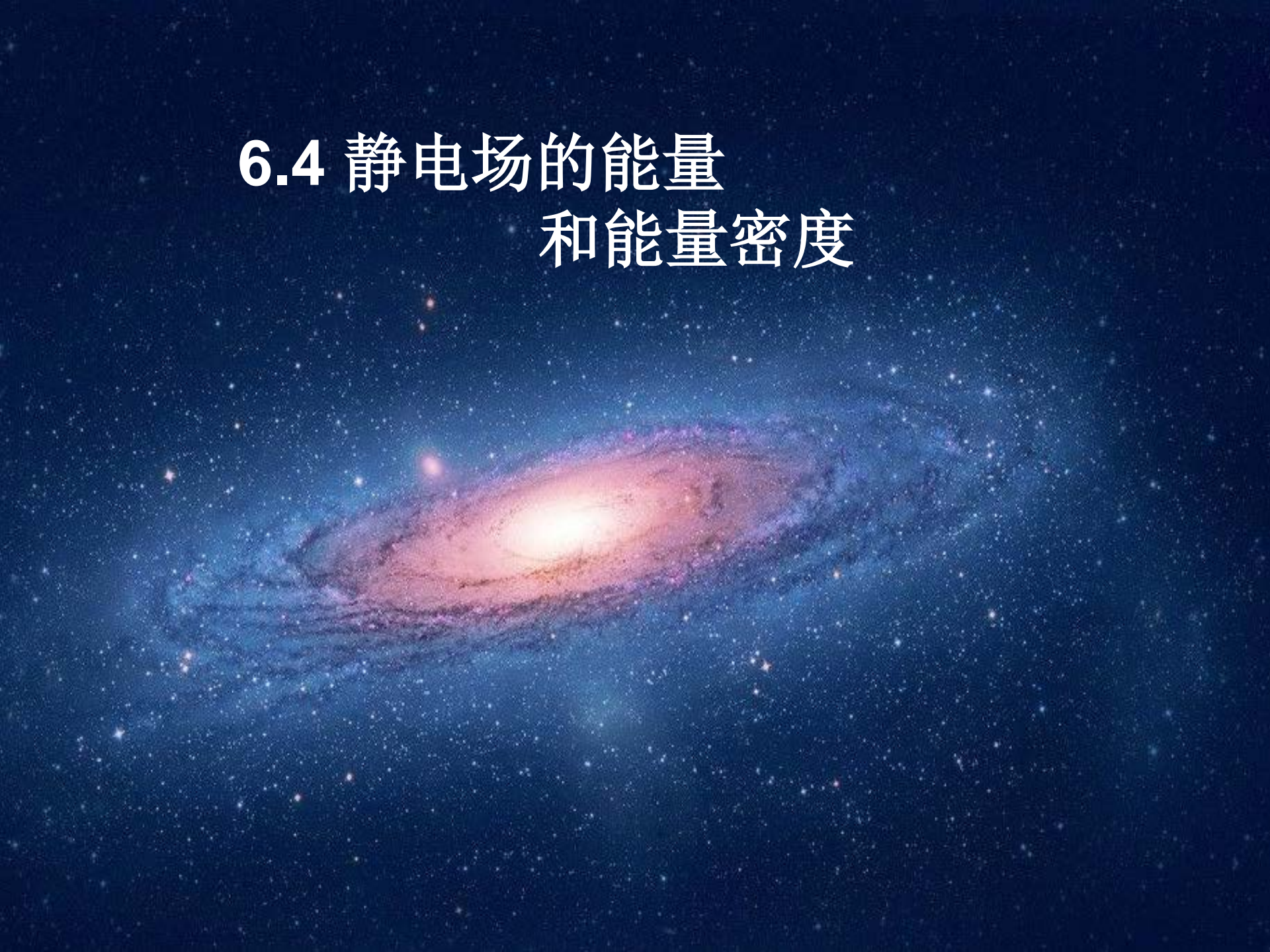
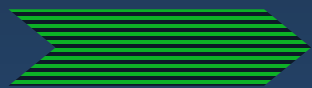


6.4 静电场的能量 和能量密度





本节内容

😊 静电场能量

1. 点电荷系的能量

2. 电容器的能量*

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

😊 静电场的能量密度*

一、点电荷系的相互作用能

1. 两个点电荷系统的相互作用能

先放 q_1 ，再放 q_2 ，外力克服静电力做功转化为体系的**静电能**：

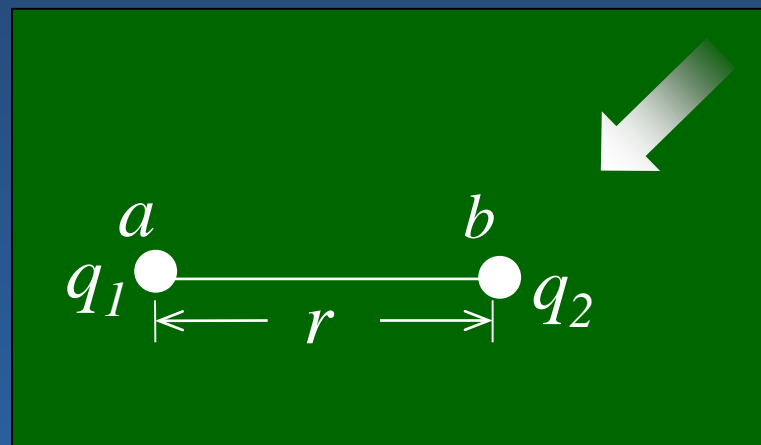
$$W_{12} = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} = q_2 V_2$$

先放 q_2 ，再放 q_1 ：

$$W_{21} = q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} = q_1 V_1$$

$$W_{12} = W_{21}$$

两个点电荷的相互作用能： $W_e = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2)$



一、点电荷系的相互作用能

2. 点电荷系的相互作用能

1) 电荷系 $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i q_i$

V_i : 除 q_i 以外的所有电荷在 q_i 处产生的电势

2) 带电体 $W_e = \frac{1}{2} \int_V V dq$

V : 所有电荷在体积元 dV 所在处激发的电势

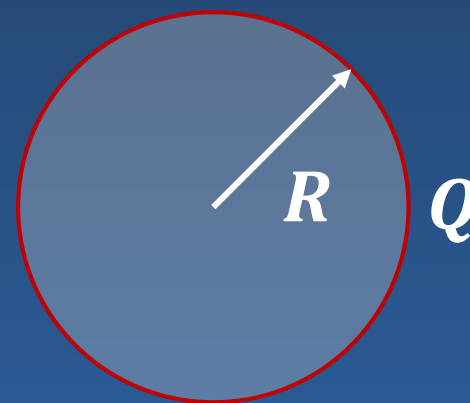
例1 均匀带电球面Q，R，求球面的静电能

解：带电球面的电势：

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

带电球面的静电能：

$$W_e = \frac{1}{2} V \int dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

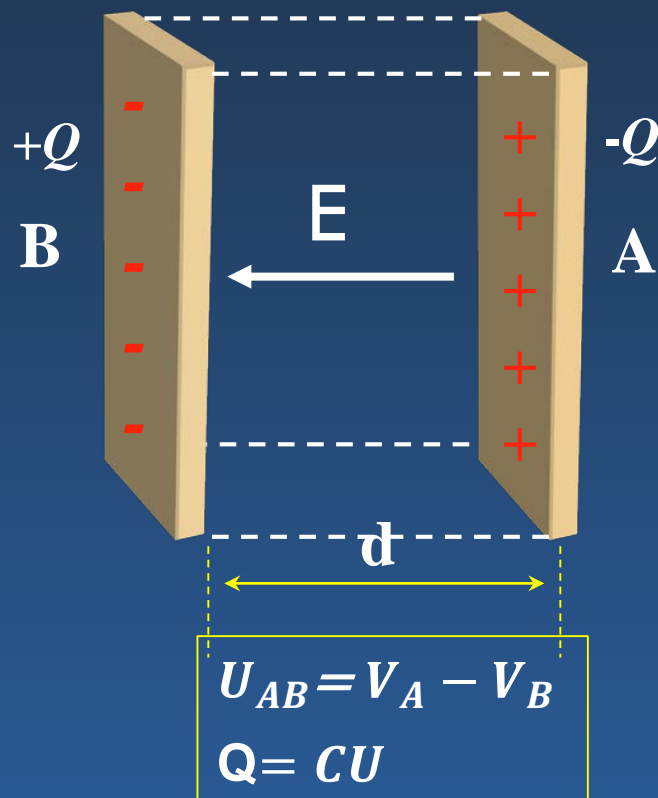


二、电容器的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \left(\int_A V dq + \int_B V dq \right)$$

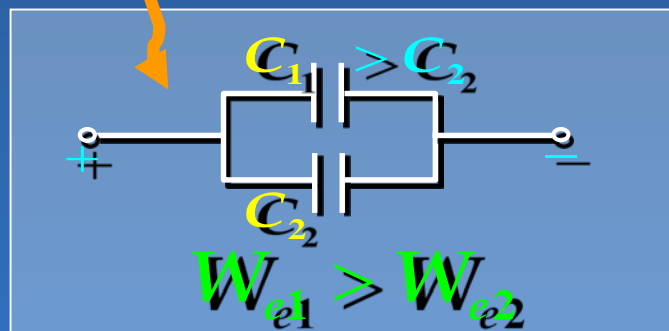
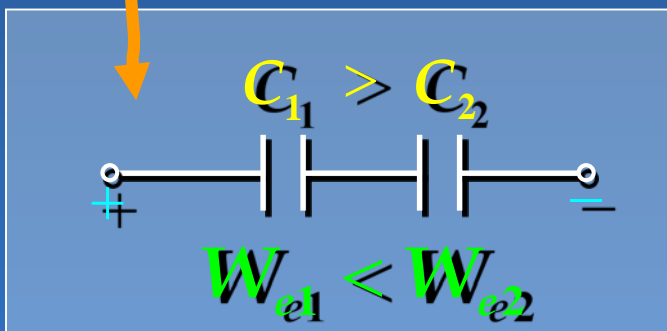
$$= \frac{1}{2} [V_A Q + V_B (-Q)]$$

$$= \frac{1}{2} Q U_{AB} = \frac{1}{2} C U_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



☺ 电容器的静电能是指存储在电容器内部的电场能量。

☺ 当 Q 一定时, $W_e \propto 1/C$; 当 U 一定时, $W_e \propto C$ 。



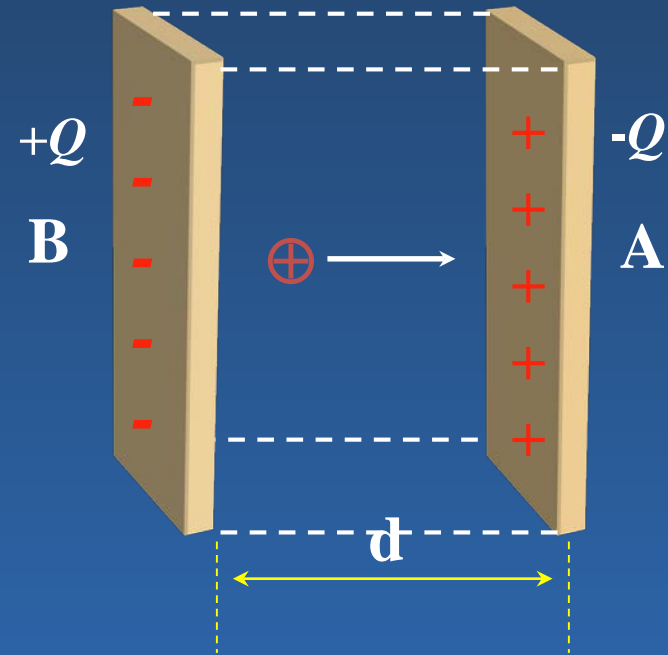
二、电容器的电场能量（另一方法）

电容器充电过程：外力不断地把电荷元 dq 从负极板迁移到正极板，外力所做的功：

$$dA = (V_A - V_B)dq = \frac{q}{C}dq$$

极板上电荷从 $0 \sim Q$ ，外力做功：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \\ &= \frac{1}{2}QU_{AB} = \frac{1}{2}CU_{AB}^2 \end{aligned}$$



外力克服电场力做功 A 等于电容器中储存的静电能 W_e ：
 $A = W_e$

三、静电场的能量

静电能也就是电场的能量，储存在电场分布的整个空间中

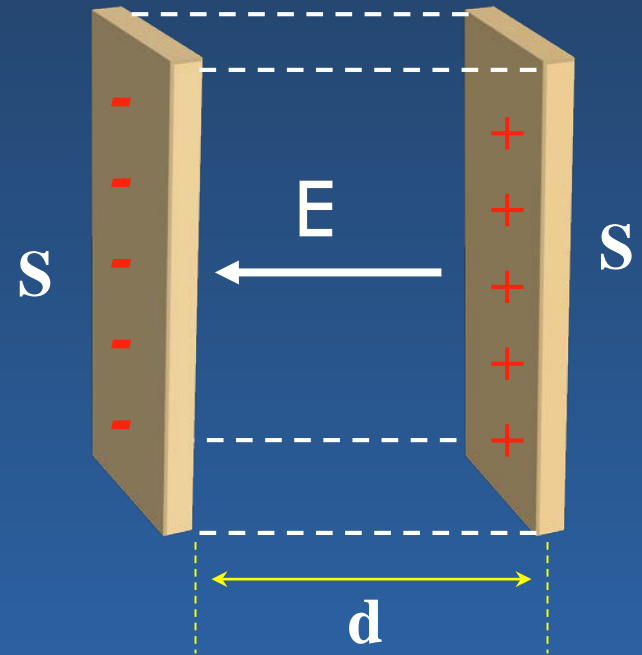
- 以平行板电容器为例

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \epsilon ES \cdot Ed \\ &= \frac{1}{2} \epsilon E^2 \cdot Sd = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V \end{aligned}$$

- 电场能量密度 $w_e = \frac{dW_e}{dV}$

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

物理意义：单位体积电场空间的能量



三、静电场的能量

- 对于任意电场: $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

对于各向同性线性电介质: $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$

- 电场中 V 空间的静电场能量为:

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E} dV$$

静电场总能量: V 遍及整个场所在的空间。

$$\text{积分体积元: } dV = \begin{cases} 4\pi r^2 \cdot dr & (\text{球对称性电场}) \\ 2\pi r l \cdot dr & (\text{柱对称性电场}) \\ S \cdot dx & (\text{面对称性电场}) \end{cases}$$

场具有能量表明场是一种物理实在, 反映场的物质性; 而不仅仅是为了解释作用力而引入的一种数学工具。

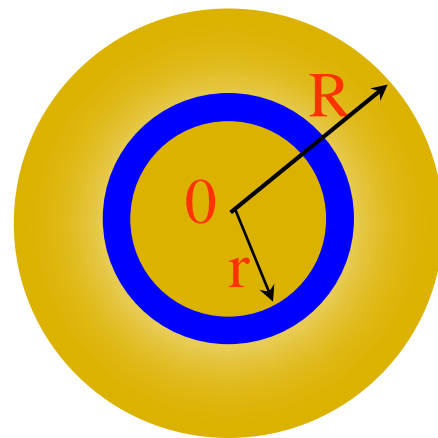
例2 一均匀带电球体，半径为 R ，带电量为 q 。
求带电球体的静电能。

解： 场强分布

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R)$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

$$\begin{aligned} W &= \int w_e dV = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV \\ &= \int_0^R \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$



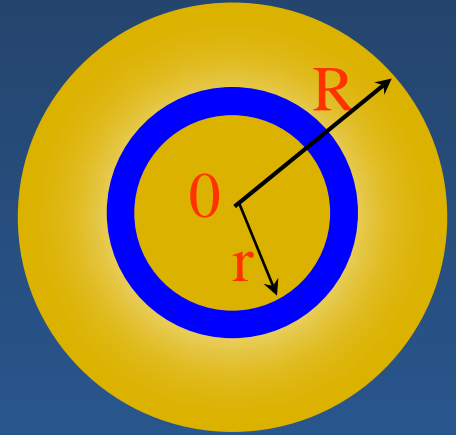
思考题

利用静电能公式如何均匀球体的静电能？

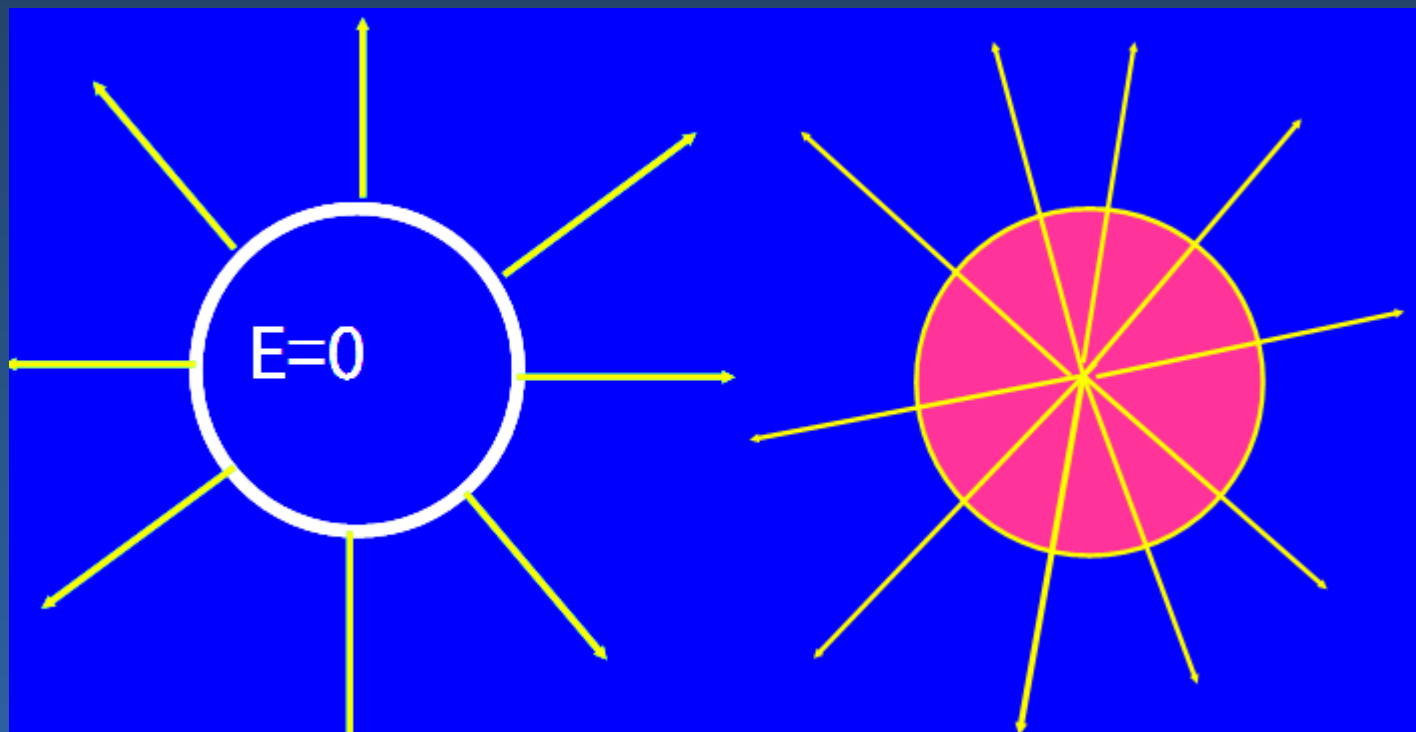
$$\varphi_{\text{内}}(r) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R \varphi_{\text{内}} \rho 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$



试比较均匀带电球面和均匀带电球的静电能



均匀带电球面和均匀带电球外的电场分布相同，因此后者的静电能大于前者的静电能.

例3 面积为 S ，带电量为 $\pm Q$ 的平行平板(空气中)。忽略边缘效应，问：将两板从相距 d_1 拉到 d_2 外力需要作多少功？

分析：外力做功= 电场能量增量

$$\text{解： } W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 V,$$

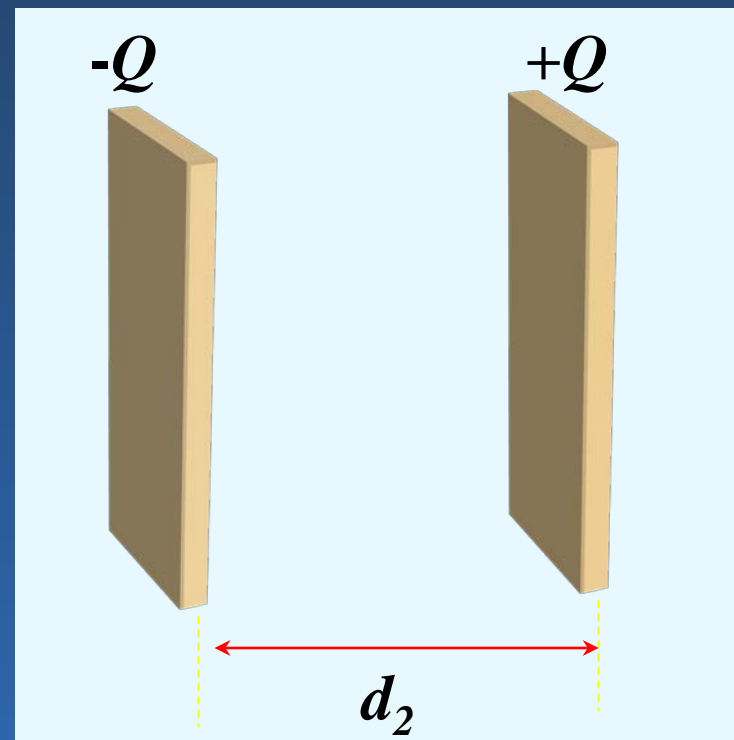
$$\Delta W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \Delta V$$

$$\Delta V = S(d_2 - d_1), \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

$$A = \Delta W$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{S\epsilon_0} \right)^2 S(d_2 - d_1)$$

$$= \frac{Q^2(d_2 - d_1)}{2\epsilon_0 S}$$



例4 空气平板电容器，极板面积为 S ，间距为 d ，今以厚度为 d' 的铜板平行地插入电容器内。

1、计算电容器电容。

2、充电到电势差为 V 后，断开电源抽出铜板需做功多少？

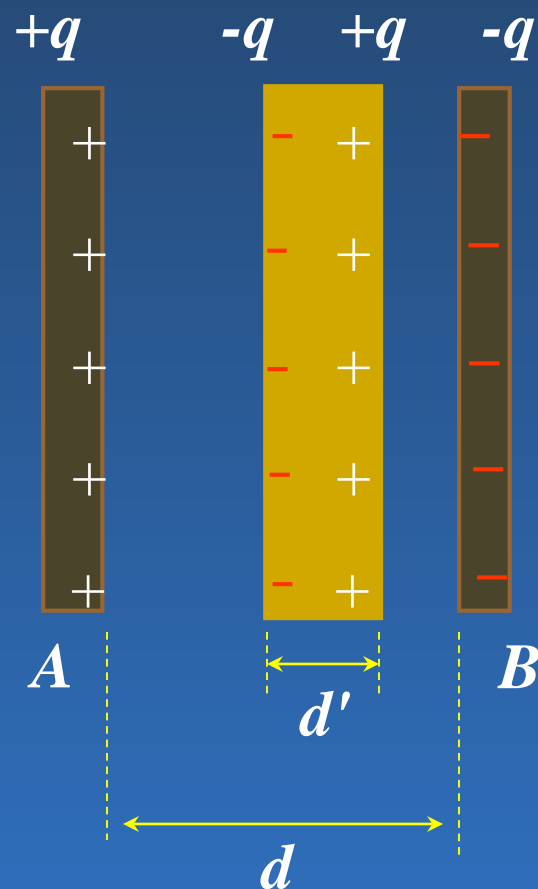
解： 1、铜板插入前的电容： $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

设极板带电为 $\pm q$

铜板内 $E = 0$ 外 $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$

$$\begin{aligned} V_A - V_B &= E_0 d_1 + E_0 d_2 \\ &= E_0 (d - d') = \frac{q(d - d')}{\epsilon_0 S} \end{aligned}$$

$$C' = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d - d'}$$



2、电容器充电到电势差为 V 时，极板带电量为

$$Q = C'V$$

$$W' = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'}, \quad W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

抽出铜板外力所做的功等于电场能量的增量：

$$\begin{aligned} A = W - W' &= \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'} \right) = \frac{Q^2}{2} \frac{d'}{\epsilon_0 s} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 s}{d - d'} \right)^2 V^2 \frac{d'}{\epsilon_0 s} = \frac{\epsilon_0 s V^2 d'}{2(d - d')^2} \end{aligned}$$

归纳

1. 点电荷系的静电能

1) 不连续点电荷 $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i q_i$

2) 连续带电体 $W_e = \frac{1}{2} \int_q V dq$

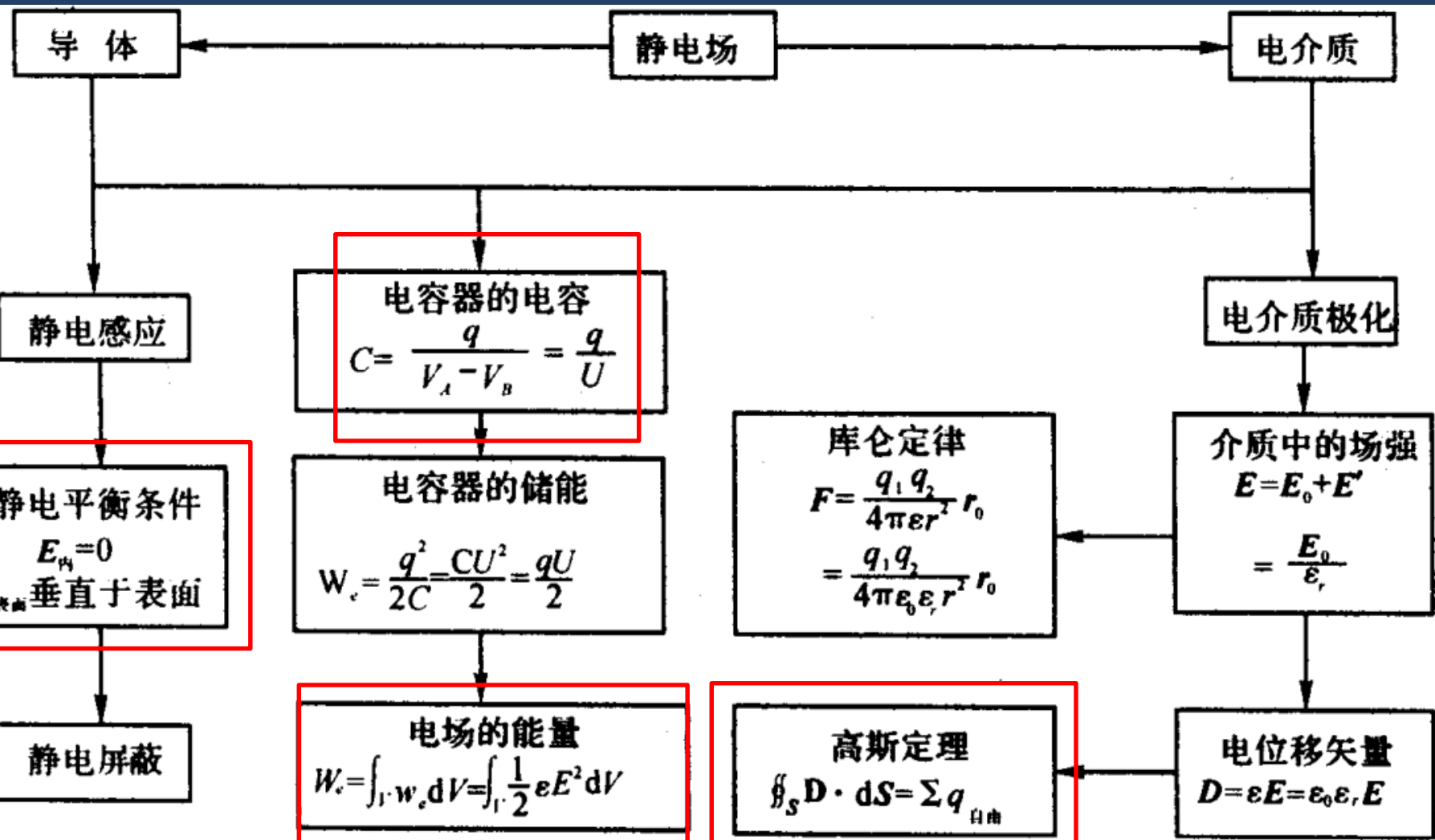
2. 静电场的能量密度:

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE$$

3. 静电场能量:

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \cdot dV$$

电容器储存的能量: $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$



课后作业

大学物理学习指导——第十三章 导体
第十四章 电介质与电容

10月10日之前各班学委收集好发送压缩包给我