附录：部分习题参考答案

习题 1.1

1. $5\boldsymbol{\alpha}-11\boldsymbol{\beta}+7\boldsymbol{\gamma}$.

2. $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha},\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$.

3. (用定义判断) (1) 线性相关； (2) 线性相关； (3) 线性无关； (4) 线性无关.

习题 1.2

1. (1) -3; (2) 19; (3) -1; (4) $-\dfrac{3}{2}$.

2. 否.

3. $-\dfrac{2}{3}$.

4. 22.

习题 1.3

1. (1) $(-2,0,2)$; (2) $(-3,8,3)$; (3) $\boldsymbol{\alpha}^0=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-1,2,3),\boldsymbol{\beta}^0=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3),\boldsymbol{\gamma}^0=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$.

2. $x=0,y=-\dfrac{1}{2}$.

3. (1) -7; (2) $(7,7,7)$; (3) $\dfrac{2\pi}{3}$; (4) $\dfrac{2}{\sqrt{14}},\dfrac{-3}{\sqrt{14}},\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

4. 2.

5. (1) $(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c)$; (2) $(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c)$; (3) $(-a,-b,-c)$.

6. xOy 平面：$(x_0,y_0,0)$; yOz 平面：$(0,y_0,z_0)$; zOx 平面：$(x_0,0,z_0)$; x 轴：$(x_0,0,0)$, y 轴： $(0,y_0,0)$; z 轴： $(0,0,z_0)$.

7. (A) IV;(B) V;(C) VIII;(D) III.

8. $B(6,7,10)$.

9. $(0,1,-2)$.

10. (1) $\dfrac{\sqrt{1106}}{2}$, (2) $\dfrac{68}{3}$.

11. (1) 不共面； (2) 共面.

12. 11.

习题 1.4

1. (1) $x+3y=0$; (2) $9y-z-2=0$; (3) $7x+3y-2z-23=0$; (4) $3x+y+14z-19=0$; (5) $x-3y-7z+4=0$; (6) $4x+3y-6z+12=0$.

2. 1.

3. $c=-6,d$ 任意； $c=-6,d=-\dfrac{5}{2}$.

习题 1.5

1. (1) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{5}$; (2) $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{0}=0$; (3) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$; (4) $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2}$.

2. (1) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-3}{5}$; $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$, (2) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-5}{9}=\dfrac{z+1}{-4}$; $\begin{cases} x=1+3t \\ y=5+9t \\ z=-1+-4t \end{cases}$.

3. 是, $2x-z=0$.

4. (1) 垂直相交, $(3,-1,-2)$;(2) $(-3,14,-9)$;(3) 直线在平面上.

5. 3.

6. $\dfrac{2\sqrt{35}}{35}$.

7. $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.

8. $l_0:\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$.

9. $\lambda=\dfrac{5}{4}$.

10. $(0,-1,1),\arcsin\dfrac{15}{19}$.

11. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

习题 2.1

1. (1) 是; (2) 否; (3) 否; (4) 是.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, 第一个不是解, 第二个是解.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$.

4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -21 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 123 & 100 & 9 \\ 98 & 131 & 19 \\ 100 & 90 & 26 \end{pmatrix}$; 商品 3 的销售情况; 第一季度各商品的销售情况; 分别

用第 2 列和第 3 行表示.

习题 2.2

1. 第 1,2 个不是，第 3 个是.

3. 无解； $x_1=5/2,x_2=-1/2,x_3=0$; 无解.

5. 可以.

7. $x_1=-1,x_2=2,x_3=3$; $x_1=t,x_2=4,x_3=0,\ t\in R$; $x_1=1-2t_1-2t_2,x_2=t-1,x_3=1-t_2,x_4=t-2\ t\in R$; 无解.

9. (1) 无解； (2) $x_1=-1,x_2=3,x_3=2$;(3) $x_1=0,x_2=0,x_3=0$.

10. $k\neq-2;k=-2$.

12. $y=\dfrac{2}{15}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{71}{30}$.

13. 2000,4000,4000.

习题 2.3

1. (1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\6&12\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\9&12\end{pmatrix}$;
(2) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$;

(4) 参考 (3).

2. (1) $\begin{pmatrix}8&-4&1\\5&4&-2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&8&1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}27&-14&3\\17&12&-7\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}-19&-9\\-1&-7\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-21&10&3\\-2&-4&4\\-1&2&-1\end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$; (2) 32; (3) $\begin{pmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}4&8&12\\5&10&15\\6&12&18\end{pmatrix}$; (5) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+(a_{12}+a_{21})x_1x_2$; (6) $\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$.

4. 都不成立.

5. 用数学归纳法.

6. 根据对称矩阵和反对称矩阵的定义直接证明.

7. 根据定义直接证明.

8. 用定义，注意对角矩阵表示为：如果 $i\neq j$, $a_{ij}=0$.

9. 用定义，注意上三角矩阵表示为：如果 $i>j$, $a_{ij}=0$.

习题 2.4

1. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

习题 3.2

1. 1; 9; -1; -1; -1
2. (1) $a-1$; (2)0,(提示： $r_3=-2r_1$) (3)0
3. (1)-3(提示：行和为 3) (2)$acxu-awdx-ycbu+ywbd$
4. (1) 提示：拆分第一列和第二列

2)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^3-ba^2 & c^3-ca^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b+a)(b-a) & c(c-a)(c+a) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c(c-a)(c+a)-(c-a)b(b+a) \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \end{aligned}$$

5. (1)$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$ (2) $(1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i})n!$(提示： $c_1-\frac{1}{2}c_2-\cdots-\frac{1}{n}c_n$)
6. 3, 0; 10
7. 提示： $A^{\mathrm{T}}=-A \Rightarrow \left|A^{\mathrm{T}}\right|=(-1)^n|A|$ 且 $\left|A^{\mathrm{T}}\right|=|A|$
8. $|AB|=|A||B|=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

习题 3.3

1. (1)$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (3)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2. 提示：

$$A^2-A-2E=0 \Rightarrow A\frac{1}{2}(A-E)=E;$$

$$A^2-A-2E=0 \Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{3}(A-3E)\right]=E$$

3. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) 32 (4) $-\frac{125}{54}$ (5) 16

4.$A^* = |A|\, A^{-1} \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$， $A^* = |A|\, A^{-1} \Rightarrow (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$

6.$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

7.$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\cdot(-1)^k + 3\cdot 2^k & -3\cdot(-1)^k + 3\cdot 2^k \\ 2\cdot(-1)^k - 2\cdot 2^k & 3\cdot(-1)^k - 2\cdot 2^k \end{pmatrix}$

习题 3.4

1. (1) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{11}{19}, x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{7}{38}$

习题 3.5

1. (1) 3; (2)3
2. 不一定；不一定；有
3. (1) 1; (2)3 ; (3)2
4. 提示：由克莱姆法则可得结果

习题 3.6

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. (1)$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$

3. (1) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

4. 提示： $\forall P$ 可逆， $PA = B$

习题 3.7

1.3

2. 2,5,8

习题 4.1

1、$\alpha=(1,2,3,4)$

2、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3、$\begin{cases} k_1+2k_3=1 \\ k_1+k_2+k_3=2 \\ -k_1-2k_2+2k_3=3 \end{cases}$

4、（略）

5、$\beta=2\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3$

6、（1）$c=-4, d\neq 0$;（2）$c\neq -4$;（3）$c=-4, d=0$。

习题 4.2

1、线性相关

2、$a=5$

3、提示 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=x_1\alpha_1+(x_1-x_2)\alpha_2+(x_1-x_2-x_3)\alpha_{31}$

4、设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$，$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{pmatrix}$，则题意知 $r(A)=r(\widetilde{A})$。必要性：方程 $AX=\beta$ 只有唯一解，所以 $r(A)=3$，即 $\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$ 线性无关；充分性：$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$ 线性无关，所以 $r(A)=3$，所以 $AX=\beta$ 只有唯一解。

5、略

习题 4.3

1、提示：可相互线性表示

2、（1）秩=2， α_1，$\alpha_{,2}$ 为一个极大无关组

（2）秩=3，α_1，$\alpha_{,2}$，α_3 为一个极大无关组

3、（1）因为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 α_1，$\alpha_{,2}$，$\alpha_{,3}$ 为一个极大无关组，

且$\alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$。

（2）因为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以$\alpha_1$，$\alpha_{,2}$为一个极大无关组，且

$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$。

4、由题意知存在 n 阶方阵K使得$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} K$，故

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$，所以$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n$线性无关。

5、必要性：根据定理 4.2.8；充分性：根据题 4 结论。

6、略

习题 4.4

1、（1）是，（2）是，（3）不是

2、因为$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$，所以$\alpha_1, \alpha_2$与$\beta_1, \beta_2$等价，故

$V_1 = V_2$，$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$即为所求过渡矩阵。

3、证明：由于$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$，所以$\alpha_1$，$\alpha_{,2}$，$\alpha_{,3}$线性无关，对于$\forall \alpha \in R^3$，因为，

α_1，$\alpha_{,2}$，$\alpha_{,3}, \alpha$线性相关，故α可由α_1，$\alpha_{,2}$，$\alpha_{,3}$线性表示，因而，α_1，$\alpha_{,2}$，$\alpha_{,3}$是R^3的一组基，$\beta = \frac{5}{7}\alpha_1 + \frac{10}{7}\alpha_2 - \frac{1}{7}\alpha_3$。

习题 4.5

1、（1）基础解系$\xi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$，通解$X = k\xi$，$\forall k \in R$；

（2）基础解系$\xi = \begin{pmatrix} 4/3 & -3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}^T$，通解$X = k\xi$，$\forall k \in R$

2、（1）无解；（2）通解$X = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\forall k_1, k_2 \in R$。

3、基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$ ，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，$B=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\end{pmatrix}$。

4、秩=2

5、$\begin{cases} x_2-2x_1=1 \\ x_3=x_1 \\ x_4+x_1=1 \end{cases}$

6、证明：（1）假设η^*，η_1，$\eta_{,2},\cdots$，η_{n-r}线性相关，则η^*可由η_1，$\eta_{,2},\cdots$，η_{n-r}线性表示，故η^*亦为对应齐次方程的解，矛盾，故得证。（2）（η^*，$\eta^*+\eta_1$，$\eta^*+\eta_{,2},\cdots$，$\eta^*+\eta_{n-r}$）=（η^*，η_1，$\eta_{,2},\cdots$，η_{n-r}）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n-r+1}$，因为$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}\neq 0$，所以两向量组等价，故$\eta^*$，$\eta^*+\eta_1$，$\eta^*+\eta_{,2},\cdots$，$\eta^*+\eta_{n-r}$线性无关。

习题 5.1

1. $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. 1,4,5.

3. $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.

$$(1) \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

习题 5.2

1. (1) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, 对应于 $\lambda_1 = 2$, 的所有特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .k_1 \neq 0$.

对应于 $\lambda_2 = 3$, 的所有特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} .k_2 \neq 0$.

(2) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$, 对应于 $\lambda_1 = -1$, 的所有特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .k_1 \neq 0$.

对应于 $\lambda_2 = 0$, 的所有特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .k_2 \neq 0$. 对应于 $\lambda_3 = 9$, 的所有特征向量为 $k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .k_3 \neq 0$.

(3) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 对应于 $\lambda_1 = 1$, 的所有特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .k_1 \neq 0$.

对应于 $\lambda_2=2$, 的所有特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.k_2\neq 0$. 对应于 $\lambda_3=3$, 的所有特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.k_3\neq 0$.

2. $\lambda=1,k=2$.

3. $3A+4E$ 的特征值为 $7,10,13,\cdots,3n+4$, A^2+A 的特征值为 $0,2,16,\cdots,(n-1)n$, $|3A+4E|=7\times 10\times 13\times\cdots\times(3n+4)$.

7. $\frac{|A|}{\lambda}$.

习题 5.3

1. $x=0,y=4$.

2. (1) 不能对角化， (2) 在实数范围内不能对角化， (3) 可对角化， $\wedge=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$, (4) 不能对角化.

3. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}$.

习题 5.4

1. 对应于 $\lambda_1=6$ 的所有特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.k\neq 0$.

2. (1)$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

(2) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

习题 6.1

1.(1)$15x_1^2+3x_2^2+2x_1x_2$, (2)555, (3)48;

2.$x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

3.(1)$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&0\\2&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 秩为 3;

(2)$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, 秩为 2;

(3)$(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, 秩为 2;

4. 相似一定等价，合同一定等价.

5.(1) 不成立， (2) 成立.

习题 6.2

1.(1)$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 标准形为 $f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$;

(2)$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 标准形为 $f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$;

2.$a=b=0$

3.$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-\frac{1}{2}\\1&-1&-2\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$, 规范型为 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$;

4. 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型化为标准形 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$,

习题 6.3

1.(1) 正惯性指数为 2,(2) 正惯性指数为 1;

2.(1) 正定， (2) 不正定， (3) 不正定;

3.$-3<a<1$;

4. 对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A+B)x=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}x$;

5. 证明行列式大于零，特征值全大于零，且均为对称阵;

7. 有相同的特征值及重数，且秩相等，正惯性指数都是 1.