总复习

王一操

Email: yicwang@hhu.edu.cn

Department of Mathematics, Hohai University

June 17, 2015

高等数学

高等数学

1. 重积分及第一类曲线（面）积分的计算

2. 第二类曲线（面）积分

一、重积分的计算

计算步骤总结：

1. 选用合适的坐标系.

(1)要根据被积表达式和积分区域的特点选用直角坐标系、极坐标系、柱坐标系或者球坐标系;

(2)积分表达式通常用直角坐标系表示，换用另外的坐标系意味着换元法，要定出换元后的积分区域的形式，只需将边界变换一下，而在新坐标系下，边界所围区域，即为新的积分区域;

2. 选用合适的累次积分次序：对于二重积分，确定积分区域是x-型区域还是y-型区域，是r-型区域还是θ-型区域. 比如在极坐标系下，以θ型区域为例，这时积分应该写成

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \cdots dr,$$

其中θ_1, θ_2是$\theta =$常数这样的射线（极坐标系的坐标曲线）扫过的角度范围，而$r_1(\theta_0), r_2(\theta_0)$是射线$\theta = \theta_0$与积分区域边界的交点.

做里层积分时，外层积分的积分变量应当视为常数，而“视为常数”，指的就是固定坐标曲线.

例： 计算积分

$$\iint_D xydxdy,$$

其中$D = \{(x,y)|y \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, x^2+y^2 \leq 2x\}$.

有时，积分表达式是用累次积分的形式表达的，但直接计算未必方便，这时**先将积分区域画出来，再变换累次积分的次序**.

例：将下列直角坐标系下的累次积分转化为极坐标系下的二次积分:

$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy.$$

对于三重积分，通常有两种方案：**(1)先在里层做一个一重积分，再做一个二重积分；(2)先做里层一个二重积分，再做外层一个一重积分.** 通常选用第一种方案，只是对于个别情形才用第二种方案.

第一种方案，先确定区域是何种类型的，是xy-型还是xz-型，或者yz-型？以xz-型为例，确定积分区域Ω为xz-型区域，则最后的积分应转化成如下形式

$$\iint_{D_{xz}} dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} \cdots dy,$$

其中，D_{xz}为将Ω投影到xOz-平面上得到的投影区域，而要获得里层积分的上下限，只需固定D_{xz}上一点(x,z)，沿平行于y轴方向作直线与Ω的边界交于两点，将相应的y 方向坐标按大小关系写成对y积分的上下限.

例：计算
$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dv,$$
其中Ω为柱面$y=\sqrt{2x-x^2}$及平面$z=0$, $z=2$, $y=0$围成的区域.

第二种方案，也是所谓的“截面法”，主要应用于截面表达式及积分表达式比较简单的情形，比如截面是一系列的圆盘而被积表达式只与第三个方向有关. 比如作一系列截面$z=$常数与Ω相交，这时积分应表达为

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D_z} \cdots dxdy,$$

其中z_1, z_2是$z=$常数这样的平面可以上下移动的范围，而D_z是z固定时Ω被截出的截面.

例： 计算

$$\iiint_{\Omega} e^y dv,$$

其中Ω由$x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ y = 0,\ y = 2$围成.

上面是在直角坐标系中讨论，对于**曲纹坐标**，情形也是类似的. 以常遇到的球坐标为例，这时(r,θ,φ)是坐标，如果化为如下形式的积分

$$\iint_D d\theta d\varphi \int \cdots dr$$

时，要确定里层积分的上下限，就固定(θ,φ)，这是一条射线，它与积分区域的边界相交于两点，相应的r-坐标就列为里层积分的上下限.

通常情形，对θ, φ的积分上下限是下面这样的形式：

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cdots ,$$

这里的$\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2$都是确定的常数. 要确定$\varphi$的积分范围, 就用$\varphi =$常数这样的半平面转动着去截$\Omega$，看转动的上下限；要确定$\theta$的积分范围，就用$\theta =$常数这样的圆锥面去截$\Omega$，看半顶角的变化范围.

例：计算

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dv,$$

其中Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=z$围成的区域.

3. 关于对称性的使用

在有些情形，**被积函数或者积分区域有某种对称性**，这时充分利用对称性，可以迅速得到问题的答案.

(1)二重积分的积分区域关于x-轴对称，若被积函数关于y为奇函数，则积分为零，若被积函数关于y为偶函数，则积分为上侧积分的两倍；

(2)三重积分的积分区域关于xy-平面对称，若被积函数关于z-为奇函数，则积分为零，若被积函数关于z为偶函数，则积分为上侧积分的两倍；

例： 计算二重积分

$$\iint_D (3x^3 + y)dxdy,$$

其中D是两条抛物线$y = x^2$, $y = 4x^2$及直线$y = 1$所围成的闭区域.

(3)要充分应用积分变量的**哑指标**属性，这也是一种对称性，即**积分变量换成其他字母，不影响积分值**.

例： 计算

$$I = \iint_D \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} d\sigma,$$

其中 $D: x^2+y^2 \leq R^2$.

二、第一类曲线（面）积分的计算

第一类曲线（面）积分，本质上和二（三）重积分时一样的，都是没有方向的积分，其本质都是积分=$\sum$函数×积分微元的测度. 这里的测度，对于曲线来说，是长度，对曲面来说是面积. 而测度微元都是正值的.

计算在在本质上就是换元法，将弧长微元ds和面积微元dS 用方便的参数表达出来，在对参数积分. 有时整个曲线或曲面要剖分成几部分分别处理.

对称性在这里也是有意义的.

例： 计算曲线积分

$$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds,$$

其中L为圆周$x^2+y^2=4$, 直线$y=x$及x轴在第一象限内所围成的扇形的边界.

例： 计算曲面积分$\iint_\Sigma \sqrt{1+4z}dS$,

Σ为$z=x^2+y^2$上$z\leq 1$的部分.

一、积分的方向性

$$\int_L \vec{A}\cdot\vec{t}ds = \int_L A_1dx + A_2dy + A_3dz,$$

$$d\vec{s} = \vec{t}ds = (dx, dy, dz).$$

$$\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \iint_\Sigma A_1dydz + A_2dzdx + A_3dxdy.$$

$$d\vec{S} = \vec{n}dS = (dydz, dzdx, dxdy).$$

二、计算方法

1. 曲线积分选用合适的参数化: 备选参数（1）符合曲线特点的参数化（比如圆周的角度参数）；（2）直角坐标系的参数，比如x；

注记：用定积分表示时，积分下限一定是起点对应的参数，上限一定是终点对应的参数，尽管上限可能小于下限.

2. 曲面积分使用投影法，比如将积分曲面向xy平面投影，得到D_{xy}，则

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$\pm \iint_{D_{xy}} (P(x, y, z(x, y)), Q(x, y, z(x, y)), R(x, y, z(x, y$$

$$\cdot \quad (-z_x, -z_y, 1))dxdy,$$

正负号的选取取决于曲面定向与z轴正向的夹角是锐角还是钝角.

3. 化为第一类曲线（面）积分进行计算，对于切线或者法线比较容易表达的题型适用.

4. 使用格林或高斯公式. 通过补齐封闭曲线或者曲面来计算，补上的部分要另外减去. 适用于格林或高斯公式右端以及补上的部分容易计算的情形.

例： 求

$$\iint_\Sigma \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z},$$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的内侧.

三、格林公式、高斯公式、斯托克斯公式

1. 格林公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D (Q_x-P_y)dxdy,$$

曲线的正定向的规则：沿正向行走，区域在左手边.

2. 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}(P_x+Q_y+R_z)dv,$$

曲面的正定向是曲面的外法向.

注：$\mathrm{div}(P,Q,R)=P_x+Q_y+R_z$. A过封闭曲面的通量等于其散度在曲面所围立体的体积分.

3. 斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

曲线及其所围曲面的定向服从右手螺旋规则.

注：A沿闭曲线的环流量等于A的旋度$\mathrm{rot}A$在闭曲线所围曲面上的通量.

1. 应用的条件:（1）闭合曲线（面）；（2）封闭曲线或曲面内部应没有奇异点.

2. 曲线（面）积分转化为二重和三重积分时，被积函数从定义在曲线（面）上变成定义在曲线（面）所围的区域上.

3. 曲线积分与路径无关的条件$P_y = Q_x$, 这时原函数的求法.

例： 设曲线L是正向圆周$(x-a)^2+(y-a)^2=1$, $\varphi(x)$是连续的正函数. 证明：

$$\oint_L \frac{x}{\varphi(x)}dy - y\varphi(x)dx \geq 2\pi.$$

例： 计算

$$\iint_\Sigma x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$$

其中Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$.