§ 7.3 毕奥-萨伐尔定律

◆ **毕奥-萨伐尔定律**

◆ **毕奥-萨伐尔定律的应用****

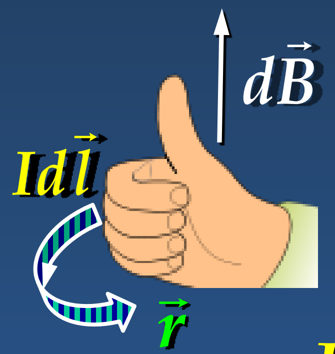
- 叠加原理求磁场
- 磁偶极矩

◆ **运动电荷的磁场**

一、毕奥-萨伐尔定律

真空中电流元在P点激发的磁场：

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \hat{e}_r}{r^2}} \quad \left(\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

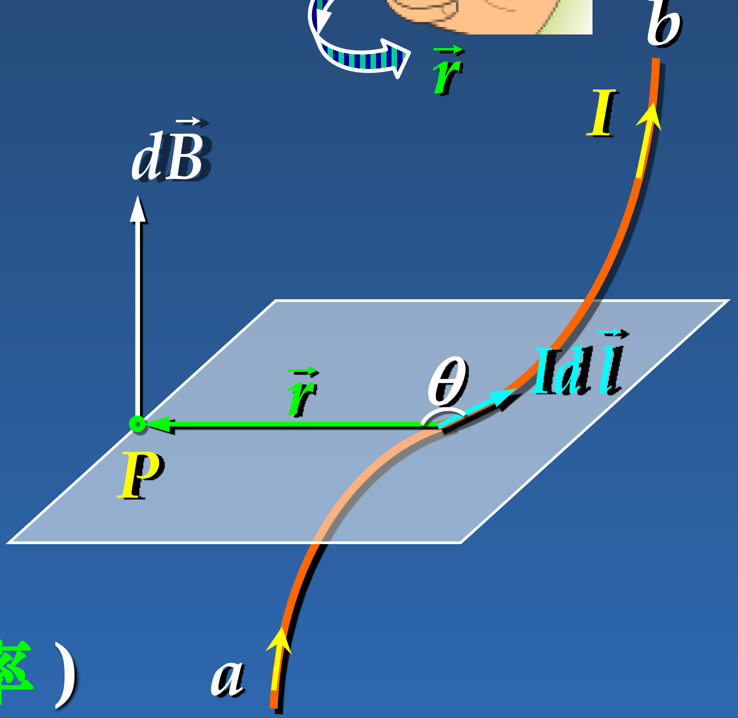


大小： $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \cdot \sin\theta}{r^2}$

方向： $Id\vec{l} \times \hat{e}_r$

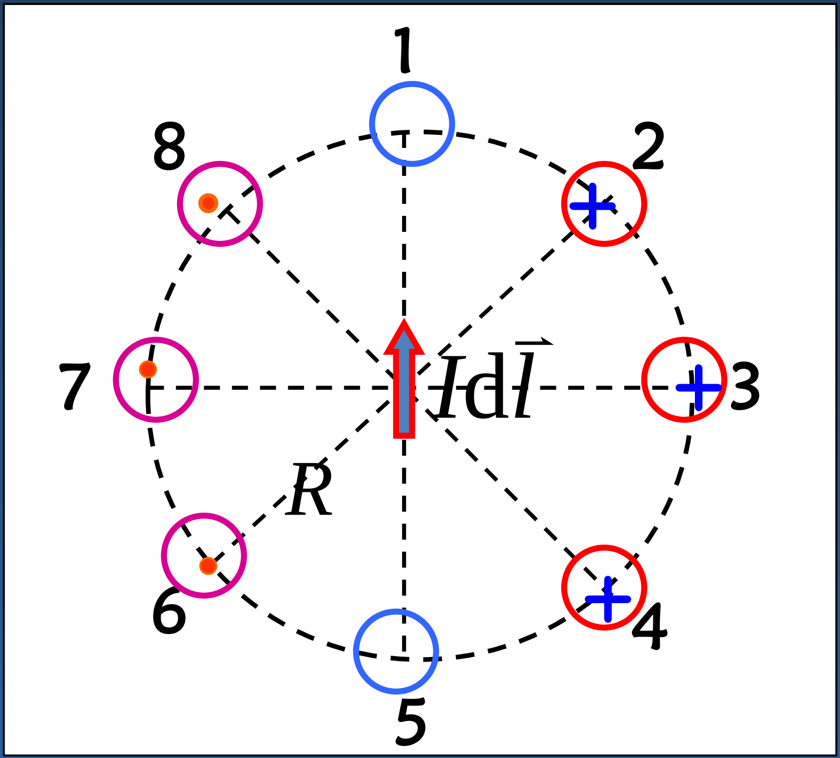
（右手螺旋法则）

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N \cdot A^{-2}$（真空磁导率）



电流元：$Id\vec{l}$

例1 判断下列各点磁感强度的方向和大小.



$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

1、5 点 ： $\mathrm{d}B = 0$

3、7点 ：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi\ R^2}$

2、4、6、8 点

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi\ R^2}\sin 45^0$$

二、毕奥-萨伐尔定律的应用

磁感应强度叠加原理：

任意线电流在场点处的磁感应强度$\vec{B}$ 等于构成线电流的所有电流元在该点的磁感应强度之矢量和。

$$\vec{B}=\int \mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

如何计算 $\vec{B}$

1. 建立适当的坐标系

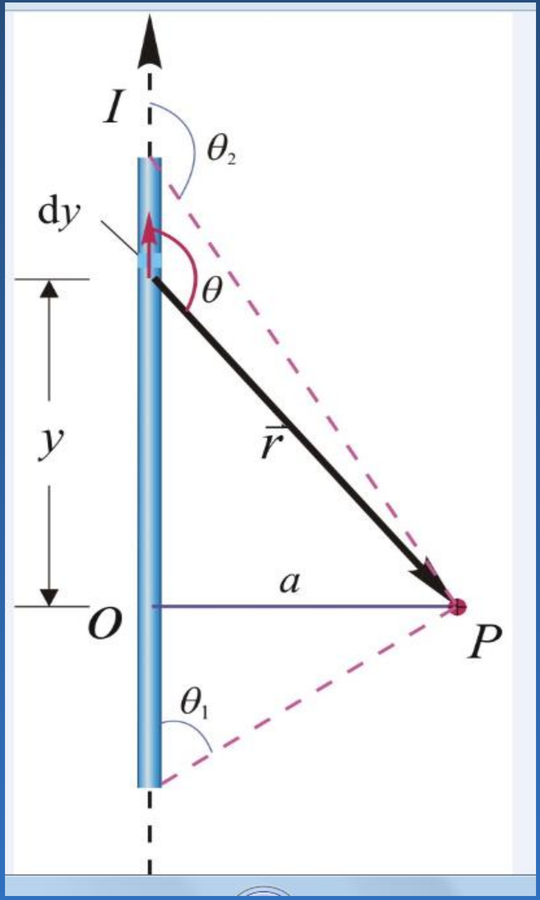
2. 根据载流导体的对称性选取的电流元： $d\vec{B}$ =?

3. 分解： dB_x =? dB_y =? dB_z =?

4. 积分： 对称性? 积分上下限?

1. 直线电流的磁场

一载流长直导线，电流强度为I ，导线两端到P 点的连线与导线的夹角分别为θ_1和θ_2 。求距导线为a 处P点的磁感应强度。

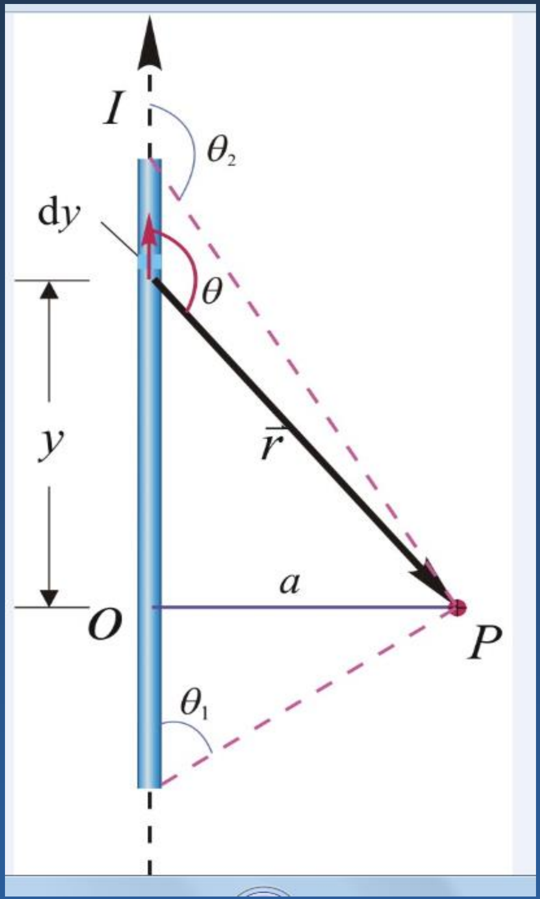


$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}y\sin\theta}{r^2}$$

$$y = -a\,ctg\theta \qquad r = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{a}{\sin^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{a^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$



$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

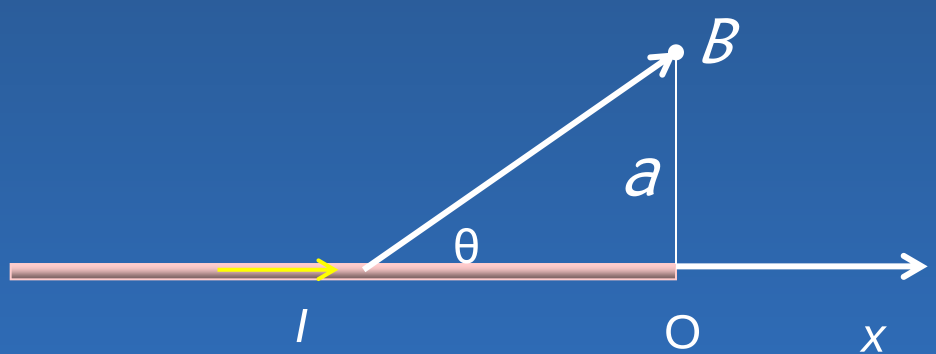
$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi a}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

（1）无限长载流导线： $\theta_1 = 0$， $\theta_2 = \pi$

$$B=\frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

方向：右螺旋法则

（2）半无限长载流导线： $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = \pi/2$

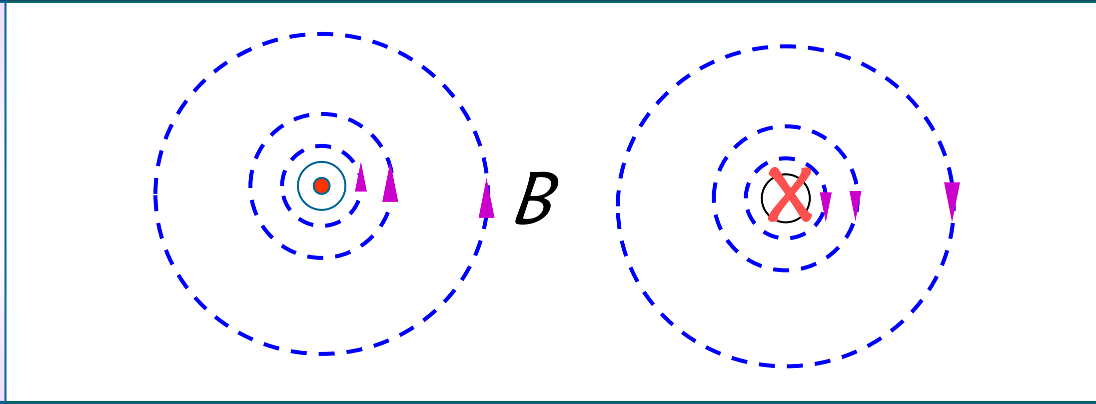


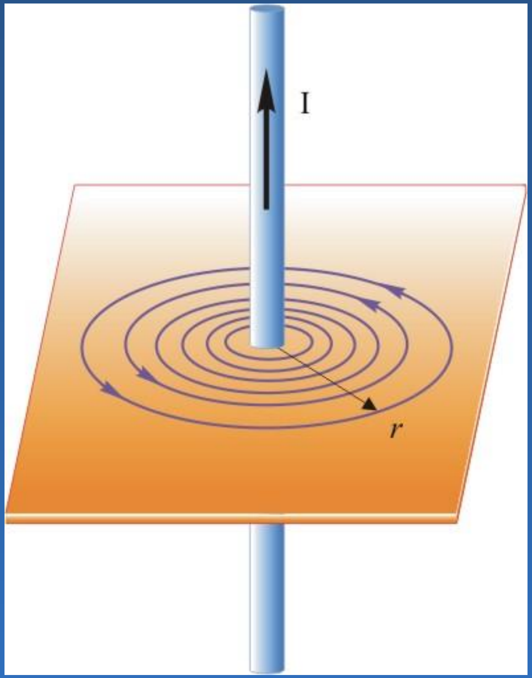
$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi a}$$

（3）导线延长线上：B=0

无限长载流长直导线的磁场

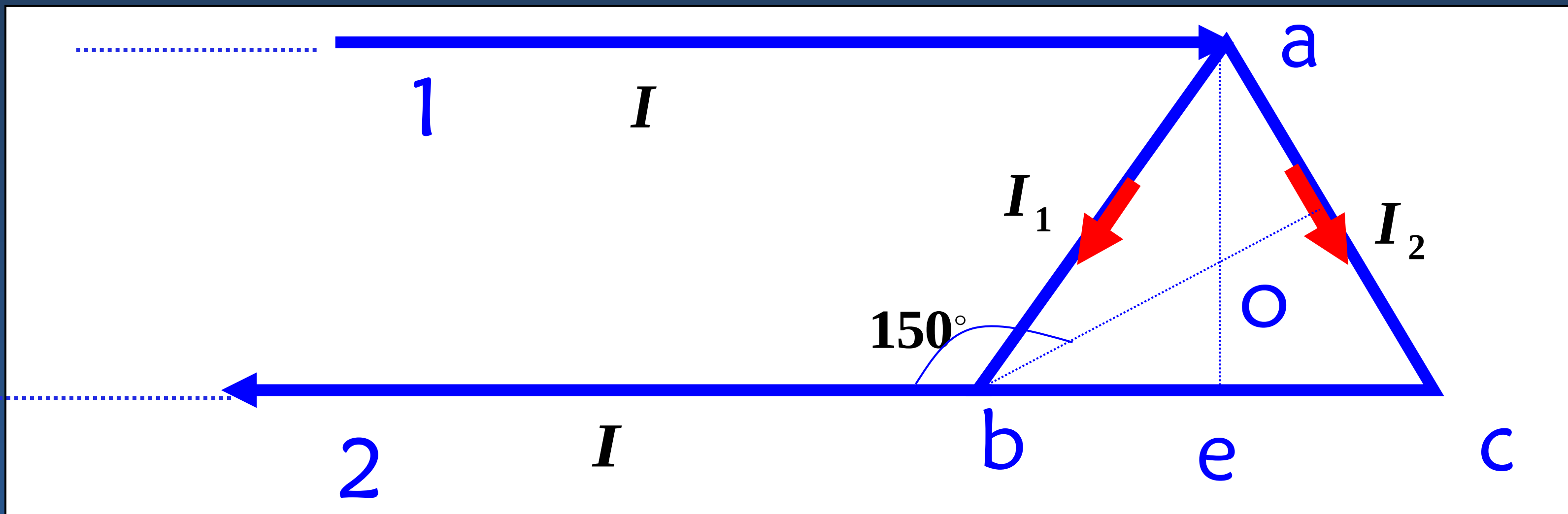
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\ r}$$





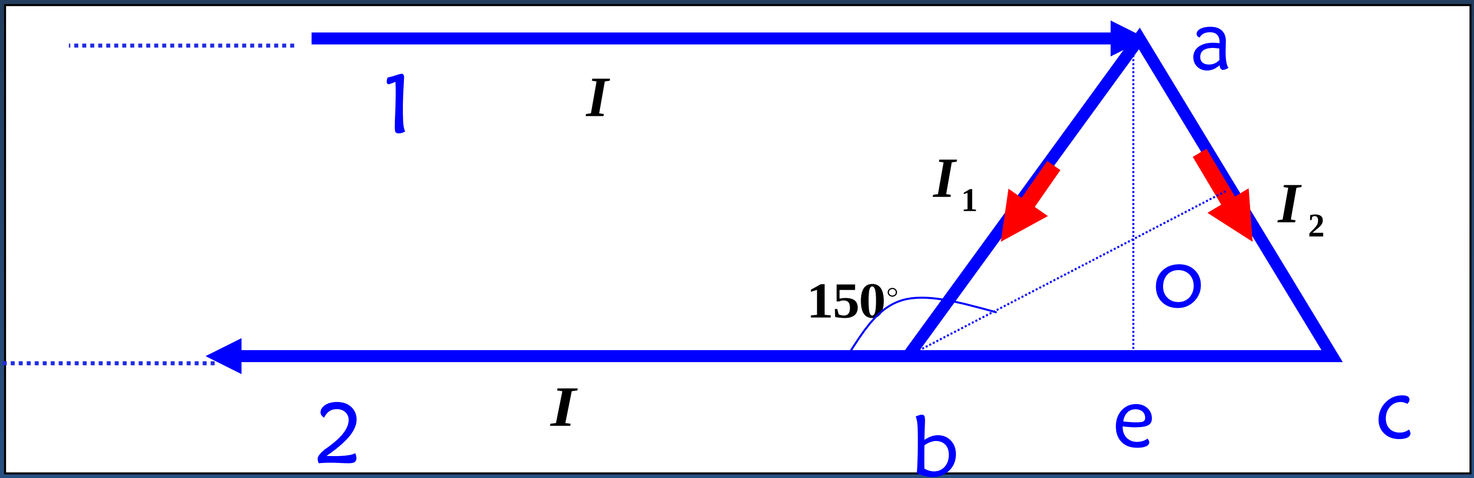
电流与磁感应强度线成右螺旋关系

例2 如图，求三角形中心点 O 处的磁感应强度。



$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \overline{oa}}(\cos 0^\circ - \cos 90^0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \dfrac{l}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l} \quad \otimes$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \overline{oe}}(\cos 150^\circ - \cos 180^0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \dfrac{\sqrt{3}}{6} l}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \otimes$$

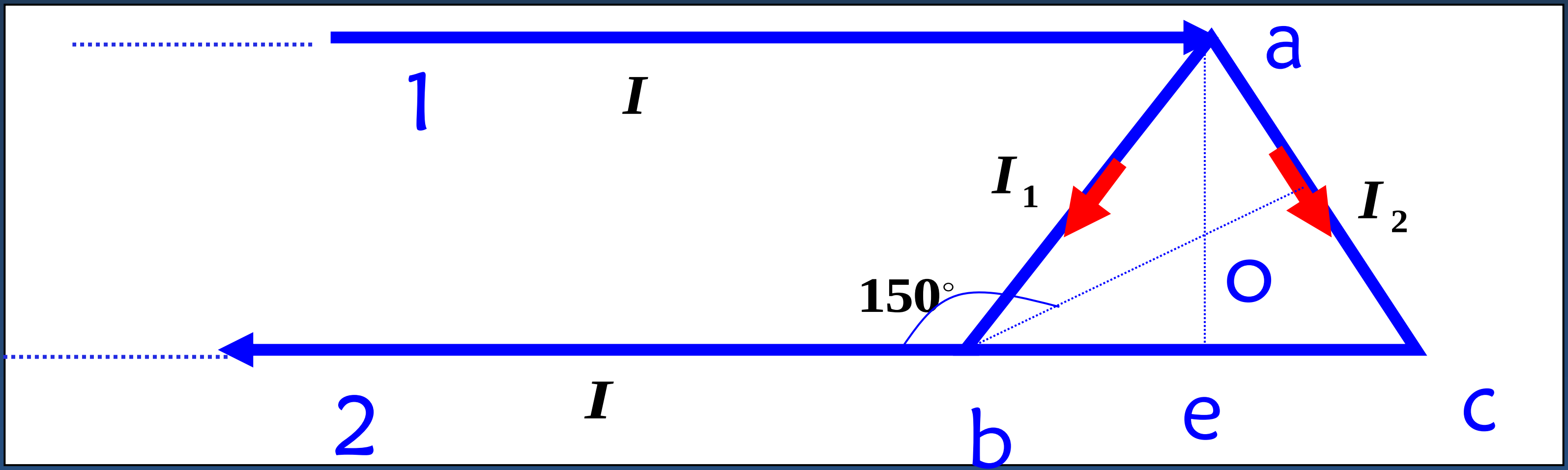


$$I_1 R_{ab} = I_2 R_{acb}$$

$$\begin{cases} I_1 = 2I_2 \\ I = I_1 + I_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{2}{3} I \\ I_2 = \dfrac{1}{3} I \end{cases}$$

$$B_{ab} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi oe}(\cos 30^\circ - \cos 150^0) = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi l} \quad \odot$$

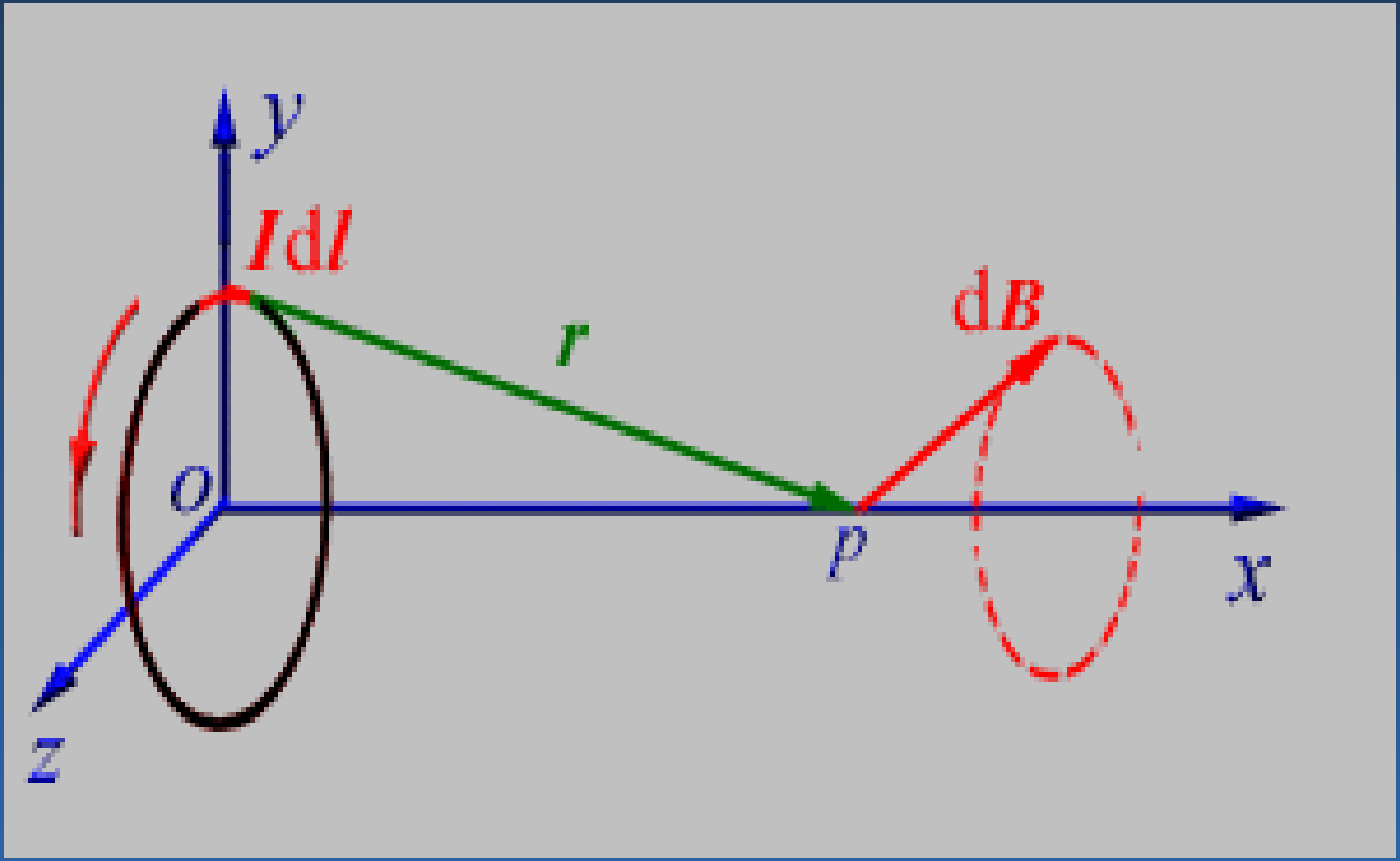
$$B_{acb} = 2B_{ac} = 2\times\frac{\mu_0 I_2}{4\pi oe}(\cos 30^\circ - \cos 150^0) = \frac{3\mu_0 I_2}{\pi l} = \frac{3\mu_0 I_1}{2\pi l} \quad \otimes$$



$$B_0 = B_1 + B_2 + B_{acb} - B_{ab}$$

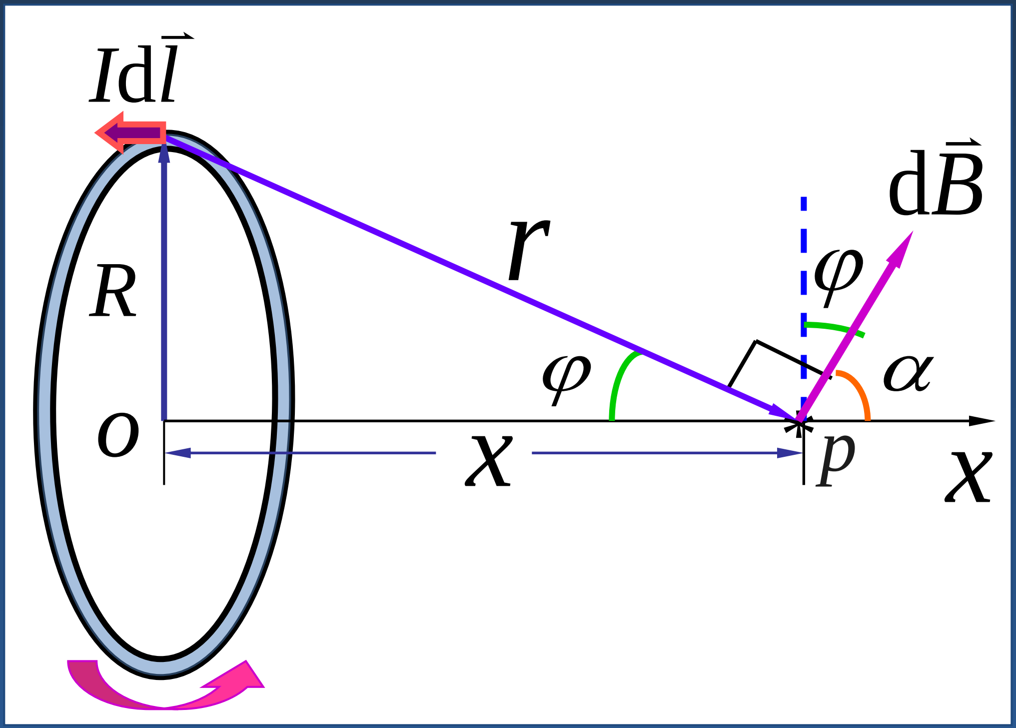
$$= \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi l}(\sqrt{3}-1) \quad \otimes$$

2. 圆形载流导线轴线上的磁场



圆形载流回路轴线上的磁场分布

解：根据对称性分析 $$B = B_x = \int \mathrm{d}B \sin\varphi$$



$$\cos\alpha = R/r$$

$$r^2 = R^2 + x^2$$

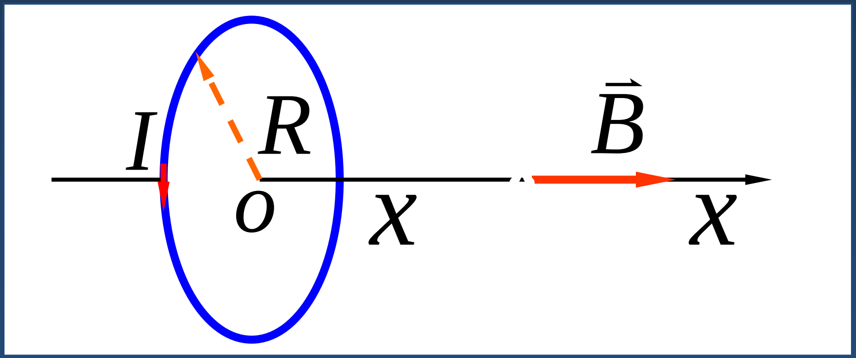
$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\cos\alpha \mathrm{d}l}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

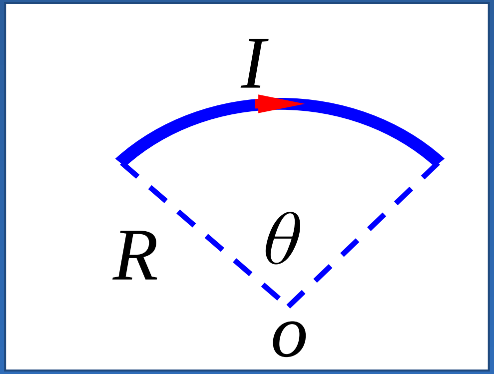
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha\mathrm{d}l}{r^2}$$



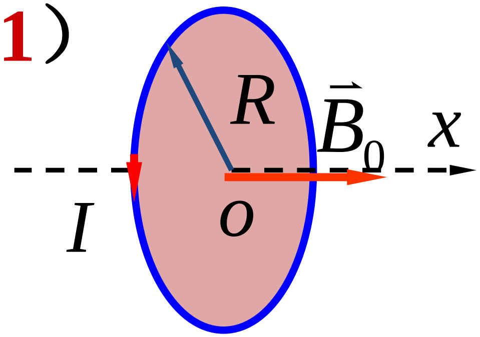
1）若线圈有N匝 $$B=\frac{N\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

2）$x=0$ $$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$



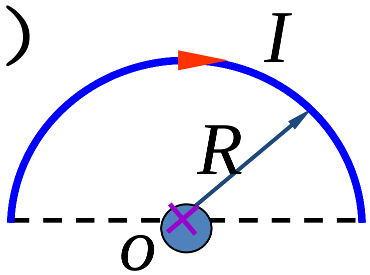
$$B=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$$

(1)



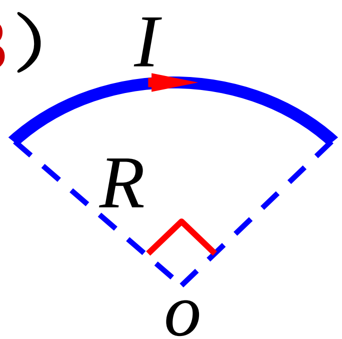
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

(2)



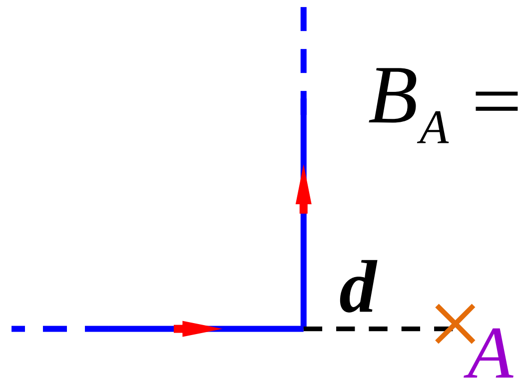
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

(3)



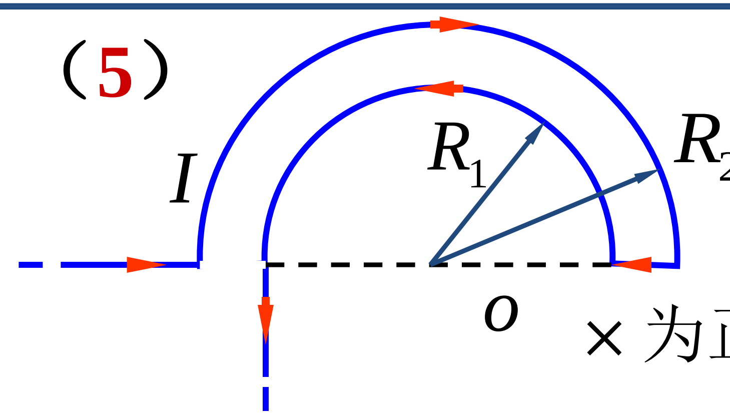
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

(4)



$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

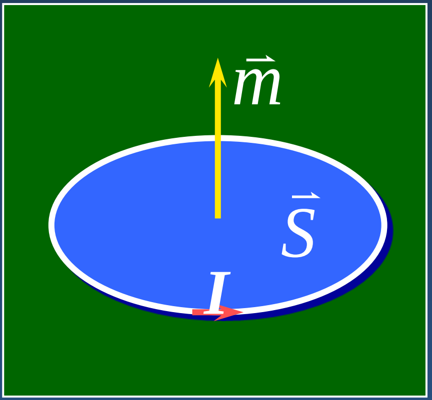
(5)



× 为正

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

(3) x>>R $\quad B=\dfrac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\dfrac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$



圆电流

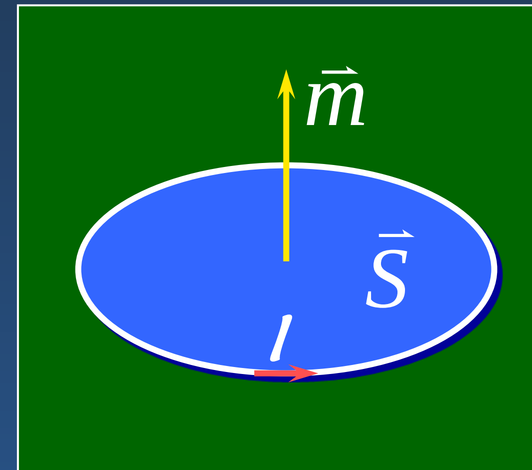
磁矩 $\quad \vec{m}=IS\vec{e}_{\mathrm{n}}$

矢量 $\vec{S}$ 的正法线方向与圆电流的流向成右手螺旋关系，其单位矢量 $\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 用表示。

N 匝圆电流的磁矩 $\quad \vec{m}=NIS\vec{e}_{\mathrm{n}}$

磁矩

$$\vec{m} = IS\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



圆电流轴线上的磁感应强度用磁矩表示

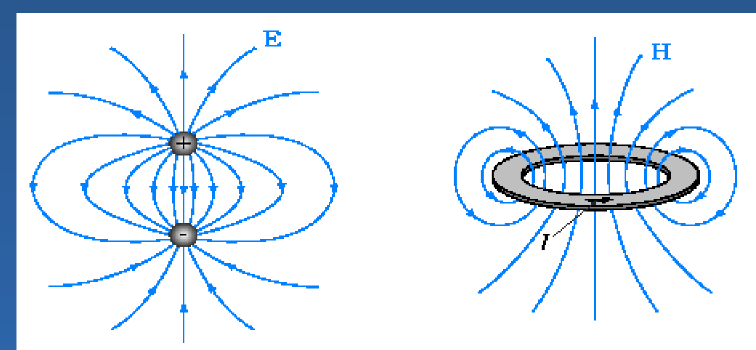
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi x^3}$$

磁偶极子

圆电流

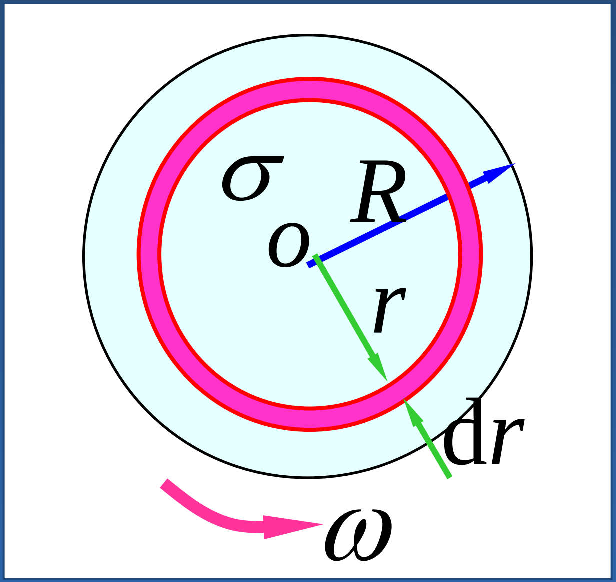
电偶极子

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}_e}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$$



(a) Electric dipole (b) Magnetic dipole

例3　半径为R的带电薄圆盘的电荷面密度为σ，并以角速度ω绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度以及磁矩.

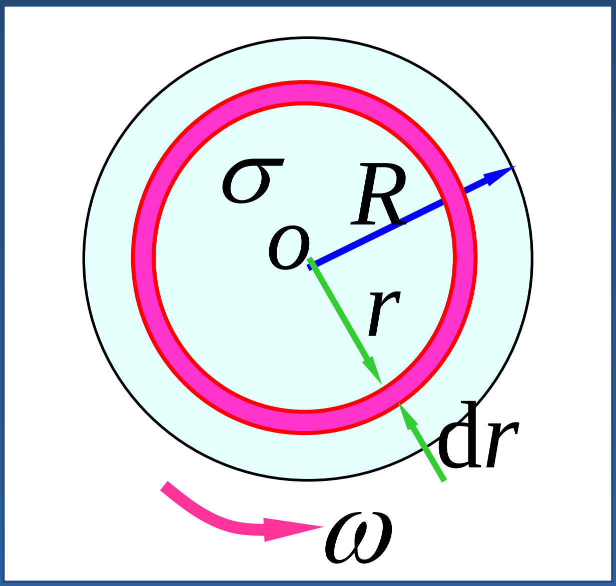


解　圆电流的磁场

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\mathrm{d}r = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$



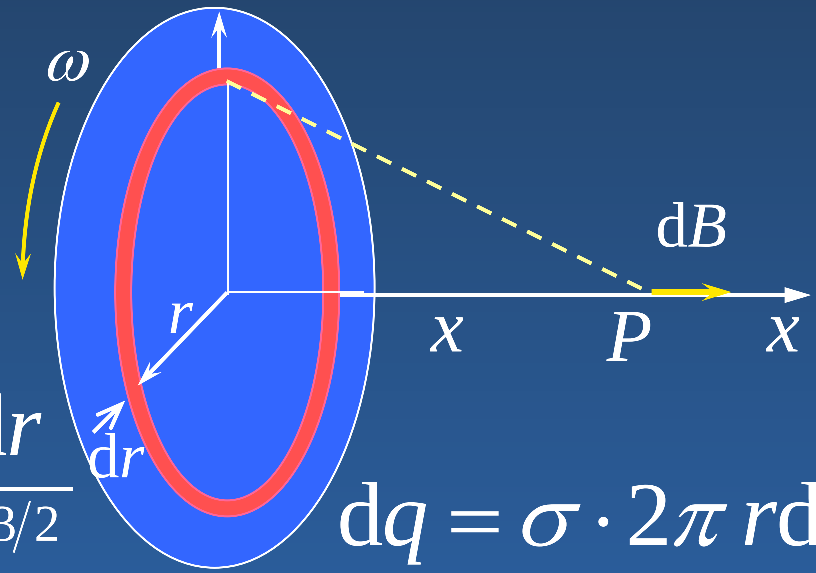
$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\mathrm{d}r = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

磁矩

$$\mathrm{d}m = \pi r^2 \mathrm{d}I = \pi r^3 \omega\sigma \mathrm{d}r$$

$$m = \int_0^R \pi r^3 \omega\sigma \,\mathrm{d}r = \frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4$$

例4 半径为R的圆盘均匀带电，电荷密度为σ。若该圆盘以角速度ω绕圆心o旋转，求轴线上距圆心x处的磁感应强度以及磁矩。



解： $$\mathrm{d}B = \frac{\mu_o r^2 \mathrm{d}I}{2(x^2+r^2)^{3/2}}$$

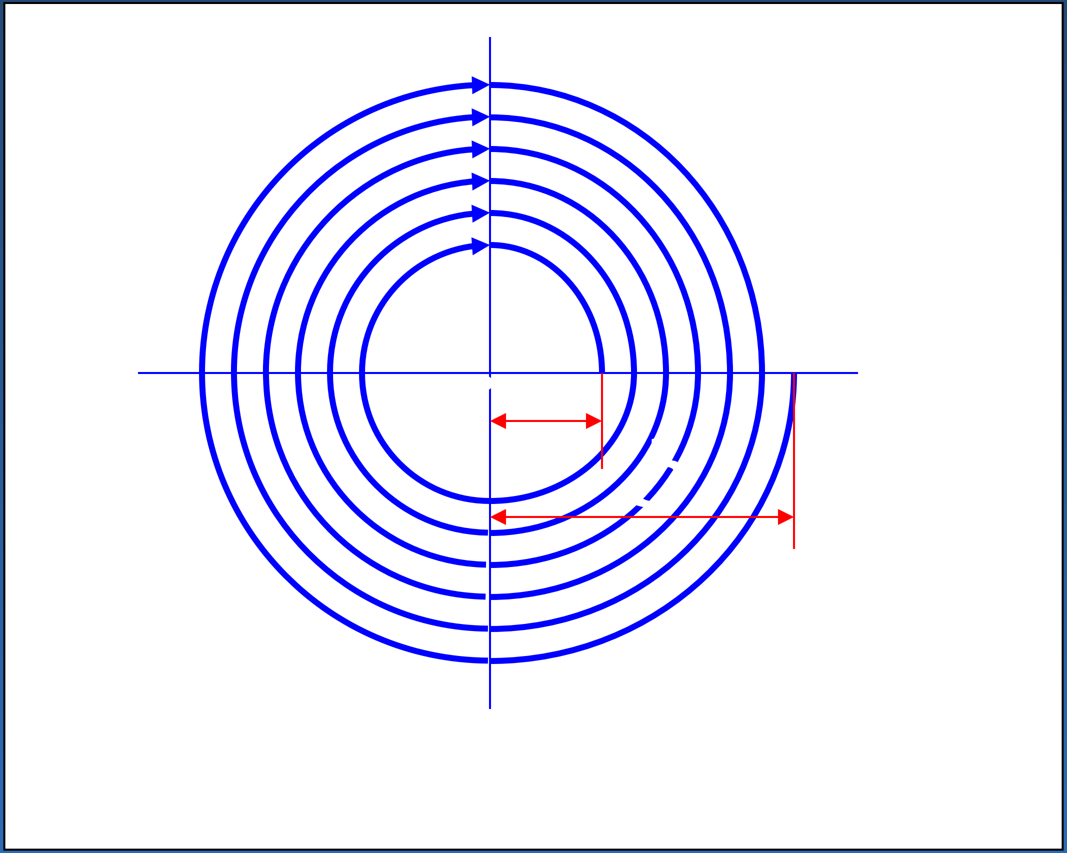
$$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q = \omega\sigma \mathbf{r}\mathbf{d}\mathbf{r}$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int_0^R \frac{\mu_o r^3 \omega\sigma \mathrm{d}r}{2(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_o \omega\sigma}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - 2x\right)$$

例5 有一蚊香状的平面 N 匝线圈，通有电流 I，每一圈近似为一圆周，其内外半径分别为a 及 b 。求圆心处 P 点的磁感应强度。



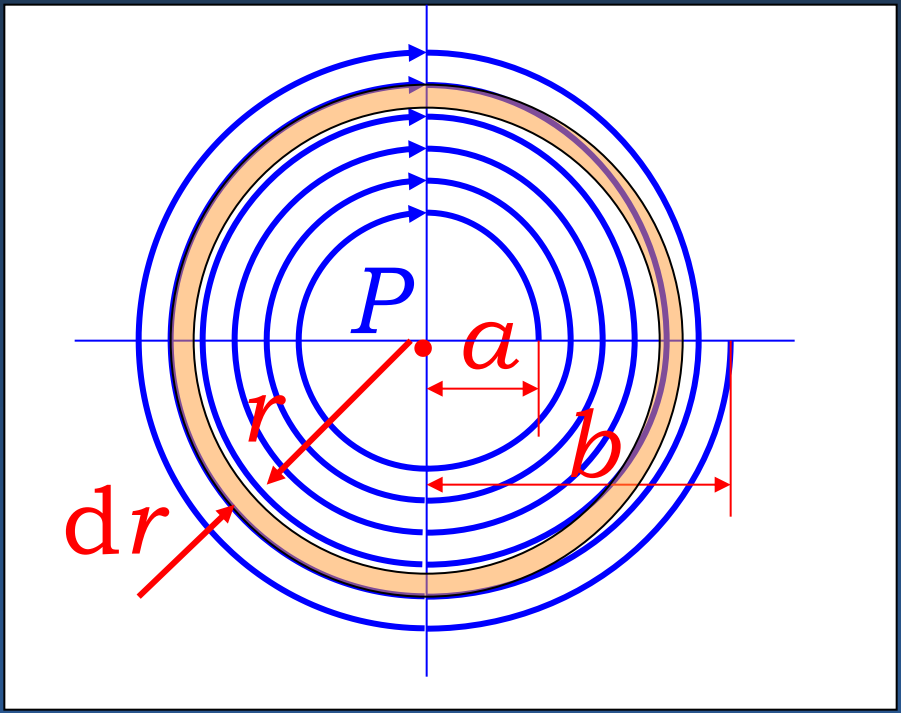
解： $\mathbf{d}B = \dfrac{\mu_o \mathbf{d}I}{2r}$

$$\mathbf{d}B = \frac{\mu_o}{2r}\frac{N}{b-a}Idr$$

$$B = \int_a^b \frac{\mu_o}{2r}\frac{N}{b-a}Idr$$

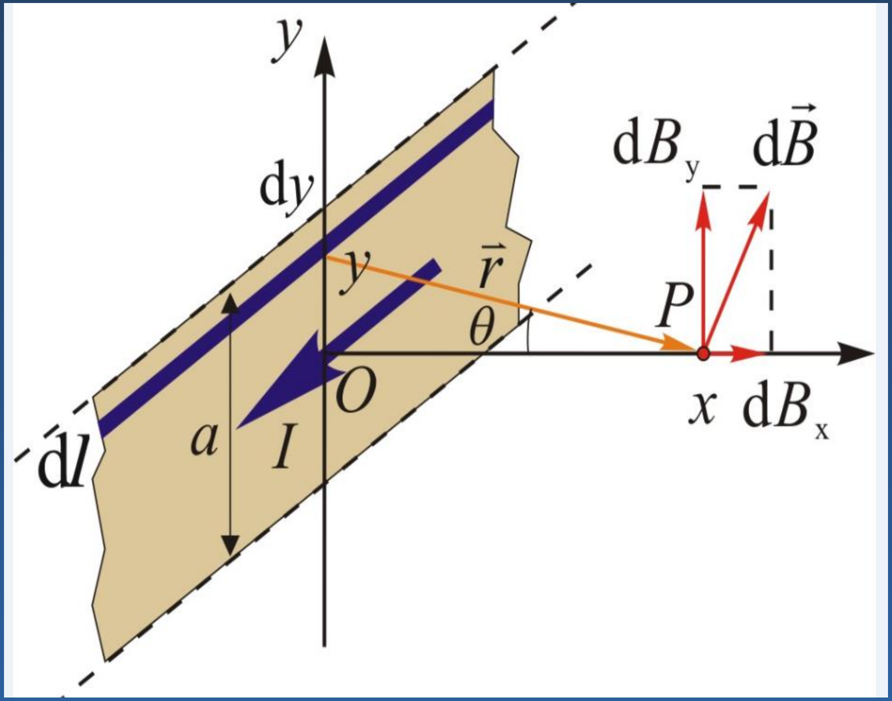
$$= \frac{\mu_o}{2}\frac{N}{b-a}\int_a^b \frac{Idr}{r}$$

$$= \frac{\mu_o}{2}\frac{N}{b-a}\ln\frac{b}{a}$$



$$\mathbf{d}I = \frac{N}{b-a}Idr$$

例6. 无限长载流平板，宽度为a，电流强度为I。求正上方处P点的磁感应强度。



解：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_o \mathrm{d}I}{2\pi r}$

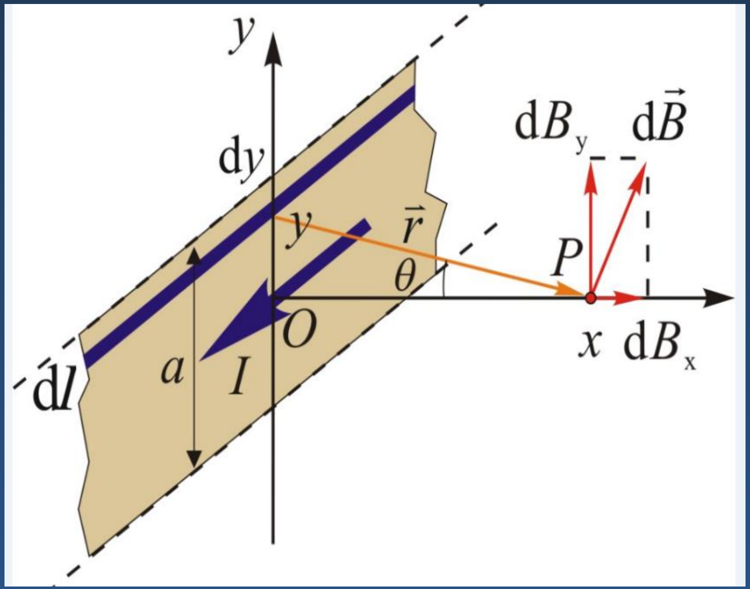
$$\mathrm{d}I = \frac{I}{a}\mathrm{d}y \quad r = \frac{x}{\cos\theta}$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_o I \cos\theta \mathrm{d}y}{2\pi a x}$$

根据对称性 $B_x = 0$ $y = x\mathrm{tg}\theta$ $\mathrm{d}y = \dfrac{x}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$

$$dB_y = dB\cos\theta$$

$$= \frac{\mu_o I d\theta}{2\pi a}$$



$$B_y = \int \frac{\mu_o I d\theta}{2\pi a} = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\int_{-tg^{-1}\frac{a}{2x}}^{tg^{-1}\frac{a}{2x}} d\theta = \frac{\mu_o I}{\pi a} tg^{-1}\frac{a}{2x}$$

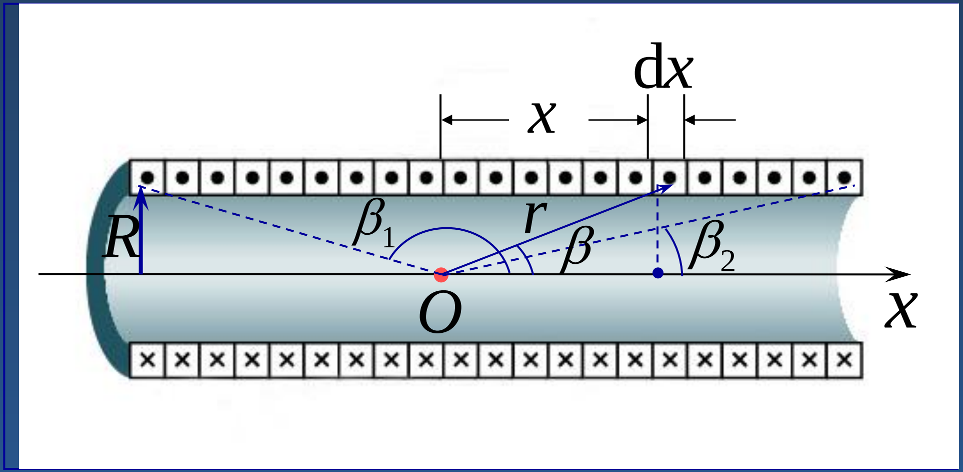
a无穷大? $B_y = \dfrac{\mu_0 I}{2a} = \dfrac{\mu_0 j}{2}$

3. 载流密绕直螺线管内部轴线上的磁场

螺线管半径为 R；

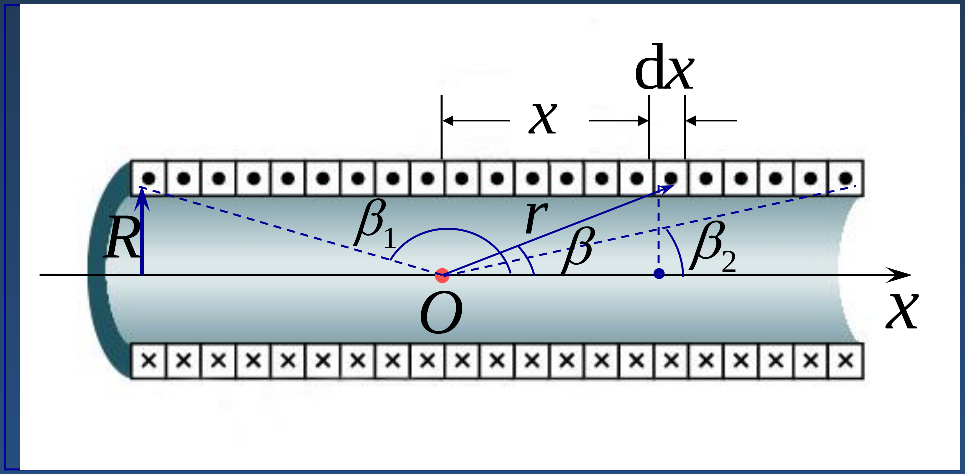
导线中电流为 I；

单位长度线圈匝数 n



在螺线管上的 x 处截取一小段 $\mathrm{d}I = In\,\mathrm{d}x$

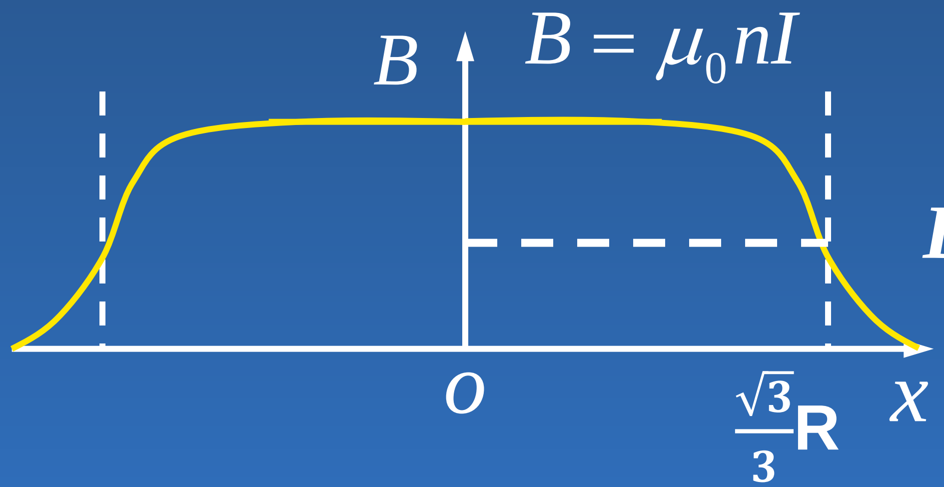
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 nI\mathrm{d}x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \qquad x = R\mathrm{ctg}\beta \qquad \mathrm{d}x = -R(\csc\beta)^2\mathrm{d}\beta$$



$$B = -\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0 n I}{2} \sin\beta \mathrm{d}\beta$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 n I(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

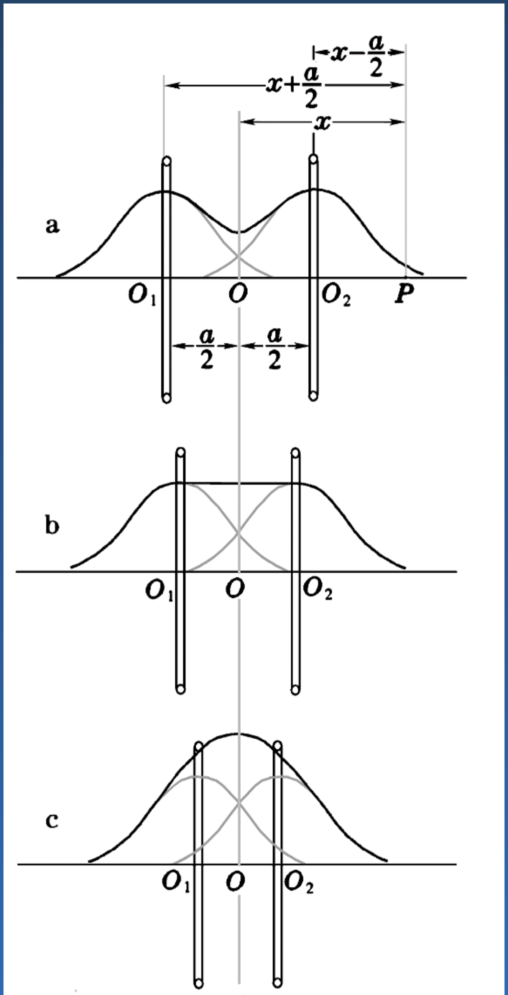
无限长螺线管 $\beta_1 = \pi \quad \beta_2 = 0 \quad B = \mu_0 n I$



4.亥姆霍兹线圈内部轴线上的磁场

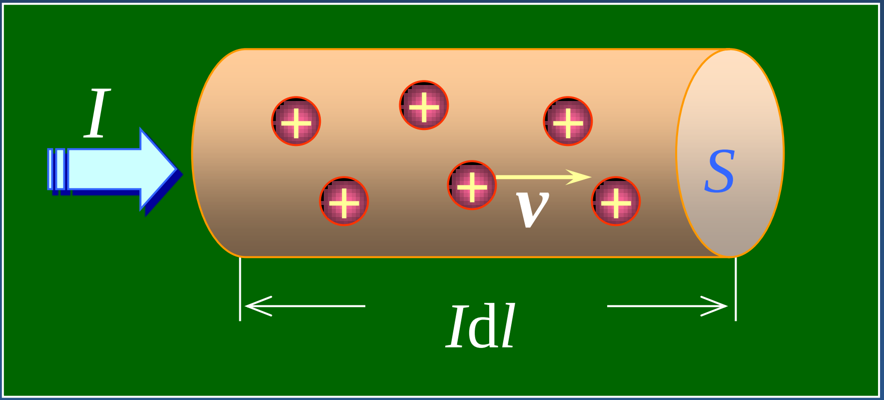
间距等于半径的一共轴圆线圈，叫做亥姆霍兹线圈。它的特点是在其轴线上与两线圈等距的中心点*O* 处附近的磁场较均匀。

4.亥姆霍兹线圈内部轴线上的磁场



三、运动电荷的磁场

$$I=\frac{dq}{dt}=\frac{nqsv\cdot dt}{dt}=nqvs$$



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_o I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$\mathrm{d}N=nS\mathrm{d}l$$

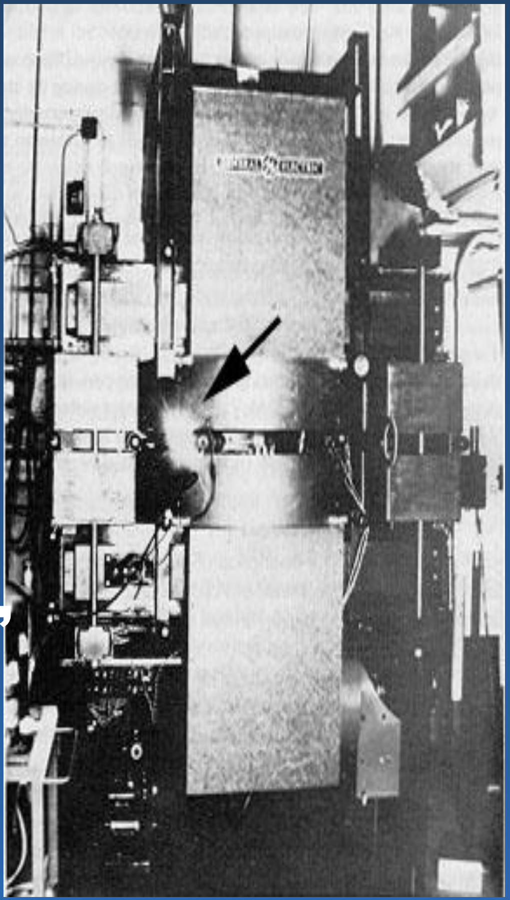
$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_o\, nq\mathrm{d}lS\ \vec{v}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}=\frac{\mu_o\,\mathbf{d}N\ q\vec{v}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$\vec{B}_0=\frac{\mu_o\ \ q\vec{v}\times\vec{e}_r}{4\pi r^2}$$

注： 电量 q 含正负号！

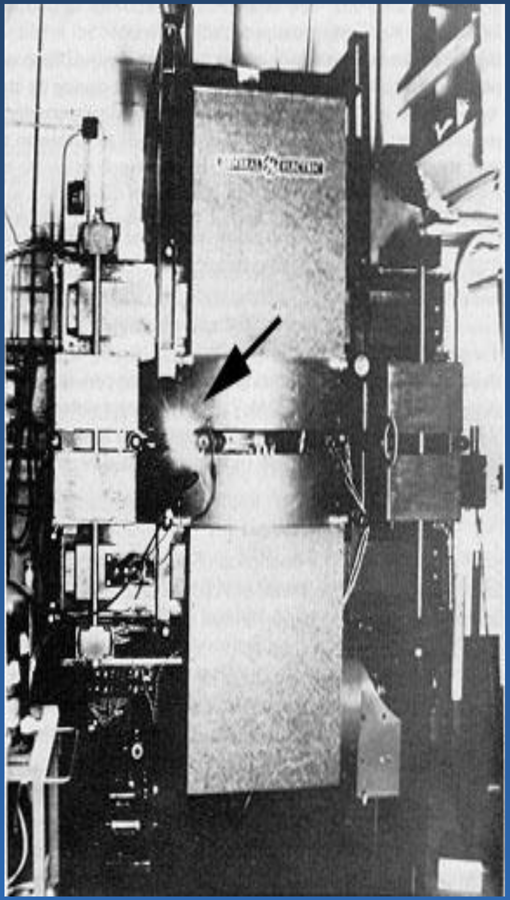
拓展-同步辐射简介

1947年4月16日，美国纽约州通用电气公司的实验室中，正在调试一台能量为70兆电子伏的电子同步加速器，偶然从反射镜中看到了在水泥防护墙内的加速器里有强烈“蓝白色的弧光”，光的颜色随电子的能量变化而变化。当电子能量降到40兆电子伏时，光变为黄色；降到30兆电子伏时，变为红色且强度变弱；降到20兆电子伏时，就什么也看不见了。



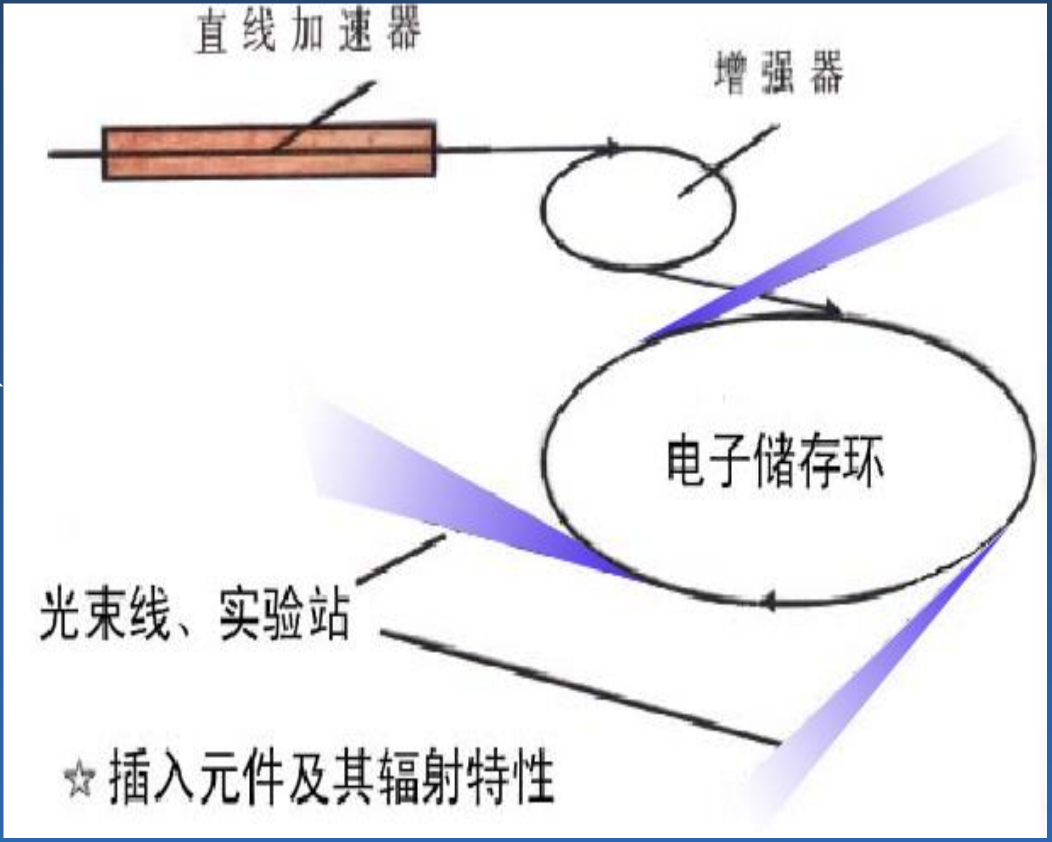
拓展-同步辐射简介

这种由电子作加速运动时所辐射的电磁波是在同步加速器上首先发现的，所以人们就称它为“同步加速器辐射”，简称“同步辐射”。“同步辐射”的发现立即在当时的科学界引起轰动，为同步辐射光的广泛应用揭开了序幕。



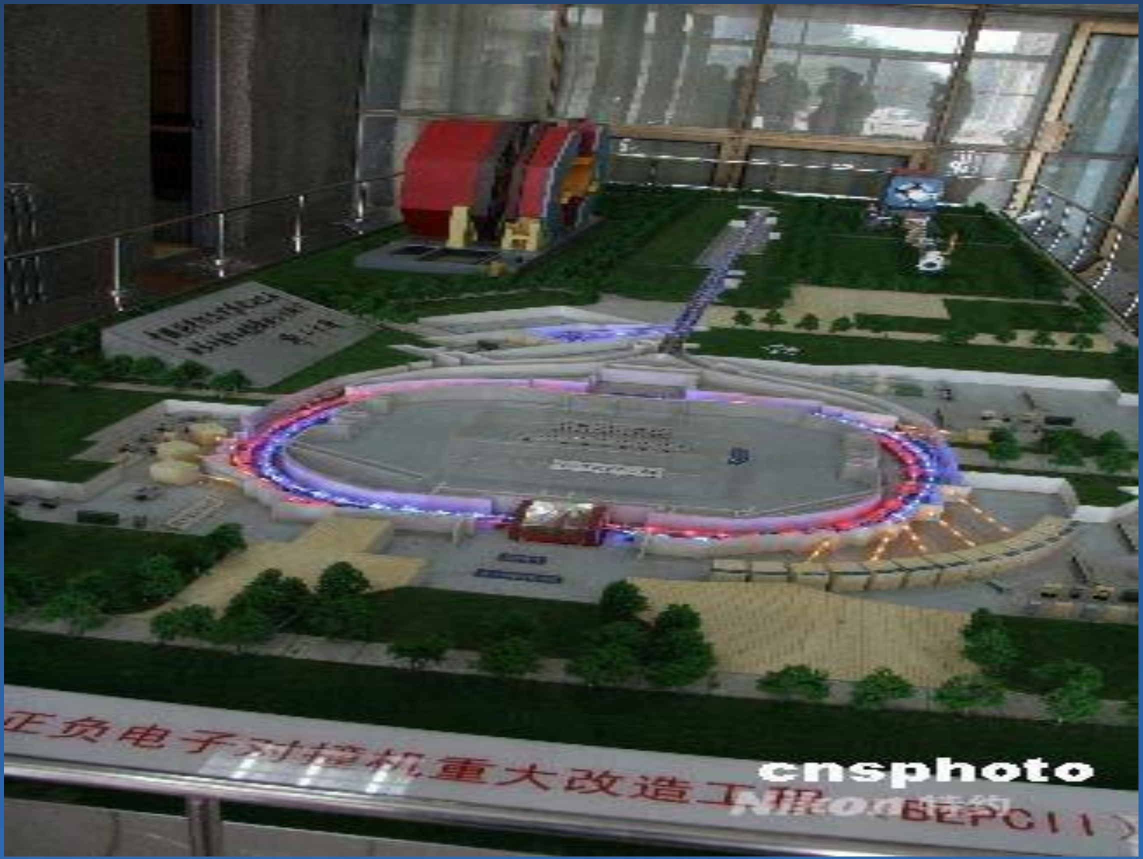
同步辐射装置

- 发生装置
- 光束线
- 实验站



同步辐射光源的原理图

我国的同步辐射装置



北京电子对撞机-同步辐射兼用模式

合肥同步辐射装置-专用模式

上海同步辐射装置(上海光源)-专用模式