第九章 多元函数微分法及其应用

9.1 多元函数的基本概念

数学与统计学院
李换琴

主要内容

1. R^n空间中点集的初步知识
2. 多元函数的概念
3. 二元函数的图形

主要内容

1. R^n空间中点集的初步知识
2. 多元函数的概念
3. 二元函数的图形

1 n维实向量空间

n维实向量 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)$

n维实向量的全体构成的集合记为：

$$R^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)|x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$$

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$， $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$. $\alpha\in R$.

定义加法 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$

数乘 $\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$

则 R^n 构成一个n维实向量空间.

2 向量的内积及长度

在 R^n 空间中定义两个向量的内积：

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

则 R^n按照内积构成一个n维Euclid空间.

x的长度(范数)定义为：

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

两点距离定义为：

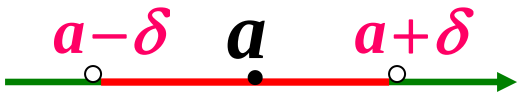
$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

3 邻域

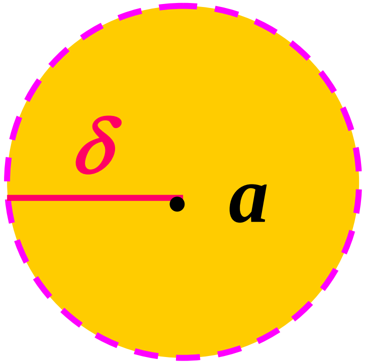
设点$a \in R^n$,常数$\delta > 0$,则称R^n中与点a的距离小于δ的点x的全体所构成的点集为点a的δ邻域,记为

$$U(a,\delta)=\{x \in R^n \mid \|x-a\| < \delta\}$$

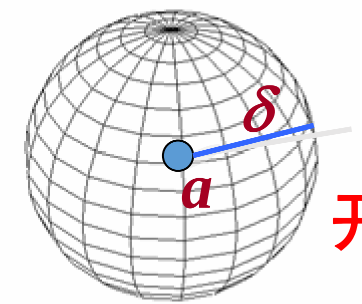
去心δ邻域 $\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x \in R^n \mid 0 < \|x-a\| < \delta\} = U(a,\delta)\setminus\{a\}$



开区间



开圆



开球

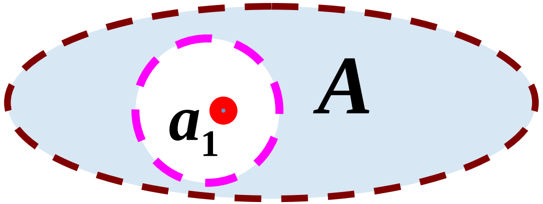
4 内点、外点与边界点

（1）内点

设 $A \subseteq R^n$，点$a_1 \in A$．如果存在点 a_1 的一个邻域 $U(a_1,\delta)$,使得$U(a_1,\delta) \subseteq A$，则称$a_1$为$A$的一个 内点.

内部：A的内点全体组成的集合.

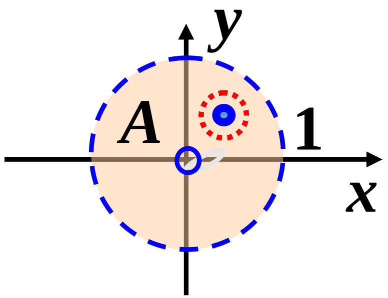
记为 A^0或int$A$.



例如

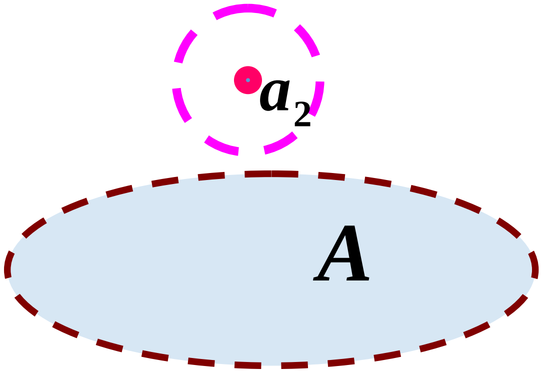
点集$A = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

$$A^0 = A$$



4 内点、外点与边界点

（2）外点

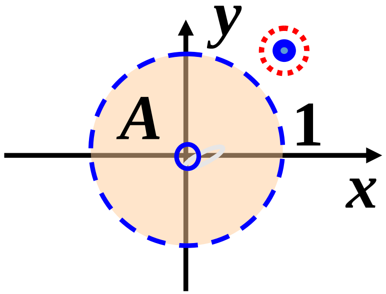


设 $a_2 \in R^n$．如果存在点 a_2 的一个邻域 $U(a_2,\delta_1)$ 使得 $U(a_2,\delta_1)$ 的点都不是 A 的点，即 $U(a_2,\delta_1) \subset A^c$，则称 a_2 为 A 的一个**外点**.

外部：A 的外点全体组成的集合. 记为 ext$A$.

例如 点集 $A=\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1\}$

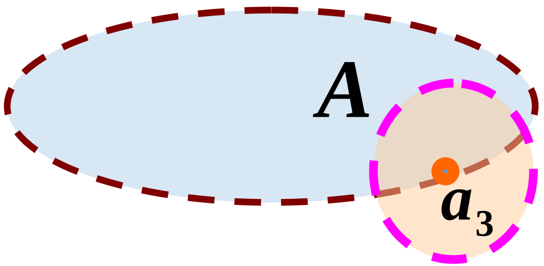
$$\mathrm{ext}A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$$



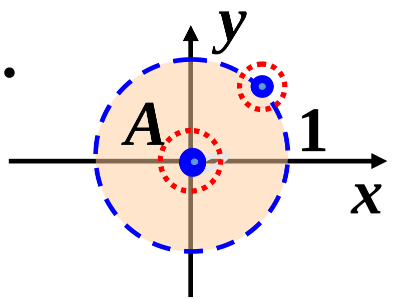
4 内点、外点与边界点

（3）边界点

设 $a_3 \in R^n$． 如果点 a_3 的任意一个邻域既含有集合A的点，又含有A^c的点,则称a_3为A的一个 边界点.



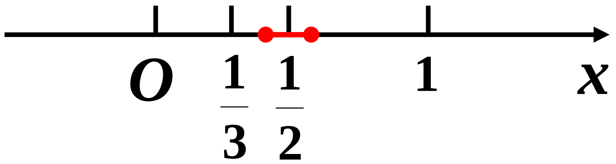
边界：A的边界点全体组成的集合．记为∂A.



例如 点集$A = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

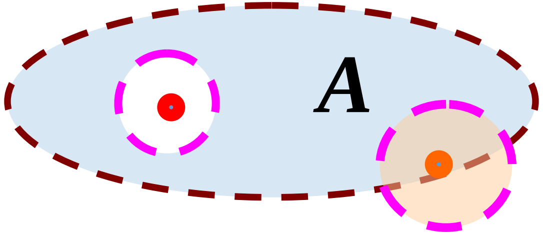
$$\partial A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

又如 点集$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$, $\partial A = A$



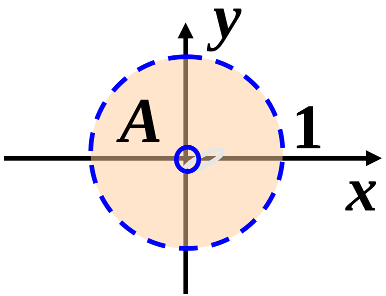
5 聚点

设点集$A \subseteq R^n$，$a \in R^n$(点a可能属于A，也可能不属于A)，如果对任何$\delta > 0$，点a的去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$中总含有A中的点.则称点a为点集A的一个**聚点**.



例如

点集$A = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$



则集合$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$中每一点都是$A$的聚点.

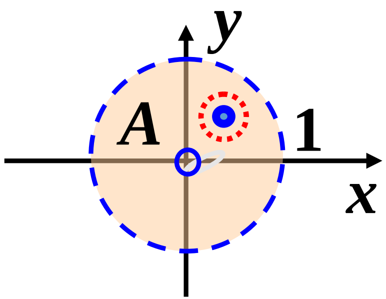
6 开集与闭集

设$A \subseteq R^n$,如果A的点都是A的内点,即$A^0 = A$,则称A为R^n的开集.

如果A的余集A^c为开集，则称A为闭集.

例如　点集$A = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

$\because A^0 = A, \quad \therefore A$为开集.

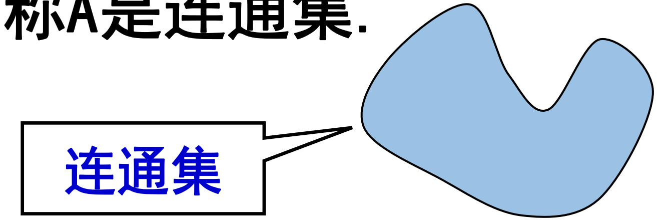


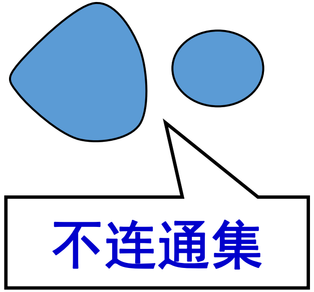
又如　$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ 是开集.

从而$B^c = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$是闭集.

7 区域

连通集： 如果A中的任意两点都能用完全属于A的有限个线段联结起来，则称A是连通集.



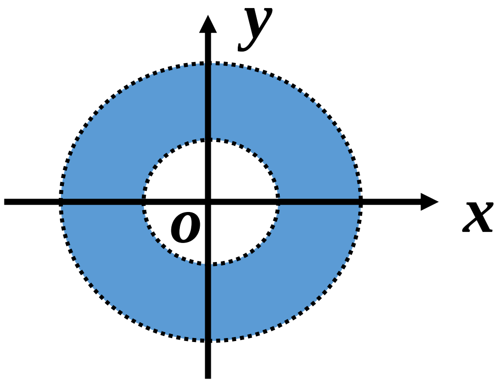


区域： 连通的开集.

闭区域： 区域与它的边界的并集.

例9： $\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 是区域.

$\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ 是闭区域.



8 有界集与无界集

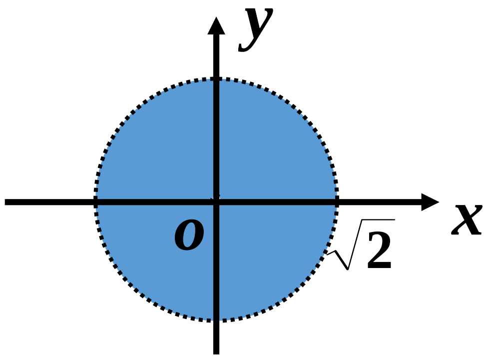
设$A \subseteq \mathbf{R}^n$，如果存在常数 $M > 0$, 使得对于所有的 $x \in A$, 都有 $\|x\| \le M$, 则称A是有界集. 否则称A为无界集.

有界集的几何意义：

有界集能被包含在以原 点O为中心、M为半径的开球$U(O, M)$中.

例如 (1) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 2\}$; 是无界集

(2) $A = \left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \middle|\ m, n \in \mathbf{N}_+\right\}$. 是有界集



主要内容

1 R^n空间中点集的初步知识

2 多元函数的概念

3 二元函数的图形

n元函数的定义

定义1 设$A \subseteq R^n$是一个点集，$f: A \to R$是一个映射，则称f是定义在A上的一个n元函数. 记作

$$w = f(x_1, x_2, \cdots x_n) \quad 或 \quad w = f(x)$$

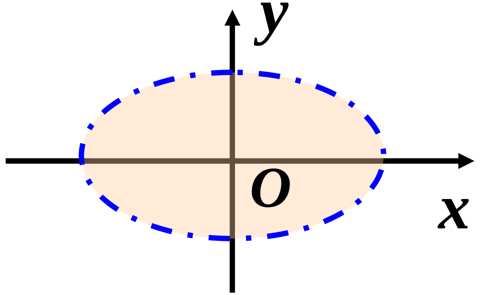
自变量： $x = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in A$，　**因变量：** w

定义域： $D(f) = A$，　**值域：** $R(f) = \{w \mid w = f(x), x \in D(f)\}$

二元函数 $z = f(x, y)$.　**三元函数：** $u = f(x, y, z)$.

例 求函数$z = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$的定义域.

解 $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\}$



主要内容

1 R^n空间中点集的初步知识

2 多元函数的概念

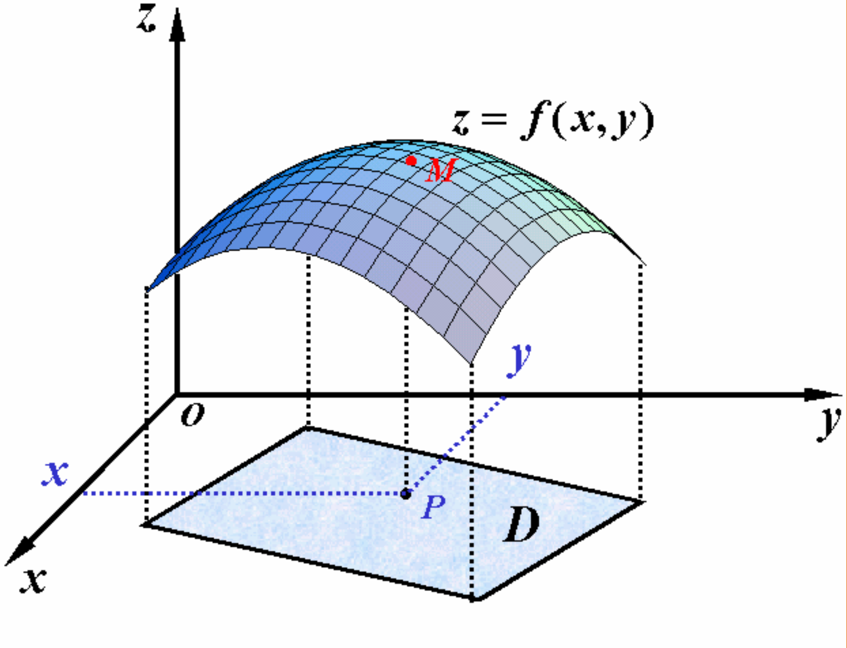
3 二元函数的图形

1 二元函数的图像

R^3中的点集

$$\{(x,y,z)\in R^3 \mid (x,y)\in D, z=f(x,y)\}$$

称为函数$z=f(x,y)$的图像.



它通常是三维空间的一张曲面.

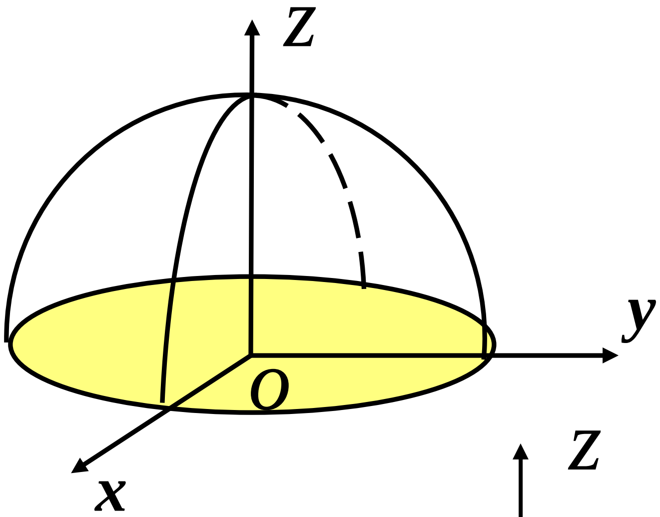
这个曲面在xOy坐标面的投影区域就是函数f的定义域.

2 二元函数的图像示例

例 下列二元函数表示怎样的图形？

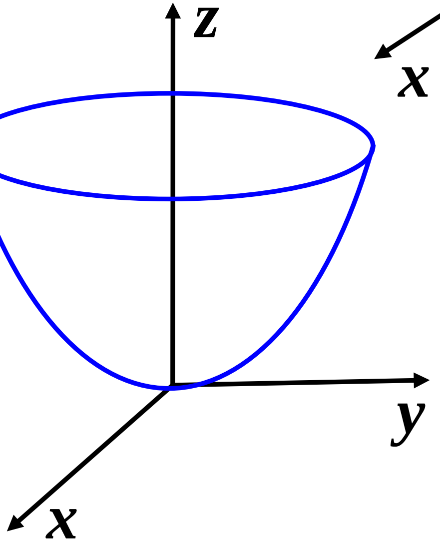
$$(1)z=\sqrt{1-2x^2-y^2}$$

上半椭球面



$$(2)z=2x^2+y^2$$

椭圆抛物面



$$(3)z=\sqrt{x^2+y^2}$$

锥面