

样 卷

一、简答与计算题（每题 8 分，共 6 题，合计 48 分）

1. 简述算法的 5 个重要特征。
2. 简述分支限界法中剪枝的依据。
3. 简述最优子结构性质。
4. 什么是 NPC？如果证明了某问题为 NPC，谈谈对该问题的求解有哪些意义。
5. 已知递归公式 $T(n) = 2T(n/2) + n - 1$ ，其中 $n = 2^k, T(1) = 0$ ，求 $T(n)$ 。
6. 某递归算法的时间复杂度的递推公式是 $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$ ， $T(1) = O(1)$ ，用递归树推导出 $T(n)$ 的渐进上界表达式。

二、算法设计与分析题（共 4 题，合计 52 分）

1. （12 分） 给定整数数组 $A[1..n]$ ， $n \geq 2$ ，要求计算最大差，定义如下：

$$d = \max_{1 \leq i < j \leq n} A(j) - A(i)$$

设计一个分治算法，并给出其时间复杂度。

2. （12 分） 已知有 n 种硬币，币值分别为 $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ ，其中 $a \geq 2$ 为整数。设计一种高效算法，使得对于任意正整数 M ，能够找出数目最少的硬币且硬币币值和恰好为 M 。要求说明算法的主要思想，证明其正确性，并给出其时间复杂度。

3. (14 分) 给定一个包含 m 行 n 列的网格以及正整数数组 $A[1..m][1..n]$, 其中格子 (i, j) 具有代价 $A[i][j]$ 。要求找出从左上角格子 $(1, 1)$ 到达右下角格子 (m, n) 代价最小的路线, 其中每次只能向下方或者右方移动一格, 路线代价定义为所有经过格子的代价和 (右图为例及对应的最佳路线)。设计一种动态规划算法, 要求给出关键设计步骤、算法伪码, 以及时间复杂度。

4	7	8	6	4
↓	→	→	↓	
6	7	3	9	2
3	8	↓	→	4
7	1	7	↓	7
2	9	8	9	↓
				3

4. (14 分) 最大团问题定义如下: 给定无向图 $G = (V, E)$, G 的一个完全子图被称为 G 的一个团。求 G 的一个最大团, 即 G 的顶点个数最多的团。(1) 给出最大团问题对应的判定问题, 并证明判定问题属于 NP (6 分); (2) 为最大团问题设计一种分支限界算法 (回溯算法亦可, 但会酌情扣分)。