, то  $\Gamma$  также противоречива. □

**Теорема 7.4** (О компактности (семантическая)). Бесконечное подмножество формул  $\Gamma$  выполнимо (имеет модель) тогда и только тогда, когда любое его конечное подмножество выполнимо.

## 8 Лекция 8

**Теорема 8.1** (О полноте в сильной форме). Произвольное множество формул  $\Gamma$  выполнимо тогда и только тогда, когда  $\Gamma$  непротиворечиво.

*Доказательство.*

**Определение 8.1.** Множество формул  $\Gamma$  называется *полным*, если оно непротиворечиво и «максимально», т.е. для любой формулы  $\varphi \notin \Gamma$  верно, что  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  — противоречиво.

**Лемма 8.1** (Линденбаум). Любое непротиворечивое множество можно дополнить до полного.

*Доказательство.* Перечислим все формулы  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$

Будем строить  $\Gamma_n$  по индукции.  $\Gamma_0 = \Gamma$ ,

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, & \text{если } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ — непротиворечиво} \\ \Gamma_n, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$$

Проверим, что  $\Delta$  непротиворечиво и максимально.

- Непротиворечивость

Если  $\Delta$  противоречиво, то  $\Delta \vdash \neg(p \rightarrow p)$ . Такой вывод использует конечное число формул, а значит  $\exists n: \Gamma_n \vdash \neg(p \rightarrow p) \implies \Gamma_n$  — противоречиво, что противоречит построению  $\Gamma_n$

- Максимальность

Пусть оно не максимально, т.е.  $\exists \varphi \notin \Delta: \Delta \cup \{\varphi\}$  — непротиворечиво. Тогда  $\exists n: \varphi = \varphi_n$ , но тогда  $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$

1.  $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$  — противоречиво, тогда  $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \neg(p \rightarrow p)$ , откуда следует  $\Delta \vdash \neg(p \rightarrow p)$ , а значит  $\Delta$  противоречиво, противоречие
2.  $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$  — непротиворечиво, тогда  $\varphi_n = \varphi \in \Delta$ , противоречие

□

**Лемма 8.2** (Свойства полных множеств). Пусть  $\Delta$  — полное множество формул, тогда:

- $\neg\psi \in \Delta \iff \psi \notin \Delta$
- $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \in \Delta \iff (\psi_1 \notin \Delta \wedge \psi_2 \in \Delta)$

*Доказательство.* • Пусть оба  $\in \Delta$ , тогда получаем  $\Delta \vdash \psi$  и  $\Delta \vdash \neg\psi$  и  $\Delta$  противоречиво

Пусть оба  $\notin \Delta$ . Тогда по максимальной добавление  $\psi$  и  $\neg\psi$  приводит к противоречивости:

$$\begin{cases} \Delta \cup \{\psi\} \text{ — противоречиво} \implies \Delta \vdash \neg\psi \\ \Delta \cup \{\neg\psi\} \text{ — противоречиво} \implies \Delta \vdash \neg\neg\psi \end{cases}$$

- Имея первый пункт, достаточно исключить следующие 3 случая:

–  $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \in \Delta$  и  $\psi_1 \in \Delta$  и  $\neg\psi_2 \in \Delta$ , тогда  $\Delta \vdash (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  и  $\Delta \vdash \psi_1$ . По МР получаем  $\Delta \vdash \psi_2$ , но  $\Delta \vdash \neg\psi_2$ , откуда  $\Delta$  противоречиво.

- $\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \in \Delta$  и  $\neg\psi_1 \in \Delta$ . Имеем  $\neg\psi_1 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ , по МР получим  $\Delta \vdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$ , и имея  $\Delta \vdash \neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$  получаем противоречие.
- $\neg(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \in \Delta$  и  $\psi_2 \in \Delta$  аналогично предыдущему пункту.

□

**Определение 8.2.** Пусть  $\Delta$  — полное множество формул. Определим модель  $M_\Delta$  следующим образом:

$$M_\Delta[p] = \begin{cases} \text{True}, & p \in \Delta \\ \text{False}, & p \notin \Delta \end{cases}$$

**Лемма 8.3.** Для произвольной формулы  $\varphi$  верно, что

$$M_\Delta[\varphi] = \text{True} \iff \varphi \in \Delta$$

*Доказательство.* Докажем индукцией по  $\varphi$ .

**База:** верна по определению  $M_\Delta[\varphi]$

**Шаг:**

- $\varphi = \neg\psi$   

$$M_\Delta[\varphi] = \begin{cases} \text{True}, & M_\Delta[\psi] = \text{False} \iff \psi \notin \Delta \iff \varphi = \neg\psi \in \Delta \\ \text{False}, & M_\Delta[\psi] = \text{True} \iff \psi \in \Delta \iff \varphi = \neg\psi \notin \Delta \end{cases} \quad \text{из предыдущей леммы.}$$
- $\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ .  

$$(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \in \Delta \iff \psi_1 \notin \Delta \vee \psi_2 \in \Delta \iff M_\Delta[\psi_1] = \text{False} \vee M_\Delta[\psi_2] = \text{True}$$

□

Докажем наконец изначальную теорему (да, это было доказательство теоремы на полторы страницы):

$\implies$  Если  $\Gamma$  выполнимо, то  $\exists M$ , оценивающая все переменные, в которой все формулы из  $\Gamma$  истинны.

Пусть  $\Gamma$  противоречиво, тогда  $\Gamma \vdash \neg(p \rightarrow p)$ , но в силу того, что все правила корректны, т.е. сохраняют истинность, то в модели  $M$  должна быть истинная формула  $\neg(p \rightarrow p)$ , что невозможно.

$\Leftarrow$  Теперь, пусть  $\Gamma$  непротиворечиво, тогда его можно расширить по лемме Линдбаума до полного множества  $\Delta$ . Тогда в модели  $M_\Delta$  будут истинны все формулы из  $\Gamma$  благодаря предыдущей лемме. □

## 8.1 Доказательства аксиом

- (I2):

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$

*Доказательство.* 1.  $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$  (I1)

2.  $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$  (N)

3.  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$  (силлогизм)

□

- Вспомогательная аксиома

$$\vdash \neg\neg p \rightarrow p$$

*Доказательство.* По лемме о дедукции доказательство аксиомы эквивалентно доказательству  $\neg\neg p \vdash p$ . Хотим вывести  $\vdash \neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow p)$

1.  $\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p)$  (I1)
2.  $\neg\neg p \vdash \neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p$
3.  $(\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p)$
4.  $\neg\neg p \vdash \neg p \rightarrow \neg\neg p$
5.  $(\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow p)$
6.  $\neg\neg p \vdash \neg\neg p \rightarrow p$
7.  $\neg\neg p \vdash p$

□

- (NN):

$$p \rightarrow \neg\neg p$$

*Доказательство.* 1.  $(\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg p)$  (N)  
 2.  $\vdash \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$  (предыдущий пункт)  
 3.  $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$  (MP)

□

•

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

*Доказательство.* По теореме о дедукции она выводима тогда и только тогда, когда выводима  $(p \rightarrow q) \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ . Докажем вспомогательную лемму

**Лемма 8.4.**

$$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$$

*Доказательство.* Вывод эквивалентен  $p \rightarrow q \vdash \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q \iff p \rightarrow q, \neg\neg p \vdash \neg\neg q$ .

По одному из прошлых пунктов знаем  $\vdash \neg\neg p \rightarrow p$ , по силлогизму получаем  $\vdash \neg\neg p \rightarrow q$ ,  
 $\vdash q \rightarrow \neg\neg q$ ,  $\vdash \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$ . □

Имеем  $(p \rightarrow q) \vdash \neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$ , откуда получаем  $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$  □

- (NI):

$$\vdash (p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q)))$$

*Доказательство.* Достаточно вывести  $p \vdash \neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$ . Если сможем доказать  $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$ , то получим требуемое. По теореме о дедукции это эквивалентно  $p, p \rightarrow q \vdash q$ , по MP это верно. □