Questão 2

Item a

Dado que

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para haver continuidade no ponto $(0,0)$ a função acima deve satisfazer à seguinte condição

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$$

Em outras palavras, para que haja continuidade no ponto considerado a asserção abaixo deverá ser verdadeira

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}=0$$

Perceba que

$$-xy^2\leq\frac{xy^2}{x^2+y^2}\leq xy^2$$

e que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -xy^2=\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy^2=0$$

Portanto, pelo teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}=0$$

O que comprova a existência de continuidade no ponto considerado

Item b

A derivada parcial da funcão em questão em relação a variável x pode ser dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\cdot 0}{x^2+0}=0$$

Analogamente para a variável y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\frac{0\cdot\Delta y^2}{0+\Delta y^2}=0$$

Item c

A diferenciabilidade de uma função será comprovada desde que afirmação

$$\frac{E(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)}{||(\Delta x,\Delta y)||}=0$$

seja verdadeira.

Neste caso $E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ representa o que chamamos de "função erro". Seu valor é dado por

$$E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Já $||(\Delta x, \Delta y)||$ pode ser dado por

$$||(\Delta x, \Delta y)|| = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$$

Aplicando os dados que já temos à função erro,

$$E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\Delta x \cdot \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + 0 - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y$$

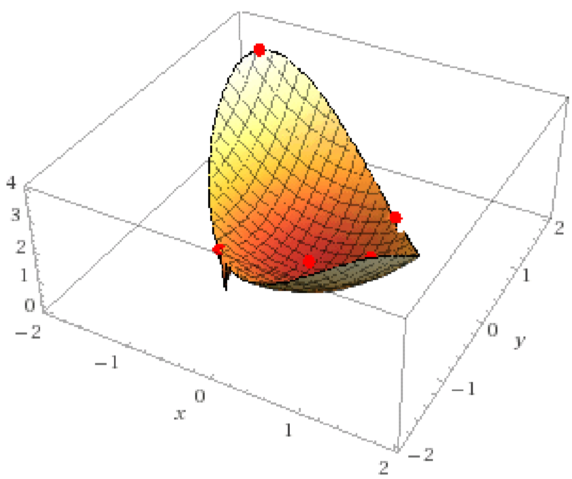
Poderemos afirmar que

$$\frac{E(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)}{||(\Delta x, \Delta y)||} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x \cdot \Delta y^2}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} = 0$$

Dessa forma comprovamos a difenciabilidade da função no ponto considerado.

Questão 3

A região dado no enunciado por ser dada por



A imagem acima revela que temos um mínimo global em $(0, 0)$.

Como sabemos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ tem máximos e mínimos, e que a sua borda é dada por $g(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$, podemos afirma que

$$\nabla f(x,y) = -\lambda \nabla g(x,y)$$

onde λ corresponde a um *multiplicador de lagrange.*

Calculando os gradientes acima, chegamos a

$$(2x, 2y) = -\lambda(10x + 6y, 6x + 10y)$$

Chegamos assim ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (2+10\lambda)\, x + (6\lambda)\, y = 0 \\ (6\lambda)\, x + (2+10\lambda)\, y = 0 \end{cases}$$

Para que a nossa solução não tenha solução trivial ($x = 0$ e $y = 0$), o determinante dos coeficientes deve ser nulo, isto é

$$\begin{vmatrix} 2+10\lambda & 6\lambda \\ 6\lambda & 2+10\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ou seja

$$(2+10\lambda)^2 - 36\lambda^2 = 0$$

No que resulta em $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = -\frac{1}{8}$

i) Solução $\lambda = -\frac{1}{2}$

Para $\lambda = -\frac{1}{2}$ chegamos ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

cuja soluções são dadas por $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Para este conjunto de soluções temos, $f(x,y) = 4$

ii) Solução $\lambda = -\frac{1}{8}$

Para $\lambda = -\frac{1}{8}$ chegamos ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

cuja soluções são dadas por $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Para este conjunto de soluções temos, $f(x, y) = 1$

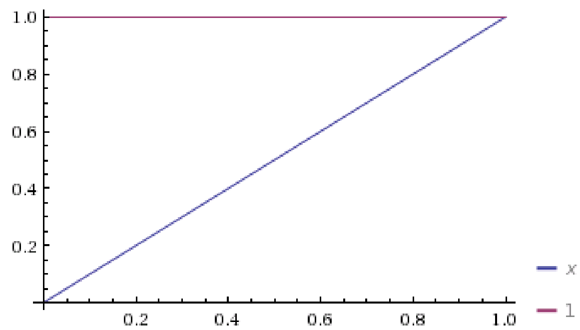
Conclusão

Temos os seguintes extremos $(0,0,0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$, $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}, 4\right)$. Sendo $(0,0,0)$ o mínimo global, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$ e $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4\right)$ os máximos globais.

Questão 5

Item a

O domínio da da integral em questão pode ser dado pela figura abaixo



Conforme sugestão do enunciado, considerando a imagem acima, podemos inverter a ordem de integração da seguinte forma

$$\int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx$$

Resolvendo a integral com relação a variavel y,

$$\int_0^1 y e^{x^2} \Big|_0^x dx = \frac{e^{x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

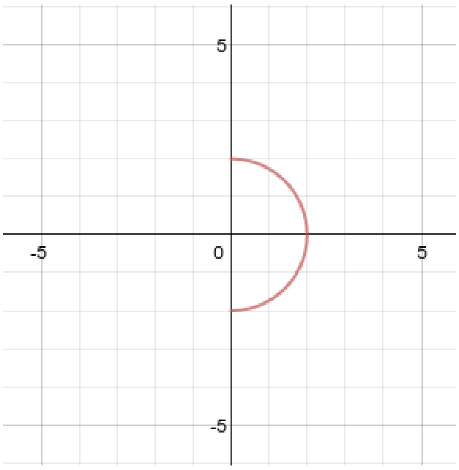
Item b

O domínio da da integral em questão pode ser dado pela figura abaixo

Dado que estamos diante de um domínio circular, podemos rescrevê-lo da seguinte forma

$$D = \left\{ (r, \theta) \in R^2 / 0 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Reescrevemos nossa integral, pois, da seguinte forma



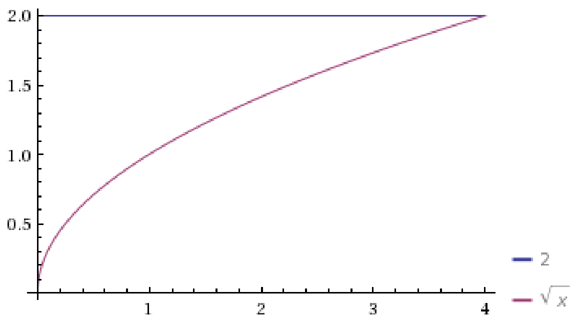
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 e^{-r^2} r dr$$

Calculando...

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 e^{-r^2} r dr = -\left(\frac{e^{-r^2}}{2}\bigg|_0^2\right)\pi = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$$

Item c

O domínio da da integral em questão pode ser dado pela figura abaixo



Perceba então que podemos escrever a integral da seguinte forma

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos\left(y^3\right) dxdy$$

Calculando...

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos\left(y^3\right) dxdy = \int_0^2 x\cos\left(y^3\right)\Big|_0^{y^2} dy = \int_0^2 y^2\cos\left(y^3\right) dy = \frac{\sin(y^3)}{3}\bigg|_0^2 = \frac{\sin(8)}{3}$$