测试函数定义

函数 1 (Sphere) $f_1(x) = \sum_{i=1}^{D} x_i^2$ [-100,100]^D，该函数最小值 $f\left(x^*\right)=0$

特性：除了全局函数外，球面函数有局部最小值。它是连续的，凸的和单峰的。

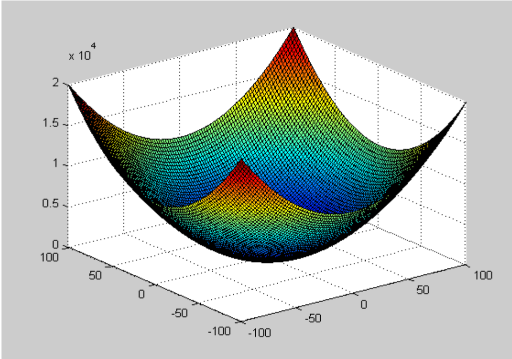

图 1 二维 sphere 函数曲面图

函数 2 (Schwefel 2.22) $f_2(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{D}|x_i| + \prod_{i=1}^{D}|x_i|$ [-10,10]^D，该函数最小值 $f\left(x^*\right)=0$

特性：该函数具有许多局部最小值。

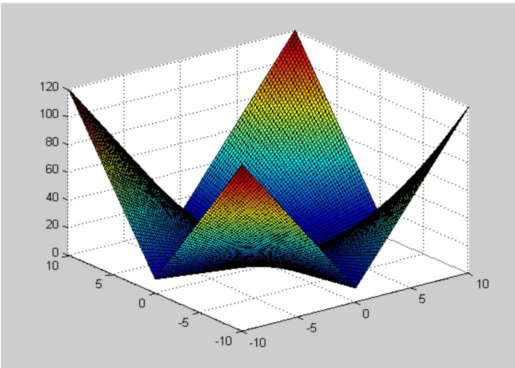

图 2 二维 Schwefel 2.22 函数曲面图

函数 3 (Schwefel 1.2) $f_3(x) = \sum_{i=1}^{D}(\sum_{j=1}^{i} x_j)^2$ [-100,100]^D，最小值 $f\left(x^*\right)=0$。

特性：该函数复杂的，有许多局部最小值。

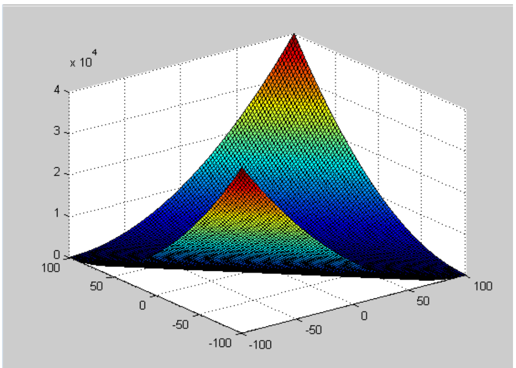

图 3 二维 Schwefel 1.2 函数曲面图

函数 4 (Schwefel 2.21) $f_4(x) = \max\{|x_i|\}$ [-100,100]^D，最小值 $f(x^*) = 0$。

特性：该函数复杂的，有许多局部最小值。

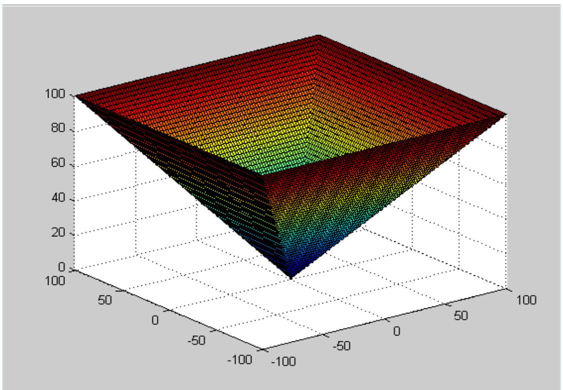

图 4 二维 Schwefel 2.21 函数曲面图

函数 5 (Rosenbrock) $f_5(x) = \sum_{i=1}^{D-1}[100(x_{i+1} - x_i^2]^2 + (x_i - 1)^2]$ [-30,30]^D，最小值 $f(x^*) = 0$。

特性：Rosenbrock 函数，也称为谷或香蕉函数，是基于梯度的优化算法的一个常见的测试问题。函数是单向的，全局最小值位于一个窄的抛物线谷。然而，尽管这个山谷很容易找到，但收敛到最小值很困难。

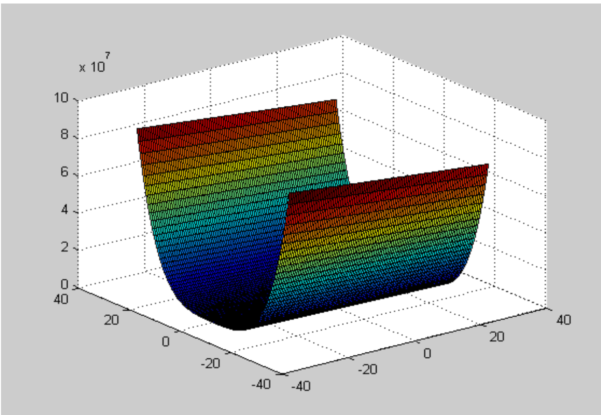

图 5 二维 Rosenbrock 函数曲面图

函数 6 (Step) $f_6(x) = \sum_{i=1}^{D}\lfloor x_i + 0.5\rfloor^2$ [-100,100]^D，最小值 $f(x^*) = 0$。

特性：实数的函数被称为阶跃函数(或阶梯函数)，它可以写成一种有限线性组合的时间间隔的指数函数。

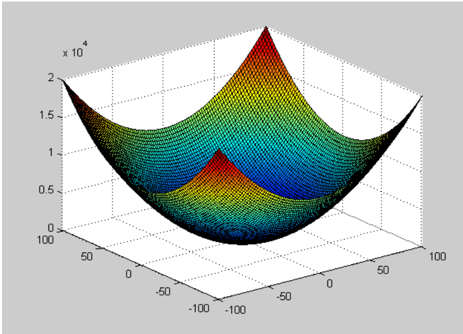

图 6 二维 Step 函数曲面图

函数 7 (Quartic with noise) $f_7(x)=\sum_{i=1}^{D} i\cdot x_i^4+random[0,1)$ [-1.28,1.25]^D，最小值 $f\left(x^*\right)=0$。

特性：四次多项式所定义的单变量函数。当参数趋于正或负无穷时，它具有相同的无穷极限。

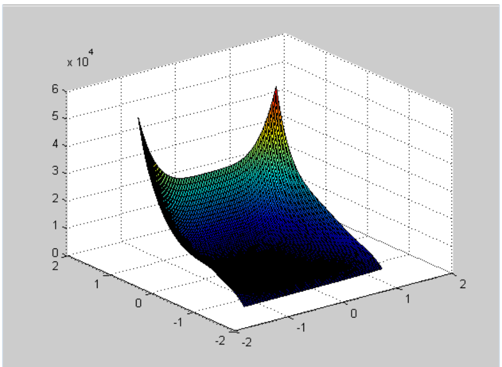

图 7 二维 Quartic with noise 函数曲面图

函数 8 (Schwefel 2.6) $f_8(x)=\sum_{i=1}^{D} -x_i\cdot\sin(\sqrt{|x_i|})+D\cdot 418.9829$ [-500,500]^D，最小值 $f\left(x^*\right)=0$。

特性：许多局部最小值。

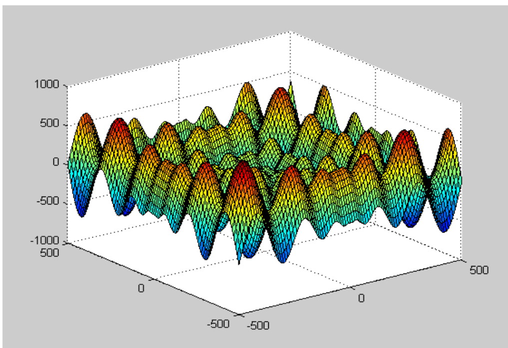

图 8 二维 Schwefel 2.6 函数曲面图

函数 9 (Rastrign) $f_9(x)=\sum_{i=1}^{D}\left|x_i^2-10cos2\pi x_i+10\right|$, [-5.12,5.12]^D，最小值 $f\left(x^*\right)=0$。

特性：具有几个局部最小值。它是高度多模式的，但是最小值的位置是定期分布的。

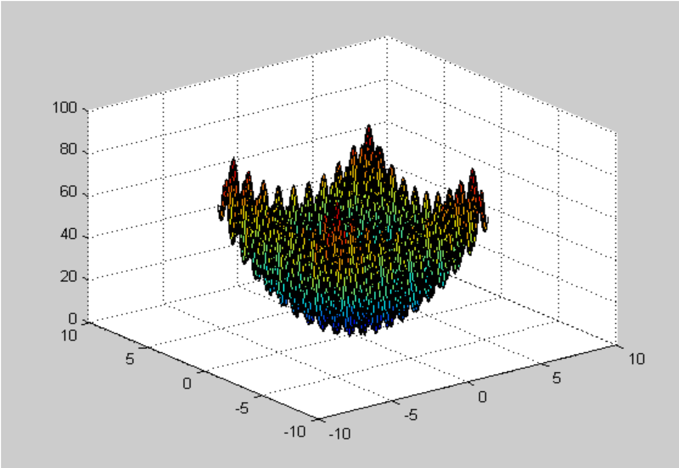

图 9 二维 Rastrign 函数曲面图

函数 10 (Ackley) $f_{10}(x)=-20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}x_i^2}\right)-\exp(\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\cos(2\pi x_i))+20+e$，$[-32,32]^D$，最小值 $f\left(x^*\right)=0$。

特性：图形特征是一个几乎平坦的外部区域，以及中心的一个大洞。该功能为优化算法，特别是爬坡算法带来了风险，被困在其中一个局部最小值中。

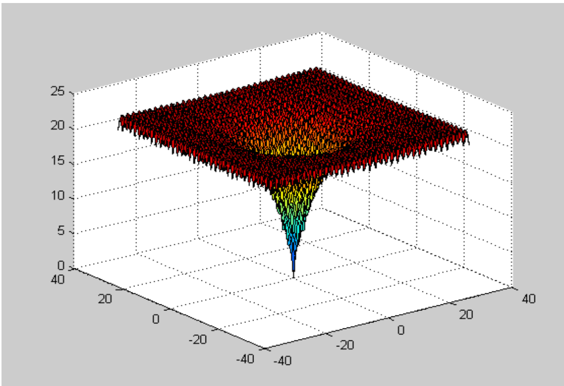

图 10 二维 Ackley 函数曲面图

函数 11 (Griewank) $f_{11}(x)=\frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{D}x_i^2-\prod_{i=1}^{D}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)+1$ $[-600,600]^D$，最小值 $f\left(x^*\right)=0$。

特性：具有许多普遍分布的局部极小值。复杂性在放大图中可以显示。

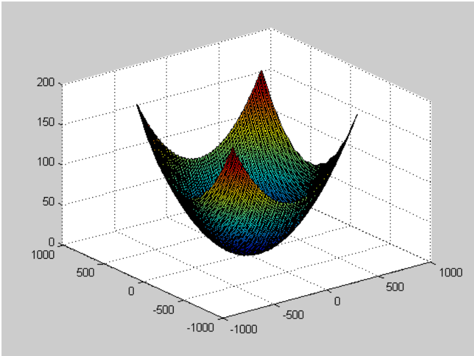

图 11 二维 Griewank 函数曲面图

函 数 12 (Penalized 1) $f_{12}(x)=\frac{\pi}{D}\{\sum_{i=1}^{D}(y_i-1)^2[1+\sin(\pi y_i+1)]+(y_D-1)^2+10sin^2(\pi y_i)\}+\sum_{i=1}^{D}u(x_i,10,100,4)$ [-50,50]^D ，最小值 $f\left(x^*\right)=0$

$$y_i=1+\frac{1}{4}(x_i+1)$$

$$u(x_i,a,k,m)=\begin{cases}k(x_i-a)^m & x_i>a\\ 0 & -a\le x_i\le a\\ k(-x_i-a)^m & x_i<-a\end{cases}$$

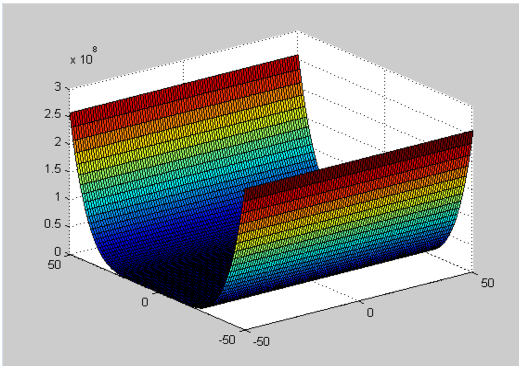

图 12 二维 Penalized 1 函数曲面图

函数 13 (Penalized 2) $f_{13}(x)=0.1\{sin^2(3\pi x_i)+\sum_{i=1}^{D-1}(x_i-1)^2[1+\sin^2(3\pi x_{i+1})]+(x_D-1)^2[1+sin^2(2\pi x_D]\}\sum_{i=1}^{D}u(x_i,10,100,4)$ [-50,50]^D ，最小值 $f\left(x^*\right)=0$

$$y_i=1+\frac{1}{4}(x_i+1)$$

$$u(x_i,a,k,m)=\begin{cases}k(x_i-a)^m & x_i>a\\ 0 & -a\le x_i\le a\\ k(-x_i-a)^m & x_i<-a\end{cases}$$

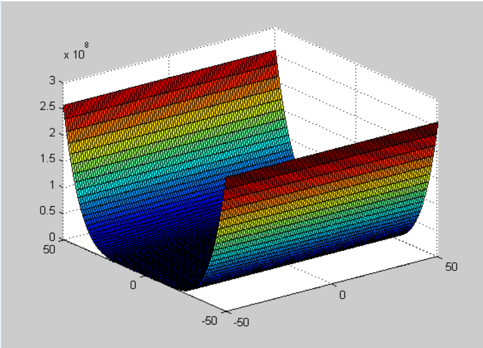

图 13 二维 Penalized2 函数曲面图