河海大学2018-2019学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题3分，本题满分21分）

1. 设 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(AB)=$ ________；P（$A\cup B$）= ________。

2. 设每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为（　　）。

（A）p^3　　（B）$1-p^3$　　（C）$(1-p)^3$　　（D）$1-(1-p)^3$

3．若随机变量 $X\sim N(1,1)$，其概率密度函数为 $f(x)$，则下列结论正确的是（　　）。

（A）$P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}=0.5$　　（B）$f(x)=f(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

（C）$P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}=0.5$　　（D）$F(x)=1-F(-x),\ x\in(-\infty,+\infty)$

4. 设随机变量 $X\sim U(0,4)$，则 $P\{D(X)<X<E(X)\}=$ ____________。

5. 设随机变量 X, Y 独立同分布且方差都大于0，令 $\xi=X+aY$，$\eta=X+bY$，其中 a、b 为常数且 $ab\neq 0$，则当 ξ,η 不相关时，有（　　）。

（A）$ab=1$　　（B）$ab=-1$　　（C）$a=b$　　（D）a,b 为任意非零常数

6．设 $X_1, X_2,\dots, X_{2019}$ 为来自标准正态总体的简单随机样本，已知统计量$Y=\dfrac{cX_{2019}}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{2018}^2}}$服从 t 分布，则常数 $c=$ ____________。

7. 设两独立样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，令 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，$S_1^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2$，则 $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim$ ____________。（写出分布和参数）

二、（本题满分10分）有两个袋子，甲袋中有2只白球，1只黑球；乙袋中有1只白球，2只黑球。从甲袋中任取一只球放入乙袋，再从乙袋中任取一只球。（1）求从乙袋中取出的球为白球的概率；（2）若发现从乙袋中取出的是白球，问从甲袋中取出放入乙袋的球，黑、白哪种颜色可能性大？

三、（本题满分13分）设随机变量X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}kx^\alpha, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 k、α 为常数且 $k>0$，$\alpha>0$，又已知 $E(X)=0.75$。（1）求常数 k 和 α；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$；（3）求概率 $P\{\frac{1}{2}<X<1\}$；（4）求 $D(X)$。

四、（本题满分13分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。（1）求 X 和 Y 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）问 X 与 Y 是否独立？为什么？（3）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}。

五、（本题满分8分）设 X、Y 是相互独立的随机变量，密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

六、（本题满分 13 分）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为对应的样本值。

（1）若总体 $X \sim P(\lambda)$，其分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$ 为未知参数。求参数λ的极大似然估计量 $\hat{\lambda}_{MLE}$，并判断 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 是否为λ的无偏估计。

(2)若总体X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta \\ 0, & 其他\end{cases}$，其中$\theta>0$未知。求参数$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}_M$。

七、（本题满分 14 分）某高校 2017 级《概率论与数理统计》期末考试成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，为了评估考试成绩，现从所有考生中抽取了 31 名考生，算得他们的平均成绩为 73 分，标准差为 8 分。（1）求总体方差σ^2的置信度为95%的双侧置信区间。（2）某位老师说这次考试的年级平均成绩为 75 分，你赞同这位老师的观点吗？（$\alpha=0.05$）

八、（本题满分 8 分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1 \\ X, & 1<X<2 \\ 1, & X\ge 2\end{cases}$。求（1）$Y$的分布函数；（2）$P\{X\le Y\}$。

参考解答

一、填空题

（1）1/6，5/12；（2）D； （3）C；（4）1/6；（5）B；（6）$\sqrt{2018}$；（7）$F(n_1-1, n_2-1)$

二、设 $B_1=$“从甲袋中取出的是白球”，$B_2=$“从甲袋中取出的是黑球”，$A=$“从乙袋中取出白球”。则 B_1, B_2 构成一个完备事件组，则由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{4/12}{5/12}=\frac{4}{5}$，$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{3/12}{5/12}=\frac{3}{5}$

所以白球可能性大。

三、（1）由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^\alpha dx=\frac{k}{\alpha+1}$，$0.75=EX=\int_0^1 xkx^a dx=\frac{k}{a+2}$。

$\therefore k=3, a=2$，故 $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & 其它\end{cases}$

(2)$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ x^3, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ (3)$P\{\frac{1}{2}<X<1\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}$

（4）$E(X^2)=\int_0^1 x^2 3x^2 dx=\dfrac{3}{5}$，故 $DX=\dfrac{3}{5}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3}{80}$

四、（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 6xdy=6x(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases}$；

$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y 6xdx=3y^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

（2）由于 $f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 6x^2(1-x)dx=1/2$，$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 6x^3(1-x)dx=3/10$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 3y^3 dy=3/4$，$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f_Y(y)dy=\int_0^1 3y^4 dy=3/5$，

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/20$，$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=3/80$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 6x^2ydy=2/5$，$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1/40$

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

五、联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}, & 0<z<1\\ \int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-(z-1)}+e^{-z}, & z\ge 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}(e-1)e^{-z}, & z\ge 1\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

或者利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$ 直接计算也可。

六、（1）$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}e^{-\lambda}}{x_i!}\Rightarrow\ln L(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}[x_i\ln\lambda-\lambda-\ln(x_i!)]$，由

$\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{i=1}^{n}[\dfrac{x_i}{\lambda}-1]=0\Rightarrow\hat{\lambda}_{MLE}=\bar{x}$。又因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $E(\overline{X})=E(X)=\lambda$，即 $\hat{\lambda}_{MLE}$ 为 λ 的无偏估计。

（2）令 $E(X)=\overline{X}$，又 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}\dfrac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\dfrac{\theta}{2}$，于是 $\hat{\theta}_M=2\overline{X}$

七、(1)总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 μ 未知，所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$，

又 n=31，$S^2=64$，$\alpha=0.05$，所以 $\chi^2_{0.025}(30)=46.979$，$\chi^2_{0.975}(30)=16.791$，

$(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})=(40.869,114.347)$

（3） 根据题意须检验假设 $H_0:\mu=75,H_1:\mu\ne 75$，由于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 σ^2 未知，令检验统计量

$t=\dfrac{\overline{X}-75}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0}{\sim}t(n-1)$，由 $P(H_1|H_0)=\alpha$ 得拒绝域为 $|t|>t_{\alpha/2}(n-1)$，又 $\overline{X}=73$，$\alpha=0.05$，

$t_{0.025}(30)=2.0423$，所以 $|t|=1.392<2.0423$，接受 H_0，即赞同这位老师的说法。

八、(**本题满分 8 分**)（1）$F_Y(y)=P(Y\le y)$。当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$。

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y\le y,X\le 1)+P(Y\le y,1<X<2)+P(Y\le y,X\ge 1)$

$=P(Y\le y,1<X\le 2)+P(X\ge 2)=\int_1^y\dfrac{1}{9}x^2dx+\dfrac{19}{27}=\dfrac{y^3}{27}+\dfrac{18}{27}$。

（2）$P(X\le Y)=P(X<Y)+P(X=Y)=P(X\le 1)+P(1<X<2)=P(0<X<2)\ =\int_0^2\dfrac{1}{9}x^2dx=\dfrac{8}{27}$。

河海大学 2018-2019 学年经管类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1．设 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(AB)=$ ____________；P（$A\cup B$）= ____________。

2．某人向同一个目标进行射击，每次射中目标的概率为 0.2，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为____________。

3．设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$ ____________。

4．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim$ ____________；$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim$ ____________。（写出具体分布和参数）

5．设 X,Y 相互独立，且 $P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=0.7$，则 $P\{\max\{X,Y\}<0\}=$ ______。

6．设随机变量 X,Y 不相关，且 $E(X)=2,E(Y)=1,D(X)=3,$ 则 $E[X(X-Y)]=$ ______。

7．从总体 X 中抽取样本 X_1, X_2，若 $\hat{\mu}=a_1X_1+a_2X_2$ 是总体期望的无偏估计，则 a_1,a_2 满足的关系是

____________。

二、（本题满分 12 分）从数集$\{1,2,3,4,5\}$中每次取一个数，不放回地取两次，设第一次取出的数字为 X_1，第二次取出的数字为 X_2。

（1）利用全概率公式计算概率 $P\{X_2>X_1\}$。

（2）利用贝叶斯公式计算：在已知$X_2>X_1$条件下，第一次取出的数为 4 的概率。

三、（本题满分 12 分）设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$Y=X^2$。求：（1）$Y$ 的分布函数$F(y)$；（2）$E(Y)$；（3）$E(XY)$。

四、（本题满分 12 分）设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}。$$

求：（1）关于 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；（2）概率 $P\{X>2Y\}$。

五、（本题满分 10 分）设二维离散型随机变量（X,Y）的联合分布律为：

X \ Y	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

（1）求 $P\{X=2Y\}$；（2）求 X,Y 的边缘分布律；（3）求 Z=XY 的分布律；（4）求 Cov(X,Y)。

六、（本题满分 10 分）设 X、Y 是相互独立的随机变量，密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}，\ f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}。$$

令 $Z=X+Y$。求（1）Z 的分布函数；（2）Z 的密度函数。

七、（本题满分 13 分）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体 X 的一个简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为对应的样本值。

（1） 若总体 X 的分布律为 $P(X=k)=\theta(1-\theta)^{k-1}(k=1,2,3,\cdots)$，其中 $0<\theta<1$ 为未知参数。求 θ 的极大似然估计，并判定此估计是否为 θ 的无偏估计。

（2）若总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$\theta>0$ 为未知参数，求 θ 的矩估计。

八、（本题满分 10 分）某学校 2017 级学生《概率论与数理统计》考试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今从中抽取 31 名同学的成绩，算得平均值为 73 分，标准差为 8 分。

（1）若 $\sigma=9$ 已知，求 μ 的置信度为 95% 的置信区间。

（2）若 σ 未知，求 μ 的置信度为 95% 的置信区间。

（3）若 $\sigma=9$ 已知，问需抽取容量 n 多大时，才能使得总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间的长度不大于 8？

参考解答

一、填空题

（1）1/6，5/12；（2）0.0768；（3）$0.5e^{-1}$；（4）$\chi^2(n),\chi^2(n-1)$；（5）0.09；（6）5；（7）$a_1+a_2=1$

二、（1）$P(X_2>X_1)=\sum_{k=1}^{5}P(X_2>X_1\mid X_1=k)P(X_1=k)$

$$P(X_1=k)=\frac{1}{5},\ P(X_2>X_1\mid X_1=k)=\frac{5-k}{4}\Rightarrow$$

$$P(X_2>X_1)=\sum_{k=1}^{5}\frac{5-k}{5-1}\frac{1}{5}=\frac{1}{5(5-1)}\sum_{k=1}^{5}(5-k)=\frac{1}{2}$$

（2）$P(X_1=3|X_2>X_1)=\frac{P(X_1=3,X_2>X_1)}{P(X_2>X_1)}=\frac{P(X_2>X_1|X_1=3)P(X_1=3)}{P(X_2>X_1)}\Rightarrow P(X_1=3|X_2>X_1)=\frac{1}{10}$

三、（1）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=1$；当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{0<X\le\sqrt{y}\}=\sqrt{y}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1 & y\ge 1\\ \sqrt{y} & 0<y<1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

（2）求导得到$f_Y(y)=\begin{cases}0.5y^{-0.5} & 0<y<1\\ 0 & else\end{cases}$，$E(Y)=\int_0^1 y0.5y^{-0.5}dy$=1/3

（3）$E(XY)=E(X^3)=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$

四、（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x\frac{9y^2}{x}dy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 \dfrac{9y^2}{x}dx=-9y^2\ln y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（2）$P\{X>2Y\}=\iint_{x>2y} f(x,y)dxdy$；$P\{X>2Y\}=\int_0^1 dx\int_0^{x/2}\frac{9y^2}{x}dy=\int_0^1\frac{3}{8}x^2dx=\frac{1}{8}$

五、（1）$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=1/4$

（2）

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	4
P	7/12	1/3	1/12

（3）$E(XY)=2/3$；

（4）$E(X)=2/3, E(Y)=1$；$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

六、（1）联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint_{x+y\le z} f(x,\ y)dxdy=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=z-1+e^{-z}, & 0<z<1,\\ \int_0^1 dx\int_0^{z-x}e^{-y}dy=1-e^{-(z-1)}+e^{-z}, & z\ge 1,\end{cases}$$

2）$f_Z(z)=\begin{cases}(e-1)e^{-z}, & z\ge 1,\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

七、（1）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\theta(1-\theta)^{x_i-1}=\theta^n(1-\theta)^{\sum x_i-n}$

$LnL(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}\theta(1-\theta)^{x_i-1}=nLn(\theta)+(\sum x_i-n)Ln(1-\theta)$，$\dfrac{dLnL(\theta)}{d\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}_L=\dfrac{1}{\bar{X}}$。因为$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\theta(1-\theta)^{k-1}=\theta$，且$E(\frac{1}{X})\ne E(X)$，所以$E(\bar{X})=E(X)=\theta$，而$E(\hat{\theta}_L)=E(\frac{1}{\bar{X}})\ne\theta$，故为有偏估计。

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\frac{\theta}{\theta+1}$，令$E(X)=\bar{X}\Rightarrow\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}_M=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

八、（1）σ^2已知，置信区间为

$$(\overline{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(73-1.96\frac{9}{\sqrt{31}},73+1.96\frac{9}{\sqrt{31}})=(69.832,76.168)$$

（2）　σ^2未知，置信区间为

$$(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})=(73-2.0423\frac{8}{\sqrt{31}},73+2.0423\frac{8}{\sqrt{31}})=(70.066,75.934)$$

（3）σ^2 已知，置信区间为$(\overline{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，$2Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 8\Rightarrow n\ge\frac{4\sigma^2}{64}Z_{\alpha/2}^2=19.4481$得到$n=20$。

河海大学 2019-2020 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

1.在三次独立重复射击中，若至少有一次击中目标的概率为 $\frac{37}{64}$，则每次射击击中目标的概率为________。

2.设 r.v. X 与 Y 相互独立，且 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline p & 0.5 & 0.5 \end{array}$，$\begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline p & 0.5 & 0.5 \end{array}$，则 $P\{X=Y\}=$（　）。

（A）0.25　　（B）0.75　　（C）0.5　　（D）1

3.设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ kx^2, & 0\le x\le 1, \\ 1, & x>1, \end{cases}$ 则 $k=$________。

4.设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=2.4$，$D(X)=1.44$，则 $n=$________，$p=$________。

5.下列结论中，**不是**随机变量 X 与 Y 不相关的充要条件的是（　　）。

（A）$E(XY)=E(X)E(Y)$　　（B）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

（C）$Cov(X,Y)=0$　　（D）X 与 Y 相互独立

6.设 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 来自正态总体 $N(0,1)$，$Y=\left(\sum_{i=1}^{4}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=5}^{8}X_i\right)^2+\left(\sum_{i=9}^{12}X_i\right)^2$，当常数 $k=$ ________时，kY 服从 χ^2 分布。

7. 设两独立样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中 μ_1、μ_2 未知，σ_1^2、σ_2^2 已知，$\overline{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\overline{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}Y_j$，则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为__________.

二、（本题满分 10 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ A-x, & 1<x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$（1）求常数 A；（2）求 $P\{0.2<X<1.2\}$；（3）求 X 的分布函数。

三、（本题满分 9 分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

四、（本题满分 14 分）设 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} A(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 A 为常数。（1）求 A；（2）求 $D(X+Y)$；（3）求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

五、（本题满分 10 分）设随机变量 X 与 Y 满足：$D(X)=2$，$D(Y)=4$，$Cov(X,Y)=1$。令 $U=2X-3Y$，$V=3X-2Y$。求 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV}。

六、试解下列各题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

（1）若总体 X~$P(\lambda)$，其分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$，$\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本。求参数λ的矩估计量 $\hat{\lambda}_M$，并判断 $\hat{\lambda}_M$ 是否为 λ 的无偏估计。

（2）设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

（$0<\theta<\dfrac{1}{2}$）是未知参数，利用总体 X 的样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 3, 2，求θ的极大似然估计值 $\hat{\theta}_{MLE}$。

（3）随机地选取某种炮弹 9 发做试验，测得炮口速度的样本标准差 $s=11$ (m/s)。设炮口速度服从正态分布，求炮口速度的方差 σ^2 的置信度为 95%的置信区间。

（4）设某种产品的某项指标服从正态分布，已知它的标准差 $\sigma=150$。现从一批产品中随机抽取 26 个，测得该项指标的平均值为 1637，问能否认为这批产品的该项指标值为 1600（$\alpha=0.05$）。【参考数值：$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(25)=2.060$，$t_{0.05}(25)=1.708$，$t_{0.025}(26)=2.056$，$t_{0.05}(26)=1.706$，$\sqrt{26}=5.1$】

七、（本题满分 8 分） 设二维随机变量(X,Y)服从区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$ 上的均匀分布。令$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}$ $V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$问 U 与 V 是否独立？为什么？

参考解答

一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

(1)1/4；(2) C；(3) 1；(4) 6，0.4；(5) D；(6) 1/4；(7)$(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

二、（本题满分 10 分）（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_0^1 xdx+\int_1^2(A-x)dx=1\Rightarrow$A=2

（2）$P\{0.2<X<1.2\}=\int_{0.2}^{1.2}f(x)dx=\int_{0.2}^{1}xdx+\int_1^{1.2}(2-x)dx=0.66$

（3）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x xdx=\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ \int_0^1 xdx+\int_1^x(2-x)dx=-\frac{x^2}{2}+2x-1, & 1<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

三、（本题满分 9 分） $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$。当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0\Rightarrow f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx$

$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}$

综上有$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$。

四、（本题满分 14 分）（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\Rightarrow$A=1/8

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 dx\int_0^2\frac{x^2}{8}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{3}$，同理 $E(Y)=\frac{7}{6}$，$E(Y^2)=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{11}{36}$，同理 $D(Y)=\frac{11}{36}$

$\Rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{36}\Rightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)=\frac{5}{9}$

（3）$f(z-y,y)=\begin{cases}\frac{z}{8}, & y<z<2+y,\ 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\begin{cases}\int_0^z\frac{z}{8}dy=\frac{z^2}{8}, & 0<z\le 2,\\ \int_{z-2}^2\frac{z}{8}dy=\frac{(4-z)z}{8}, & 2<z\le 4,\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

五、（本题满分 10 分） $D(U)=D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)-12Cov(X,Y)=32$

$D(V)=D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)-12Cov(X,Y)=22$

$Cov(U,V)=Cov(2X-3Y,3X-2y)=6Cov(X,X)-4Cov(X,Y)-9Cov(Y,X)+6Cov(Y,Y)$

$=6D(X)-4Cov(X,Y)-9Cov(X,Y)+6D(Y)=23\Rightarrow\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{23}{88}\sqrt{11}=0.87$

六、（本题满分 14 分）（1）由矩估计法有 $E(X)=\overline{X}$，又因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $E(X)=\lambda$，于是有 $\hat{\lambda}_M=\overline{X}$。因为 $E(\hat{\lambda}_M)=E(\overline{X})=E(X)=\lambda$，所以 $\hat{\lambda}_M=\overline{X}$ 为 λ 的无偏估计。

（2）似然函数为

$L(\theta)=P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}P\{X_3=3\}P\{X_4=0\}P\{X_5=3\}P\{X_6=1\}P\{X_7=3\}P\{X_8=2\}=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$\Rightarrow \ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)\Rightarrow\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0\Rightarrow\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$,

又因为 $0<\theta<\frac{1}{2}$，所以 $\hat{\theta}_{MLE}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

七、（本题满分 14 分）（1）由题意总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，于是 σ^2 的置信度为 1−α的置信区间为 $(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)})$，又 n=9，s=11，α=0.05，$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.534$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，代入得 σ^2 的 95%的置信区间为 $(\frac{968}{17.534},\frac{968}{2.180})=(55.21,444.04)$

（2）由题意总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，提出假设 $H_0:\mu=1600$，$H_1:\mu\neq 1600$。$\sigma=150$ 已知，于是构造检验统计量为 $U=\frac{\bar{x}-1600}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{H_0为真}{=}\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，$P\{H_1|H_0\}=\alpha$ 可得拒绝域为 $|U|>z_{\alpha/2}$。又 n=26，$\bar{x}=1637$，$\sigma=150$，$\alpha=0.05$，$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，代入公式计算得 $|U|=1.256<1.96$，所以接受 H_0，即在置信度 95%下可以认为这批产品该项指标值为 1600。

八、（本题满分 8 分） 由题意可知(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & otherwise\end{cases}$，于是

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\iint\limits_{x\le y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}$，$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\iint\limits_{y<x\le 2y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{4}$，$P\{U=1,V=1\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

由上可得（U,V）的联合分布律为

U \ V	0	1	$p_{i.}$
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/2	3/4
$p_{.j}$	1/2	1/2	1

，进一步可得 U 和 V 的边缘分布律如表，由于 $P\{U=0,V=1\}=0\neq P\{U=0\}P\{V=1\}=1/8$，所以 U 与 V 不相互独立。

河海大学2019-2020学年经管类《概率论与数理统计》试卷

一、填空与选择题（每小题3分，本题满分18分）

1．设随机事件 A, B 相互独立，且 $P(B)$=0.5, $P(A-B) = 0.3$，则$P(B-A) =$______。

2．设连续型随机变量 X 的分布函数为$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ kx^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$，则 $k=$________。

3．已知 $D(X)$=4，$D(Y)$=25，ρ_{XY}=0.4，则$D(2X-Y)$ =________。

4．设 $X_1, \cdots, X_9$；$Y_1, \cdots, Y_9$ 分别是来自正态分布 $N(0, 5^2)$ 的两个相互独立的样本，则统计量

$\frac{X_1^2+\cdots+X_9^2}{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}\sim$________，参数为_______。

5．设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_4$ 是来自 X 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则$\frac{4(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim$______ 。（写出具体分布及参数）

6．设总体 X 服从参数为λ的泊松分布，$X_1, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$\overline{X}$、S^2 分别为样本均值与样本方差，则对任意$0 \le \alpha \le 1$，$E[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2]$=_____。

二、（本题满分10分）已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和2件次品，乙箱中仅装有2件合格品。从甲箱中任取3件产品放入乙箱后。（1）求乙箱中次品数 X 的分布律和 $E(X)$;（2）求从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

三、（本题满分10分）设随机变量 $X\sim U(0, 2)$，又设 $Y=e^{-2X}$。（1）求 Y 的概率密度函数;（2）求 $E(Y)$。

四、（本题满分12分）设随机变量 X，Y 相互独立且同分布，$P\{X=-1\}=q, P\{X=1\}=p$, $(p+q=1, 0<p<1)$，设$Z = \begin{cases} 0, & XY = 1, \\ 1, & XY = -1. \end{cases}$（1）求 Z 的分布;（2）求（X，Z）的联合分布;（3）问 p 为何值时，X 与 Z 相互独立。

五、（本题满分16分）设二维连续型随机变量（X，Y）在区域$G=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 2x\}$上服从均匀分布。（1）求关于 X 和 Y 的联合密度函数 $f(x, y)$;（2）求 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$;（3）求 X 与 Y 的协方差 Cov(X，Y)；（4）求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

六、（本题满分14分）设总体 X 的概率密度为$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$其中 θ>0 为未知参数，$X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本。

（1）试求未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$，并讨论此估计是否为 θ 无偏估计;

（2）试求未知参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$。

七、（本题满分12分）

（1）用传统工艺加工某种水果罐头，每瓶中维生素C的含量为随机变量 X（单位：mg）.设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 均未知。现抽查16瓶罐头进行测试，测得维生素C的平均含量 $\overline{x}$=20.80mg，样本标准差 s=1.60mg，试求 μ 的置信度为95%的置信区间。

（2）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，抽取样本 $X_1, \cdots, X_n$，且 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为样本均值。已知 σ=10，问：要使 μ 的置信度为0.95的置信区间长度不超过5，样本容量 n 至少应取多大？

（参考数据：$\Phi(1.25)=0.8944$，$\Phi(1.283)=0.9$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$；$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.025}(16)=2.1199$）

八、（本题满分 8 分）若 $X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$ 是来自 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求统计量 $\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 所服从的分布，并给出分布的参数。

参考解答

一．1．0.2；2．1；3．25；4．F(9,9),9,9；5．$\chi^2(1)$；6．λ。

二．（1）乙箱中次品数 X 的可能取值为 0,1,2. X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C_2^kC_3^{3-k}}{C_5^3},k=0,1,2.$，即

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

因此 $EX=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$

（3） 设 A 表示“从乙箱中任取一件产品是次品”，由全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\frac{1}{10}\times0+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

三、$\because X\sim U(0,2),\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2},0<x<2\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

$\because F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^{-2X}\le y\}=P\{X\le-\frac{1}{2}\ln y\}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\ln y}f_X(x)dx$

$\therefore f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=-\frac{1}{2y}f_X(-\frac{1}{2}\ln y)=\begin{cases}\frac{1}{4y} & e^{-4}<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$EY=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_{e^{-4}}^{1}y(-\frac{1}{4y})dy$ 或 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x}f_X(x)dx=\int_0^2\frac{1}{2}e^{-2x}dx=\frac{1}{4}(1\text{-}e^{-4})$

四．（1）$P\{Z=0\}=P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=p^2+q^2$,

$P\{Z=1\}=P\{XY=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=1,Y=-1\}=2pq$,

因此，$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ p^2+q^2 & 2pq\end{pmatrix}$

(2)

X \ Z	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	q^2	pq	q^2+pq
1	p^2	pq	p^2+pq
$p_{\cdot j}$	p^2+q^2	$2pq$	1

（3） 若要求 X 与 Z 相互独立，则要求 $\begin{cases}q^2=(q^2+pq)\cdot(p^2+q^2)\\ pq=(q^2+pq)\cdot2pq\\ p^2=(p^2+q^2)\cdot(p^2+pq)\\ pq=(p^2+pq)\cdot2pq\end{cases}\Rightarrow p=q=\frac{1}{2}$

五．（1）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_G}=1, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$， （2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y/2}^{1}1dy=1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

（2）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,\ y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{2x}xydy=\frac{1}{2}$，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1x2xdx=\frac{2}{3}$，

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^2y(1-\frac{y}{2})dy=\frac{2}{3}$，$\therefore\ Cov(X,\ Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{1}{18}$

（3）$\because F_Z(z)=\iint_{x+y\le z}f(x,\ y)dxdy=\begin{cases}0, & z<0,\\ z^2/3, & 0\le z<1,\\ 1-\frac{1}{6}(3-z)^2或-\frac{1}{6}z^2+z-\frac{1}{2}, & 1\le z<3,\\ 1, & z\ge 3,\end{cases}$

$$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{2}{3}z, & 0<z<1,\\ 1-\frac{z}{3}, & 1\le z<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

或者 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{z/3}^{z}1dx=\frac{2z}{3}, & 0<z<1\\ \int_{z/3}^{1}1dx=1-\frac{z}{3}, & 1\le z<3.\\ 0, & 其它\end{cases}$

六.（1）由于$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_{0}^{+\infty}x\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta$，又由矩估计法有$E(X)=\overline{X}$；所以$\hat{\theta}_M=\overline{X}$；

$E(\hat{\theta}_{MLE})=E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta=\frac{1}{n}\cdot\mathrm{n}\cdot\theta=\theta,$ 故$\hat{\theta}_M$为θ无偏估计量。【7 分】

（2）似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}=\dfrac{\theta^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}, & x_i>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$

当$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$时，$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=0$，得 $\hat{\theta}_{MLE}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，

所以θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$。

七.（1）因为σ^2未知, 所以总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$，

又$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$，故$(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})=$

$(20.80-2.1315\times\frac{1.60}{\sqrt{16}},20.80+2.1315\times\frac{1.60}{\sqrt{16}})=(19.9474,21.6526)$.

（2）因为$\sigma=10$已知, 所以总体均值μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

所以由题意有$2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 5$，将$\sigma=10$，$z_{0.025}=1.96$代入得$n\ge 61.4656$, 故 n=62.

八. $\because X_{n+1}-\overline{X}\sim N(0,\ \sigma^2+\frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且二者独立，

$$\therefore\ \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}\sim t(n-1).$$

河海大学 2020-2021 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

一、填空题（每小题 3 分，本大题共六小题满分 18 分）

1. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=x\}=a\dfrac{\lambda^x}{x!},\ x=0,1,2,\cdots$,其中 $\lambda>0$ 为常数，则常数 $a=$ ________；

2. 随机变量 $X\sim B(10,\ 0.2),\ Y\sim N(0,\ 4)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $D(X-2Y)=$__________；

3. 设事件 A,B 满足 $P(A)=0.6,\ P(B)=0.7$，且 $P(AB)$ 取到最小值，则 $P(A\cup B)=$_________；

4. 假设检验中，由样本观察值判断假设 H_0 正确性的依据是______________________________；

5. 设 X_1，X_2，⋯，X_n 是来自 X 的样本，且 $E(X)=0$，试写出 $E(X^2)$ 的一个无偏估计量__________；

6. 随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}25\,x\,e^{-5x}, x\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$，则 $Y=10X\sim\chi^2$ (_____)分布（填数字).

【注：$\chi^2(n)$ 密度函数 $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}},\ t\ge 0\\ 0,\qquad t<0\end{cases}$，$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha),\ \Gamma(1)=\Gamma(2)=1$】

二、（本题满分 10 分）仓库中有 10 件产品，已知其中特等品件数可能是 1 件, 2 件, 3 件这三种情形，且特等品件数是 1 件, 2 件, 3 件的可能性相同. 现作放回抽样，每次从仓库中随机抽取 1 件产品，共连续抽取两次.

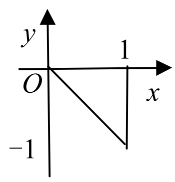
1. 求两次都抽到特等品的概率；
2. 若已知第二次抽到了特等品，求第一次也抽到了特等品的概率.

三、（本题满分 12 分） 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ke^{-4x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

求：1．常数 k； 2．$Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$； 3．概率 $P\{X>0.1\}$.

四、（本题满分 16 分） 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,-x<y<0\}$ 上服从均匀分布，求：



1．X 与 Y 的联合密度函数 $f(x,y)$；
2．X 与 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$；
3．$Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

五、（本题满分 16 分）设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}x, & 0<x\le\theta\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本，求：

1．求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；
2．求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_{MLE}$；
3．讨论矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 是否为 θ 的无偏估计量.

六、（本题满分 14 分）随机地从一批钉子中抽取 9 枚，测得其长度(单位：毫米) 如下：

49.6 49.3 50.1 50.0 49.2 49.9 49.8 51.0 50.2

设这批钉子的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

1．若$\sigma>0$未知，检验假设H_0：$\mu=\mu_0=50$，H_1：$\mu\neq\mu_0$（取显著性水平$\alpha=0.05$）

2．若已知$\sigma=0.3$，求μ的置信度为95%的双侧置信区间.

【注：本题样本均值$\overline{x}=49.9$，样本标准差$s=0.53$．部分标准正态分布表和t分布表如下】

七、（本题满分 14 分）设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x},\ x\geq 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$$

定义随机变量Y_1，Y_2为

$$Y_k=\begin{cases}0, & X\leq k\\ 1, & X>k\end{cases},\quad k=1,\ 2$$

1. 求Y_1和Y_2的联合分布律；
2. 问Y_1与Y_2是否相互独立？请给出计算依据；
3. 证明：$E(Y_1Y_2)>E(Y_1)\cdot E(Y_2)$。

参考解答

一．1. $e^{-\lambda}$； 2．17.6； 3. 1； 4. 小概率(事件)原理； 5. $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$或$A_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$等； 6. 4；

二． 设A_i(i=1,2)——第i次抽到特等品，B_j(j=1,2, 3)——10 件产品中有j件特等品

1. $P(A_1A_2)=\sum_{j=1}^{3}P(A_1A_2\mid B_j)P(B_j)=(\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}+\dfrac{2}{10}\times\dfrac{2}{10}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10})\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{150}\approx 0.047$；

2. $P(A_2)=P(A_2\Omega)=P(A_2(A_1\cup\overline{A}_1))=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)-0$

$$P(\overline{A}_1A_2)==\sum_{j=1}^{3}P(\overline{A}_1A_2\mid B_j)P(B_j)=(\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10})\times\frac{1}{3}=\frac{23}{150}$$

故 $P(A_1\mid A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{7/150}{7/150+23/150}=\dfrac{7}{30}\approx 0.233$为所求.

三． 1. 由$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}ke^{-4x}dx,\ 1=k\cdot\dfrac{1}{-4}e^{-4x}\big|_0^{+\infty}\Rightarrow k=4$

2. $\forall y\in R, F_{X^2}(y)=P\{X^2\leq y\}=\begin{cases}P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}, y\geq 0\\ 0,\quad y<0\end{cases}=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{y}}4e^{-4x}dx=1-e^{-4\sqrt{y}}, y\geq 0\\ 0,\quad y<0\end{cases}$

3. $P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0.1}^{+\infty}4e^{-4x}dx=e^{-0.4}$.

四． 1. 设$f(x,\ y)=\begin{cases}A,\ (x,\ y)\in D\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，有

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy+\iint_{R^2-D}f(x,\ y)dxdy=\iint_D Adxdy+0=A\cdot\frac{1}{2}=1\ \Rightarrow\ A=2$$

故 $f(x,\ y)=\begin{cases}2,\ (x,\ y)\in D\\ 0,\quad 其他\end{cases}$

2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy==\begin{cases}\int_{-x}^{0}2dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}2dx=2(1+y), & -1<y<0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

3. $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ \int_0^z dx\int_x^0 2dy+\int_z^1 dx\int_{-x}^{z-x}2dy \text{ 或 } 2\cdot[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(1-z)^2], & 0<z<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}=\begin{cases} 0, & z\le 0 \\ 2z-z^2, & 0<z<1 \\ 1, & z\ge 1\end{cases},$$

故 $f_Z(z)=\dfrac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}2-2z, & 0<z<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

五. 1. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\theta x\cdot\frac{2}{\theta^2}xdx=\frac{2}{3}\theta=\overline{X}$，故 $\hat{\theta}_M=\frac{3}{2}\overline{X}$

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，

当 $0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$，有 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n(x_1x_2\cdots x_n)$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 已知时，$L(\theta)$ 取最大值，需要 θ 最小，而 $0\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le\theta$，

故 $\hat{\theta}_{MLE}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

3. $E(\overline{X})=E(X)=\frac{2}{3}\theta$，所以 $E(\frac{3}{2}\overline{X})=E(X)=\theta$，即 $\frac{3}{2}\overline{X}$ 为 θ 无偏估计.

六. 1. 对假设 $H_0:\mu=\mu_0=50$，$H_1:\mu\ne\mu_0$，取检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0\text{为真}}{\sim}t(n-1)$

由 $P\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$，得拒绝域为 $|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$.

又 $n=9,\bar{x}=49.9,s=0.53,\alpha=0.05,t_{0.025}(8)=2.3060$，$T=\dfrac{|49.9-50|}{0.53/3}=0.566<2.3060$

故接受 H_0.

2. 因为 $\sigma=0.3$ 已知，故总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为

$(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，又 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，故

$(\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(49.9-1.96\times\frac{0.3}{3},\ 49.9+1.96\times\frac{0.3}{3})=(49.704,\ 50.096)$.

七. 1. Y_1，Y_2 分别取 0，1

$P\{Y_1=0,\ Y_2=0\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$，$P\{Y_1=0,\ Y_2=1\}=0$

$P\{Y_1=1,\ Y_2=0\}=P\{1<X\le 2\}=\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-1}-e^{-2}$

$P\{Y_1=1,\ Y_2=2\}=P\{X>2\}=\int_2^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-2}$

Y_1 \ Y_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

故 $(Y_1,\ Y_2)$ 的联合分布律如右表

2. Y_1 的分布律 $P\{Y_1=0\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$，$P\{Y_1=1\}=P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1}$

Y_2 的分布律 $P\{Y_2=0\}=P\{X\le 2\}=\int_0^2 e^{-x}dx=1-e^{-2}$，$P\{Y_2=1\}=P\{X>2\}=\int_2^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-2}$

而 $P\{Y_1=0,\ Y_2=0\}=1-e^{-1}\ne P\{Y_1=0\}P\{Y_2=0\}=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$

故 Y_1，Y_2 不相互独立.

3. $E(Y_1Y_2)=1\cdot e^{-2}$, $E(Y_1)\cdot E(Y_2)=1\cdot e^{-1}\cdot 1\cdot e^{-2}=e^{-1}\cdot e^{-2}$

而 $1>e^{-1}$, $1\cdot e^{-2}>e^{-1}\cdot e^{-2}$，故 $E(Y_1Y_2)>E(Y_1)\cdot E(Y_2)$.