

例1.12. 条件概率公式

假定男性、女性出生率相同，在有三个孩子的家庭中，已知有一个男孩，求三个孩子都是男孩的概率。

解1.12. 1. 公式法设事件 $A = \{\text{三个孩子中有一个男孩}\}$, $B = \{\text{三个孩子都是男孩}\}$;

样本空间 Ω 共有 $2^3 = 8$ 个样本点，故 $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(AB) = \frac{1}{8}$. 利用条件概率公式可得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{7}.$$

2. 压缩样本空间法。

例1.13. 乘法公式

根据以往的资料表明，某一3口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P(\text{孩子得病}) = 0.6,$$

$$P(\text{母亲得病}|\text{孩子得病}) = 0.5,$$

$$P(\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}) = 0.4$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解1.13. 令 $A = \{\text{孩子得病}\}$, $B = \{\text{母亲得病}\}$, $C = \{\text{父亲得病}\}$; 由题设有

$$P(\bar{C}|AB) = 1 - P(C|AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

母亲及孩子得病但父亲未得病的事件为 $AB\bar{C}$,

$$P(AB\bar{C}) = P(A)P(B|A)P(\bar{C}|AB) = 0.18.$$

例1.14. 贝叶斯(Bayes)公式

已知男子有5%是色盲患者，女子有0.25%是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机的挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解1.14. 令 $A = \{\text{从人群中随机选一个人为男性}\}$, $\bar{A} = \{\text{从人群中随机选一个人为女性}\}$, $B = \{\text{从人群中随机选一个人为色盲患者}\}$; 由题设有

$$P(A) = 0.5, P(\bar{A}) = 0.5, P(B|A) = 0.05, P(B|\bar{A}) = 0.0025.$$

由贝叶斯公式

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{20}{21}.$$