# 习题十五　向量组及线性组合

一、解：向量组对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，

$$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

*--------重要：解释了向量组如何和方程组联系起来，（分块矩阵）*

*-------从而线性相关性，线性组合的问题可以用方程组来解决--*

二、解：$\alpha_1-\alpha_2=(1,0,-1)$; $3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=(0,1,2)$.

三、解：由关系式得

$$\beta=\frac{1}{10}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=\frac{1}{10}(24,18,12,3).$$

四、解：$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&-2&-2&1\\0&-2&0&-2&0\\0&-2&-2&0&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&0&0&-4&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

所以 $\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4$.

*--------第二题的一个例子，线性组合其实是求解组合的系数，从而变为求解方程组*

五、解：$|A|=\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}=2(a+4)$

所以　　$a\neq-4$ 时，$\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示。

$a=-4$ 时，

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&-1&1\\2&1&1&1\\10&5&4&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&0&2&b-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&0&0&b-8\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

（2）$a=-4, b\neq 8$ 时，$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（3）$a=-4, b=8$ 时，$\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法不唯一。

*--------同上一题相同，不过是要根据参数的不同取值得到不同答案。*

*-----------用行列式做比初等变换方法相对简单一些--*

# 习题十六　线性相关与线性无关

一、填空题

1．$b=2a$ 时，　$b\neq 2a$　　*-----------------------用秩直接判断---*

2. 无关　　3.　相关　　*----------------------整体与部分的关系---*

4. 无关

5. $R(A)<n$　　*-----------------------线性相关性的问题化为矩阵的秩的问题---*

6.　$-1,2$　　*---------用秩，或用行列式为 0 最简单*

二、　1.　A C　　条件可这样说 $\beta,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ 线性相关，

所以增加的向量 $\alpha_1$ 能被 $\beta,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

2．B　　根据条件：

$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，　　所以 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，

$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2$ 线性表示，　　所以 $k_3\neq 0$，

因此结论可以得到。

3．D

三、　解：1. $\because \begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1 \therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.　　*---------用秩，或用行列式最简单*

四、证明题：

1.　证明：设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_r\beta_r=\theta$，　*---------不管是否线性相关，先设出这个式子;*

则　$(k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha_1+(k_2+k_3+\cdots+k_r)\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\theta$。

因为向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0\\ \qquad k_2+\cdots+k_r=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad k_r=0\end{cases},\therefore\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\ \cdots\\k_r=0\end{cases},$$

所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也线性无关。

*--------根据条件求出未知系数，若全为 0，则线性无关，若有非零解，则线性相关。*

2．证明：$\Rightarrow$ 若 $\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，则 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，矛盾。

$\Leftarrow$ 若 $\beta,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

所以 $\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，矛盾。

*--------证明时可以考虑反证法，或证明等价的逆否命题。*

# 习题十七 极大无关组与秩

一、 1. 等价 2. 线性无关； 向量组中任一向量可由其余向量线性表示

3. 向量组的秩 4. 等价 5. 相等

二、证明：$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&-1&1\\0&1&0&3&1&1\\1&0&0&1&-1&1\\0&1&1&3&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&-1&1\\0&1&0&3&1&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$。

由于向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 3， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大无关组，

$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 不是极大无关组，所以向量组 $B$ 能由 $A$ 线性表示，但向量组 $A$ 不能由 $B$ 线性表示。

*--------把线性表示的问题化为同一个向量组中极大无关组的问题，解决起来比较简单。*
*---------------------------------如果用定义去做，就要求解方程组了，相当复杂。*

三、解：$\left(\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\alpha_3{}^T,\alpha_4{}^T,\alpha_5{}^T\right)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{2}{3}&2\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&-\frac{8}{3}&8\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是极大无关组，且

$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$。

*--------基本方法，按照步骤，机械做法*

四、证明：由题设知：$\begin{cases}\alpha_2=(\beta_2-\beta_1)/2\\ \alpha_3=(\beta_3-\beta_1)/3,\\ \alpha_1=\beta_1\end{cases}$

所以 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$可相互线性表示，

因此，秩$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$=秩$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$。

*---------关于秩的不等式，最重要的结果是向量组 B 能被 A 表示，则秩 B≤ 秩 A*

*------------通俗地说，你想表示另外的向量组，你要确实比人家东西多（秩）。*

# 习题十七 线性相关性(补充)

一、 1）证明：$R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n$。因为$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，所以，

$$R(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=n\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\le n,$$

因此，$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$。

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

*---------应用关于秩的最重要的不等式*

2）证明：$\Rightarrow$已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，设$\alpha$是任一$n$维向量，

则向量组$\alpha$, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，

因此，$\alpha$可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示。

$\Leftarrow$已知任一$n$维向量可用它们线性表示，因此，$n$维单位坐标向量

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$也能由它们线性表示，

由上题知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。

3）证明：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),$

则$A\pm B=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n)$。

设$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_1};\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{jr_2}$分别是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$的极大无关组，

则$\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n$可由$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{jr_2}$线性表示，因此，

$$R(A\pm B)=R(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n)$$

$$\le R(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_1},\beta_{j1},\beta_{j2},\cdots,\beta_{jr_2})\le r_1+r_2。$$

4）设 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})^T \quad i=1,2,\cdots,n$ 是一组 $n$ 维列向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\neq 0$。

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\neq 0$。

*---------一般先选出极大无关组进行考虑，这样去掉多余的向量，*
*------然后应用关于秩的最重要的不等式，关键是构造合适的向量组，*

# 习题十九　向量空间、基和维数

一、填空题

1．　线性无关 ；　$V$ 中任一向量可由它们线性表示。　向量空间的维数　。

2．　坐标。　3．　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ ；　$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ ；过渡矩阵。　4．　$AY$。

二、解：(1) 显然，$\theta=(0,0,\cdots,0)\notin V_1\ \therefore V_1$ 不是实数域 $R$ 上的向量空间。

(2) 设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3),\beta=(y_1,y_2,y_3),\alpha\in V_2,\beta\in V_2,k\in R$，则

$\alpha+\beta=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),\because x_1+x_2+x_3=0,y_1+y_2+y_3=0,$

$\therefore x_1+y_1+(x_2+y_2)+x_3+y_3=0,\therefore \alpha+\beta\in V_2$。

$k\alpha=(kx_1,kx_2,kx_3),kx_1+kx_2+kx_3=k(x_1+x_2+x_3)=0,\therefore k\alpha\in V_2$。

$\therefore V_2$ 是实数域 $R$ 上的向量空间。

*--------按定义看是否封闭，只要不包含零向量就不是向量空间*

三、证明：因为 $\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&2\\2&3&2\end{vmatrix}=-2\neq 0,$ 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，从而构成 $R^3$ 的一组基。

设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，则将此方程组的增广矩阵进行初等行变换可得：

$$\begin{pmatrix}1&0&2&5\\1&0&3&9\\0&2&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&0&1&4\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&1&1&-1\\0&0&1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&-5\\0&0&1&4\end{pmatrix}$$

$\therefore k_1=-3,k_2=-5,k_3=4,\ \beta=(5,9,-2)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $(-3,-5,4)$

*--------标准的步骤，无话可说.*

四、　解：设 $\varepsilon_1=(1,0,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0),\ \varepsilon_3=(0,0,1),$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix},\ (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}3&6&2\\7&0&3\\1&1&5\end{pmatrix},$$

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2&6&-3\\5&-15&8\\-9&28&-15\end{pmatrix},$$

$$\therefore(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2&6&-3\\5&-15&8\\-9&28&-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6&2\\7&0&3\\1&1&5\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}33&-15&-1\\-82&38&5\\154&-69&-9\end{pmatrix}。$$

设 $\alpha$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，在 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 为 $(y_1,y_2,y_3)^T$，则

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33&-15&-1\\-82&38&5\\154&-69&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}。$$

*--------关键是清楚理解各种记号的含义，为何可以这样表示.*

*比如：$\alpha_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，说明 $\alpha_1$ 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表示，且坐标（系数）为 $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$，*

*$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}$，说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性表示，且*

*表示的系数可由 $\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}$ 得到。*

## 习题二十　方程组解的结构

一、选择题

1.　C　　2.　D　　3.　C

*--------方程组的解的性质要清楚，是不是解代入看看是否有 $Ax=0$ 或 $Ax=b$.*

二、解：1）$A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\frac{4}{3}\end{pmatrix},$

$R(A)=3$, 基础解系为 $\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(\frac{4}{3},-3,\frac{4}{3},1)^T$,

通解为 $k\xi$， $k\in R$。

*------基本方法，必须掌握.*

三、解：$\because r=3,n=4\therefore$ 齐次线性方程组的基础解系中包含一个解向量。

$$\because A\eta_1=b, A(\eta_2+\eta_3)=2b, \therefore A(2\eta_1-(\eta_2+\eta_3))=0, \therefore 2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(1,-2,34)^T$$

为齐次线性方程组的基础解系，所以原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\4\end{pmatrix}, k\in R。$$

*------------掌握解的结构，从而知道要求什么:*

*----------齐次方程组的基础解系；非齐次方程组的一个特解.*

四、解：$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{pmatrix}, R(A)=2\neq R(\tilde{A})=3$$，无解。

*------基本方法，必须掌握.*

五、证明：1）若 $\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n=r}$ 线性相关，由于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n=r}$ 线性无关，

所以 $\eta^*$ 可以用 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示，从而 $\eta^*$ 也是齐次线性方程组的解，

这与 $\eta^*$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解矛盾。

2）设 $k\eta^*+k_1(\eta^*+\xi_1)+k_2(\eta^*+\xi_2)+\cdots+k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})=\theta$，则

$$(k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\theta$$

由 1）知，$\begin{cases}k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0\\k_1=0\\\cdots\\k_{n-r}=0\end{cases}$，

$\therefore k=k_1=\cdots=k_{n-r}=0$，

因此 $\eta^*,\eta^*+\xi_1,\eta^*+\xi_2,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关。