



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第九章 多元函数微分法及其应用

9.3 二元函数的连续性

数学与统计学院
李换琴



主要内容

1

二元函数连续性的定义

2

二元函数间断点的定义

3

二元连续函数运算性质

4

多元初等函数的定义及其连续性的结论

5

有界闭区域上连续函数的性质



主要内容

1

二元函数连续性的定义

2

二元函数间断点的定义

3

二元连续函数运算性质

4

多元初等函数的定义及其连续性的结论

5

有界闭区域上连续函数的性质



1、二元函数连续性的定义

回顾: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

定义1 设 $f : U(x_0, y_0) \rightarrow R$ 是一个二元函数, 若有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称 f 在点 (x_0, y_0) 处连续.

2、函数连续性的 $\varepsilon - \delta$ 描述:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 使得 } \forall (x, y) \in U((x_0, y_0), \delta), \\ \text{恒有 } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

3、函数在区域 A 上连续: f 在 A 上每一点处都连续.



例1 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处是否连续?

解 因为 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在,

所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续.



主要内容

1

二元函数连续性的定义

2

二元函数间断点的定义

3

二元连续函数运算性质

4

多元初等函数的定义及其连续性的结论

5

有界闭区域上连续函数的性质



二元函数间断点的定义

定义1 设 (x_0, y_0) 是函数 f 的定义域的聚点, 若 f 在 (x_0, y_0) 无定义, 或有定义但下式不成立

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称 f 在点 (x_0, y_0) 处**间断**, 称 (x_0, y_0) 为 f 的**间断点**.

例如 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处**间断**.

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 间断. (**间断线**)



主要内容

1

二元函数连续性的定义

2

二元函数间断点的定义

3

二元连续函数运算性质

4

多元初等函数的定义及其连续性的结论

5

有界闭区域上连续函数的性质



二元连续函数的性质

二元连续函数的和、差、积、商（除分母为零的点外）与复合仍为连续函数。

证明：利用二重极限的运算法则可以证明上述性质



主要内容

1

二元函数连续性的定义

2

二元函数间断点的定义

3

二元连续函数运算性质

4

二元初等函数的定义及其连续性的结论

5

有界闭区域上连续函数的性质



1、二元初等函数的定义

由变量 x, y 的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算构成的函数，称为**二元初等函数**。

例如

$$\sin \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

都是二元初等函数。

在 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 1\}$ 上是连续的。

在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上间断。

2、二元初等函数连续性的结论

二元初等函数在其有定义的区域内部都是连续的。



例1 讨论下列函数的连续性.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

解 该函数除点 $(0,0)$ 外在 xOy 平面上是处处连续的.

又因为 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在,

所以点 $(0,0)$ 是它的间断点.



主要内容

1

二元函数连续性的定义

2

二元函数间断点的定义

3

二元连续函数运算性质

4

二元初等函数的定义及其连续性的结论

5

有界闭区域上连续函数的性质



有界闭区域上连续函数的性质

性质1（有界性）

有界闭区域 D 上的多元连续函数在 D 上有界.

性质2（最大最小值定理）

在有界闭区域 D 上连续的多元函数在 D 上必能取得它的最大值与最小值.

性质3（介值定理）

有界闭区域 D 上的多元连续函数必能取得介于该函数在 D 上的最大值与最小值之间的任何值.