第八章　多元函数微分学及其应用

在前面各章节中，我们主要讨论了一元函数微积分.但在许多实际问题中，往往会遇到依赖于多个变量的函数，例如烧热的铁块中每点的温度 T 与该点的位置（x，y，z）有关.如果进一步考虑铁块的冷却程度，则温度 T 还和时间 t 有关，这时 T 的值是由 x，y，z，t 这四个变量所确定，这就是多元函数.多元函数保留了一元函数的许多性质，但也产生了一些本质上不同的内容，这些内容读者在学习时要加以注意.本章重点讨论二元函数，在学习了二元函数的相关理论后，读者可以较容易地将这些理论推广到二元以上的函数中去.

8.1 多元函数的基本概念

一元函数的定义域是数轴上的点集. 二元函数的定义域应该是平面上的点集合，因此首先介绍与平面点集相关的一些概念.

8.1.1 平面点集

坐标平面上具有某种性质 P 的点的全体称为**平面点集**，记作

$$E=\{(x,y) \mid (x,y)\text{具有性质 }P\}.$$

例如平面点集$\{(x,y) \mid a\le x\le b, c\le y\le d\}$表示的是矩形内（包括边界）的点的全体.

平面点集

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ **邻域**，简记为$U(P_0)$。$\overset{0}{U}(P_0)$ 表示 P_0 的**去心邻域**，即

$$\overset{0}{U}(P_0)=\{(x,y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

设 E 是一平面点集，P 是平面上的一个点。

如果存在点 P 的某一邻域$U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**。显然，E 的内点属于 E。

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的**边界点**。E 的边界点的全体称为 E 的**边界**。

如果点 P 的任一邻域内含有 E 的无穷多个点，则称点 P 为 E 的**聚点**。

显然，E 的内点一定是 E 的聚点。E 的聚点可能在集合 E 内，也可能不在。

例 1 平面点集

$$E_1=\{(x,y)\big|0<x^2+y^2\le 4\}$$

满足不等式$0<x^2+y^2<4$的点(x,y)都是 E_1 的内点. 点（0,0）与满足方程 $x^2+y^2=4$ 的点(x,y)都是 E_1 的聚点，也是 E_1 的边界点.显然$(0,0)\notin E_1$，满足方程 $x^2+y^2=4$ 的点$(x,y)\in E_1$。

如果平面点集 E 中任一点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**。

如果对于 E 内任何两点，都可用一条完全在 E 内的连续曲线连结起来，则称点集 E 是**连通集**。

连通的开集称为**开区域，**简称**区域**。

开区域连同它的边界一起所构成的点集，称为**闭区域。**

例 2 平面点集

$$\{(x,y)\big|xy>0\}$$

是开集但不是开区域.

例 3 平面点集

$$\{(x,y)\big|x+y>0\}$$

是开区域.

例 4 平面点集

$$E_2=\{(x,y) \mid 0\le x^2+y^2\le 4\}\text{及}E_3=\{(x,y) \mid x+y\ge 0\}$$

都是闭区域。

对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E\subset U(O,r)$$

其中O是坐标原点，则称E为**有界点集**，否则称为**无界点集**。例 4 中的E_2是有界闭区域，E_3是无界闭区域。

8.1.2 n维空间

由n元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体构成的集合称为n**维空间，记为**R^n**。**其中每一个n元有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为n维空间的点，数x_i称为该点的第i个坐标$(i=1,2,\cdots n)$。

R^n中两点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离定义为

$$d(P,Q)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

显然，数轴是一维空间R^1，平面是二维空间R^2。在R^n中，读者不难将平面点集中有关邻域、内点、外点、边界点、聚点、区域等概念推广到R^n中去，这里就不一一叙述了。

8.1.3 多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常遇到多个变量之间的依赖关系，例如：

例 5 圆柱体的体积 V 和它的底半径r、高h之间具有关系

$$V=\pi r^2 h。$$

这里，当r、h在集合$\{(r,h)\big|r>0,h>0\}$内取定一对值(r,h)时，V的对应值就惟一确定。

例 6 电流所产生的热量 Q 取决于电压 E、电流强度 I 和时间 t，它们之间具有关系式

$$Q=0.24IEt 。$$

这里，当 I、E、t 在集合$\{(I,E,t)\mid I>0,E>0,t>0\}$内取定一对值（I，E，t）时，Q 的对应值就随之确定。

定义 1 设D是一个平面非空点集。如果对于D内每个点$P(x,y)$，都有惟一的实数 z 按照某一确定的对应法则f与之对应，则称f是定义在D上的**二元函数**或为**点$P(x,y)$的函数**，记为

$$z=f(x,y)，(x,y)\in D（或 z=f(P)，P\in D）。$$

平面点集D称为该函数的**定义域**，x、y称为**自变量**，z称为**因变量**。数集

$$\{z\big|z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**。

z是x,y的函数也可记为 $z=z(x,y)$，　$z=\varphi(x,y)$等等。

类似地可以定义三元函数$u=f(x,y,z)$以及三元以上的函数。一般的，把定义 1 中的平面点集D换成n维空间内的点集D，则可类似地定义n元函数$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。n元函数也可简记为$u=f(P)$，这里点$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$。

二元及二元以上的函数统称为**多元函数**。

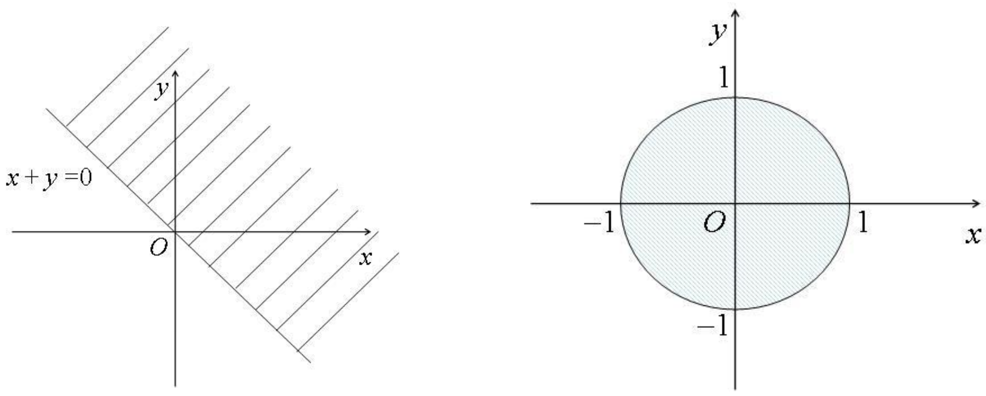
与一元函数类似，多元函数定义域是使得其函数有意义的所有点集合。特别地，二元函数定义域是使得$f(x,y)$有意义的平面点集合.

例 7 求下列函数的定义域并作出定义域的图形.

(1) $z=\ln(x+y)$；　　(2) $z=\arcsin(x^2+y^2)$.

解（1）的定义域为$\{(x,y)\big|x+y>0\}$是一个无界开区域，如图 8-1 (a).

（2）的定义域为$\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，是一个有界闭区域，如图 8-2 (b).



(a) (b)

图 8-1

设函数 $z = f(x,y)$ 的定义域为 D，二元函数可以看成三维空间的一个点集合

$$\left\{(x,y,z) \mid z = f(x,y),(x,y)\in D\right\}$$

这个点集合在三维空间中所描绘的图形称为**二元函数 $z = f(x,y)$ 的图像**。它表示了空间的一张曲面，该曲面在 xOy 平面上的投影区域就是该函数的定义域。

例 8 指出下列函数的定义域以及所表示的图像.

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$；　(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ；　(3) $z=-3x^2-4y^2+1$; (4) $z=3x+5y$.

解 (1) 该函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.它的图像是以原点为球心，半径为 2 的上半球.如图 8-2.

（2）该函数的定义域为整个 xOy 平面。它的图像是顶点在原点且在 xOy 平面上方的圆锥面.如图 8-3.

（3）该函数的定义域为整个 xOy 平面。它的图像是顶点在（0，0，1）的开口向下的抛物面.如图 8-4.

(4) 该函数的定义域为整个 xOy 平面。它的图像是一个过原点的平面.

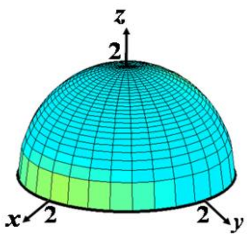


图 8-2

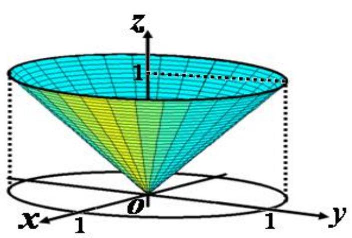


图 8-3

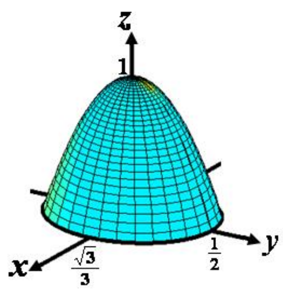


图 8-4

8.1.4 多元函数的极限

这里只就二元函数来讨论多元函数的极限问题. 对于二元及以上的函数, 类似可得相应的概念和性质.

定义 2 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点。如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得 D 中适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)$，都有 $\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**二重极限**，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A\ \big((x,y)\to(x_0,y_0)\big)$$

也可记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=A .$$

例 9 用二重极限的定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$，所以对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$ 时，便有 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

注：所谓二重极限存在，是指当动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于一个确定的常数 A。如果 $P(x,y)$ 以某一种特殊方式或多种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数都无限接近于某一确定值，也不能由此断定函数的极限存在。但是如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，那么就可以断定这函数的极限不存在.

例 10 考察下列函数的二重极限是否存在，若存在求出其值.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{\sin xy}$;　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

解 (1) 因为 $0\le\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$, 由例 9 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.所以由夹逼定理 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{\sin xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-xy}{(3+\sqrt{xy+9})\sin xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-1}{3+\sqrt{xy+9}}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sin xy}=-\dfrac{1}{6}$.

(3)显然，当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=0$; 又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ x=0}}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)=0$;

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式趋于原点时函数的极限存在并且相等, 但是不能断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 就存在.实际上当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

随着 k 值的不同该极限不同，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

由于二重极限的定义与一元函数的极限定义类似, 所以一元函数极限具有的一些性质和运算法则对多元函数也成立. 如例 10 中的(1)用到夹逼定理, (2)用到极限的乘法运算法则.

例 11 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

解 （1）当 $(x,y)\to(2,0)$ 时，$xy\to 0,\sin(xy)\sim xy$，因此

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{xy}{y}=2.$$

(2) 由有限个无穷小的和仍然是无穷小知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0$，而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\right|\le 1$，再由无穷小与有界量的乘积仍然是无穷小，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=0.$

8.1.5 多元函数的连续性

定义 3 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的**连续函数**。

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 P_0 为函数 $f(x,y)$ 的**间断点**。

例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，所以点 $(0,0)$ 是该函数的一个间断点. 二元函数的间断点可以是一条曲线，如函数

$$z=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，所以该圆周上各点都是间断点。

与一元初等函数定义类似，多元初等函数是由常数和多元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算并可用一个式子所表示的函数。例如，$\sin(xy), \dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 分别是二元与三元初等函数。

多元连续函数的和、差、积、商（分母不为零时）均为连续函数. 多元连续函数的复合函数也是连续函数. 再由多元基本初等函数的连续性可以得到:**一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的。**

例 12 求 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数，它的定义域为 $D=\{(x,y)\big|x+e^y>0\}\setminus\{(0,0)\}$。因为 $P_0(1,0)\in D, f(x,y)在P_0(1,0)$ 处连续, 故

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1,0)=\ln 2$$

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质。

定理 1（最大值和最小值定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必有最大值和最小值.

定理 2（介值定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果在 D 上取得两个不同的函数值, 则该函数必能取得介于这两个值之间的任何值至少一次. 特别地能取到介于最大值和最小值之间的任何值.

习 题　8.1

1、已知 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

2、已知 $F(x,y)=\dfrac{1}{2x}f(y-x),F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$，求 $f(x)$ 的表达式.

3、求下列函数的定义域：

（1）$z=y\sqrt{\cos x}$；　　（2）$z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-x^2-y^2}$；

（3）$z=\sqrt{\log_a(x^2+y^2)}$　（$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

（4）$z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$　；

（5）$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-a^2}\ln(b^2-x^2-y^2-z^2)$；

（6）$u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4、用定义证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{\alpha}=0,\quad \alpha>0$.

5、求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$；　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}(1+xy^2)^{\frac{1}{x^7+xy}}$　；　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(1+e^{xy})}$；

（5）$\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$　；　　（6）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{xy-1}{x^2y^2-1}$.

6、考虑下列二重极限是否存在，若存在求其值.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　；　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2\ln(x^2+y^2)$；　（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$.

7、写出下列函数的不连续点集:

（1）$z=\dfrac{2x+xy+y^2}{y^2+2x-1}$；　　（2）$z=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x+y)}$.

8、下列函数在 $(0,0)$ 连续吗？

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$；

（2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$.

8. 2 偏导数

8.2.1 偏导数的概念及其计算

在一元函数中，通过研究函数的变化率引入了导数的概念. 对于多元函数同样需要研究函数的变化率. 例如上节中提到的烧热的铁块中每点的温度 T 与该点的位置（x，y，z）和

时间 t 有关. 如果要考虑铁块中某点的温度 T 随着时间 t 的变化率，或者在某一时刻 t_0，铁块中的一点（x，y，z）关于 x,或 y 或 z 的温度变化率，这就是多元函数中关于某一自变量的变化率问题.

以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定（即看作常量），则它就是 x 的一元函数，这时函数对 x 的导数，就称为二元函数 z 对于 x 的偏导数，具体定义如下：

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{8-1}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 x 的偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或} \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或} \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或} f_x(x_0,y_0) \text{或} f_x{}'(x_0,y_0)$$

即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{8-2}$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 y 的偏导数**定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \tag{8-3}$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$ 或 $f'_y(x_0,y_0)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x、y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 x 的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{或} \frac{\partial f}{\partial x} \text{或} z_x \text{或} z'_x \text{或} f_x(x,y) \text{或} f'_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ **对自变量 y 的偏导函数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{或} \frac{\partial f}{\partial y} \text{或} z_y \text{或} z'_y \text{或} f_y(x,y) \text{或} f'_y(x,y).$$

偏导函数也简称为**偏导数.**

注： $f_x(x_0,y_0)$ 就是对一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处求导数；$f_y(x_0,y_0)$ 就是对一元函数 $f(x_0,y)$ 在 y_0 处求导数.

类似地,可以定义三元及以上的函数的偏导数。例如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

例 1 求 $z=x^3+\frac{1}{y^3}-xy^2$ 在点(1, 2)处的偏导数。

解 把 y 看作常量，对 x 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-y^2$$

把 x 看作常量，对 y 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-3y^{-4}-2xy$$

将 (1, 2)代入上面的结果，就得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-1,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-\frac{67}{16}.$$

例 2 求 $z=x^2y^3\sin(2xy)$ 的偏导数。

解 把 y 看作常量，对 x 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^3\sin(2xy)+2x^2y^4\cos(2xy),$$

把 x 看作常量，对 y 求导得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2\sin(2xy)+2x^3y^3\cos(2xy).$$

例 3 设 $z=x^y(x>0,\ x\neq 1)$，求证：

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

证 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z.$$

例 4 求 $u=x\cos(x+\frac{1}{y}-e^z)$ 偏导数。

解 把 y 和 z 都看作常量，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+\frac{1}{y}-e^z)-x\sin(x+\frac{1}{y}-e^z);$$

把 x 和 z 都看作常量，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y^2}\sin(x+\frac{1}{y}-e^z);$$

把 x 和 y 都看作常量，得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xe^z\sin(x+\frac{1}{y}-e^z).$$

例 5 热力学里理想气体的状态方程为 $pV=RT$(R 为常数)，求证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证 因为

$$p=\frac{RT}{V},\quad \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$

$$V=\frac{RT}{P},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p};$$

$$T=\frac{pV}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R};$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

注：一元函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$可以看成两个微分的商，但偏导数$\dfrac{\partial p}{\partial V},\dfrac{\partial V}{\partial T},\dfrac{\partial T}{\partial p}$不能看成是微商.例 5 中，这三个偏导数的乘积是$-1$，而不是 1.

例 6 求函数$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$在点（0，0）的偏导数。

解 由偏导数定义有

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

注:对于一元函数,可导必连续. 但对于多元函数,该性质不成立. 例 6 中的函数点(0，0）各偏导数都存在，但该函数在点（0，0）并不连续. 这是因为各偏导数存在只能保证点P沿着平行于坐标轴的方向趋于P_0时，函数值$f(P)$趋于$f(P_0)$，但不能保证点P按任何方式趋于P_0时，函数值$f(P)$都趋于$f(P_0)$，因此不能保证函数在P_0点连续.

8.2.2 二元函数偏导数的几何意义

函数$z=f(x,y)$表示空间的一张曲面。设$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$为曲面$z=f(x,y)$上的一点，过M_0作平面$y=y_0$，截此曲面得一曲线$\varGamma_1:\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$，此曲线在平面$y=y_0$上的方程为$z=f(x,y_0)$. 偏导数$f_x(x_0,y_0)$就是一元函数$z=f(x,y_0)$在$x=x_0$的导数，从而是这曲线在点$M_0$处的切线$M_0T_x$对$x$轴的斜率. 即是$M_0T_x$与$x$轴正向所成倾斜角的正切。同样，偏导数$f_y(x_0,y_0)$就是曲面被平面$x=x_0$所截得的曲线$\varGamma_2:\begin{cases}z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$在点$M_0$处的切线$M_0T_y$对$y$轴的斜率，即是$M_0T_y$与$y$轴正向所成倾斜角的正切(如图 8-5).

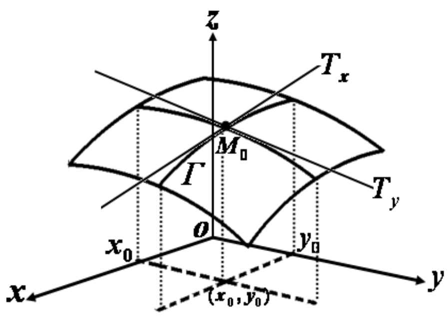


图 8-5

例 7 求曲面$z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)$与平面$x=4$的交线在点$(4,2,5)$处的切线与 Oy 轴正向的倾斜角。

解 由偏导数的几何意义，$z_y=\dfrac{y}{2}$, 因此$z_y(4,2)=1,$所以过点$(4,2,5)$处的切线与 Oy 轴正向的倾斜角α满足$\tan\alpha=z_y(4,2)=1,$由此得$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，即所求倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$.

8.2.3 高阶偏导数

设函数$z=f(x,y)$在区域D内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y),$$

那么在 D 内$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$都是x，y的函数。如果这两个函数的偏导数也存在，则称

它们是函数 $z = f(x,y)$ 的**二阶偏导数**。二阶偏导数有下列四种情形：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 称为**二阶混合偏导数**。

一般地, n-1 阶偏导函数的偏导数称为 ***n* 阶偏导数**。例如 $f_{xy}(x,y)$ 再对 x 求偏导数，得

$$f_{xyx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}.$$

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。高阶偏导数的运算实质上就是一元函数的导数运算.

例 8 设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

例 8 中两个二阶混合偏导数是相等的，即 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.但一般来讲混合偏导数并不是总相等. f_{xy}与f_{yx} 的求导顺序是不同的.那么多元函数满足什么条件，它的混合偏导数就与求导顺序无关呢？有下面定理：

定理 1 如果函数 $z = f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等，即二阶混合偏导数与求导顺序无关。

这一结论可以推广至更高阶的混合偏导数的情形.例如，如果三元函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 P 处的所有三阶偏导数连续，则在点 P 处有 $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$.

例 9 验证函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$=0.

证 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

因此 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0.$$

例 10 证明函数$u=\frac{1}{r}$，满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由于函数关于自变量的对称性，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0.$$

例 9 和例 10 中的方程称为**拉普拉斯(Laplace)方程**，它是数学物理方程中很重要的方程.

习 题 8.2

1、求下列函数的偏导数：

（1）$z=\sqrt{x^2+y^2}$； （2）$S=\sqrt{\ln(u^2 v)}$；

（3）$z=\ln\tan\frac{x}{y}$； （4）$z=(1+xy)^y$；

（5）$u=(s+t^2)^{2s}$ ； （6）$u=\arctan(2x-3y)^z$；

（7）$z=\tan(x^2 y)+\cos^2(xy)$.

2、设$f(x,y)=x^2 y+(y+1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求$f_x(x,1)$，$f_x(\frac{1}{2},1)$.

3、已知函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3 y}{x^6+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明：$f(x,y)$在（0，0）不连续，但在（0，0）处偏导存在.

4、求曲线$\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$在点$(1,-1,\sqrt{3})$处的切线与$y$轴正向的倾角.

5、求函数$u=\int_{xz}^{yz}\frac{\sin t}{t}dt$的偏导数.

6、求下列函数的二阶偏导数:

（1）$z=\ln(x^2+y)$ ；　　　　　　　　（2）$u=\arctan\frac{x}{y}$；

（3）$z=e^x(\cos y+x\sin y)$；　　　　　（4）$z=y^x$.

7、设$f(x,y,z)=2xy^3+y^2z^2-2zx^3$，求$f_{xx}(1,0,-1)$，$f_{xz}(1,0,-1)$，$f_{yyz}(1,1,2)$.

8、验证：（1）$z=x\ln\frac{y}{x}$满足$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$；

（2）$u=z+\frac{x-y}{x+y}$满足$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$；

（3）$z=e^{-\cos(x+at)}$满足$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$；

（4）$u=x\arctan\frac{z}{y}$满足 Laplace 方程$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

8.3 全微分

8.3.1 全微分的概念

在一元函数中, 我们研究过函数的微分. 函数的微分是函数改变量的线性主部, 即

$$f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

若A与Δx无关, 则称$A\Delta x$为函数$f(x)$在x处的微分, 记为$dy=A\Delta x$.

对于多元函数，也可以相应地讨论多元函数改变量的线性主部.

定义 1 设函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的某一邻域内有定义，并设$P(x+\Delta x,y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，称$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$为函数在点 P 的**全增量**，记作$\Delta z$，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

一般说来，计算全增量Δz比较复杂, 我们希望象一元函数一样用自变量的增量Δx、Δy的线性函数来近似代替函数的全增量Δz，从而引入全微分的定义.

定义 2　如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中A、B仅依赖于x、y而与Δx、Δy无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$**可微分**，而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的**全微分**，记作$dz$，即　$dz=A\Delta x+B\Delta y$。

从定义 2 中可以看出，全微分dz是Δx、Δy的线性函数，与Δz仅相差一个比ρ高阶的无穷小量。当 A，B 不同时为零时，也称dz是Δz的**线性主部.** 因此，当$|\Delta x|$、$|\Delta y|$很小时，全微分dz可以作为全增量Δz的近似值.

如果函数在区域 D 内处处可微，则称此函数在 D 内可微分.

在 8.2 节中曾指出，多元函数在某点的各个偏导数即使都存在，都不能保证函数在该点连续. 那么如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分，函数在该点是否连续呢？下面来讨论可微与连续、偏导数之间的关系.

8.3.2 可微与连续、偏导数之间的关系

定理 1（可微的必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，则

（1）函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处连续；

（2）函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在，且全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y .$$

证 因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，所以有

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \qquad (8.1)$$

（1）在（8.1）式中令 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ ，可得

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\Delta z=0 ,$$

因此函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处连续.

（2）由于（8.1）式对任意的 $\Delta x,\Delta y$ 都成立. 当取 $\Delta y=0$ 时（8.1）式也成立，这时有

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|),$$

上式两边各除以 Δx ，再令 $\Delta x\to 0$ 而取极限，就得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A,$$

从而偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=A$.同理可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 从而 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

特别地，当 $z=f(x,y)=x$ 时，可得 $dx=\Delta x$ ；当 $z=f(x,y)=y$ 时，可得 $dy=\Delta y$.

因此全微分又可表示为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

例 1 计算函数 $z=x^2y^2$ 在点 $(2,-1)$ 处当 $\Delta x=0.02,\Delta y=-0.01$ 时的全微分 dz 和全增量 Δz .

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,-1)}=2xy^2|_{(2,-1)}=4$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,-1)}=2x^2y|_{(2,-1)}=-8$, 所以

$$dz(2,-1)=\left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)\right|_{\substack{\Delta x=0.02\\ \Delta y=-0.01}}=4\times 0.02+(-8)\times(-0.01)=0.16,$$

$$\Delta z=(2+0.02)^2(-1-0.01)^2-2^2(-1)^2=0.1624 .$$

可见全增量与全微分的差 $\Delta z-dz=0.0024$ 很小.

注：一元函数在某点的可微与可导是等价的. 但对于多元函数来说，偏导数存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在 8.2 节例 6 中知 $f_x(0,0)=0$ ， $f_y(0,0)=0$.在 8.1 节例 10 中又知道该函数在点（0，0）不连续，因此在点（0，0）不可微.

例 2 讨论函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的连续性、偏导数的存在性以及可微性。

解 因为 $0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0(x\to 0, y\to 0)$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)\,,$$

故函数在原点连续.

由偏导数定义 $f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$，同理 $f_y(0,0)=0$，所以函数在原点偏导存在.

若函数在原点可微，则 $dz(0,0) = f_x(0,0)\cdot \Delta x + f_y(0,0)\cdot \Delta y = 0$，因此

$$(\Delta z - dz)\big|_{(0,0)} = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - 0 = \frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = o(\rho),$$

即
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\cdot \Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0\,.$$

实际上，如果考虑动点 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}} \frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \ne 0\,,$$

因此函数在原点是不可微的.

由定理 1 及例 2 可知，偏导数存在只是函数可微的必要条件.如果再假定函数的各个偏导数连续，则有如下的充分条件.

定理 2（充分条件） 如果二元函数 $z = f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $P(x,y)$ 的某邻域内存在，且在点 $P(x,y)$ 连续，则二元函数在该点可微分.

证 因为偏导数在点 $P(x,y)$ 的某一邻域内必然存在.设点 $P(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为这邻域内任意一点，考察函数的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)].\end{aligned}$$

对于第一个方括号内的表达式，由于 $y+\Delta y$ 不变，因而可以看作是 x 的一元函数 $f(x, y+\Delta y)$ 的增量.于是，应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x\,,\quad (0<\theta_1<1) \qquad (8.2)$$

同理对于第二个方括号内的表达式，应用拉格朗日中值定理，得到

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y\,,\qquad (0<\theta_2<1) \qquad (8.3)$$

由题设，偏导数在点 $P(x,y)$ 连续，所以有

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y)+\varepsilon_1\,, \qquad (8.4)$$

$$f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y)+\varepsilon_2\,, \qquad (8.5)$$

其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1 = 0, \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2 = 0.$

将（8.4）、（8.5）分别带入到（8.2）、（8.3）中，得到全增量 Δz 可以表示为

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\,. \qquad (8.6)$$

又

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0\,,\ (\rho\to 0)$$

即有

$$\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y=o(\rho).$$
于是
$$\Delta z= f_x(x,y)\Delta x+ f_y(x,y)\Delta y+o(\rho),$$
这就证明了 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的.

以上关于二元函数全微分的定义及微分的必要条件和充分条件，完全可以推广到三元及以上的多元函数。

关于 n 元函数 $z=f(P)$在P 处连续、可微、偏导数存在以及偏导数连续的关系如下：

$$\text{偏导数均连续}\rightarrow\text{可微}\begin{cases}\nearrow\ \text{函数连续.}\\ \searrow\ \text{偏导数均存在.}\end{cases}$$

例 3 计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{y}{2}+ze^{yz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=ye^{yz}$，所以
$$du=dx+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)dy+ye^{yz}\,dz.$$

*8.3.3 全微分在近似计算中的应用

当二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 是可微的，且$|\Delta x|,|\Delta y|$ 都较小时，可以利用近似等式
$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)\approx dz=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$
即
$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y \tag{8.7}$$
近似计算函数值。

例 4 求$(1.08)^{3.96}$ 的近似值。

解 设 $f(x,y)=x^y$，令$x_0=1,y_0=3,\Delta x=0.08,\Delta y=-0.04$，则
$$f_x(1,4)=yx^{y-1}\Big|_{(1,4)}=4,\ f_y(1,4)=x^y\ln x\Big|_{((1,4))}=0,$$
由公式（8.7）得
$$(1.08)^{3.96}\approx f(1,4)+f_x(1,4)\Delta x+f_y(1,4)\Delta y=1.32.$$
还可以利用公式（8-10）估计 P 处的绝对误差：
$$\begin{aligned}|\Delta z|\approx|dz|&=|f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y|\\&\le|f_x(x_0,y_0)||\Delta x|+|f_y(x_0,y_0)||\Delta y|\\&\le|f_x(x_0,y_0)||\delta_x|+|f_y(x_0,y_0)||\delta_y|,\end{aligned}$$
因此 z 在 P 处的绝对误差为
$$\delta_z=|f_x(x_0,y_0)||\delta_x|+|f_y(x_0,y_0)||\delta_y|.$$
相对误差为
$$\frac{\delta_z}{z_0}=\left|\frac{f_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\delta_x+\left|\frac{f_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}\right|\delta_y.$$

例 5 肾的一个重要功能是清除血液中的尿素.临床上用公式$C=\dfrac{\sqrt{V}}{P}u$ 来计算尿素标准清除率，其中 u 表示尿中的尿素浓度(单位：mg/l),V 表示每分钟排出的尿量（单位：ml/min），P 表示血液中的尿素浓度(单位：mg/l).某病人的实际测量值为 u=5000，V=1.44，P=200，从

而算得 C=30（正常人的 C 值约为 54）.如果该测量值 u, V, P 的绝对误差分别为 50，0.0144，2，试估计由测量值的误差对 C 值所带来的绝对误差与相对误差.

解 由 $C=\dfrac{\sqrt{V}}{P}u$ 可得 $\dfrac{\partial C}{\partial u}=\dfrac{\sqrt{V}}{P}$， $\dfrac{\partial C}{\partial V}=\dfrac{u}{2P\sqrt{V}}$，$\dfrac{\partial C}{\partial P}=-\dfrac{u\sqrt{V}}{P^2}$，于是当 u=5000，V=1.44，P=200 时，

$$\frac{\partial C}{\partial u}=0.006,\qquad \frac{\partial C}{\partial V}=\frac{125}{12},\qquad \frac{\partial C}{\partial P}=-0.15,$$

因而 C 值的绝对误差为

$$\delta_{\mathrm{C}}=\left|\frac{\partial C}{\partial u}\right|\delta_u+\left|\frac{\partial C}{\partial V}\right|\delta_V+\left|\frac{\partial C}{\partial P}\right|\delta_P$$

$$=0.006\times 50+\frac{125}{12}\times 0.0144+0.15\times 2=0.75,$$

C 值的相对误差为 $\dfrac{\delta_{\mathrm{C}}}{|C|}=\dfrac{0.75}{30}=2.5\%$.

习 题 8.3

1、求下列函数的全微分：

（1）$z=e^x\cos(x+y)$ ；　　（2）$z=\arcsin\dfrac{x}{y}$ ；

（3）$u=\ln(xy^2z^3)$；　　（4）$z=(x^2+y^2-x+1)^{\frac{1}{2}}$；

（5）$z=2^{x-y}$ ；　　（6）$u=\ln(x^3+2^y+\tan 3z)$.

2、求函数 $z=e^{xy^2}$，当 $x=1, y=-1, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.01$ 时的全微分

3、设函数 $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$，求 $df(1,2,1)$.

4、选择题：

（1）若 $z=f(x,y)$ 在点 P 的全微分存在，则偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 P ________.

（A）一定连续;　　（B）不一定连续;　（C）一定不连续;（D）不一定存在.

（2）下列命题正确的是_________.

（A） 若函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在 x_0 和 y_0 处连续，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必连续；

（B） 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都存在且连续；

（C）若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数都存在，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必连续；

（D）若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x'(x,y)$， $f_y'(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

（3）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处_________.

（A）不连续、偏导数不存在、不可微；　　（B）连续、偏导数存在、不可微；

（C）不连续、偏导数存在、不可微；　　（D）连续、偏导数存在、可微.

5、证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点（0，0）连续且偏导数存在，但不可微.

6、证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点（0，0）处可微，且偏导数 f_x, f_y 在（0，0）附近存在，但在（0，0） f_x, f_y 都不连续.

7*、计算下列近似值:

（1） $1.04^{2.02}$ ；（2）$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$.

8*、设圆台的上下底半径分别为 R=30cm，r=20cm；高 h=40cm.若 R，r，h 分别增加 3mm, 4mm, 2mm, 求此圆台体积变化的近似值.

9*、设有已无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1cm，内高为 20cm,内半径为 4cm，求容器外壳体积的近似值.

10*、设有直角三角形，测得其两直角边的长分别为 7±0.1cm 和 24±0.1cm，试利用上述两个值来计算斜边长度时的绝对误差.

11*、试证在原点（0，0）的充分小领域内，有 $\arctan\dfrac{x+y}{1+xy}\approx x+y$.

12*、利用全微分证明：

（1）乘积的相对误差限等于各因子相对误差限之和；

（2）商的相对误差限等于分子和分母相对误差限之和；

（3）测得一物体的体积 $V_0=3.54cm^3$ ，其绝对误差是 $0.01cm^3$ ，重量 $W_0=29.70g$ ，其绝对误差为 $0.01g$ ，求此物体的密度 D_0 ，并利用（2）估计其绝对误差与相对误差.

8.4 多元复合函数求导法则

本节将一元复合函数的求导法则推广到多元函数。

8.4.1 多元复合函数的求导法则

定理 1（链式法则） 如果函数 $u=\phi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\phi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导，且其导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{8.8}$$

证 设 t 获得增量 Δt ，这时 $u=\phi(t)$、$v=\psi(t)$ 的对应增量为 Δu 、 Δv ，由此，函数 $z=f(u,v)$ 对应地获得增量 Δz . 由于函数 $z=f(u,v)$ 在点 (u,v) 具有连续偏导数，于是由 8.3 节中的(8.6)式，有

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+\varepsilon_1\Delta u+\varepsilon_2\Delta v,$$

这里，当 $\Delta u\to 0$ ，$\Delta v\to 0$ 时， $\varepsilon_1\to 0$ ，$\varepsilon_2\to 0$.

将上式两边同除以 Δt ，得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，因为 $u=\phi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，所以 $\Delta u\to 0$ ，$\Delta v\to 0$ 且 $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}\to\dfrac{du}{dt}$ ，

$\frac{\Delta v}{\Delta t} \to \frac{dv}{dt}$，于是有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

这就证明了复合函数 $z = f[\phi(t), \psi(t)]$ 在点 t 可导，且其导数可用公式(8.8)计算.

上述链式法则可以推广到多个函数的复合函数的情形. 例如，设 $z = f(u, v, w)$, $u = \varphi(t)$、$v = \psi(t)$，$\omega = \omega(t)$ 复合而得复合函数

$$z = f[\phi(t), \psi(t), \omega(t)],$$

则在与定理相类似的条件下，该复合函数在点 t 可导，且其导数可用下列公式计算

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dt}. \tag{8.9}$$

公式(8.8)及(8.9)中的导数 $\frac{dz}{dt}$ 又称为**全导数**.

例 1 设 $z = uv + v\cos t$， 而 $u = e^{2t}$， $v = \sin t$. 求全导数 $\frac{dz}{dt}$.

解 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} = 2ve^{2t} + u\cos t + \cos^2 t - v\sin t$

$= 2e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t + \cos 2t$ 。

定理 1 又可以推广至中间变量是多元函数的情形.

推论 如果 $u = \phi(x, y)$ 及 $v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 都存在偏导数，函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在，且有下列公式计算：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{8.11}$$

证 由于对多元函数的某个变量求偏导，是将其它变量看成常数，因此将 y 看成常数，应用定理 1 就得到(8.10). 将 x 看成常数，再由定理 1 就得到(8.11).

例 2 设 $u = f(x, y, z) = e^{x^2+y+z^2}$，而 $z = x^2 \sin y$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\, e^{x^2+y+z^2} + 2z\, e^{x^2+y+z^2} \cdot 2x\sin y$

$= 2x\,(1 + 2x^2\sin^2 y)\, e^{x^2+y+z^2\sin^2 y}$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\, e^{x^2+y+z^2} + 2z\, e^{x^2+y+z^2} \cdot x^2\cos y$

$= 2(y + x^4\sin y\cos y)\, e^{x^2+y+x^4\sin^2 y}$.

从例 1 看出，$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 是把 $u = f(x, y, z(x, y))$ 中的 y 看成常数对 x 求偏导，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(x, y, z)$ 中的 y 及 z 看成常数对 x 求偏导. 同理 $\frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y}$.

例 3 设 $z = e^u \sin v^2$ 而 $u = \frac{x}{y}$， $v = 2x + y$. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v^2\cdot\dfrac{1}{y}+e^u\cdot 2v\cdot\cos v^2\cdot 2$

$$=e^{\frac{x}{y}}[\frac{1}{y}\sin(2x+y)^2+4(2x+y)\cos(2x+y)^2],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^u\sin v^2+e^u\cdot 2v\cos v^2\cdot 1$$

$$=e^{\frac{x}{y}}[-\frac{x}{y^2}\sin(2x+y)^2+2(2x+y)\cos(2x+y)^2].$$

在计算复合函数的偏导数时，有时将中间变量用 1，2，3 等来标记，这样可以使表达式看起来更简洁。

例 4 设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

解 令 $u=x+y+z,v=xyz$，则 $w=f(u,v)$.

为表达简便起见，引入以下记号：

$$f'_1=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\quad f''_{12}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v},$$

这里下标1表示对第一个变量 u 求偏导数，下标2表示对第二个变量 v 求偏导数.同理有 f'_2、f''_{11}、f''_{22} 等等.

因所给函数由 $w=f(u,v)$ 及 $u=x+y+z$，$v=xyz$ 复合而成，根据复合函数求导公式（8.10)，有

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1+yz\ f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f'_1+yz\ f'_2)=\frac{\partial f'_1}{\partial z}+y\ f'_2+yz\frac{\partial f'_2}{\partial z}.$$

求 $\dfrac{\partial f'_1}{\partial z}$ 及 $\dfrac{\partial f'_2}{\partial z}$ 时，应注意 f'_1 及 f'_2 仍旧是复合函数，根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial f'_1}{\partial z}=\frac{\partial f'_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f'_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f''_{11}+xy\ f''_{12},$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial z}=\frac{\partial f'_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f'_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}=f''_{11}+xyf''_{22}$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=f''_{11}+xy\ f''_{12}+yf'_2+yzf''_{21}+xy^2zf''_{22}$$

$$=f''_{11}+y(x+z)f''_{12}+xy^2zf''_{22}+yf'_2.$$

例 5 设 $z=f(x,e^{-xy},x^2-y^2)+g(x^2y)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，g 具有连续的二阶导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'-ye^{-xy}f_2'+2xf_3'+2xyg'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-xe^{-xy}f_{12}''-2yf_{13}''-e^{-xy}f_2'+xye^{-xy}f_2'-ye^{-xy}(-xe^{-xy}f_{22}''-2yf_{23}'')$$

$$\begin{aligned}&+2x(-xe^{-xy}f_{32}''-2yf_{33}'')+2xg'+2x^3yg''\\ &=-xe^{-xy}f_{12}''-2yf_{13}''-e^{-xy}f_2'+xye^{-xy}f_2'+xye^{-2xy}f_{22}''+2(y^2-x^2)e^{-xy}f_{23}''\\ &-4xyf_{33}''+2xg'+2x^3yg''.\end{aligned}$$

例 6 设变换 $\xi=x-2y,\eta=x+ay$ 把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0,$ 其中 $z=f(x,y)$ 具有二阶偏导数连续，求 a.

解 可以把函数 $z=f(x,y)$ 看成是 $z=f(\xi,\eta)$ 与 $\xi=x-2y,\eta=x+ay$ 复合而成. 应用复合函数求导法则，得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial\xi}+a\frac{\partial z}{\partial\eta},$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=-2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}-2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{\partial z}{\partial\xi}+a\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=-2\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}\right)+a\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\partial\xi}+a\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\right)\\ &=4\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}.\end{aligned}$$

将上面三式代入方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 中，整理得

$$(5a+10)\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0.$$

若要方程化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0,$ 则有 $6+a-a^2=0$ 且 $5a+10\neq 0$，所以 $a=3.$

8.4.2 一阶全微分形式不变性

一元函数具有一阶微分形式不变性，同样地多元函数也具有一阶全微分形式不变性.

一阶全微分形式不变性 设函数 $z=f(u,v)$ 可微，则无论 z 是自变量 u 、v 的函数或者是中间变量 u 、v 的函数，它的全微分形式都是

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

实际上，如果 z 是自变量 u 、v 的函数，则由 8.3 节定理 1 知 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$.

如果 u 、v 是中间变量，不妨设 $u=\phi(x,y)$ 、$v=\psi(x,y)$，且这两个函数也可微，则

复合函数

$$z = f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$$

的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\,. \end{aligned}$$

由此可见，全微分具有形式不变性。

例 7 利用全微分具有形式不变性求 $z = f(\frac{x}{y},\frac{y}{x})$ 的偏导数，其中 f 可微.

解 令 $u = \frac{x}{y}, v = \frac{y}{x}$，由全微分具有形式不变性得

$$dz = f_u{}'du + f_v{}'dv = f_u{}'d\left(\frac{x}{y}\right) + f_v{}'d\left(\frac{y}{x}\right) = f_u{}'\,\frac{ydx - xdy}{y^2} + f_v{}'\,\frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$= \left(\frac{1}{y}f_u{}' - \frac{y}{x^2}f_v{}'\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2}f_u{}' + \frac{1}{x}f_v{}'\right)dy\,,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}f_u{}' - \frac{y}{x^2}f_v{}', \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f_u{}' + \frac{1}{x}f_v{}'.$$

习 题 8.4

1、设 $z = e^{x-2y}$，而 $x = \sin t$， $y = t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$.

2、设 $z = \arctan(e^{xy})$，而 $y = x^2$，求 $\frac{dz}{dx}$.

3、设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而 $y = a\sin x$， $z = \cos x$，求 $\frac{dy}{dx}$.

4、设 $z = u\sin(uv)$，而 $u = \frac{x}{y}$， $v = 3x - 2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

5、已知 $z = \ln(e^x + e^y)$， $y = \frac{1}{3}x^3 + x$，求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial x}$.

6、求下列函数的一阶偏导数，(其中 f,g 可微)：

（1） $z = f(x+y^2, y+x^2)$ ； （2） $z = f(x, e^{-xy}, \frac{y}{x})$；

（3） $u = xf(x+y) + yg(x+y)$. .

7、验证：

（1） $z=e^{y}\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$，其中 φ 可微，证明：$(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz$；

（2） $u=x^n f(\dfrac{y}{x^{\alpha}},\dfrac{z}{x^{\beta}})$，其中 f 可微，证明：$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu$；

（3） $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 可微，证明 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

8、求下列函数的二阶偏导数，其中 f 具有连续的二阶偏导数或二阶导数.

（1） $z=f(x^2+y^2)$ ；　　　　（2） $z=f(x,y,\dfrac{x}{y})$.

9、设 $z=f(u,v)$ 对 u,v 具有二阶连续偏导数，且 $u=x^y$，$v=y+3$，求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10、设 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，而 $x=\dfrac{1}{2}(s-\sqrt{3}t)$，$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}s+t)$，

证明：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$.

11、设 $z=f(x-y^2,xy)$，f 可微. 利用一阶全微分形式不变性求 dz，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8.5 隐函数的存在性及其求导公式

在一元函数微分学中, 我们引入了隐函数的概念，并且给出了不经过显化而直接由方程 $F(x,y)=0$ 求出它所确定的隐函数的导数。对于多元函数, 也有相应的隐函数的求导方法。下面的定理既给出了隐函数存在的充分条件, 同时通过多元复合函数的微分法推导出了隐函数的求导公式.

8.5.1 由一个方程 $F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数的导数

隐函数存在定理 1　设函数 $F(x,y)$ 满足：

（i）在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数；

（ii） $F(x_0,y_0)=0$；

（iii） $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则方程 $F(x,y)$ =0 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的一元函数 $y=f(x)$，使得 $y_0=f(x_0)$，及 $F(x,f(x))\equiv 0$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}. \tag{8.12}$$

该定理我们不给出证明. 仅给出（8.12）式隐函数的求导公式的推导.

将方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 代入，得恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0 \ ,$$

其左端是 x 的多元复合函数，对 x 求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

由定理 1 条件（i）、（iii）知, 在 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内，F_y 连续，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以

存在$P(x_0, y_0)$的一个邻域，在此邻域内$F_y \neq 0$，于是有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

注：定理 1 的条件（iii）是关键条件.若改为$F_x(x_0, y_0) \neq 0$，这时结论则是存在唯一连续可导的一元隐函数$x = g(y)$.

隐函数也可以求高阶导数. 假定$F(x, y)$有相应阶数的连续的高阶偏导数. 在式（8.12）中对x求导，此时把y看成中间变量, 为x的函数，应用复合函数的导数公式，得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\left(F_{xx} + F_{xy} \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot F_y - F_x \cdot \left(F_{yx} + F_{yy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{F_y^2},$$

将（8.12）式代入，得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y{}^2 - F_{yy}F_x{}^2}{F_y{}^3}.$$

例 1 求由方程$y = x^2 - \frac{1}{2}\sin y$确定的隐函数$y = y(x)$的一阶和二阶导数。

解 设$F(x, y) = y - x^2 + \frac{1}{2}\sin y$，$F_x = -2x, F_y = 1 + \frac{1}{2}\cos y > 0$. 因此由定理 1 知，方程$y = x^2 - \frac{1}{2}\sin y$能确定一个定义在$(-\infty, +\infty)$上的单值且有连续导函数的隐函数$y = f(x)$. 据公式(8.12), 其一阶导数为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{2x}{1 + \frac{1}{2}\cos y} = \frac{4x}{2 + \cos y},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{2 + \cos y}\right) = 4 \cdot \frac{2 + \cos y + x \sin y \cdot \frac{dy}{dx}}{(2 + \cos y)^2}$$

$$= \frac{4(4 + 4\cos y + \cos^2 y + 4x^2 \sin y)}{(2 + \cos y)^3}.$$

隐函数存在定理 1 可以推广到更多个变量的情形, 我们以三元方程$F(x, y, z)=0$为例, 给出下面的类似的定理.

8.5.2 由一个方程$F(x, y, z) = 0$所确定的二元隐函数的偏导数

隐函数存在定理 2 设函数$F(x, y, z)$满足

（i）)在点$P(x_0, y_0, z_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数;

（ii）$F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

（iii）$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

则方程$F(x, y, z)=0$ 在点$P(x_0, y_0, z_0)$的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的二元函数$z = f(x, y)$，使得$z_0 = f(x_0, y_0)$，及$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}. \tag{8.13}$$

证明从略. 在此仅给出公式(8.13)的推导.

由于$F(x,y,f(x,y))\equiv 0$, 应用多元复合函数的微分法，将该式两端分别对x和y求导，得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

由定理 2 条件（i）、（iii）知F_z连续，且$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，所以存在点$P(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域，在此邻域内$F_z\neq 0$，于是有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

例 2 设$e^z-xyz=0$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 设$F(x,y,z)=e^z-xyz$，则$F_x=-yz$，$F_y=-xz$，$F_z=e^z-xy$. 据隐函数存在定理2，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy},\quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{x}{y}。$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{e^z-xy}\right)=\frac{(z+y\frac{\partial z}{\partial y})(e^z-xy)-yz(e^z\frac{\partial z}{\partial y}-x)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{(z+y\frac{xz}{e^z-xy})(e^z-xy)-yz(e^z\frac{xz}{e^z-xy}-x)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{z(e^{2z}-x^2y^2-xyze^z)}{(e^z-xy)^3}.$$

例 3 设$z=z(x,y)$由方程$F(\dfrac{x}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$所确定，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

解 设$G(x,y,z)=F(\dfrac{x}{y},y+\dfrac{z}{x})$，则

$$G_z=F_2'(\frac{1}{x}),\qquad G_x=F_1'(\frac{1}{y})+F_2'(-\frac{z}{x^2}),\qquad G_y=F_1'(-\frac{x}{y^2})+F_2'.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=\frac{-x^2F_1'+yzF_2'}{xyF_2'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=\frac{x^2F_1'-xy^2F_2'}{y^2F_2'}$$

所以
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{yF_2'}(yzF_2'-xy^2F_2')=z-xy.$$

8.5.3 由方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,z)=0\end{cases}$所确定的隐函数组的偏导数

上面讨论的是由一个方程确定的一个隐函数的情形，本节讨论由方程组所确定的隐函数组的情形.考察方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,z)=0 \end{cases},$$

该方程组在满足一定条件时，可以确定两个二元函数. 下面的隐函数存在定理 3 给出了这两个二元函数存在的条件及其偏导数的求导公式.

隐函数存在定理 3 设函数 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 满足

（i）在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内有一阶连续偏导数；

（ii）$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$；

（iii）偏导数所组成的函数行列式(或称**雅可比(Jacobi)式**):

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_P=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_P \neq 0$$

则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的二元函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，使得 $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,u_0)$，以及 $F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$，$G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_v & G_v \end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}. \tag{8.14}$$

证明从略， 在此仅给出公式(8.14)的推导.

对恒等式 $F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$ 和 $G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$ 两端分别关于 x 求导，得到关于 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组

$$\begin{cases} F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases},$$

由定理 3 条件（iii）其系数行列式 $J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_P \neq 0$，又 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 有连续的偏导函数,故 $J=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}_P$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内都不等于零. 根据克莱姆法则，可唯一解出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_v & G_v\end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

例 4 设$\begin{cases}xu^2-2yv^2=0,\\ y^2u+3x^2v=3,\end{cases}$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 设$F(x,y,u,v)=xu^2-2yv^2$，$G(x,y,u,v)=y^2u+3x^2v-3$.

由公式（8.14），$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2xu & -4yv\\ y^2 & 3x^2\end{vmatrix}=2(3x^3u+2y^3v)$，因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{2(3x^3u+2y^3v)}\begin{vmatrix}u^2 & -4yv\\ 6xv & 3x^2\end{vmatrix}=-\frac{3x^2u^2+24xyv^2}{2(3x^3u+2y^3v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{2(3x^3u+2y^3v)}\begin{vmatrix}2xu & u^2\\ y^2 & 6xv\end{vmatrix}=-\frac{12x^2uv-y^2u^2}{2(3x^3u+2y^3v)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{2(3x^3u+2y^3v)}\begin{vmatrix}-2v^2 & -4yv\\ 2yu & 3x^2\end{vmatrix}=\frac{3x^2v^2-8y^2uv}{2(3x^3u+2y^3v)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{2(3x^3u+2y^3v)}\begin{vmatrix}2xu & -2v^2\\ y^2 & 2yu\end{vmatrix}=-\frac{2xyu^2+y^2v^2}{3x^3u+2y^3v}.$$

同学们也可以将 u 和 v 看成 x, y 的二元函数，对方程组$\begin{cases}xu^2-2yv^2=0,\\ y^2u+3x^2v=3,\end{cases}$两边同时对 x(或 y)求导，得到关于$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$(或$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$）的线性方程组，解出$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$即可.

例 5 设$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+2y+3z=9,\end{cases}$ 求$\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$.

解 对方程组的两边关于 x 求导，y 和 z 均为 x 的一元函数，得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}\\ 1+2\frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-\frac{1+6x}{2+6y}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{2x-y}{1+3y}\end{cases}$$

同学们也可以直接利用公式（8.14）来求例 5.

习 题 8.5

1、 求由下列方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$:

（1）$\sin y+e^{x}-x^{2}y^{3}=0$;　　（2）$\ln\sqrt{x^{2}+y^{2}}=\arctan\dfrac{y}{x}$;

（3）$x^{y}=y^{x}$.

2、设 $x^{2}+y^{2}+xy=4$，求 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

3、对下列方程确定的函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（1）$x^{3}+2y^{3}+z^{3}-3xyz-2y+3=0$;　　（2）$\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$.

4、设 $F(x+y+z,x^{2}+y^{2}+z^{2})=0$，其中 F 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5、设 $F(ax-bz,ay-cz)=0$，其中 F 具有一阶连续偏导数，

证明 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}+c\dfrac{\partial z}{\partial y}=a$.（$a,b,c$ 为常数）

6、设由方程 $x^{2}+y^{2}+z^{2}-yf(\dfrac{z}{y})=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$，且 f 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7、设 $x=x(y,z)$， $y=y(x,z)$， $z=z(x,y)$ 都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，证明：$\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

8、设 $x^{5}+y^{5}+z^{5}=5z$，求 $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}$.

9、设 $e^{z}-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}$.

10、求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

（1）设 $\begin{cases}x^{2}+y^{2}+z^{2}=50\\ x+2y+3z=4\end{cases}$,求 $\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{dz}{dx}$;

（2）设 $\begin{cases}z^{2}=2x^{2}+y^{2}\\ x^{2}+y^{2}+2z=1\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$， $\dfrac{dz}{dx}$;

（3）设 $\begin{cases}u=f(ux,v+y)\\ v=g(u-x,v^{2}y)\end{cases}$，其中 f， g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

（4）设 $\begin{cases}x=e^{u}+u\sin v\\ y=e^{u}-u\cos v\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

11、设函数 $z=f(u+v)+\varphi(v)$，而 f， φ 可微，且 $x=u^{2}+v^{2}$， $y=u^{3}-v^{3}$，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

12、设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f， F 具有一

阶连续偏导数，证明：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$.

8.6 方向导数与梯度

偏导数 f_x, f_y 分别是函数在某点 P 沿着平行于 x 轴方向与 y 轴方向的变化率. 实际应用中，要求知道函数 $z=f(x,y)$ 在点 P 沿任一给定方向的变化率. 如在气象学中要研究大气温度沿某一方向的变化率，或究竟在哪一方向的变化率最大，这就是方向导数与梯度.

8.6.1 方向导数

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P\ (x,y)$ 的某一邻域 $U(p)$ 内有定义.自点 P 引射线 $\boldsymbol{l}$ ，设 P' （$x+\Delta x$，$y+\Delta y$）为 l 上的另一点且 $P'\in U(p)$。记 P 、P' 两点间的距离为 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ，如果极限

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}.$$

存在，则称这极限为**函数 $f\ (x,y)$ 在点 P 沿方向 l 的方向导数，**记作 $\dfrac{\partial f}{\partial l}|_P$.

设射线 l 的方向余弦是 $l=(\cos\varphi,\sin\varphi)$（如图 8-6），则函数 $f\ (x,y)$ 在点 P 沿方向 l 的方向导数也可表为极限

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)-f(x,y)}{\rho}.$$

例 1 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,

求 f 在点(0，0)沿任意方向的方向导数.

解 设 $l=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ 是任意方向 l 的方向余弦.

当 $\cos\varphi\neq 0$ 时，由方向导数定义得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi+\rho^2\sin^4\varphi}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

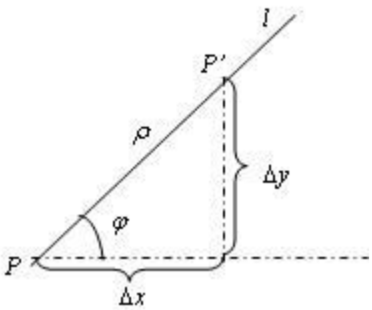


图 8-6

当 $\cos\varphi=0$ 时，由于 $f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=0$，所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0$.

下面我们来思考问题一：方向导数与偏导数有怎样的关系呢？

设 $f_x(x,y)$ 存在，$\vec{i}$ 是 x 轴正向的单位向量，即 $\vec{i}=(1,0),\varphi=0$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_P=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho,y)-f(x,y)}{\rho}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_P.$$

这说明 $f(x,y)$ 在点 P 沿 x 轴正向的方向导数就等于 $f_x(x,y)$. 同理，$f(x,y)$ 在点 P 沿 x 轴负方向的方向导数就等于 $-f_x(x,y)$. 可见

$f_x(x,y)$ 存在的充分必要条件是 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿 x 轴正向的方向导数与沿 x 轴负方向的方向导数存在且 $\left.\frac{\partial f}{\partial i}\right|_P = -\left.\frac{\partial f}{\partial(-i)}\right|_P$.

同理

$f_y(x,y)$ 存在的充分必要条件是 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿 y 轴正向的方向导数与沿 y 轴负方向的方向导数存在且 $\left.\frac{\partial f}{\partial j}\right|_P = -\left.\frac{\partial f}{\partial(-j)}\right|_P$.

问题二：方向导数与可微又有怎样的关系呢？有下面的定理.

定理 1 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P\ (x,y)$ 是可微的，那末函数在该点沿任一方向的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$

其中 $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ 为方向 l 的方向余弦.

证 由于函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P\ (x,y)$ 可微，则函数的增量可以表示为

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\rho).$$

两边各除以 ρ，得到

$$\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\sin\varphi+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

所以 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi.$

这就证明了方向导数存在且其值为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi.$$

注 1：定理 1 给出了求方向导数的一个方法.

例 2 求函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 P（3，4）处沿从点 P（3，4）到点 Q（4，3） 方向的方向导数。

解 这里方向 l 即向量 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$ 的方向，于是 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向余弦为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$，所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,4)}=\frac{6}{25},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|=\frac{8}{25}$. 由定理 2 得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=\frac{6}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{8}{25}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{25}.$$

注 2：定理 1 的条件可微只是结论成立的充分条件. 即函数在 P 点沿任一方向的方向导数都存在，函数在 P 处未必可微. 如例 1，由于

$$\lim_{\substack{x=y^2\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

所以函数在（0，0）不连续，因此不可微.但由例 1 知，函数在(0，0）沿任意方向的方向导数都存在.

注 3：方向导数的定义与定理 1 可以推广至三元函数.设三元函数$u = f(x,y,z)$，它在空间一点$P\ (x,y,z)$沿着方向$l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$的方向导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}$$
$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,y+\rho\cos\beta,\rho\cos\gamma)-f(x,y,z)}{\rho}.$$

其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.

如果函数在点 P 处可微分，那末函数在该点沿着方向l的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例 3 求函数$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$在点$P(1,2,-2)$沿方向$l=(1,4,-8)$上的方向导数.

解 l的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{9},\cos\beta=\dfrac{4}{9},\cos\gamma=-\dfrac{8}{9}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,-2)}=\left.\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{8}{27},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,-2)}=\left.\frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,2,-2)}=-\frac{2}{27},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,-2)}=\left.\frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{27}.$$

于是，函数在 P 处的方向导数.为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,2,-2)}=\frac{8}{27}\times\frac{1}{9}+\left(-\frac{2}{27}\right)\times\frac{4}{9}+\frac{2}{27}\times\left(-\frac{8}{9}\right)=-\frac{16}{243}.$$

8.6.2 梯度

方向导数研究的是函数在某点沿任意方向上变化率的大小. 实际问题中，有时候需要知道函数究竟在哪个方向的变化率最大？最大变化率又是多少？这就是梯度.

定义 2 设函数$z = f(x,y)$在点$P(x,y)$处沿任意方向上的方向导数都存在，定义函数f在P处的梯度是一个向量，它的方向与函数在该点取最大方向导数的方向一致，它的模为函数在该点的方向导数的最大值. 记为 $gradf(x,y)$.

定理 2 若函数$z = f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微，则

$$grad\ f\ (x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

证 如果函数$z = f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微，由定理 1 知它在P处沿任意方向上的方向导数都存在，设$l=(\cos\varphi,\sin\varphi)$是在$P$处任意给定的方向，则由定理 1 得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)$$

记$\vec{g}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial y}{\partial y}\right)$,因此$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_P=\vec{g}\cdot\vec{l}=|\vec{g}|\cos(\vec{g}\,\hat{,}\,\vec{l})$。可见，当$(\vec{g}\,\hat{,}\,\vec{l})=0$时，即方向$l$与$\vec{g}$的方

向一致时，$\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 有最大值$|\vec{g}|$. 所以沿 $\vec{g}$ 方向的方向导数达到最大值，也就是说，$\vec{g}$ 的方向是函数 $f\ (x,y)$ 在这点增长最快的方向. 根据定义 2，$\vec{g}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial y}{\partial y}\right)$就是函数 f 在 P 处的梯度，即 $grad\ f\ (x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$，此时最大值为$|\vec{g}|$，即梯度的模：

$$|gradf\,(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

注 4: 当函数在 P 处沿着$-gradf\,(x,y)$方向的变化率为最小，最小值为$-|gradf\,(x,y)|$.

例 4 求 $grad\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解 这里 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},$$

所以 $grad\,\dfrac{1}{x^2+y^2}=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}.$

类似地，可以将梯度的概念推广至三元及三元以上的函数.

例 5 求函数$u=x^2yz+z^3$在点$M_0(2,-1,1)$处沿$l=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$方向的方向导数，并求函数在点$M_0$最大方向导数的值及其方向.

解 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{m_0}=(2xyz)|_{M_0}=-4$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{m_0}=(x^2z)|_{M_0}=4$，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{m_0}=(x^2y+3z^2)|_{M_0}=-1$，

l 的方向余弦为$l^0=\dfrac{l}{|l|}=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，由定理 1 得

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{M_0}=(-4)\times\frac{2}{3}+4\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-1)\times\frac{1}{3}=-\frac{17}{3}.$$

由梯度的定义得函数在点 M_0 最大方向导数的方向就是 $gradu(M_0)=(u_x,u_y,u_z)|_{M_0}=(-4,4,-1)$. 最大方向导数的值为梯度的模，即

$$|\,gradu(M_0)|=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{33}\ 。$$

例 6 鲨鱼在发现血腥味时，总是沿血腥味最浓的方向追寻。在海面上进行试验表明，如果把坐标原点取在血源处，在海平面上建立直角坐标系，则在点（x, y）处血液的浓度 C（每百万份水中所含血的份数）的近似值为$C=e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$。求鲨鱼从点（x_0, y_0）出发向血源前进的路线。

解 设鲨鱼前进的路线为曲线$\Gamma: y=f(x)$。由于鲨鱼是沿血腥味最浓的方向追寻，也就是按血液浓度变化最快的方向追寻，即 C 的梗度方向前进。由梯度的计算公式得

$$gradC=\left(\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial C}{\partial y}\right)=10^{-4}e^{-(x^2+2y^2)/10^4}(-2x,-4y).$$

取鲨鱼前进的方向为曲线Γ的正向，相应方向的切线为正切线τ（图 8-7），则曲线Γ在点（x, y）处的正切线的斜率为$\dfrac{dy}{dx}$.

显然$\tau // gradC$，从而有$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4y}{-2x}=2\dfrac{y}{x}$.

即$\dfrac{dy}{y}=2\dfrac{dx}{x}$，两边积分得解为$\ln y=2\ln x+C$，即$y=e^{C}x^{2}$

记$A=e^{C}$，则有$y=Ax^{2}$,将初始条件$y(x_0)=y_0$代入得

$A=\dfrac{y_0}{{x_0}^{2}}$.

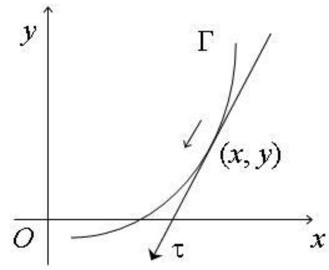


图8-7

于是鲨鱼从点（x_0, y_0）出发向血源前进的路线是：$y=\dfrac{y_0}{{x_0}^{2}}x^{2}$.

*8.6.3 数量场与向量场

如果对于空间区域 G 内的任一点 M，都有一个确定的数量 f(M)，则称在这空间区域 G 内确定了一个**数量场**。(例如大气的温度场，流体的密度场等)。如果与点 M 对应的是一个向量 **F**（M），则称在这空间区域 G 内确定了一个**向量场**。(例如速度场，电场强度等)。一个数量场可用一个数量函数 f(M)来表示。而一个向量场可用一个向量函数 **F**（M）来确定，即 **F**（M）=（P（M），Q（M），R（M）)，其中 P（M），Q（M），R（M）是点 M 的数量场。所有的向量函数 **grad** f(M) 确定了一个向量场，称为**梯度场**。f (M)又称为这个向量场的势。这个向量场又称为**势场**。

例 7 试求数量场$\dfrac{m}{r}$所产生的梯度场，其中$m>0, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$为原点 O 到点 P（x, y, z）的距离。

解 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{m}{r}\right)=-\dfrac{m}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{mx}{r^3}$，同理$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{m}{r}\right)=-\dfrac{my}{r^3}$，$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{m}{r}\right)=-\dfrac{mz}{r^3}$.因此

$$grad\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right)。$$

如果用$\vec{r}^{\,0}$表示向径$\overrightarrow{OP}$同方向上的单位向量，则

$$\vec{r}^{\,0}=\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}，$$

于是$grad\,\dfrac{m}{r}=-\dfrac{m}{r^2}\vec{r}^{\,0}$。

上式右端在力学上表示位于原点质量为 m 的质点对位于点 P 的单位质点的引力，此引力的方向由点 P 指向原点。因此数量场$\dfrac{m}{r}$所产生的梯度场又称为**引力场**，函数$\dfrac{m}{r}$又称为**引力势**。

8.6.4 梯度的几何意义

设平面区域 D 上的数量场是由二元函数$z=f(x,y)$确定，在几何上它表示一个曲面，这曲面被平面 z = C(C 是常数)所截得的曲线L的方程为

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ z=C. \end{cases}$$

这条曲线L在xOy面上的投影是一条平面曲线L^*，它在xOy平面直角坐标系中的方程为

$$f(x,y)=C$$

称它为函数$z=f(x,y)$的**等高线**（图 8-8）.

当$\dfrac{\partial f}{\partial x}$不为零时，由于等高线$f(x,y)=C$上任一点$(x,y)$处的法线的斜率为

$$-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=-\frac{dx}{dy}=\frac{f_y}{f_x},$$

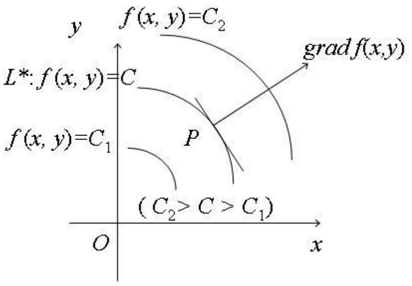


图8-8

设法线的方向余弦为$(\cos\theta,\sin\theta)$，则有

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{f_y}{f_x}.$$

这说明梯度$\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$与法线是共线的.

梯度的几何描述：函数$z=f(x,y)$在点$P\ (x,y)$的梯度的方向与过点P的等高线$f(x,y)=C$在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等高线指向数值较高的等高线（图 8-8）。而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数，这个法线方向就是方向导数取得最大值的方向.

类似地，对于空间区域 G 上的数量场$u=f(x,y,z)$，可以引进曲面

$$f(x,y,z)=C$$

为函数$u=f(x,y,z)$的**等量面**。设 P 为该等高面上的任一点，则在 P 处等量面的一个法向量是$\vec{n}=(f_x,f_y,f_z)$就是$u=f(x,y,z)$在点 P 处的梯度。

因此，同样可以得到：$u=f(x,y,z)$在 P 点处的梯度的方向与过点P的等量面$f(x,y,z)=C$在这点的法向量的一个方向相同，且从数值较低的等量面指向数值较高的等量面。而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数，这个法线方向就是方向导数取得最大值的方向。

例 8 求$z=x^2+4y^2-7$在点（—2，1）处沿曲线$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$在该点的外法线方向的方向导数。

解 曲线$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$恰是$z=x^2+4y^2-7$的等高线$z=1$。而在点（—2，1）处沿曲线的外法线方向恰是 z 在点（-2，1）处的梯度方向（图 8-9）。

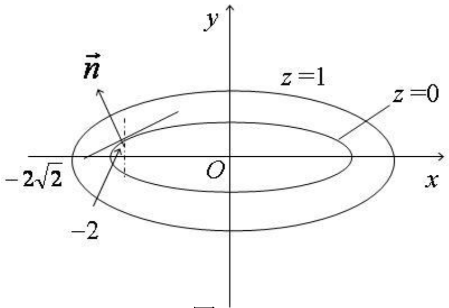


图8-9

因此由梯度的几何意义得：z 在点（-2，1）处沿曲线外法线方向的方向导数等于 z 在该点的梯度的模，即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_{(-2,1)}=\left|gradz(-2,1)\right|=|(2x,8y)|_{(-2,1)}|=|(-4,8)|=\sqrt{(-4)^2+8^2}=4\sqrt{5}\ 。$$

当然例 8 也可以利用定理 1 来求。

习 题 8.6

1、求函数$u=x^2y+y^2z+z^2x$在点M_0（1，1，1）处沿向量$\vec{l}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$的方向的方向导数.

2、求函数$u=xy^3+z^3-xyz$在点（1，1，2）处沿方向角是$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{3}$的方向上的方向导数.

3、求函数$u=z^{xy}\ (z>0)$在点（-2，1，2）处，沿从点（-2，1，2）到点（3，-3，4）的方

向的方向导数.

4、求函数 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

5、求函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 M（1，2，-2）处的梯度. 是否存在使得梯度等于零向量的点？

6、函数 $u=xy^2+e^{xz}$ 在点 P（2，-1，0）处沿什么方向的方向导数最大？并求此方向导数的最大值.

7、研究函数 $z=|2x-3y|$ 在点（0，0）处偏导数的存在性与可微性以及沿任何方向的方向导数是否存在.

8.7 微分学的几何应用

在一元函数中，可以利用导数求平面曲线在一点处的切线方程与法线方程。本节利用多元函数微分学的知识，来研究空间曲线的切线与法平面，以及空间曲面的切平面与法线。

8.7.1 空间曲线的切线与法平面

1. 设空间曲线 Γ 的参数方程是

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),\qquad(\alpha\le t\le\beta)$$

并假设 $x(t),y(t),z(t)$ 都可导，且导数不同时为零。

在曲线上取对应于参数 t_0 的点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 及对应于参数 $t_0+\Delta t$ 的点 $M'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$。这两点的连线 MM' 称为曲线的割线。

割线 MM' 的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

当 M' 沿着 Γ 趋向于 M 时，割线 MM' 的极限位置 MT 称为曲线 Γ 在点 M 处的**切线**(图 8-10).

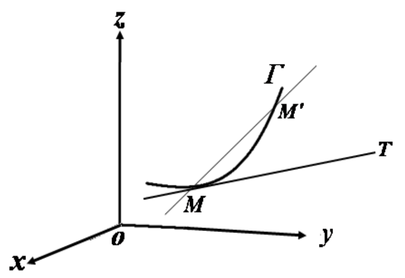


图8-10

如何来求这切线的方程呢？

用 Δt 除上式的所有分母，得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

$M'\to M$ 相当于 $\Delta t\to 0$, 由于 $x(t),y(t),z(t)$ 的导数都存在且不同时为零，因此当 $\Delta t\to 0$ 时，各分母的极限对应于 $x(t),y(t),z(t)$ 的各导数，所以曲线在点 M 处的切线 MT 方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

切线 MT 的方向向量称为曲线 Γ 在点 M 处的**切向量，**切向量为

$$\vec{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}.$$

通过点 M 而与切线垂直的平面称为曲线在点 M 处的**法平面**，其方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 1 求螺旋线 $x=a\cos t, y=bt, z=a\sin t$ 在点$(0, \frac{\pi}{2}b, a)$处的切线与法平面方程。

解 点$(0, \frac{\pi}{2}b, a)$对应于参数 $t=\frac{\pi}{2}$，又 $\frac{dx}{dt}=-a\sin t, \frac{dy}{dt}=b, \frac{dz}{dt}=a\cos t$, 在点$(0, \frac{\pi}{2}b, a)$即 $t=\frac{\pi}{2}$ 处，切向量为$\vec{T}=\{-a,b,0\}$.所以，切线方程为

$$\frac{x}{-a}=\frac{y-\frac{\pi}{2}b}{b}=\frac{z-a}{0},$$

法平面方程为

$$-ax+b(y-\frac{\pi}{2}b)+0(z-a)=0,$$

即
$$ax-by+\frac{\pi}{2}b^2=0.$$

注：如果空间曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases}$$

则取 x 为参数，它就可以表示为参数方程的形式

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases}$$

若 $y(x), z(x)$ 都在 $x=x_0$ 处可导，则切向量为$\vec{T}=\{1, y'(t_0), z'(t_0)\}$，曲线在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x)(y-y_0)+z'(x)(z-z_0)=0.$$

2. 如果空间曲线 Γ 是用方程组给出

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ 是曲线 Γ 上的一个点，又该如何来求曲线在这点的切线方程呢？

由隐函数存在定理的条件，不妨设 F, G 具有一阶连续偏导数，且 $J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M \neq 0$. 则方程组在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内唯一确定了可导的一元函数 $y=y(x), z=z(x)$，其导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},$$

于是切向量为 $\vec{T_1}=\{1,y'(t_0),z'(t_0)\}=\left\{1,\ \dfrac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\ \dfrac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}\right\}_M$，该向量与向量

$\vec{T}=\left\{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}_M$ 共线，因此它也是曲线在点 M 处的切向量.

于是曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M},$$

曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0.$$

若 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=0$，则 $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M,\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M$ 中至少有一个不等于零.用同样的方法可求得切线方程和法平面方程.

例 2 求曲线 $z=x^2-y^2,x^2+2y^2+3z^2=3$ 在点 $M(1,1,0)$处的切线及法平面方程。

解一 令 $F(x,y,z)=x^2-y^2-z$，$G(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-3$，则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\begin{vmatrix}-2y & -1\\ 4y & 6z\end{vmatrix}_M=4,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=\begin{vmatrix}-1 & 2x\\ 6z & 2x\end{vmatrix}_M=-2,$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2x & 4y\end{vmatrix}_M=12.$$

所以切向量为$\vec{T}=\{4,-2,12\}//\{2,-1,6\}$，故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{6},$$

法平面方程为

$$2(x-1)-(y-1)+6z=0,$$

即

$$2x-y+6z=1.$$

解二 方程组两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2x-2y\dfrac{dy}{dx},\\ 2x+4y\dfrac{dy}{dx}+6z\dfrac{dz}{dx}=0.\end{cases}$$

在点 $M(1,1,0)$处为 $\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=2-2\dfrac{dy}{dx},\\ 2+4\dfrac{dy}{dx}=0.\end{cases}$ 由此得: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_M=-\dfrac{1}{2}$，$\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_M=3.$

从而切向量为 $\vec{T}=\{1,-\frac{1}{2},3\}$，或 $\vec{T}=\{2,-1,6\}$, 故所求切线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{6},$$

法平面方程为

$$2(x-1)-(y-1)+6z=0,$$

即

$$2x-y+6z=1.$$

8.7.2 空间曲面的切平面与法线

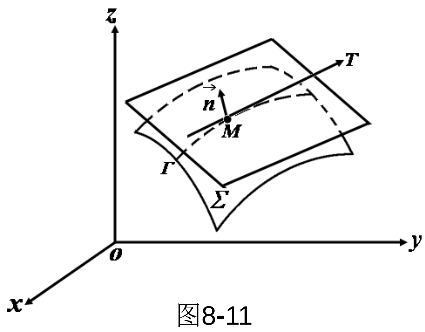


图8-11

1. 设空间曲面∑的方程为

$$F(x,y,z)=0$$

$M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面∑上的一点，并设函数 $F(x,y,z)$ 在该点的偏导数连续且不同时为零.

在曲面∑上，过 M 点任意引一条曲线 Γ（如图 8-11). 设曲线 Γ 的方程为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t).$$

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 对应的参数为 t_0，且 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不全为零，则这曲线在 M 处的切向量为 $\vec{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$。由于曲线 Γ 完全在曲面∑上，所以，$F[x(t),y(t),z(t)]\equiv 0$，两端对 t 求导数，并令 $t=t_0$，得

$$\left.\frac{d}{dt}F\left[x(t),y(t),z(t)\right]\right|_{t=t_0}=0.$$

由多元复合函数的微分法有

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0.$$

令向量 $\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),Fz(x_0,y_0,z_0)\}$，则上式即为

$$\vec{n}\cdot\vec{T}=0.$$

这表明曲线 Γ 在点 M 处的切向量与向量 $\vec{n}$ 垂直，亦即 $\vec{n}$ 与曲线 Γ 过点 M 的切线垂直。又由于曲线 Γ 是曲面∑上过点 M 的任意一条曲线，所以所有过点 M 的曲线在 M 处的切线都垂直于同一个向量 $\vec{n}$，从而这些切线一定是共面的，这个平面就称为曲面∑在点 M 的**切平面**. 该切平面方程法向量就是 $\vec{n}$，于是，切平面的方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0).$$

过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且垂直于切平面的直线称为曲面在点 M 的**法线.** 法线方程是

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

切平面的法向量 $\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),Fz(x_0,y_0,z_0)\}$ 也称为**曲面在点 M 处的法向量**。

2. 如果空间曲面方程表示为 $z=f(x,y)$

此时令

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0,$$

当函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续时，曲面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$，所以曲面在 M 处的切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

或

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

注：全微分 $dz\Big|_{(x_0,y_0)}$ 的几何意义. 上式右端是函数 $z=(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，而左端是切平面上点的竖坐标的增量. 因此，函数 $z=(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分，在几

何上表示曲面 $z=(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面上点的竖坐标的增量.
法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

设曲面在点 M 的法向量 $\vec{n}$ 的方向角为 α、β、γ 表示，并假定法向量的方向是向上的，即它与 z 轴的正向所成的角 γ 是锐角，则法向量 $\vec{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

其中，$f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 分别简记为 f_x, f_y。

例 3 求曲面 $x^2-2y^2+3z^2=4$ 在点(3,2,-1)处的切平面及法线方程。

解 令 $F(x,y,z)=x^2-2y^2+3z^2-4$,则

$$\vec{n}=(F_x,\ F_y,\ F_z)=(2x,\ -4y,\ 6z)$$

在点(3,2,-1)处，$\vec{n}$ =（6,-8,-6）//（3,-4,-3）.

所以在点(3,2,-1)处的切平面方程为

$$3(x-3)-4(y-2)-3(z+1)=0,$$

即

$$3x-4y-3z-4=0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z+1}{-3}$.

例 4 求马鞍面 $z=xy$ 在点(2,3,6)处的切平面及法线方程。

解 令 $F(x,y,z)=xy-z$ ，则 $\vec{n}=(f_x,\ f_y,\ -1)=(y,\ x,\ -1)$，在点(2,3,6)处，$\vec{n}=(3,2,-1)$. 所以在点(2,3,6)处的切平面方程为

$$3(x-2)+2(y-3)-(z-6)=0,$$

即

$$3x+2y-z-6=0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$.

习 题 8.7

1、求下列曲线在指定点处的切线与平面方程：

（1）$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\dfrac{t}{2}$，$M_0(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$；

（2）$x=a\cos^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\sin t$，对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点，其中 a，b，c 是不为零的常数

2、求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4a^2\\(x-a)^2+y^2=a^2\end{cases}$ 在点 $(a,a,\sqrt{2}a)$ 处的切线方程与法平面方程.

3、求曲线 $\begin{cases}x^2=3y\\2xy=9z\end{cases}$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $4x+3y-9z-1=0$.

4、求下列曲面在指定点处的切平面与法线方程:

（1）$xy-e^{2x-z}=0$ 在点（1，1，2）;

（2）$2x^3y-xy^2e^z+\ln(z+1)=0$ 在点（-1，2，0）.

5、求函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点$P(1,2,-2)$沿曲线 $x=t,y=2t^2,z=-2t^4$ 在此点的切线方向上的方向导数.

6、求函数 $u=xy^2z^3$ 在点（-1，2，2）沿椭圆抛物面 $z=3x^2+2y^2-9$ 在该点外法向量的方向导数.

7、已知椭球面 $S:x^2+2y^2+z^2=\dfrac{5}{2}$ 和平面 $\pi:x-y+z+4=0$，

(1)求 S 的与平面 π 平行的切平面方程; (2) 求 S 上距离平面 π 的最近和最远的距离.

8、试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

9、证明：曲面 $xyz=a^3\ (a>0)$ 上任何点处的切平面与坐标面所围成的四面体的体积是常数.

10、设 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，求证：曲面 $F(ax+bz,by+cz)=0$ 的任一切平面都平行于某固定的直线.（其中 a， b， c 是不为零的常数）.

8.8 二元函数的极值

与一元函数的情形一样，在实际应用中经常会遇到多元函数的极值和最值问题.本节讨论二元函数的极值和最值.

8.8.1 二元函数极值的概念及其求法

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若对该邻域内任何点 (x,y) 都有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\text{(或 } f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\text{)}$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极大值(或极小值)，这时点 (x_0,y_0) 称为 $f(x,y)$ 的极大值点(或极小值点).

函数的极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

例 1 讨论下列函数在点（0，0）处是否取得极值？

（1） $z=5x^2+6y^2$；　（2） $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ ；　（3） $z=xy$ 。

解 （1）函数 $z=5x^2+6y^2$ 为开口向上的椭圆抛物面，其顶点在（0，0，0）（如图 8-12）。其所有函数值均非负，又 $z(0,0)=0$，故函数 $z=5x^2+6y^2$ 在点（0，0）处取得极小值 0.

（2）函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 为开口向下的圆锥面，其顶点在（0，0,1）（如图 8-13），故函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0，0）处取得极大值 1.

（3）函数 $z=xy$ 为马鞍面（如图 8-14），在 $\overset{0}{U}(0,0)$ 内，$z(x,x)=x^2>0$，$z(x,-x)=-x^2<0$，而 $z(0,0)=0$，故函数 $z=xy$ 在点（0，0）处不取极值.

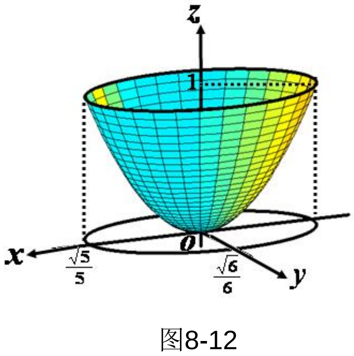


图8-12

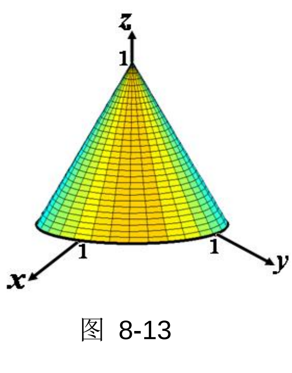


图 8-13

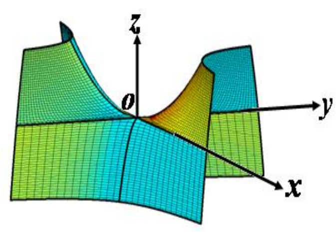


图 8-14

究竟哪些点可能是函数的极值点呢？与一元函数取极值的必要条件类似，二元函数也有取极值的必要条件.

定理 1 （**必要条件**）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取得极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0\text{，}\quad f_y(x_0,y_0)=0\text{。}$$

证 不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极大值，则对于点 (x_0,y_0) 的某一邻域内的点 (x,y) 都有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)$$

特别地，若在该邻域内取 $y=y_0$ 而 $x\ne x_0$ 的点，同样成立不等式

$$f(x,y_0)\le f(x_0,y_0)$$

这说明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，又因为 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，由一元函数取极值的必要条件得有 $f_x(x_0,y_0)=0$；同理可得 $f_y(x_0,y_0)=0$。

注:（1）定理 1 的几何意义：如果曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，且曲面在该点存在切平面，则该切平面必平行于 xoy 坐标面.

（2）使得 $f_x(x,y)=0$，$f_y(x,y)=0$ 同时成立的点称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点。要注意的是函数的驻点并不一定是极值点，如例 1（3）中的马鞍面 $z=xy$，(0,0)为其驻点但非极值点.

那么如何判定一个驻点是否是极值点呢？下面定理 2 给出了一个判定方法.

定理 2（**充分条件**）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且具有一阶和二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$。记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否取得极值有如下结论：

（1）$AC-B^2>0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，且当 A<0 时取极大值，当 A>0 时取极小值；

（2）$AC-B^2<0$ 时，点 (x_0,y_0) 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点；

（3）$AC-B^2=0$ 时，不能断定函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可能取得极值，也可能不取极值。

定理 2 的证明将在下一节给出。

由此可得出求解具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值的方法步骤如下：

第一步 解方程组 $f_x(x,y)=0$，$f_y(x,y)=0$，求得一切驻点；

第二步 对每个驻点求出二阶偏导数的值 A、B 和 C;

第三步 计算 $AC-B^2$ 的值，根据定理 2 判定 $f(x,y)$ 在该驻点是否取得极值。

例 2 求函数 $f(x,y)=2y^2-x(x-1)^2$ 的极值。

解 解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-(3x-1)(x-1)=0 \\ f_y(x,y)=4y=0 \end{cases}$$

求得驻点（$\frac{1}{3}$,0）和（1，0）。进一步计算得

$$f_{xx}(x,y)=4-6x\text{，}\quad f_{xy}(x,y)=0\quad\text{，}\quad f_{yy}(x,y)=4$$

在点（$\frac{1}{3}$,0）处，AC-B^2=8>0，A=2>0，所以函数在（$\frac{1}{3}$,0）有极小值 $f(\frac{1}{3},0)=-\frac{4}{27}$；

在点（1，0）处，AC-B^2=-8<0，所以 $f(1,0)$ 不是极值。

注:定理 2 仅给出了对于驻点是否是极值点的一个充分条件的判定。对于偏导数不存在的点也有可能是极值点，如例 1（2）中函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0，0）处偏导数不存在，但点（0，0）为其极大值点，这时一般只能用极值的定义去判定.

对于二元函数，也可以求它的**最值**.由连续函数的性质有，在有界闭区域 D 上的连续函

数 $f(x,y)$ 必在区域 D 上取得最大值和最小值。与一元函数的情形类似，若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内只有有限个可能的极值点（驻点和偏导数不存在的点），则把函数 $f(x,y)$ 在这些点处的函数值与 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值。这里需求解函数 $f(x,y)$ 在区域 D 的边界上的最大值和最小值，往往非常复杂。但在实际问题中，如果根据问题的实际性质可知 $f(x,y)$ 在 D 内一定取得最值，而 $f(x,y)$ 在 D 内又只有一个极值点，则函数 $f(x,y)$ 在该极值点处一定取得最值。

例 3 在周长为 p 的三角形中求出这样的三角形，当它绕着自己的一边旋转时，所得的立体体积最大。

解 设三角形的边长为 x、y 和 $p-x-y$，设绕边长为 x 的边旋转，则所得旋转体体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2 x \text{（} h \text{ 为 } x \text{ 边上的高）},$$

而三角形面积为 $$S=\frac{1}{2}xh,$$

由海伦公式，三角形面积也为

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p-x)(\frac{1}{2}p-y)\left[\frac{1}{2}p-(p-x-y)\right]}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{p(p-2x)(p-2y)(2x+2y-p)}.\qquad 0<x<\frac{p}{2},\ 0<y<\frac{p}{2}$$

由此解出 h 代入旋转体体积表达式中得

$$V=\frac{1}{12x}\pi p(p-2x)(p-2y)(2x+2y-p),\ 0<x<\frac{p}{2},\ 0<y<\frac{p}{2}$$

令 $V_x=\frac{\pi p(p^2-2py-4x^2)}{12x^2}(p-2y)=0$，$V_y=\frac{\pi p(-4x-8y+4p)}{12x}(p-2x)=0$ 可得 $x=\frac{p}{4}$，$y=\frac{3p}{8}$。

根据问题的实际意义，最大值一定存在且在 $0<x<\frac{p}{2}$，$0<y<\frac{p}{2}$ 内取得，又函数在 $0<x<\frac{p}{2}$，$0<y<\frac{p}{2}$ 内只有唯一的驻点，故当三角形三边长分别为 $\frac{p}{4}$，$\frac{3p}{8}$，$\frac{3p}{8}$，且绕边长为 $\frac{p}{4}$ 的边旋转时体积最大。

例 4 求函数 $f(x,y)=x^3+y^3-xy+1$ 在有界闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$ 上的最大值与最小值.

解 由于 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则必有最大、小值. 因此只需求出函数在区域 D 内的驻点与不可导点的函数值，再与边界上的最值比较即可.

(1)区域 D 内显然没有不可导点，故只需求驻点.
由方程组

$$\begin{cases} f_x=3x^2-y=0 \\ f_y=3y^2-x=0 \end{cases}$$

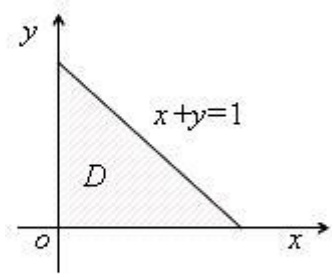


图8-15

可得驻点 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，其对应的函数值为 $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{26}{27}$.

(2)再求 D 的边界上的最大、小值.
D 的边界由三段组成(如图 8-15)，分别讨论如下：

i)在边界 $y=0, 0\leq x\leq 1$ 上，问题变为求一元函数 $g(x)=x^3+1$, $0\leq x\leq 1$ 的最大、小值.由于

$$g'(x)=3x^2>0,$$

$g(0)=1$ 是最小值, $g(1)=2$ 是最大值.它们对应于 $f(0,0)=1$ 和 $f(1,0)=2$.

ii)在边界 $x=0, 0\leq y\leq 1$ 上，由于 x、y 地位相当,情况与 i)一样,在这段边界上 $f(0,0)=1$ 是最小值，$f(0,1)=2$ 是最大值.

iii)在边界 $x+y=1, 0\le x\le 1$ 上，将 $y=1-x$ 代入到 $f(x,y)$ 中，得到

$$\varphi(x)=f(x,1-x)=2-4x+4x^2,$$

问题变为求一元函数 $\varphi(x)$ 在[0,1]上的最大、小值. 易得 $\varphi(x)$ 在（0,1）内驻点 $x=\dfrac{1}{2}$，对应的函数值为 $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=1$. 在端点 $x=0, x=1$ 处，$\varphi(0)=f(0,1)=2$，$\varphi(1)=f(1,0)=2$，所以 $f(x,y)$ 在 $x+y=1, 0\le x\le 1$ 上的最大值是 2，最小值是 1.

综上所述，函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最小值点是 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，最小值为 $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\frac{26}{27}$；最大值点是(1,0)和(0,1), 最大值为 2.

8．8．2 条件极值

上面例 2 中讨论的极值问题，函数的自变量在函数的定义域内各自独立变化，不受其他条件的约束，这种极值问题也称为**无条件极值**。但在例 3 中，实际上是求解体积在满足三边长度之和为一定的条件下的极值；例 4 中，求边界极值时，也是对自变量加以约束条件，这种对自变量附加约束条件的极值称为**条件极值**。

求解条件极值，往往是将条件极值化为无条件极值，然后利用前面介绍的方法求解。例如在例 4 中，要求边界极值，通过条件，解出一个变元代入到函数中，这样将条件极值化为无条件极值。基于这个思想，对于一般函数

$$z=f(x,y)$$

下面来寻求它在条件

$$\varphi(x,y)=0$$

下取得极值的条件。

不妨设点 (x_0,y_0) 为条件极值点，在 (x_0,y_0) 的一个邻域内 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均具有连续的一阶偏导数，且 $\varphi_x(x_0,y_0)$ 与 $\varphi_y(x_0,y_0)$ 不同时为零。不妨设 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$，则由隐函数存在定理，方程 $\varphi(x,y)=0$ 在 x_0 的某一邻域内确定了 y 是 x 的单值函数 $y=y(x)$，代入目标函数 $z=f(x,y)$ 中，便有

$$z=f[x,y(x)]$$

为 x 的一元函数，且其在点 $x=x_0$ 处取得极值，因此由一元函数取极值的必要条件，有

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)y'(x_0)=0,$$

又由隐函数微分法有 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$，代入上式中可得

$$f_x(x_0,y_0)-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $\lambda=-\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$，于是有 $f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0$，从而得到点 (x_0,y_0) 为条件极值点的必要条件为

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

容易看出，上式方程组前两式说明点 (x_0,y_0) 是函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

的驻点，其中 λ 是一个待定常数。

因此，求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可按如下方法，该方法也称为**拉格朗日乘数法**。

（1）构造拉格朗日辅助函数

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中，λ 称为拉格朗日乘数。

（2）求函数 L 的驻点，即令

$$\begin{cases} L_x = f_x(x,y)+\lambda\phi_x(x,y)=0 \\ L_y = f_y(x,y)+\lambda\phi_y(x,y)=0 \\ L_\lambda = \phi(x,y)=0 \end{cases}$$

由此方程组解出 x，y，λ，则（x，y）就是函数 $f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点。

（3）判断所求的点（x，y）是否为极值点，一般是不容易判断的。可以根据实际问题本身的性质来判定。

拉格朗日乘数法还可以推广到自变量多于两个和附加条件多于一个的情形。例如，要求函数

$$u=f(x,y,z)$$

在约束条件

$$\phi(x,y,z)=0, \quad \psi(x,y,z)=0$$

下的极值，可以作拉格朗日辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

再求该拉格朗日函数 L 的驻点，这样就可以得到函数在约束条件下的可能极值点。

例 5 证明体积一定的长方体中以正方体的表面积为最小。

证 设长方体的体积为 V，长、宽、高分别为 x、y、z，于是所求问题变为在条件 $xyz=V$ 下求表面积函数 A（x，y，z）=2xy+2yz+2zx 的最小值。构造拉格朗日辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda)=2xy+2yz+2zx+\lambda(xyz-V)$$

解下列方程组

$$\begin{cases} L_x = 2(y+z)+\lambda yz=0 \\ L_y = 2(x+z)+\lambda xz=0 \\ L_z = 2(x+y)+\lambda xy=0 \\ L_\lambda = xyz=V \end{cases}$$

求出驻点 $x=\sqrt[3]{V}$， $y=\sqrt[3]{V}$ ， $z=\sqrt[3]{V}$ 。这是唯一可能的极值点。由问题本身可知最小值一定存在，所以最小值就在这个可能的极值点处取得。也就是说，体积一定的长方体中以长宽高相等时即正方体的表面积最小。

例 6 求椭圆抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与平面 $3x+6y+2z=27$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点的坐标.

解 设所求点为 $P_0(x,y,z)$，该点到 xoy 平面的距离为|z|. 为计算方便，考虑求函数 z^2 在条件 $x^2+2y^2-z=0$ 和 $3x+6y+2z-27=0$ 下的最小值问题. 构造拉格朗日辅助函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z)+\mu(3x+6y+2z-27)$$

解下列方程组

$$\begin{cases} L_x = 2\lambda x+3\mu=0 \\ L_y = 4\lambda y+6\mu=0 \\ L_z = 2z-\lambda+2\mu=0 \\ L_\lambda = x^2+2y^2-z=0 \\ L_\mu = 3x+6y+2z-27=0 \end{cases}$$

求出驻点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{27}{4})$ 和 $(-3,-3,27)$.由实际问题,最小值是存在的，比较这两驻点可知点 $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{27}{4})$ 是与 xoy 平面距离最短的点.

习 题 8. 8

1.求下列函数的极值:

(1) $z=3a^2x-x^3-y^3$;　　　　(2) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$;

(3) $z=x^2+5y^2-6x+10y+6$;　　　　(4) $z=(2x-x^2)(6y+y^2)$.

2.求下列函数在指定范围内的最大值与最小值:

(1) $z=x^2-y^2, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$;　　　　(2) $z=x2-xy+y2, D=\{(x,y)\|x|+|y|\le\}$;

(3) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y),\quad D=\{(x,y)\mid x\ge 0, y\ge o, x+y\le 2\pi\}$.

3.在已知周长为 2p 的一切三角形中，求出面积最大的三角度形.

4.在 xoy 平面上求一点，使它到三直线 x=0,y=0 及 x+2y-16=0 的距离平方和最小.

5.求函数 z=xy 在约束条件 x+y=1 下的极大值.

6.造一个容积等于 a 的长方体无盖水池,应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小.

7.抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 x+y+z=1 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长和最短距离.

8.求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

9.在直线 $\begin{cases} y+2=0 \\ x+2z-7=0 \end{cases}$ 上找一点，使其到(0,-1,1)的距离最短,并求这最短距离.

10.求抛物线 $y^2=4x$ 上的点,使它与直线 x-y+4=0 相距最近,并求最短距离.

11.求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形,使其底边平行椭圆的长轴,而面积最大,求最大面积.

*8.9 二元函数的泰勒公式

本节首先将一元函数的泰勒(Taylor)公式推广到二元函数，然后利用二元函数的泰勒公式证明二元函数极值的充分条件.

8.9.1 二元函数的泰勒公式

一元函数的泰勒公式为:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

即在 x_0 的邻域内可以用一个 n 次多项式逼近函数 $f(x)$，其中余项 $R_n(x)$ 可分别取拉格朗日(Lagrange)型余项或皮亚诺(Peano)型余项两种形式.

那么对于二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内，能否用一个二元多项式去逼近它呢？这就是二元函数的泰勒公式，具体内容如下.

定理 1　设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有直到 n+1 阶的连续偏导数，则对该邻域内任一点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=&f(x_0,y_0)+(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)+ \\ &+\cdots+\frac{1}{n!}(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+R_n \end{aligned} \tag{8.15}$$

其中余项 $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$ 称为拉格朗日余项.

记号

$$(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\,,$$

$$(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\,,$$

$$(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\frac{\partial^m f}{\partial x^k\partial y^{m-k}}\bigg|_{(x_0,y_0)}\Delta x^k\Delta y^{m-k}\,.$$

证 引入辅助函数,令 $\Phi(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$, $0\le t\le 1$.显然 $\Phi(t)$ 在[0,1]上满足一元函数泰勒定理的条件,于是由麦克劳林(Maclaurin)公式有

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\Phi'(0)+\frac{\Phi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},\ 0<\theta<1 \tag{8.16}$$

又由 $\Phi(t)$ 的定义可知 $\Phi(0)=f(x_0,y_0)$, $\Phi(1)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$,由复合函数的求导法则可得 $\Phi(t)$ 的直到 n+1 阶的导数

$$\Phi^{(m)}(t)=(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\,,m=1,2,\cdots,n+1$$

于是

$$\Phi^{(m)}(0)=(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^m f(x_0,y_0)\,,m=1,2,\cdots,n$$

$$\Phi^{(n+1)}(\theta)=(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\,,$$

将这些都代入到(8.16)式就可得所要证明的（8.15)式.

注：(1)在公式(8.15)中，若取 n=0，则得到**二元函数的拉格朗日中值公式**：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y\,.$$

(2)在公式(8.15)中，若取 $x_0=0,y_0=0$，则得到**二元函数的 n 阶麦克劳林公式**：

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(0,0)+(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(0,0)+\\&+\cdots+\frac{1}{n!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^n f(0,0)+\frac{1}{(n+1)!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(\theta x,\theta y),\ 0<\theta<1\end{aligned}.$$

例 1 求函数 $f(x,y)=e^{2x+3y}$ 的三阶麦克劳林公式.

解 由于 $f_x(x,y)=2e^{2x+3y}$, $f_y(x,y)=3e^{2x+3y}$, $f_{xx}(x,y)=4e^{2x+3y}$, $f_{xy}(x,y)=6e^{2x+3y}$,

$$f_{yy}(x,y)=9e^{2x+3y}\,,\ \frac{\partial^3}{\partial x^k\partial y^{3-k}}f(x,y)=2^k3^{3-k}e^{2x+3y}\,,k=0,1,2,3\,,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^k\partial y^{4-k}}f(x,y)=2^k3^{4-k}e^{2x+3y}\,,k=0,1,2,3,4$$

所以

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)=2x+3y\,,$$

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(0,0)=4x^2+12xy+9y^2=(2x+3y)^2\,,$$

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^3 f(0,0)=8x^3+36x^2y+36xy^2+27y^3=(2x+3y)^3\,,$$

$$(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^4 f(\theta x,\theta y)=(2x+3y)^4e^{2\theta x+3\theta y}\,,$$

又 $f(0,0)=1$,所以

$$e^{2x+3y}=1+2x+3y+\frac{1}{2}(2x+3y)^2+\frac{1}{3!}(2x+3y)^3+\frac{1}{4!}(2x+3y)^4e^{2\theta x+3\theta y},0<\theta<1.$$

8.9.2 利用泰勒公式证明极值的充分条件

现在来证明 8.8 节中的定理 2.

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且具有一阶和二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$， $f_y(x_0,y_0)=0$, $A=f_{xx}(x_0,y_0)$， $B=f_{xy}(x_0,y_0)$， $C=f_{yy}(x_0,y_0)$.由二元函数的泰勒公式有

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2,$$

$$0<\theta<1$$

由 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有二阶连续偏导数, 所以

$$f_{xx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=A+\alpha,$$

$$f_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=B+\beta,$$

$$f_{yy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=C+\gamma,$$

其中 α,β,γ 为当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时的无穷小量, 于是

$$\Delta z=\frac{1}{2}(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2)+\frac{1}{2}(\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2).$$

显然 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2$ 是比 ρ^2 高阶的无穷小（ $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ）.因此，当 $\Delta x,\Delta y$ 很小时， Δz 的符号是由 $A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$ 的符号决定的，由于

$$A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=\Delta y^2\left[A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+2B\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)+C\right],$$

令 $t=\frac{\Delta x}{\Delta y}$, 则 Δz 的符号是由

$$D=At^2+2Bt+C$$

的符号决定.由一元二次方程根的判别式，得

(1) 若判别式 $\Delta=B^2-AC<0$，即 AC-B²>0 时, 若 A>0，则 D>0，所以 $\Delta z>0$， $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极小值. 若 A<0，则 D<0，所以 $\Delta z<0$， $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取极大值.

(2) 若判别式 $\Delta=B^2-AC>0$，即 AC-B²<0 时, 方程 D=0 有两个不同的实根 t_1,t_2，故 $D=A(t-t_1)(t-t_2)$，显然 D 的符号可正可负，即 Δz 的符号可正可负，所以点 (x_0,y_0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(3)若 AC-B²=0, 点 (x_0,y_0) 可能是二元函数 $f(x,y)$ 的极值点，也可能不是.

例如考察三个函数 $f(x,y)=xy^2$, $g(x,y)=(x^2+y^2)^2$, $w(x,y)=-(x^2+y^2)^2$,原点都是它们的驻点,且在原点处这三个函数的值均满足 AC-B²=0,但是 g 在原点取得极小值,w 在原点取得极大值,而 f 在原点不取极值.

习 题 8.9

1.求函数 $f(x,y)=x^3+2x^2y+2x^2-3y^2+4x-3y+5$ 在点(1,-2)处的泰勒公式.

2.求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 的三阶麦克劳林公式.

3.利用二阶泰勒公式近似计算 $\sqrt{(4.02)^2+(3.03)^2}$.

8.10 综 合 例 题

例 1 求下列函数的二重极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{e^{xy}-2}{\cos^2 x+\sin^2 y}$;　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$;

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解 （1）由二元初等函数在定义域内是连续的，可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{xy}-2}{\cos^2 x+\sin^2 y}=-1.$$

（2）因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)=0,\ \left|\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}\right|\le 1$，由无穷小与有界量的乘积仍为无穷小，

得
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=0.$$

（3）因为 $0\le\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=\dfrac{x^2}{|x|+|y|}+\dfrac{y^2}{|x|+|y|}\le|x|+|y|$，由夹逼定理，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0.$$

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, 由一元函数 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1,$ 知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1,$$

而
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|\to 0(x\to 0),$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

例 2 判断下列极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$.

解 （1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2y^2+1}+1)}$, 由于

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le x^2\to 0(x\to 0),$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}=0.$$

（2）$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}$，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}=0,\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}}\frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}=-\frac{1}{2},$$

可见$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$不存在.

例 3 设函数 $f(x,y)$ 在（0，0）处连续，下面命题正确的是（　　　　）.

（A）若极限$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微；

（B）若极限$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微；

（C）若 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，则极限$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在；

（D）若 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，则极限$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在.

解 若极限$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，由 $f(x,y)$ 在（0，0）处连续，可得 $f(0,0)=0$.

设$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$，则

$$\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A+o(1),\ \ (x\to 0,y\to 0)$$

所以

$$f(x,y)-f(0,0)=A(x^2+y^2)+o(x^2+y^2)=o(\sqrt{x^2+y^2}),\ \ (x\to 0,y\to 0)$$

即

$$f(x,y)-f(0,0)=0+o(\sqrt{x^2+y^2}),\ \ (x\to 0,y\to 0)$$

可见 $f(x,y)$ 在（0，0）处可微，且 $dz(0,0)=0$. 因此（B）正确.

（A）反例： $f(x,y)=|x|+|y|$.

（C）、（D）反例： $f(x,y)=x$.

例 4 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

（1）证明： $f(x,y)$ 在（0，0）处可微；（2） $f(x,y)$ 在（0，0）是否具有连续的偏导数？

（1）**证** 因为

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2},$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to 0}-\arctan\frac{1}{y^2}=-\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x-y)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x-y)\left[\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{\pi}{2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\arctan\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{\pi}{2}\right)=0,\qquad \left|\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|+\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le 2,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

$f(x,y)$ 在（0，0）处可微.

（2）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f_x(x,y)=\arctan\frac{1}{x^2+y^2}+(x-y)\frac{-2}{1+(x^2+y^2)^2},$$

由于

$$\left|(x-y)\frac{-2x}{1+(x^2+y^2)^2}\right|\le 2\left(|x|+|y|\right)\to 0,\ \ (x\to 0,y\to 0)$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\arctan\frac{1}{x^2+y^2}+(x-y)\frac{-2}{1+(x^2+y^2)^2}\right]=\frac{\pi}{2}=f_x(0,0).$$

可见， $f_x(x,y)$ 在（0，0）连续. 同理， $f_y(x,y)$ 在（0，0）连续. 因此 $f(x,y)$ 在（0，0）具有连续的偏导数.

例 5 设函数 $z=f(x,y)$ 在（1，1）处可微，且 $f(1,1)=1, f_x(1,1)=2, f_y(1,1)=3,$ $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\left.\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解 $\dfrac{d}{dx}\varphi^3(x)=3\varphi^2(x)\cdot\varphi'(x)=3\varphi^2(x)\left[f_1'(x,f(x,x)+f_2'(x,f(x,x)(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))\right],$

将 $x=1$ 代入，由题所给条件，可得

$$\left.\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=51.$$

例 6 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$$

确定，这里 F 可微，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z.$

解 设 $G(x,y,z)=F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})$，由隐函数与复合函数求导公式，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=-\frac{F_1'+F_2'\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{y(zF_2'-x^2F_1')}{x(xF_1'+yF_2')},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=-\frac{F_1'\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)+F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}=\frac{x(zF_1'-y^2F_2')}{y(xF_1'+yF_2')},$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=-xy.$$

例 7 求由方程组$\begin{cases}u=f(x,u,v+y^2)\\ v=g(y,v,u+2x)\end{cases}$所确定的隐函数的偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$,其中 f,g 是可微函数，且$1+f_2'g_2'-f_3'g_3'-f_2'-g'$.

解 设$F(x,y,u,v)=f(x,u,v+y^2)-u,G(x,y,u,v)=g(y,v,u+2x)-v.$，由隐函数组与复合函数求导公式，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}f_1' & f_3'\\ 2g_3' & g_2'-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_2'-1 & f_3'\\ g_3' & g_2'-1\end{vmatrix}}=\frac{2f_3'g_3'-f_1'g_2'+f_1'}{1+f_2'g_2'-f_3'g_3'-f_2'-g_2'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}f_2'-1 & 2yf_3'\\ g_3' & g_1'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_2'-1 & f_3'\\ g_3' & g_2'-1\end{vmatrix}}=\frac{2yf_3'g_3'-f_2'g_1'+g_1'}{1+f_2'g_2'-f_3'g_3'-f_2'-g_2'}.$$

例 8 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,1)=2$ 是函数 $f(u,v)$ 的极值，且 $z=f(x+y,f(x,y))$,求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x+y,f(x,y))+f_2'(x+y,f(x,y))\cdot f_1'(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(x+y,f(x,y))+f_{12}''(x+y,f(x,y))\cdot f_2'(x,y)+$$

$$[f_{21}''(x+y,f(x,y))+f_{22}''(x+y,f(x,y))\cdot f_2'(x,y)]\cdot f_1'(x,y)+$$

$$f_2'(x+y,f(x,y))\cdot f_{12}''(x,y).$$

由题意知 $f_1'(1,1)=0,\ f_2'(1,1)=0,$ 从而$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)f_{12}''(1,1).$

例 9 设 $u=f(x,y)$ 的具有二阶偏导数连续，证明在极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 下，下列两式成立

（1） $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

（2） $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

解 （1）由直角坐标与极坐标间的关系式

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

可把函数u看成是r及θ的函数：$u=f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=u(r,\theta)$复合而成。应用复合函数求导法则，得：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y},$$

因此

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;$$

（2） $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\cos\theta\frac{\partial u_x}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial u_y}{\partial r}$$

$$=\cos\theta\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial y_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$=\cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)+\sin\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin\theta\right)$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-r\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}。$$

这样就可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$。

例 10 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上何点的法线与三个坐标轴的夹角相等？

解 椭球面在任意点的法向量为

$$\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right),$$

若要法线与三个坐标轴的夹角相等，则有

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}\overset{令}{=}t.$$

将$x=a^2t,y=b^2t,z=c^2t$代入到椭球面方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$中，得到

$$t=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

因此所求点为

$$(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}})$$

$$\text{和}(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},-\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}).$$

例 11 求函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-\frac{1}{7}x^7-y^2$ 的极值.

解 先求函数的驻点.由

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=-8x(y-x^2)^2-x^6=0, \\ f_y'(x,y)=4(y-x^2)-2y=0, \end{cases}$$

解得驻点为 $P_1(0,0),P_2(-2,8)$.又

$$A=f_{xx}=-8y+24x^2-6x^5,\ B=f_{xy}=-8x,\ C=f_{yy}=2,$$

$$\Delta=B^2-AC=16y+16x^2+12x^5,$$

在点 $P_2(-2,8)$ 处，$\Delta=-192<0,A=224>0$，因此 $f(-2,8)=-\frac{352}{7}$ 为极小值.

在点 $P_1(0,0)$ 处，$\Delta=0$，无法判定 $P_1(0,0)$ 是否是极值点.因为 $f(0,y)=y^2>0(y\neq 0)$，

$f(x,x^2)=-x^4(\frac{1}{7}x^3+1)<0(x\to 0)$，于是 $f(0,0)$ 不是极值.

例 12 设 n 个正数 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 之和为 a，求函数 $u=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 的最大值.

解 构造拉格朗日辅助函数

$$L=\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a),$$

则

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{1}{x_i}+\lambda x_i=0,\qquad i=1,2\cdots,n$$

解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n}$. 显然，在和一定时，$u$ 的最大值是存在的.所以函数在点 $\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\cdots,\frac{a}{n}\right)$ 取到最大值，最大值为 $\frac{a}{n}$.

从例 11 可以得到重要不等式:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即 n 个正数的几何平均值不超过它们的算术平均值.

例 13 已知曲面 $4x^2+4y^2-z^2=1$ **与平面** $x+y-z=0$ 的交线在 xy 平面上的投影为一椭圆，求该椭圆面积.

解 椭圆方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$，要求椭圆的面积，关键要求出椭圆的长、短半轴. 由于椭

圆的中心在原点，问题就变成求 $d=x^2+y^2$ 在条件 $3x^2+3y^2-2xy=1$ 下的条件极值.

构造拉格朗日辅助函数

$$L=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2-2xy-1),$$

令
$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=0,$$

得到方程组 $\begin{cases}(3\lambda+1)x-\lambda y=0\\ \lambda x-(3\lambda+1)y=0\end{cases}$ 要有非零解，因此 $\begin{vmatrix}3\lambda+1 & -\lambda\\ \lambda & -(3\lambda+1)\end{vmatrix}=0.$

解得 $\lambda=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=x$ 或 $\lambda=-\frac{1}{4}\Rightarrow y=-x$.由此求得 $d_1=\frac{1}{2}$ 或 $d_2=\frac{1}{4}$.所以椭圆的长、短半轴分别为 $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}$，面积为 $S=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

例 14 设一座山的方程为 $z(x,y)=75-x^2-y^2+xy$，其山脚所占的区域 D 为：$x^2+y^2-xy\le 75$。（1）若 $M(x_0,y_0)$ 为山脚处的某一点，问 $z(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处沿什么方向的增长率最大？并求出此增长率;（2）攀岩活动要在山脚处找一最陡的位置作为攀岩的起点，试确定攀岩起点的位置.

解 （1） 函数 $z(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度 $gradz(M_0)=\{-2x_0+y_0,-2y_0+x_0\}$ 增长率最大，增长率为：

$$|gradz(M_0)|=\sqrt{(-2x_0+y_0)^2+(-2y_0+x_0)^2}=\sqrt{5x_0{}^2+5y_0{}^2-8x_0y_0}.$$

（2）构造拉格朗日辅助函数

$$L=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

令
$$L_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0,\qquad L_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0,$$

方程组要有非零解，则 $\begin{vmatrix}10+2\lambda & -8-\lambda\\ -8-\lambda & 10+2\lambda\end{vmatrix}=(2+\lambda)(18+3\lambda)=0$

解得 $\lambda=-2\Rightarrow y=x$ 或 $\lambda=-6\Rightarrow y=-x$, 于是驻点为

$$(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}),(5,-5),(-5,5),$$

由于 $g(\pm5\sqrt{3},\pm5\sqrt{3})=5\sqrt{6}<g(\pm5,\mp5)=15\sqrt{6}$，所以起点位置为：$(5,-5)$ 或 $(-5,5)$.

总 习 题 八

1.在”充分”,”必要”,”充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x,y)$ 在点(x,y)可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的__________条件; $f(x,y)$ 在点(x,y)连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的__________条件.

(2) $z=f(x,y)$ 在点(x,y)的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的_________条件;

$z=f(x,y)$ 在点(x,y)可微分是函数 $f(x,y)$ 在该点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在的________条件.

(3) $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点(x,y)存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的_____条件.

(4)函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续是这两个二阶混合偏导数在 D 内相等的______条件.

(5) 函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y)可微分是在该点沿任何方向的方向导数均存在的______条件.

2 选择题:

（1）函数 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在原点处（ ）

(A) $f_x(0,0)$ 不存在， $f_y(0,0)$ 存在； (B) $f_x(0,0)$ 不存在， $f_y(0,0)$ 不存在；

(C) $f_x(0,0)$ 存在， $f_y(0,0)$ 存在； (D) $f_x(0,0)$ 存在， $f_y(0,0)$ 不存在.

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在（0 ，1）处连续，且满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz\big|_{(0,1)}=$（ ）

(A) $-2dx-dy$； (B) $2dx-dy$； (C) $2dx+dy$； (D) $-2dx+dy$.

（3）设 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(1,1)}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,1)}$ 分别为（ ）

(A) $\frac{1}{2},0$； (B) $0,\frac{1}{2}$； (C) $-\frac{1}{2},0$； (D) $0,-\frac{1}{2}$.

（4）设函数 $z=f(x,y)$ 在点(0, 0)处有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=1$，则（ ）

(A) $dz\big|_{(0,0)}=3dx+dy$；

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$；

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$；

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{3,0,1\}$.

（5）设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点（0，0）（ ）

(A)不是 $f(x,y)$ 的极值点； (B)是 $f(x,y)$ 的极大值点；

(C)是 $f(x,y)$ 的极小值点； (D)不是 $f(x,y)$ 的连续点.

3.设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,求 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$.

4.求下列函数的一阶和二阶偏导数:

(1) $z=x\arcsin\dfrac{y}{x}$;　　(2) $z=y\ln(x^3+y)$.

5.讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)的连续性、偏导数的存在性以及可微性.

6.设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,证明: $f(x,y)$ 在点(0,0)处偏导数存在,但偏导数在点(0,0)不连续,而 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微分.

7.设 $z=f(x,y,e^x\cos y)$,其中 f 具有连续的二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8.设 $z=y^{x^2}$,而 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 都是可微函数，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

9.设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^3+y^2+z^2=yf(\dfrac{z}{y})$ 所确定，其中 f 可微分，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

10.设 $u=f(x,y,z)$ 且 $z=\varphi(\dfrac{x}{y},x^2y)$,其中 f,φ 可微分,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

11.设 $z=z(x,y)$ 为由方程 $ze^{xz}+4x+y^2=y+1$ 所确定的隐函数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点(0,0)处的值.

12. 设变换 $u=x+ay, v=x+by$ 把方程 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$ 其中 $z=f(x,y)$ 具有二阶偏导数连续，求 a,b .

13.在曲面 $z=x^2-xy+2y^2$ 上求一点,使这点处的法线垂直于平面 2x-3y+z-1=0,并写出此点处的法线及切平面方程.

14.求曲线 $\begin{cases}xyz=1\\ y=2x^2-z^2\end{cases}$ 在点(1,1,1)处的切线和法平面方程.

15.求函数 $u=x^2-3yz+5$ 在点(1,2,-1)沿与各坐标轴构成等角的方向的方向导数.

16、求函数 $z=\ln(x+2y)$ 在抛物线 $x^2=4y$ 上点（2，1）处，沿在该点处与 x 轴正向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的切线方向的方向导数.

17、沿 $\bar{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 p（1，1，1，）处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 p 处沿方向 $\bar{n}$ 的方向导数.

18.求 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ 在点(1,2,2)及点(-3,1,0)的梯度之间的夹角 θ .

19.平面 2x-y+2z-4=0 截曲面 $z=10-x^2-y^2$ 成上下两部分,求在上面部分曲面上的点到平面的最大距离.

20.求平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xoy$平面距离最短的点.

补充内容：

数学家－祖冲之和刘徽

祖冲之(公元429-500年)是我国南北朝时期范阳郡遒县(今河北涞水县)人．我国古代杰出的数学家、天文学家.

在中国古代，人们从实践中认识到，圆的周长是“圆径一而周三有余”，也就是圆的周长是圆直径的三倍多，但是多多少，意见不一.在祖冲之之前，中国数学家刘徽提出了计算圆周率的科学方法－－“割圆术”，用圆内接正多边形的周长来逼近圆周长，用这种方法，刘徽计算圆周率到小数点后4位数.

在数学方面，祖冲之在前人的基础上，经过刻苦钻研，反复演算，将圆周率推算至小数点后7位数(即3.1415926与3.1415927之间). 他成为世界上第一个把圆周率的准确数值计算到小数点以后七位数字的人.这一纪录直到15世纪才由阿拉伯数学家卡西打破.祖冲之还给出π的两个分数形式：22/7(约率)和355/113(密率)，其中密率精确到小数第7位，在西方直到16世纪才由荷兰数学家奥托重新发现.

祖冲之还和儿子祖暅一起圆满地利用“牟合方盖”解决了球体积的计算问题，得到正确的球体积公式：球体积=$\frac{4}{3}\pi r^3$.在导出球体积公式的过程中，祖氏父子总结出了所谓的“祖氏原理”.在西方这一原理被称为“卡瓦列里原理”，但它的发现者意大利数学家卡瓦列里(B．Cavalieri 1598～1647)比祖氏父子要晚1100多年.

在天文历法方面，祖冲之编制了《大明历》及为大明历编写了驳议.在祖冲之之前，人们使用的历法是天文学家何承天编制的《元嘉历》.祖冲之经过多年的观测和推算，发现《元嘉历》存在很大的差误.于是祖冲之着手制定新的历法，宋孝武帝大明六年(公元462年)他编制成了《大明历》. 《大明历》在祖冲之生前始终没能采用，直到梁武帝天监九年(公元510年)才正式颁布施行.《大明历》的主要成就如下：

(1)区分了回归年和恒星年，首次把岁差引进历法，测得岁差为45年11月差一度(今测约为70.7年差一度).岁差的引入是中国历法史上的重大进步.

(2)定一个回归年为365.24281481日(今测为365.24219878日)，直到南宋宁宗庆元五年(公元1199年)杨忠辅制统天历以前，它一直是最精确的数据.

(3)采用391年置144闰的新闰周，比以往历法采用的19年置7闰的闰周更加精密.

(4)定交点月日数为27.21223日(今测为27.21222日).交点月日数的精确测得使得准确的日月食预报成为可能，祖冲之曾用大明历推算了从元嘉十三年(公元436年)到大明三年(公元459年)，23年间发生的4次月食时间，结果与实际完全符合.

(5)得出木星每84年超辰一次的结论，即定木星公转周期为11.858年(今测为11.862年).

(6)给出了更精确的五星会合周期，其中水星和木星的会合周期也接近现代的数值.

(7)提出了用圭表测量正午太阳影长以定冬至时刻的方法.

在机械学方面，他设计制造过水碓磨、铜制机件传动的指南车、千里船、定时器等.

为纪念这位伟大的古代科学家，人们将月球背面的一座环形山命名为祖冲之环形山，将小行星 1888 命名为祖冲之小行星.

刘徽(生于公元 250 年左右)，魏晋时期山东人，是中国数学史上一个非常伟大的数学家，在世界数学史上，也占有杰出的地位. 他的著作《九章算术注》和《海岛算经》，是我国最宝贵的数学遗产.

刘徽的数学成就大致为两方面：

一是清理中国古代数学体系并奠定了它的理论基础.这方面集中体现在《九章算术注》中.它实已形成为一个比较完整的理论体系：

(1)在数系理论方面：用数的同类与异类阐述了通分、约分、四则运算，以及繁分数化简等的运算法则；在开方术的注释中，他从开方不尽的意义出发，论述了无理方根的存在，并引进了新数，创造了用十进分数无限逼近无理根的方法.

(2)在筹式演算理论方面：先给率以比较明确的定义，又以遍乘、通约、齐同等三种基本运算为基础，建立了数与式运算的统一的理论基础，他还用“率”来定义中国古代数学中的“方程”，即现代数学中线性方程组的增广矩阵.

(3)在勾股理论方面：逐一论证了有关勾股定理与解勾股形的计算原理，建立了相似勾股形理论，发展了勾股测量术，通过对“勾中容横”与“股中容直”之类的典型图形的论析，形成了中国特色的相似理论.

(4)在面积与体积理论方面：用出入相补、以盈补虚的原理及“割圆术”的极限方法提出了刘徽原理，并解决了多种几何形、几何体的面积、体积计算问题.这些方面的理论价值至今仍闪烁着余辉.

二是在继承的基础上提出了自己的创见.这方面主要体现为以下几项有代表性的创见：

(1)割圆术与圆周率：他在《九章算术•圆田术》注中，用割圆术证明了圆面积的精确公式，并给出了计算圆周率的科学方法.他首先从圆内接六边形开始割圆，每次边数倍增，算到 192 边形的面积，得到 π=157/50=3.14，又算到 3072 边形的面积，得到 π=3927/1250=3.1416，称为“徽率”.

(2)刘徽原理：在《九章算术•阳马术》注中，他在用无限分割的方法解决锥体体积时，提出了关于多面体体积计算的刘徽原理.

(3)“牟合方盖”说：在《九章算术•开立圆术》注中，他指出了球体积公式 V=9D3/16(D 为球直径)的不精确性，并引入了“牟合方盖”这一著名的几何模型.“牟合方盖”是指正方体的两个轴互相垂直的内切圆柱体的贯交部分.

(4)方程新术：在《九章算术•方程术》注中，他提出了解线性方程组的新方法，运用了比率算法的思想.

(5)重差术：在白撰《海岛算经》中，他提出了重差术，采用了重表、连索和累矩等测高测远方法.他还运用“类推衍化”的方法，使重差术由两次测望，发展为“三望”、“四望”.而印度在 7 世纪，欧洲在 15～16 世纪才开始研究两次测望的问题.

刘徽的工作，不仅对中国古代数学发展产生了深远影响，而且在世界数学史上也确立了崇高的历史地位.鉴于刘徽的巨大贡献，所以不少书上把他称作“中国数学史上的牛顿”.