河海大学 2006~2007 学年第一学期

2004 级《概率论与数理统计》试卷(A)(含重修)

参考解答与评阅标准

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. 1/3；2. U=$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$；3. 18；4. 0.91；5. 1/2

二、 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. A；2. D；3. C；4. B；5. B

三、（本题满分 12 分）

解：设 A_i——从甲盒中取出的 3 只球中含有 i 只黑球，i = 0，1，2

B——从乙盒中取出 1 只黑球，则　　3 分

（1）P（B）$=\sum_{i=0}^{2} P(A_i)P(B\mid A_i)$

$$=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}\cdot\frac{5}{10}+\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{23}{50}=0.46;$$　　5 分

（2）$P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}\cdot\dfrac{5}{10}\Big/\dfrac{23}{50}=\dfrac{35}{69}\approx 0.507.$　　4 分

四、（本题满分 10 分）

解：设第 i 个部件的长度为 X_i，则 X_1,Λ,X_{10} 独立同分布来自 $N(2,0.05^2)$.

要求的是　　3 分

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{10}X_i-20\right|\le 0.1\right\}=P\left\{\frac{\left|\sum_{i=1}^{10}X_i-20\right|}{0.05\sqrt{10}}\le\frac{0.1}{0.05\sqrt{10}}\right\}$$　　4 分

$$=2\Phi(2/\sqrt{10})-1=2\Phi(0063)-1=2(0.7357)-1\approx 0.4714.$$　　3 分

五、（本题满分 20 分）

解：（1）由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=A\int_0^1 dy\int_{-y}^{1}dx=A/2$，

得 A=2。　　4 分

注：本题中能画出其密度为正的区域可给 2 分。

（2） $f_X(x)=\begin{cases}\int_{1-x}^{1}2dy=2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $\quad f_Y(x)=\begin{cases}\int_{1-y}^{1}2dy=2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 4 分

（3） $\Theta\ E(XY)=2\int_0^1 dy\int_{1-y}^{1}xydx=\frac{5}{12},\quad E(X)=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}=E(Y)$

$\therefore \mathbf{cov}(X,Y)=\frac{5}{12}-(\frac{2}{3})^2=-\frac{1}{36}.$ 4 分

（4） $\Theta\ F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}2dxdy=\begin{cases}0, & z\le 1\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$ 4 分

当 $1<z<2$ 时，$F_Z(z)=1-(2-z)^2$， 2 分

$\therefore f(z)=\begin{cases}2(2-z), & 1<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 2 分

六．(本题满分 15 分)

解：（1） $\Theta\ EX=\int_\mu^\infty \frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx\overset{令t=\frac{x-\mu}{\theta}}{=}\int_0^\infty \frac{\theta t+\mu}{\theta}e^{-t}\theta dt=\theta+\mu$

$\therefore \hat{\theta}_M=\overline{X}-\mu.$ 5 分

又 $\Theta\ L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}=\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}$， $\ln L=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\overset{令}{=}0$， $\therefore \hat{\theta}_{MLE}=\overline{X}-\mu.$ 5 分

（2） $\Theta\ E\hat{\theta}_{MLE}=E(\overline{X}-\mu)=E\overline{X}-\mu=EX-\mu=\theta$

$\therefore \hat{\theta}_{MLE}$ 是 θ 的无偏估计。 5 分

七、(本题满分 13 分)

解：（1）可算得 $\overline{x}=499, s=16.03$ 作假设 $H_0:\mu=\mu_0=500$; $H_1:\mu\ne\mu_0$

构造统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0真}{\sim}t(n-1)$ 4 分

由 $P\{|T|\ge t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$ 得拒绝域: $|T|\ge t_{\alpha/2}(n-1)$;

$\Theta\ t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306,\quad |T|=\frac{|499-500|}{16.03/3}=0.187<2.306$

故接受H_0：$\mu = \mu_0 = 500$，即认为该天包装机工作正常。 4 分

（2）若已知$\sigma = 16.0$，则$\because U = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$，

$\therefore$ μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} = 499 \pm 1.96(16/3) = (488.55, \ 509.45)$. 5 分