2008-2009 学年第一学期《概率论与数理统计》（工科）参考解答

A 卷

一．1．0.990234 或$1-0.5^{10}-5\times0.5^{9}$；2．0.2；$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 0.36 & -1\le x<0\\ 0.96 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$；3．0.7；4．$\dfrac{1}{2e}$；

5．$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，$t\ge t_{\alpha}(n-1)$；6．$\sqrt{\dfrac{12}{5}}$，3。

二. 设 B----“仪器不合格”，A_i----“仪器上有i个部件不是优质品”，$i=0,1,2,3$，显然A_0,A_1,A_2,A_3构成样本空间的一个完备事件组，且$P(B|A_0)=0$，$P(B|A_1)=0.2$，$P(B|A_2)=0.6$，$P(B|A_3)=0.9$，

$P(A_0)=0.8\times0.7\times0.9=0.504$，$P(A_1)=0.2\times0.7\times0.9+0.8\times0.3\times0.9+0.8\times0.7\times0.1=0.398$，

$P(A_3)=0.2\times0.3\times0.1=0.006$，$P(A_2)=1-P(A_0)-P(A_1)-P(A_3)=0.092$

(1) 由全概率公式有：$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.1402$

(2) 由贝叶斯公式有：$P(A_0|B)=0$，$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{796}{1402}$，$P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{552}{1402}$，

$P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\dfrac{54}{1402}$，从计算结果可知，一台不合格仪器中有一个部件不是优质品的概率最大.

三. (1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，又$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{1}c(4x^2-4x+1)dx=\dfrac{c}{3}$，所以$c=3$；

(2) 当$x\le0$时，$F(x)$=0；当$0<x\le1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{0}^{x}3(4x^2-4x+1)dx=4x^3-6x^2+3x$，

当$x>1$时，$F(x)$=1，所以 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le0\\ 4x^3-6x^2+3x, & 0<x\le1\\ 1, & x>1\end{cases}$.

(3) $P\{X\le0.2,0.1<X\le0.5\}=P\{0.1<X\le0.2\}=\int_{0.1}^{0.2}f(x)dx=\int_{0.1}^{0.2}(4x^3-2x^2+x)dx=0.148$

$P\{0.1<X\le0.5\}=\int_{0.1}^{0.5}f(x)dx=\int_{0.1}^{0.5}(4x^3-2x^2+x)dx=0.256$，所以

$P\{X\le0.2|0.1<X\le0.5\}=\dfrac{P\{X\le0.2,0.1<X\le0.5\}}{P\{0.1<X\le0.5\}}=\dfrac{0.148}{0.256}=0.5781$.

四. (1) $E(U)=E(3X^2-2XY+Y^2-3)=3E(X^2)-2E(XY)+E(Y^2)-3$

$=3[D(X)+E^2(X)]-2[E(X)E(Y)+\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}]+[D(Y)+E^2(Y)]-3=24$；

(2) $D(V)=D(3X-Y+5)=9D(X)+D(Y)-6\operatorname{cov}(X,Y)=45-6\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=27$.

五. (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}1dy=2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$,

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-\frac{y}{2}}1dx=1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}$, $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{6}$, 所以

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$

(3) 当 $0<y<2$ 时, $f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\frac{y}{2}}=\dfrac{2}{2-y}, & 0<x<1-\frac{y}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$;

(4) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z dx\int_0^{z-x}1dy, & 0\le z\le 1\\ \int_0^{2-z}dx\int_0^{z-x}1dy+\int_{2-z}^1 dx\int_0^{2(1-x)}1dy, & 1\le z<2\\ 1, & 2\le z\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0\le z\le 1\\ z(2-z)-\dfrac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & 2\le z\end{cases}$, 所以 $f_Z(z)=\dfrac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ 2-z, & 1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$.

六. (1) 因 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$, 令 $E(X)=\overline{X}$ 即 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$, 解得 $\hat{\theta}_M=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值, 则似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)$, 当 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$ 时有:

$L(\theta)=\prod_{i=1}^n(\theta+1)x_i^\theta$, 取对数得 $\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln x_i$, 故由 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$ 解得

$\hat{\theta}_{MLE}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}$, 从而 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_{MLE}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^n\ln X_i}$

(3) 因为 $P\{X<0.2\}=\int_0^{0.2}(\theta+1)x^\theta dx=0.2^{\theta+1}$, 所以 $P\{X>0.2\}$ 的极大似然估计为 $0.2^{\hat{\theta}_{MLE}+1}$, 又

$\sum_{i=1}^n\ln x_i=-16$, 所以 $\hat{\theta}_{MLE}=-1-\dfrac{8}{-16}=-\dfrac{1}{2}$, 故 $P\{X>0.2\}$ 的极大似然估计为 $0.2^{\hat{\theta}_{MLE}+1}=\sqrt{0.2}$.

七．(1) 构造假设 $H_0:\mu=\mu_0=50$，$H_1:\mu\neq 50$，取检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{H_0为真}{\sim} t(n-1)$，由 $P\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)\}=\alpha$ 得拒绝域为：$|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$．又 $n=9$，$\overline{x}=49.9$，$s^2=0.29$，$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(8)=2.3060$，$T=\dfrac{|49.9-50|}{\sqrt{0.29/9}}=0.56<2.3060$，故应接受 H_0，即认为包装机工作正常.

(2) 因为 $\sigma^2=0.3$ 已知，所以总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{x}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$，又 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，故

$$(\overline{x}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(49.9-1.96\times\sqrt{\frac{0.3}{9}},49.9+1.96\times\sqrt{\frac{0.3}{9}})=(49.5422,50.2578).$$