习题五　线性方程组与矩阵的基本概念

一、选择题

1．C　2．D　3．B

二、填空题

1. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 5 & 4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -2 & -7 & -12 \\ 1 & -4 & -9 \end{pmatrix}$;　$\begin{cases} -2x_1-7x_2=-12 \\ x_1-4x_2=-9 \end{cases}$　3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;　1,1.

------------ *注意简化阶梯形的定义，拐角元素别忘了第一行的1.*

三、解：$(a)\ x_1=2, x_2=1, x_3=-3$;　（b）　无解；　$(c)\begin{cases} x_1=2+4t \\ x_2=t \\ x_3=1 \end{cases}$　。

四、1．解：$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

所以原方程组无解。

习题六　解线性方程组

一．解：$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

所以原方程组的解为 $x_1=0, x_2=0, x_3=0.$

------------ *注意对齐次方程组，我们是对系数矩阵化简而不是增广矩阵。.*

二、解：$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix}$,

所以方程组有解的充要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4=0.$

三、解：$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-4 \end{pmatrix}$,

所以当 $a=5, b\neq 4$ 时方程组无解；

当 $a=7,b=5$ 时方程组有无穷多解。

四、解：根据方程式，得到方程组

$$\begin{cases}6x_1=x_3\\6x_1=2x_4\\2x_2=x_4\end{cases}，即\begin{cases}6x_1-x_3=0\\6x_1-2x_4=0\\2x_2-x_4=0\end{cases}，直接取 x_1 为自由未知量得，$$

$$\begin{cases}x=2t\\x_2=3t\\x_3=12t\\x_4=6t\end{cases}，取 t=1, 即 x_1=2, x_3=3, x_3=12, x_4=2 就可配平原方程式。$$

------------*配平方程式只需找到一组整数解即可，不需求出所有解。*.

习题七 矩阵的线性运算与乘法

一、填空题

1． E

2． $AB=BA$。 ------------ *计算* A^2 即可。.

3． $-3,-1.$。

4． $7,\begin{pmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$。

5． $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3^k&0\\0&0&8^k\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a&2b&3c\\0&b&2c\\a&3b&c\end{pmatrix}$.; $\begin{pmatrix}a&2a&3a\\0&b&2b\\c&3c&c\end{pmatrix}$.

二、解： $A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$;

$$B=\beta\alpha^T=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_ib_i;$$

$$A^k=\alpha^T\beta\,\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta=\alpha^T(\beta\,\alpha^T)(\beta\,\alpha^T)\cdots\beta$$

$$=\alpha^T B^{k-1}\beta=(\sum_{i==1}^{n}a_ib_i)^{k-1}\alpha^T\beta=(\sum_{i==1}^{n}a_ib_i)^{k-1}A=B^{k-1}A.$$

---------*需要巧妙运用结合律，并注意 B 是数，可以交换到前面。*

三、解：由于 $AB=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$,

两者不相等，所以 3 个式子都不成立。

四、解：设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 根据条件得，

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$$

所以得 $c=0, a=d, b$ 任意。即 B 有这样的形式 $B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$.

五、解： $f(A)=A^2-A-2E_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

--------- $f(A)$ *就是把 A 代入多项式中，注意常数项用单位矩阵 E 代入。*

六、 解： 方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\x_2+2x_3=0\\2x_1+3x_2=2\end{cases}$,

矩阵乘积形式为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$.

习题八 对称矩阵与分块矩阵

一、证明：1） $(B^TAB)^T=B^TA^T(B^T)^T=B^TAB \quad (\because A=A^T)$,

所以 B^TAB 也是对称矩阵。

2）已知 A、B 均为 n 阶对称矩阵，则

AB 是对称矩阵 $\Leftrightarrow (AB)^T=AB \Leftrightarrow B^TA^T=AB \Leftrightarrow BA=AB$。

----------- *A、B 为抽象矩阵，故我们采用对称的定义来证明.*

二． 证明: $A^T=(E-2\xi\xi^T)^T=E^T-2(\xi^T)^T\xi^T=A.$

所以 A 是对称矩阵.

$$A^2=(E-2\xi\xi^T)^2=E-4\xi\xi^T+4(\xi\xi^T)(\xi\xi^T)$$
$$=E-4\xi\xi^T+4(\xi(\xi^T\xi)\xi^T)=E.$$

三、解: $A^2=\begin{pmatrix}1&2a\\0&1\end{pmatrix};A^3=\begin{pmatrix}1&3a\\0&1\end{pmatrix};A^k=\begin{pmatrix}1&ka\\0&1\end{pmatrix}.$

四、解: (1) $AB=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right).$

$$(2)\ AB=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3&2\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

$$(3)\ AB=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}.$$

---------*注意矩阵的这些按行，按列的分块方式。*

五、解: 1. $\begin{pmatrix}a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{n1}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{j1}.$

2. $\begin{pmatrix}a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\cdots\\a_{1n}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}a_{1j}.$

3. $\begin{pmatrix}a_{1k}&a_{2k}&\cdots&a_{nk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{n1}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}a_{i1}.$