河 海 大 学 2007-2008 学年第一学期

《概率论与数理统计》试卷

（工科类用）2007 年 12 月

试卷 A 参考解答

一、填空题

1、0.6　　2、$\dfrac{11}{24}$　　3、$\dfrac{1}{2}$　　4、1　　5、t(1)　　6、$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

二、设 $A_i = \{$从第i个箱子中取一只球$\}$，$i = 1,2,3$

$B = \{$取出一只红球$\}$

1、$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i)$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{6} \times \frac{6}{8} = \frac{3}{8}$$

2、$P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{6} \times \frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{4}{9}$

三、1、$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当 $x \leqslant 0$，$F(x) = 0$

当 $0 < x \leqslant 1$，$F(x) = \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$

当 $0 < x < 2$，$F(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t)dt = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

当 $x \geqslant 2$，$F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & , 0 \pi x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & , 1 \pi x \pi 2 \\ 1 & , x \ge 2 \end{cases}$$

2、$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot x dx + \int_1^2 x \cdot (2-x) dx = 1$

$$E(x^2)=\int_0^1 x^2\cdot xdx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$$

$$D(x)=E(x^2)-(Ex)^2=\frac{7}{6}-1^2=\frac{1}{6}$$

四、1、 $f_x(x)=\int_{1-x}^{1} 2dy=2x$，（$0<x<1$）

$f_Y(y)=\int_{1-y}^{1} 2dx=2y$，（$0<y<1$）

2、 $E(X)=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$

同理 $E(Y)=\frac{2}{3}$

$$E(X\cdot Y)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{1} x\cdot y\cdot 2dy=\frac{5}{12}$$

$$Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-(EX)(EY)$$

$$=\ \frac{5}{12}-(\frac{2}{3})^2=-\frac{1}{36}$$

3、 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 1-x\le z-x\le 1\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}0\le x\le 1\\ z\ge 1\\ x\ge z-1\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} 2dx=2(2-z)\qquad (1\le z\le 2)$$

五、法一：因为 $X\sim B(n_1,p)$ 所以 $X=X_1+X_2+\cdots X_{n_1}$

其中 $X_1+X_2+\cdots X_{n_1}$ 独立同分布 $B(1,p)$

同理 $Y=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n_2}$

其中 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 独立同分布 $B(1,p)$

又 X与Y 相互独立

所以 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$， $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 独立同分布 $B(1,p)$

从而 $X+Y=X_1+X_2+\cdots+X_{n_1}+Y_1+Y_2+\cdots+Y_{n_2}\sim B(n_1+n_2,p)$

法二：对任意的 $0\leqslant k\leqslant n_1+n_2$

$P(X+Y=k)$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \qquad [\text{因为 } X,Y \text{ 独立}]$$

$$=\sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} p^{i}(1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n_2-(k-i)}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{k-i}\right] p^{k}(1-p)^{n_1+n_2-k}$$

$$=C_{n_1+n_2}^{k} p^{k}(1-p)^{n_1+n_2-k}$$

所以 $X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$

六、$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$ 由 $E(X)=\overline{X}$

得 $\hat{\theta}_M = 2\overline{X}$

$f(x)=\dfrac{1}{\theta}$，（$0 \leqslant x \leqslant \theta$）

似然函数 $L=\dfrac{1}{\theta^n}$，（$0 \leqslant x_i \leqslant \theta$， $i=1,2,\Lambda ,n$）

$$=\frac{1}{\theta^n}, \text{（}0 \leqslant \min(x_1,\Lambda ,x_n) \leqslant \max(x_1,\Lambda ,x_n) \leqslant \theta\text{）}$$

所以 $\hat{\theta}_{MLE} = \max(x_1, x_2, \Lambda\ x_n)$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{\theta}, & 0 \ \pi\ x\ \pi\ \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

$\hat{\theta}_{MLE}$ 的分布函数为

$$F_L(x)=F^{n}(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0 \ \pi\ x\ \pi\ \theta \\ 1, & x \ge \theta \end{cases}$$

$f_L(x)=\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}$，（ $0 < x < \theta$）

$$E(\hat{\theta}_{MLE}) = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta$$

从而$\hat{\theta}_{MLE}$不是θ的无偏估计量。

七、1、$H_0:\sigma^2=5000$， $H_1:\sigma^2\neq 5000$　　$\alpha=0.05$

该检验的拒绝域为

$$\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ \phi\ x_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right\}\text{或}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ \pi\ x_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)\right\}$$

S^2=7200　　　$n=26$　　　$\sigma_0^2=5000$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{(26-1)\times 7200}{5000}=36$$

而$x_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=x_{0.025}^2(25)=40.646$

$x_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)=x_{0.975}^2(25)=13.120$

由于 13.120<36<40.646

即$x_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<x_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

从而接受H_0，即认为σ^2=5000

2、σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{x_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{x_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}}\right)\qquad n=26,S^2=7200,1-\alpha=0.95$$

$$=\left(\sqrt{\frac{25\times 7200}{40.646}},\sqrt{\frac{25\times 7200}{13.120}}\right)=（66.547,117.130）$$