一、最值、介值定理及罗尔定理(上)　二、罗尔定理(下)

1. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 的自身映射，且 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，$x,y\in[a,b]$. 设 $x_1\in[a,b]$，并且定义序列 $\{x_n\}$：$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$，$n=1,2,\cdots$. 试证：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$ 存在，且 $f(x)=x$.（湖南大学 2005）

2. 证明：

（Ⅰ）存在 $c\in(0,1)$，使得 $c=e^{-c}$；

（Ⅱ）任给 $x_1\in(0,1)$，定义 $x_{n+1}=e^{-x_n}$，$n\geqslant 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，$|f'(x)|\leqslant c<1$，对任意 $x\in[a,b]$，$x_0\in[a,b]$，令 $x_1=f(x_0)$，$x_n=f(x_{n-1})$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛于 $[a,b]$ 某点 d，且 $|x_n-d|\leqslant\dfrac{c^n}{1-c}|x_1-x_0|$ 或 $f(x)$ 有且仅有一个不动点.（南京理工 2006，华中科大 2000，深圳大学 2010）

4. 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$,证明:存在$\xi\in(0,+\infty)$,使 $f(\xi)+\xi=0$.

5. 设 $f(x)$在$[0,1]$上有三阶导数,且 $f(0)=f(1)=0$,$F(x)=x^3 f(x)$. 证明:

(1) 存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使 $F'(\xi_1)=0$;

(2) 存在 $\xi_2\in(0,1)$ 使 $F''(\xi_2)=0$.

6. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导,且 $f'_{+}(a)\cdot f'_{-}(b)<0$,证明:在$(a,b)$内存在点 ξ 使得 $f'(\xi)=0$.(南京师大 2012,燕山大学 2010,中科院 2005)

7. 设 $f(x)$具有二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,$f(1)=0$,证明:在$(0,1)$内至少存在一点 β 使 $f''(\beta)=0$.

8. 设 $f(x)$在$[0,1]$上二次可微,且 $f(0)=f(1)=0$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)\cos\xi+f''(\xi)\sin\xi=0$.(东南大学 2007)

9. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0$,而当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)\neq 0$,证:对任意自然数 n,存在 $\xi\in(0,1)$ 使得$\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

10. 设 $f(x)$在$[0,1]$上可导,且 $f(1)=2f(0)$,证:存在 $\xi\in(0,1)$ 使得$(\xi+1)f'(\xi)=f(\xi)$.(武汉大学 2006,南京师大 2011)

11. 设 $f(x)$在$[0,1]$二次可导,且 $f(0)=f(1)=0$,证:存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{(\xi-1)^2}$.

12. 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $2f'(\xi)+(\xi-1)f''(\xi)=0$.

13. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)=0$,证:存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f^{1}(\xi)+f^{2}(\xi)=0$.(郑州大学 2000)

14. 设 $f(x)$在$[0,a]$上有连续导数,若 $f(0)=f(a)$,证:存在 $\xi\in(0,a)$ 使得 $f'(\xi)=3\xi^{2}(f(\xi)-f(0))$.(云南大学 2006)

15. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导, $f(b)=f(a)$,证:存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(a)-f(\xi)=$

$\frac{\xi f'(\xi)}{2}$.

16. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \int_a^b f(x^2)\mathrm{d}x$，证：存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi) - f(\xi^2) = \frac{1}{4(b-a)}$.（北京科技 2013）

17. 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶连续可导，$f(1) = f(0) = f'(1) = f'(0) = 0$. 证：存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi) = f''(\xi)$.

18. 设 $f(x)$,$g(x)$在$(2,3)$内可导,且存在 $x_1 < x_2 \in (2,3)$,使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,证:在(x_1,x_2)内方程 $xf'(x)\ln x + f(x)[g'(x)x\ln x + \ln x + 1] = 0$ 至少有一个零点.

19. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可微,且 $f'(x) > 0$,$f(0) = 0$,证:存在 $\lambda,\mu \in (0,1)$ 使得 $\lambda + \mu = 1$,$\dfrac{f'(\lambda)}{\lambda} = \dfrac{f'(\mu)}{\mu}$.(陕西师大 2012)

20. 设 $f(x)$在$[0,4]$上连续,在$(0,4)$上可导,假定 $f(0) = 1$,且 $f(1) + f(2) + f(3) = f(4) = 2$,证明:存在 $\xi \in (0,4)$ 使 $f'(\xi) = 0$.(东南大学 2008)

21. 设 $f(x)$在$[1,3]$上可微,$f(1) = 9f(3) = \int_1^2 x^2 f(x)\mathrm{d}x$,证明存在不同的两点 ξ_1,$\xi_2 \in (1,3)$ 满足 $2f(x) + xf'(x) = 0$.

22. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可微，若 $f(x)=4\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{1-x^3}f(x)\mathrm{d}x$，证明：

(1) 存在 $\eta\in(0,1)$ 使 $f(x)=\mathrm{e}^{1-\eta^3}f(\eta)$；

(2) 存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=3\xi^2f(\xi)$.

23. 设 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$，证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=0$，$f(\xi_2)=0$.

24. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：在$(a,b)$内至少存在两点 x_1,x_2 使 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

25. 证明以下问题：

(1) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

(2) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)\neq 0$，则存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$.

三、拉格朗日中值定理

1. 已知 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=1$. 证明：$\exists\varepsilon,\eta\in(a,b)$使 $e^{\varepsilon-\eta}[f^2(\varepsilon)+2f(\varepsilon)f'(\varepsilon)]=1$.（云南大学）

2. 设 $f(x)$在$[a,b]$($a>0$)连续，在(a,b)可微，且 $f(a)=f(b)=1$. 证明：$\exists\varepsilon,\eta\in(a,b)$使 $\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)^{n=1}=f(\xi)+\dfrac{\xi}{n}f'(\xi)$，$n\geqslant 1$.

3. 证明:若 $x>0$,则

(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$,其中$\dfrac{1}{4}<\theta(x)<\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

4. 设 $f(x)$在$[0,a]$上具有二阶导数,且 $|f''(x)|\leqslant M$,$f(x)$ 在$(0,a)$ 内取得最大值. 证:$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

5. 判断:设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,若存在极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=l$,则右导数 $f'_+(a)$存在且等于 l.

6．证明：导函数至多有第二类间断点.

7．设 $f(x)$ 处处可导，则（　　）.

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

8. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，则(　　).

(A) 在 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(B) 在 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(C) 在 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$

(D) 在 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$

9. 设 $f(x)$在$(a,+\infty)$内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

10. 设 $f(x)$在有限区间(a,b)内可导且无界，证明它的导函数 $f'(x)$在(a,b)内也无界.

11. 设 $f(x)$在$[0,1]$上可微，且 $f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$，证：在$[0,1]$上 $f(x)=0$.(西安交通大学)

12. 设 $f(x)$在$[-l,l]$上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 证：对任意 $x\in(0,e)$，至少存在一个 $\theta\in(0,1)$ 使

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

13. 若 $f(x)$有二阶导数，满足 $f(2)>f(1)$，$f(2)>\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$，证：至少存在一点 $\xi\in(1,3)$ 使 $f''(\xi)<0$.（西安电子科技 2010）

四、柯西泰勒

1. 设 $f(x)$在$[0,a]$上具有二阶导数，且对一切 $x\in[0,a]$，有 $|f(x)|<1$，$|f''(x)|<1$，证明：对一切 $x\in[0,a]$，有 $|f'(x)|\leqslant\frac{a}{2}+\frac{2}{a}$.（中科院 2012）

注：题中若 $a=2$，其它条件不变，可证 $|f'(x)|\leqslant 2$.（此题复旦大学、南京大学等 17 所高校在不同年份考过）

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)\geqslant 8$.（中科院 2006，厦门大学 2011）

注：①若 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}=-\dfrac{1}{2}$，其余条件不变，可证 $\exists\varepsilon\in(0,1)$ 使 $f''(\varepsilon)\geqslant 4$；

②若 $f(x)=3$，其余条件不变，可证 $\exists\varepsilon\in(0,1)$ 使 $f''(\varepsilon)\geqslant 18$.

3. 证明下列命题.

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$.（重庆大学 2013，电子科大 2008）

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $|f''(x)|\leqslant 4$，$f(a)=f(b)=0$，证明：$\left|f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{2}$.（郑州大学 2000）

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

5. 设 $f(x)$在$[-a,a]$($a>0$)上具有二阶连续的导函数，$f(0)=0$,证明:存在 $\xi\in(-a,a)$ 使 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.(武汉大学 2014)

6. 设 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)>0$,设 $g(x)$ 在(a,b) 上连续,且 $g'(x)\neq 0$,$\forall x\in[a,b]$,证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $g'(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)g(\xi)\ln\dfrac{g(b)}{g(a)}$.

7. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导，$0<a<b$. 证明:$\exists\,\xi_1,\xi_2\in(a,b)$ 使 $f'(\xi_1)=\dfrac{\xi_2^2f'(\xi_2)}{ab}$.

8. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可微,且 a,b 同号,证明:$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得$\dfrac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

9. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 a,b 同号，证明：$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)-\dfrac{\xi}{m}f'(\xi)=\dfrac{1}{a^m-b^m}\begin{vmatrix} a^m & b^m \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}$，其中 m 为正整数.

10. 设 $f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上具有连续的二阶导数，且 $f'(0)=0$，证明：$\xi,\eta,\omega\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi f''(\omega)$.

11. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(b)=g(a)=1$，在 (a,b) 内 $f(x)$，$g(x)$ 可导且 $g(x)+g'(x)\neq 0$，$f'(x)\neq 0$，证明：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^{\xi}[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^{\eta}}$.

五、方程根与不等式

1. 证明方程 $x^3-9x-1=0$ 恰有 3 个实根.

2. 证明：奇次多项式：$p(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n+1}(a_0\neq 0)$ 至少存在一个零点.

3. 若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$（　　）.

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根

(C) 有三个不同实根　　(D) 有五个不同实根

4. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$（　　）.

(A) 有无穷多个实根　　(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根　(D) 无实根

5. 设 $k>0$，问 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 存在正实根.（中山大学 2011）

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证明下列命题.

(1) 若 $f(x)<1$，则 $2x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=1$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

(2) 若 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$ 在$(0,1)$内至少存在一个实根.

7. 证明下列结论：

(1) 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积，且 $f(x)\geqslant c>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，证明：$F(x)=0$ 在(a,b)上有且仅有一个实根.（南京师大 2001）

(2) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)\neq 0$，证明：$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=0$ 在$[a,b]$上有唯一实根.（西安交大 1998，云南大学 2005）

(3) 设 $f(x)$在$[0,1]$上为正值连续函数，证明：$\frac{1}{f(x)}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{\int_0^{1-x} f(t)\mathrm{d}t}{f(1-x)}$ 在$(0,1)$至少有一个实根.（华中科大 2006）

8. 证明下列结论：

(1) 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$内连续，在$(a,+\infty)$内可导，当 $x>a$ 时 $f'(x)>k>0$，证明：若 $f(a)<0$，则 $f(x)=0$ 在$\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$(或$(a,+\infty)$)内有且仅有一个实根.

(2) 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$内连续，在$(a,+\infty)$内二阶可导，$f(a)>0$，$f'(a)<0$ 且 $x>a$ 时 $f''(x)\leqslant 0$. 求证：

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$；

(Ⅱ) 在$[a,+\infty)$内 $f(x)=0$ 有且仅有一实根.（浙江大学 2003，北京科技 2009）

(3) 设 $f(x)$在$[1,+\infty)$内连续，$f''(x)\leqslant 0$，$f(1)=2$，$f'(1)=-3$，求证：在$(1,+\infty)$内 $f(x)=0$ 有且仅有一实数.（中山大学 2009）

9. 证明下列结论：

(1) 设 n 是正整数，给定方程 $x+x^2+\cdots+x^n=1$. 证明：此方程仅有唯一的正根 $x_n\in(0,1)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.（华中科大 2013，宁波大学 2011，数二 2012）

(2) 设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$，证明：

(Ⅰ) 对任意正整数 n，$f_n(x)=1$ 在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$仅有一根；

(Ⅱ) 设 $x_n\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$是 $f_n(x)=1$ 的根，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（南京师大 2012，北京师大 1999）

(3) 设 n 是正整数，给定方程 $x^n+x=1$. 证明：

(Ⅰ) 此方程有唯一的正根 $x_n\in(0,1)$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.（西北工大 2012，华中师大 2006）

10. 求证下列不等式：

(1) $x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x, x \geqslant 0$；

(2) $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x, x \leqslant \mathbf{R}$；

(3) $1-x^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}.$

11. 证明下列不等式：

(1) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.（中科院 2013，上海师大 2003，温州大学 2012）

(2) 当 $x>0$ 时，$x>\sin x>x-\frac{x^3}{3!}$.（郑州大学 2004/2006/2013，吉林大学 2006）

12. 证明下列不等式：

（1）$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} > \dfrac{x}{1+x}$,$(x>1)$.

（2）$\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}$,$(x>0)$.

（3）$\dfrac{1-x}{1+x} > \mathrm{e}^{-2x}$ 或 $\ln\dfrac{1+x}{1-x} > 2x$,$(0<x<1)$.

13. 证明：$\dfrac{1}{\sin^2 x} \leqslant \dfrac{1}{x^2} + 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$,$\left(0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

14. 证明：$0<\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-1<\frac{1}{3(x^2-1)}$,$(x>1)$.

15. 证明下列不等式：

(1) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,x>0$.

(2) $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x},x>0$.

(3) $0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1,x>0$.（矿业大学 2010）

(4) $0<\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1$，$x<0$.（地质大学 2002）

16. 证明：$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}(x>0,x\neq 1)$.

17. 对任何正整数 $n \geqslant 2$，证明：$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n < 1$.（青岛科技 2006）

18. 已知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x) > 0$，$f''(x)f(x) - [f'(x)]^2 \geqslant 0$，$x \in \mathbf{R}$.

（1）证明：$f(x_1)f(x_2) \geqslant f^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$，$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$；

（2）若 $f(0) = 1$，$f'(0) = 2$，证明：$f(x) \geqslant e^{2x}$，$x \in \in \mathbf{R}$.

六、极限　七、定积分定义证明数列极限

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sqrt{\sin x})(1 - \sqrt[3]{\sin x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\sin x})}{(1 - \sin x)^{n-1}}$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

3. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - xf(x)}{x^3}=0$,求$\lim_{x \to 0} \frac{3-f(x)}{x^2}$(山东科技 2006)

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[ne^{\frac{1}{n}}-n^{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$（四川大学 2008）

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^{tx}-\sqrt{1+2tx+2x^{2}})}{x+\tan x-\sin 2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x^{2}}$（河南师大 2010）

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^{2}}}$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^{2}}$ 或 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}$（南京大学等 10 所高校）

10. $\lim\limits_{x \to 0^{+}}\left[\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}}(1+x)^{\frac{1}{x^{2}}}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]$（西安电子科大 2012）

12. 设 $a>0,b>0,c>0$，

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$$

(1) 讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性；

(2) 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$f(-1)$ 以及 $f(1)$之间的大小关系.

13. 求① $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$（上海理工 2005，浙江工商 2004）

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^{n}$（海南大学 2007，辽宁大学 2004）

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$ $(a>0,b>0)$（重庆大学 2001，北京理工 2005，苏州大学 2013）

14．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$，

并求 $I_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$，$I_2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}$，$I_3=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

15．求① $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$（1994 年数二）

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sin\dfrac{1}{n}+\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$

16．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$（华东理工 2001，东北师大 2004）

17. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x}\right)$（浙江师大 2010）

18. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin(x^x) - \sin a^x}{a^{x^x} - a^{a^x}} (a > 1)$

19. 求 a,b，当 $x \to 0$ 是 $f(x) = \sin x - \frac{ax}{1+bx^2}$ 关于 x 的无穷小的阶数最高（南京大学 1993 年竞赛题）

20. 试确定当 $x\to 0$ 时,下列无穷小的阶数:

(1) $\alpha_1(x) = e^{x^2} - 1 - x^2\sqrt{1-x^2}$

(2) $\alpha_2(x) = \sqrt[3]{1+3x} - 1 - x\cos x$

(3) $\alpha_3(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}}$

21. 当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则 $k=$ ________.(2005 数二)

22. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} - ax - b) = 0$,求 a 和 b.

23. 设 $x \to 0$ 时，$f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小，求 a, b.

24. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求 $a(a \neq 0)$.

25. (1) 证明：$1-2t^2 < \cos 2t < 1$，其中 $t \in (0,1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n \to \infty}\dfrac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\dfrac{\cos 2t}{t^2}\mathrm{d}t$.

26. (1) 证明：$\sin\dfrac{\pi}{2}t > t$，其中 $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$；

(2) 求 $\lim\limits_{n \to \infty}\left[\int_0^1\left(1+\sin\dfrac{\pi}{2}t\right)^n \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{n}}$.

27. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

28. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]$.

29. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdots(2n-1)(n+n)}$.

30. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.（中山大学 2010，西安交大 2004）

31. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+2)(n+4)\cdots(n+2n)}$.（宁波大学 2007）

32. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)}$.

33. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$.(中山大学 2013,东南大学 2009)

34. 设 $x_1=a, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(a>0), n=1,2,\cdots$, 证明：

(Ⅰ) 数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限值；

(Ⅱ) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$ 收敛.(上海交大 2005 等 43 所高校考题)

35. 证明下列命题

(1) 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x, x\in[0,+\infty)$，设 $a_1\geqslant 0, a_{n+1}=f(a_n), n=1,2,\cdots$，证明：

（Ⅰ）$\{a_n\}$为收敛数列；

（Ⅱ）设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$，则有 $f(t)=t$；

（Ⅲ）若条件改为 $0\leqslant f(x)\leqslant x, x\in(0,+\infty)$，则 $t=0$.（华南理工 2010）

(2) 设 $f(x)$在$[0,a]$上有二阶连续导数，$f'(0)=1, f''(0)\neq 0, 0\leqslant f(x)<x, x\in(0,a)$. 设 $x_1\in(0,a), x_{n+1}=f(x_0), n=1,2,\cdots$，证明：

（Ⅰ）$\{x_n\}$为收敛数列并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（Ⅱ）$\{nx_n\}$是否收敛？若不收敛，则说明理由. 若收敛，则求极限.

36. 设 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x)$，函数 $f(u)$ 连续，且 $F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$，任取一点 $x_0>0$，令 $x_1=F(x_0,2x_0), x_2=F(x_1,2x_1),\cdots,x_{n+1}=F(x_n,2x_n)$，由此构造数列 $\{x_n\}$.

(1) 求 $f(x)$与 $F(x,y)$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的，并求极限值.

八、定积分综合计算

1. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}[x\sin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2})]\mathrm{d}x$

2. $\int_{-1}^{1} \left(\frac{x\sin^2 x}{1+x^2} + x^4\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}\mathrm{d}x$

4. $\int_{0}^{2a} x\sqrt{2ax - x^2}\,\mathrm{d}x$

5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\mathrm{e}^{\cos x} - \mathrm{e}^{-\cos x})\mathrm{d}x$

6. $\int_{0}^{4} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\mathrm{d}x$

7. 若 $f(x)$在$[0,1]$上连续，证明 $\int_0^x xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_x^{\pi}(\sin x)\mathrm{d}x$ 并计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$（此题同济版高数教材（7 版）249 页例 6，浙江大学 2000，中科院 2002，重庆大学 2001，四川大学 2001，中山大学 2011，哈工大 1999/2000 等众多院校考过此题）

(2) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\sec^2 x}{1+\sec^2 x}\mathrm{d}x$（湖南师大 2007）

(3) $\int_0^{\pi} \frac{x\,|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$

8. 设 $f(x)$，$g(x)$在$[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续，$g(x)$为偶函数，且 $f(x)$满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ (A 为常数)

证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$，并求下列积分：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x \mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \ln(x+\sqrt{4+x^2})\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-1}^{1} x^2 \arccos x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$（东北大学 04）

(5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$（杭州师大 2010）

9. $\int_{-1}^{2}[x]\max\{1,\mathrm{e}^{-x}\}\mathrm{d}x$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

10. 设 $F(t)=\int_{-1}^{1}|x-t|\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，求 $F(t)$的表达式，并求 $F'(1)$.

11. 求 $F(x)=\int_{0}^{x}|t(t-1)|\mathrm{d}t$ 的非积分型的表达式.

12. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.(电子科大 2013)

13. 设 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续,且 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

14. 已知 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$,且 $f(0)=0$,求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

九、定积分证明

1. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{n\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数（中山大学 2012，武汉理工 2004）

（注：数一、三考生注意，本题可以联系幂级数求和变成一道综合题）

(2) $\int_0^{\pi} x\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x$，其中 n 为自然数（南京农大 2007）

(3) $\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$（太原科技 2005）

2. 设 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，且 $f''(x)$ 连续，求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

3. 已知 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，且 $f(\pi)=2$，求 $f(0)$.

4. 设 $a_n = \int_0^1 x^{\pi} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，$n$ 为自然数. 证明：

(1) $a_n = \dfrac{n-1}{n+2} a_{n-2}$，$n \geqslant 3$；

(2) $I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$（2019 数一，南京理工 2009）

5. 求下列积分：

(1) m、n 为正整数，求 $\int_0^1 t^n (\ln t)^m \mathrm{d}t$.（华中科大 2014，北师大 2014）

(2) $\int_0^1 x \ln x \mathrm{d}x$

(3) $\int_0^1 x (\ln x)^{2020} \mathrm{d}x$

6. 计算定积分 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$，其中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$，$f(0)=0$，$g(0)=2$.

7. 设点(3，2)是曲线 C：$y=f(x)$（其中 $f(x)$有连续的三阶导数）的拐点，直线 l_1，l_2 分别是 C 在点(0，0)与点(3，2)的切线，它们相交于点(2，4)求定积分 $\int_0^3(x^2-2x-3)f'''(3-x)\mathrm{d}x$.

8. 设 $f(t)>0$ 且是连续的偶函数，又函数

$$F(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t,x\in[-a,a]$$

试讨论下列问题：

(1) $F'(x)$的单调性

(2) $F(x)$的凹凸性

(3) 当 x 为何值时，$F(x)$取得最小值

(4) 若 $F(x)$的最小值作为 a 的函数，它等于 $f(a)-a^2-1$，求 $f(t)$.

9．证明 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

10．求 $f(x)$，使当 $x>-1$ 时满足方程 $f(x)\left(1+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$.

11. 设 m,n 为正整数：

(1) 证明 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$.（中科院 2006）

(2) 利用上述等式计算 $\int_0^1(1-x)^{50}x\mathrm{d}x,\int_0^1 x(1-x)^{2006}\mathrm{d}x$.

12. 设 $f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{f(0)+f(1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$$

13. 设 $g(x)$的 $g''(x)<0,0\leqslant x\leqslant 1$，证明：$\int_0^1 g(x^2)\mathrm{d}x\leqslant g\left(\frac{1}{3}\right)$.

14. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)=0$，证明：

(1) 在$[a,b]$上，$|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t$；

(2) 在$[a,b]$上，$\max f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x$.

15. 设 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x$，证明：

(1) $J_n=\frac{1}{2n-1}+J_{n-1}, n=1,2,\cdots$

(2) $\ln\sqrt{2n+1}<J_n\leqslant 1+\ln\sqrt{2n-1}$

十、定积分应用

1. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>0$，$f(a)>0$，证明：对于图所示的两个面积 $A(x)$ 与 $B(x)$，存在唯一的 $\varepsilon\in(a,b)$，使$\frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)}=2010$.

2. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的 $x\geqslant 0$ 部分与 x 轴所围图形的面积.

3. 已知 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t(x\geqslant -1)$,求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积.

4. 设当 $x\in[2,4]$ 时,有不等式 $ax+b\geqslant \ln x$,其中 a、b 为常数,试求使得积分 $I=\int_{2}^{4}(ax+b-\ln x)\mathrm{d}x$ 取得最小值的 a 和 b.

5．求介于二椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 之间图形面积，其中 $a>0,b>0$.

6．(1) 求 $y(x)=\int e^{-x}\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}-\sqrt{\sin x}\right)dx$，其中 $y(x)$ 满足 $y(\pi)=0$；

(2) 将(1)中 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7．设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值.

十一、十二、微分方程综合题(上)(下)

1. 设函数 $f(x)$ 可导,对任意的 x,y 有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$,且 $f(0)=1$,$f'(0)=2$,试求函数 $f(x)$ 满足的微分方程,并求 $f(x)$.

2. 设函数 $f(x)$ 可导,$f'(0)=1$,满足关系式

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

试求函数 $f(x)$ 满足的微分方程,并求函数 $f(x)$.

3. 求微分方程 $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ 的通解.

4. 设 $\varphi(x)$是以 2π 为周期的连续函数,且 $\Phi'(x)=\varphi(x)$,$\Phi(0)=0$.

(1) 求方程 $y'+y\sin x=\varphi(x)e^{\cos x}$ 的通解;

(2) 方程是否有以 2π 为周期的解?若有,请写出所需条件;若没有

5. 设$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}-(2x^2+1)y=x^2, x\geqslant 1 \\ y(1)=y_1 \end{cases}$

(1) 用变限积分表示满足上述初值条件的解 $y(x)$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$ 是否存在,若存在,给出条件;若不存在,请说明理由.

6. 设 $f(x)$为连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$,其中 a 是正常数;

(2) 若 $|f(x)| \leqslant k$(k 为常数),证明当 $x \geqslant 0$ 时有 $|y(x)| \leqslant \dfrac{k}{a}(1 - \mathrm{e}^{-ax})$.

7. 设 $f(x)$在$[0,+\infty]$上连续,且 $f(0) > 0$,设 $f(x)$在$[0,x]$上的平均值等于 $f(0)$与 $f(x)$的几何平均数,求 $f(x)$.

8. (1) 设 $f(x) = \mathrm{e}^x - \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$续连,求 $f(x)$.

(2) 求 $f(x)$在$(-1,+\infty)$内连续且 $f(x) - \dfrac{1}{x+1}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = 1(x > -1)$,求 $f(x)$.

9. (1) 设 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数，且 $f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv$，求 $y(x)=e^{2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程.

(2) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z+1)e^{2x}$，求 $f(u)$ 所满足的二阶微分方程.

10. 设 $f(x)$ 连续，

(1) 求方程 $y'+ay=f(x)$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的解 $y(x)(a>0)$；

(2) 若 $|f(x)|\leqslant k$，求证当 $x\geqslant 0$ 时，有 $|y(x)|\leqslant \dfrac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

11. 设 $f\in C[0,+\infty)$，$a>0$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=b$，求 $y'+ay=f(x)$ 的每个解 $y(x)$ 都满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}y(x)=\dfrac{b}{a}$.

12. 设 $y=y(x)$ 具有一阶连续导数，且 $2\int_0^x (x+1-t)y'(t)\mathrm{d}t - y(x) = x^2-1$，求 $y(x)$.

13. 设 $f(t)$具有连续的导数，试分别求满足下列关系式的函数 $f(t)$.

(1) 函数 $u=f(t)$，$\sqrt{x^2+y^2}>0$，满足 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=u+1$；

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant u^2} f\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

14. 设 $f(x)$是以 T 为周期的连续函数，证明 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ky=f(x)$ 存在唯一的以 T 为周期的特解，并求出此特解，其中 k 和 T 为常数，且 $T>0$.

十三、多元函数微分学

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)\cos\sqrt{y+2}-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$,则 $f'_y(0,1)=$ ________.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-2z)=0$ 所确定的隐函数,则必有(　　).

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$　　(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

(C) $\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}=1$　　(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$

3. 设 $z=f(xy,x-2y)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 求函数 $z=f(x,y)(xy\neq 0)$ 满足 $f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)=y^2(x^2-1)$,则 $\mathrm{d}z=$ ________.

5. 设函数 $z=f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数,已知$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$,$f(x,0)=1$,$f'_y(x,0)=x$,求 $f(x,y)$.

6. 已知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y+1$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+2y+3$,$z(0,0)=1$,求 $z=z(x,y)$ 的极值.

7. 求由方程 $2x^3-6xy+3y^2+ze^{z-1}=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

8. 求函数 $f(x,y,z)=x-2y+2z$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 的最小值与最大值.

9. 求 $f(x,y)=\ln x+3\ln y$ 在 $x^2+y^2=4r^2(r>0)$ 上的最大值,并由此证明:对于任意正数 a,b,有 $ab^3\leqslant 27\left(\frac{a+b}{4}\right)^4$.

10. 设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内有二阶连续的偏导数,且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$. 证明:函数 $z=f(x,y)$ 的最大值,最小值只能在区域的边界上取得.

11. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^{x^2-y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=16z(x^2+y^2),$$

得到 $f(u)$ 满足的方程.

12. 若函数 $f(\xi,\eta)$ 具有连续二阶导数且满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0$. 证明函数 $z=f(x^2-y^2,2xy)$ 也满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

十四、二重积分上

1. 计算二重积分 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $x^2+y^2\geqslant 1, x^2+y^2\leqslant 9, x\leqslant\sqrt{3}y, y\leqslant\sqrt{3}x$.

2. 已知函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，设 $D: x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$，计算 $\iint\limits_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 计算 $\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 D 由曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围区域.

4. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{x^2+y^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y^2$，其中 D 为 $x^2+y^2 \leqslant 1$，则 $(x,y)=$ ________.

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: 2 \leqslant \dfrac{x}{x^2+y^2} \leqslant 4, 2 \leqslant \dfrac{y}{x^2+y^2} \leqslant 4$.

6. （仅数学一二）计算二重积分 $\iint\limits_{D} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的第一拱与 x 轴围成的闭区域.

7. 交换积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y =$ ________.

8. 交换积分次序 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x =$ ________.

9. 交换积分次序 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y =$ ________.

10. 计算 $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\int_0^{\sqrt{t}} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{t} \sin y^2\,\mathrm{d}y}{(\mathrm{e}^{t^2} - 1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}$.

11. 将对极坐标的二次积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$ 化为直角坐标系的积分：

(A) 先对 x 后对 y 的累次积分.

(B) 先对 y 后对 x 的累次积分.

12. 将对极坐标的二次积分 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 化为直角坐标系下先对 y 后对 x 的累次积分，则 $I=$________.

十五、二重积分下

1. 求 $\iint\limits_{D}(x+y)\operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

2. 求 $\iint\limits_{D}[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2$，$[x+y]$ 表示 $x+y$ 的整数部分.

3. 求$\iint\limits_{D} |y-x^2| \max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$.

4. 计算二次积分$\iint\limits_{D} x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

5. 计算二重积分$\iint\limits_{D} (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

6．计算$\iint\limits_{D}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________，其中 $D=\{(x,y)\mid x^{2}+y^{2}\leqslant R^{2}\}$.

7．计算$\iint\limits_{D}x(\sin y^{x^{2}+\cos y}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $-1\leqslant x\leqslant\sin y$，$|y|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

8．计算二重积分$\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^{2}+(y-2)^{2}\leqslant 1\}$.

9. 设 $f(x)$是$[0,1]$上的连续函数,证明:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\,\mathrm{d}y \geqslant 1$$

10. 设 $f(x)$为恒大于零的连续函数,求证 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$.

11. 证明柯西不等式积分形式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

十六、无穷级数综合题

1．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^{n}}$ 的收敛域为________.

2．若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}x^{n}$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n}}{n}(x-1)^{2n}$ 的收敛半径 $R=$ ________.

3．已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}(x+2)^{n}$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}(x-2)^{n}$ 的收敛域为________.

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}x^n$ 的收敛域与和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}2^n$ 的和.

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域与和函数.

6. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)3^n}$ 的和.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ 的和.

8. 将函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

9. 把函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 x 的幂级数及 $x-1$ 的幂级数.