习题九 行列式的性质与计算

一、填空题

1．$(-1)^n 2$；2．12； 3． 0；0； 4． 0. --- 用代数余子式的组合，按第 4 行展开

二、 1．C； --------初等变换对于行列式只改变符号或一个非零倍数.

2．C。 -------- 乘法不交换;单位矩阵和任意矩阵可交换。

三、解：原式=$(a-x)x^2+bx=-x^3+ax^2+bx.$

四、解：$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)-12=\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)=0.$

$\therefore \quad \lambda_1=6,\lambda_2=-1.$

五、解：1） 原式=$abcef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ c & -d & d \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = abcef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ c & -d & d \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2abcef(c+d)$。

2）原式$=\begin{vmatrix} 0 & 16 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ 0 & -13 & -4 & 3 \\ 0 & 12 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 16 & 8 & -5 \\ -13 & -4 & 3 \\ 12 & 8 & -1 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} -44 & -32 & 0 \\ 23 & 20 & 0 \\ 12 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -144\text{。}$$

-------- 注意过程细致一些,保证计算准确。

习题十 n 阶行列式

六、解：1）$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$，因此，

$$\begin{cases} D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=b^{n-1}(D_2-aD_1)=b^{n+1}, \\ D_n-bD_{n-1}=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=\cdots=a^{n-1}(D_2-dD_1)=a^{n+1}, \end{cases}$$

$$\therefore D_n=\begin{cases} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, a\neq b \\ (n+1)a^n, a=b \end{cases}\text{。}$$

-------- 递推公式求通项公式有固定的方法:常系数差分方程求解问题。

2）按最后一行展开，可得：

$$D_n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\text{。}$$

-------- 做一个 4 阶的找找经验,窍门。

七、证明：$n=1$时，左边$=D_1=\cos\theta$=右边；

假设$n=k$时，$D_k=\cos k\theta, n=k+1$时，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=2\cos\theta D_k+$$

$$(-1)^{2k+1}\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cos\theta\cos k\theta-D_{k-1}$$

$$=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta=\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta-\cos(k-1)\theta=\cos(k+1)\theta$$

--------- 用积化和差公式;

-------- 注意数学归纳法的另外一种形式:归纳假设为小于等于 k 时都成立.

习题十一　逆矩阵（一）

一、填充题

1．4；4；16；1/4；　-1/2 .　　2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/n\end{pmatrix}$。

3. $\begin{pmatrix}\frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$。　*-------- 根据伴随矩阵求出表达式$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$.*

4. $\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ 0 & B^{-1}\end{pmatrix}$. 。　5. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$。　*-------- $A^{11}=A^5=A^{-1}$*

二、选择题

1．C;　　*--------------互逆的矩阵可以交换。*

2．C;　3. D;　4．B.　　*---------举反例;反证法;矩阵的乘法和数的乘法不同。*

三、解：用伴随矩阵直接得:

(1) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&-2\\-3&2&-1\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&3\end{pmatrix}$.

四、解：$X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&3\\3&1&1\end{pmatrix}$.

-------先求出 X 的表达式，注意左乘还是右乘。

习题十一　逆矩阵（二）

一、解：$(A-2E)B=A;\therefore B=(A-2E)^{-1}A.$

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}.$$

因此 $B=\begin{pmatrix}3&0\\-4&3\end{pmatrix}$.

-------先求出 B 的表达式，不要用待定系数法，此处是为了计算简单，给了 2 阶矩阵，3 阶，4 阶矩阵也用待定系数法就不行了。

二、证明：1)由 $A+B=AB$ 得 $(A-E)(B-E)=E$,

所以 $A-E$ 可逆且 $(A-E)^{-1}=B-E$,

2) 互逆的矩阵可交换，因此 $(B-E)(A-E)=E$,

整理得 $A+B=BA$，　所以 $AB=BA$.

三、证明：　由于 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E$,

所以 $E-A$可逆，且$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$。

四、证明：$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(E+AB^{-1})=A^{-1}(B+A)B^{-1}$,

由于 $A,B,A+B$ 均可逆，所以，

$A^{-1},B+A,B^{-1}$ 也可逆。并且，

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}(B+A)B^{-1})^{-1}=(B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

------- 证明逆矩阵，只要 $AB=E$,两个就互为逆矩阵。

五、解：原式可化为 $\frac{1}{2}A(A-3E)=E$，因此 A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E)$.

同理可得 $(A-3E)^{-1}=\frac{1}{16}(A+6E),.(A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-4E)$.

六、解: $|A|=-20, D_1=-40, D_2=60, D_3=-20.$

所以由克莱姆法则得 $x_1=2, x_2=-3, x_3=1.$

习题十三　秩与初等变换

一、选择题

1. B;

---------------- C要求行初等变换，不能进行列初等变换

2. C; 3. 都小于 n *---------------- 两边同取行列式*

4. C; 5. C.

二、填空题

1. $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$。 *---------------- 左行右列*

2. 3 *---------------- 乘上可逆矩阵，不改变矩阵的秩。*

3. 1 *------------------可以举例看看，令 n=2 试试。*

4. 3　　5. ± 1 。 *------------------行列式为 0。*

三、 $A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $R(A)=2$。

一个最高阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. *------------------子式要在原矩阵中选。*

四、解：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}。$$

习题十四　方程组解的判断

一、填空题

1. $R(A)=n$，　$R(A)<n$。

2．$R(A)=R(\tilde{A})=n$，　$R(A)=R(\tilde{A})<n$，　$R(A)\neq R(\tilde{A})$。

3．$\neq 0;=0;\neq 0.$

二、解：$A=\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\-1&-2&1&1&0\\1&2&-3&-7&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&-3&-9&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

原方程组等价于$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4+x_5=0\\x_3+3x_4+x_5=0\end{cases}$，令$x_2=t_1,x_4=t_2,x_5=t_3$，则方程组的解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}t_3,t_1,t_2,t_3\text{为任意实数。}$$

三、解：$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=b(1-a)$，

当$b=0$或$a=1$时，$|A|=0$，方程组有非零解。

四、解：$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$

所以（1）$\lambda\neq-2,\lambda\neq1$ 时方程组有唯一解。

（2） $\lambda=-2$时

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$$

此时$r(A)\neq r(\tilde{A})$, 方程组无解。

（3） $\lambda=1$时

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

此时$r(A)=r(\tilde{A})=1<3$, 方程组有无穷多解。