西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

第九章 多元函数微分法及其应用

9.2 二元函数的极限

数学与统计学院
李换琴

主要内容

1. 二重极限的概念
2. 判别二重极限不存在的方法

主要内容

1 二重极限的概念

2 判别二重极限不存在的方法

1 二重极限的定义

回顾：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

定义1 设$f : \overset{o}{U}(x_0, y_0) \to \mathrm{R}$是一个二元函数，$a \in \mathrm{R}$是常数.若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 使得 \forall (x, y) \in \overset{o}{U}((x_0, y_0), \delta)$$

$$恒有 \left| f(x, y) - a \right| < \varepsilon,$$

则称$(x, y) \to (x_0, y_0)$时，$f(x, y)$有极限.

且称a为当$(x, y) \to (x_0, y_0)$时$f(x, y)$的极限. 记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a，或 \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$$

这个极限也称为二重极限.

否则，称$(x, y) \to (x_0, y_0)$时$f(x, y)$没有极限.

例1 用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=0$

证 $\forall\varepsilon>0$, 欲 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\varepsilon$,

只要 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$ 即可.

取 $\delta=2\varepsilon$, 则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$

由定义知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

2 关于二重极限定义的补充说明

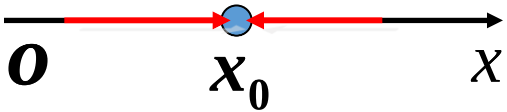
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = a$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a}$$

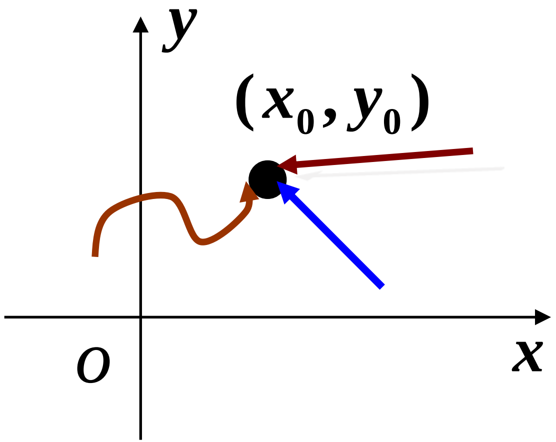
(1) 形式上与一元函数极限定义无多大差异;



（2）一元函数极限的有关性质：唯一性、局部有界性、夹逼定理等都可以推广到二重极限中来;

(3) $(x,y)\to(x_0,y_0)$指的是以任何路径.

（与一元函数的本质差异）



主要内容

1 二重极限的概念

2 判别二重极限不存在的方法

判别二重极限不存在的方法

对于二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

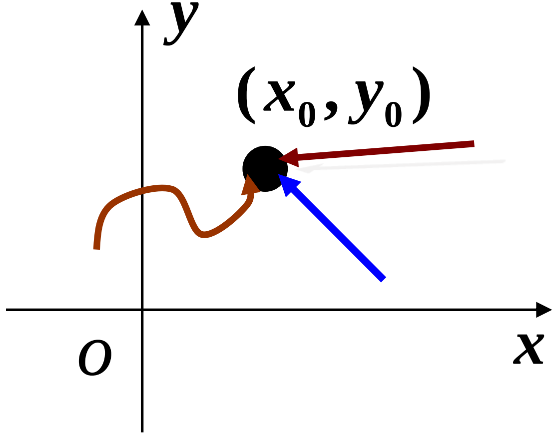
若(x,y)以不同路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$趋于不同的值;

或(x,y)按照某种方式或路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$不趋于一个确定的数,

则可以断定

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

不存在.



例1 设$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

解 令点(x,y)沿直线$y=kx\to(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

上式说明,若k不同,即当(x,y)沿不同直线$y=kx$趋向于$(0,0)$时，$f(x,y)$趋于不同的常数，因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\text{不存在}$$

例2

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 是否存在？

解 令点(x,y)沿直线 $y=kx\to(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0$$

令点(x,y)沿曲线 $y=x^2\to(0,0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$$

因为 $0\neq\dfrac{1}{2}$， 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在