

第九章 重积分

在科学技术中,往往会碰到许多分布在平面或空间上的量的求和问题。这就需要将一元函数定积分的概念推广到多元函数的领域中,便建立了多元函数的积分,简称为重积分。本章将介绍二重积分和三重积分的概念、性质和计算方法以及它们的应用。

9.1 二重积分

9.1.1 二重积分的基本概念

先讨论几何与物理中的两个实际问题,由此引入二重积分的概念。

1. 曲顶柱体的体积

设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,且 $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$. 以曲面 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 为顶,区域 D 为底,母线平行于 z 轴, D 的边界为准线的柱面为侧面的立体称为曲顶柱体(图 9-1). 求该曲顶柱体的体积。

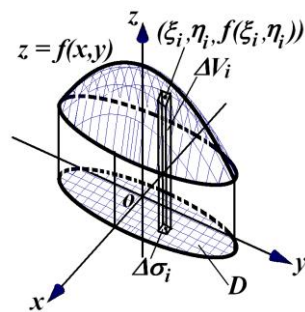


图 9-1

第一步 用曲线将区域 D 任意分割为 n 个小区域: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$; 其中 $\Delta\sigma_i$ 既表示分割的第 i 块小区域, 又表示该区域的面积. 这样相应地把曲顶柱体分割成 n 个小曲顶柱体: $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$, 其中 ΔV_i 既表示第 i 个小曲顶柱体, 又表示其体积。

第二步 在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 因为 f 连续, 所以当 $\Delta\sigma_i$ 足够小时, f 在 $\Delta\sigma_i$ 上变化不大, 则第 i 个小曲顶柱体的体积 ΔV_i 近似等于平顶柱体的体积:

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

第三步 作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = f(\xi_1, \eta_1) \Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2) \Delta\sigma_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta\sigma_n$, 于是

曲顶柱体的体积 V 可以近似地表示为 $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$.

第四步 用 d_i 表示 $\Delta\sigma_i$ 中任意两点间距离的最大值 (称 d_i 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径), 记 $\lambda = \max\{d_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, 由于 f 在 D 上连续, 故当 λ 越小, 计算 ΔV_i 所引起的误差就越小. 因此曲

顶柱体的体积可表示为 $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$.

2. 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有区域 D , 其面密度是连续函数 $\rho = \rho(x, y), (x, y) \in D$; 求该薄片的质量。

第一步 用曲线将区域 D 任意分割为 n 个小区域: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$; 其中 $\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 块小区域, 又表示该区域的面积。

第二步 求每个小区域的近似质量. 在每个小区域内任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 因为 ρ 连续, 所以当 $\Delta\sigma_i$ 足够小时, 第 i 个小区域 $\Delta\sigma_i$ 的质量 Δm_i 近似等于 $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$;

第三步 作和式 $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$, 因此平面薄片 D 的质量 M 可以近似地表示为

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

第四步 设 d_i 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径, 记 $\lambda = \max\{d_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, 由于 ρ 在 D 上连续, 故当 λ 越小, 计算 Δm_i 引起的误差就越小. 因此平面薄片 D 的质量 M 为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

可见上面两个问题都可归结为同一形式和的极限. 在科学技术中还有大量类似的问题都可以看成是分布在某一平面区域上可加量的求和问题, 从而可化为同一形式和的极限. 为了从数量关系上给出解决这类问题的一般方法, 我们抛开它们的实际意义, 保留其数学结构的特征, 给出二重积分的概念.

定义 1 设函数 $z = f(x, y)$ 是定义在平面上可求面积的有界闭区域 D 上的有界函数, 将区域 D 任意分割为 n 个小区域: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$; 其中 $\Delta\sigma_i$ 既表示第 i 块小区域, 又表示该区域的面积, 在每个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i, i = 1, 2, \dots, n$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = f(\xi_1, \eta_1) \Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2) \Delta\sigma_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta\sigma_n.$$

d_i 表示 $\Delta\sigma_i$ 中任意两点间距离的最大值 (称 d_i 为 $\Delta\sigma_i$ 的直径), 记 $\lambda = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, 如果不论 D 怎样分割, 点 (ξ_i, η_i) 在 $\Delta\sigma_i$ 中怎样选取, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和式都趋于同一极限值, 则称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记做 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

并称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积. 其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y) d\sigma$ 称为被积表达式, D 称为积分区域, x, y 称为积分变量, $d\sigma$ 称为积分面积微元.

由此可见二重积分的几何意义就是曲顶柱体的体积, 即当 $z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$ 时

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

特别地, 当被积函数 $f(x, y) \equiv 1, (x, y) \in D$ 时, $\iint_D 1 \cdot d\sigma = A(D)$, 其中 $A(D)$ 为 D 的面积.

平面薄片的质量亦可表为 $M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma$, 其中 $\rho = \rho(x, y)$ 是其面密度.

将定积分存在的某充分条件推广到二重积分, 可得以下定理 1, 证明省略.

定理 1 (二重积分存在定理) 若函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

例 1 计算下列二重积分

$$(1) \quad I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma, \quad D: x^2 + y^2 \leq a^2;$$

$$(2) \quad I = \iint_D x^2 y d\sigma, \quad D: x \geq y^2, 0 \leq x \leq 1.$$

解 (1) 因为被积函数 $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 是半径为 a 的上半球面, 积分区域是半径为 a 的圆, 如图 9-2 所示, 所以由二重积分的几何意义可知积分值为上半球的体积, 即

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

(2) 因为积分区域关于 x 轴对称(图 9-3), 被积函数 $f(x, y) = x^2 y$ 关于变量 y 是奇函数, 所以由曲面 $z = x^2 y$, 抛物柱面 $x = y^2$, 平面 $x=1$ 及坐标平面 $z=0$ 所围成的立体在 xOy 坐标面上方与下方的体积相等, 故 $I = \iint_D x^2 y d\sigma = 0$.

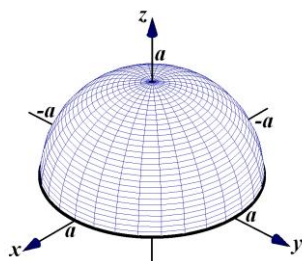


图 9-2

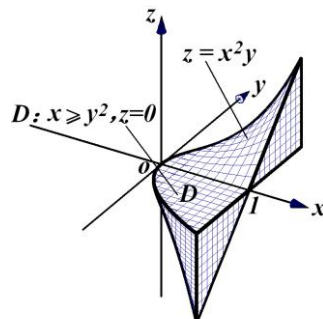


图 9-3

由于二重积分与定积分类似都是某种特定形式的和式极限, 因此二重积分具有与定积分类似的性质, 下面不加证明列出二重积分的性质. 读者可以作为练习自行证明.

性质 1 (线性性) 若 $f(x, y), g(x, y)$ 在区域 D 上都可积, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则 $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ 在 D 上也可积, 且

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma .$$

性质 2 (积分区域的有限可加性) 若 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积, D 用曲线分割为有限个区域 D_1, D_2, \dots, D_m , 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} f(x, y) d\sigma$.

性质 3 (单调性) 若 $f(x, y), g(x, y)$ 在区域 D 上都可积, 且 $f(x, y) \leq g(x, y), (x, y) \in D$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$.

特别地, 当 $f(x, y), g(x, y)$ 在 D 上都连续, 且 $f(x, y)$ 不恒等于 $g(x, y)$, 上面积分不等式为严格的不等式.

由此可得下面的推论.

推论 1 若 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积, 则 $|f(x, y)|$ 在 D 上也可积, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma .$$

推论 2 (估值定理) 若 $f(x, y)$ 在区域 D 上可积, 且 $m \leq f(x, y) \leq M, (x, y) \in D$, 则

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA(D), \quad \text{其中 } A(D) \text{ 为 } D \text{ 的面积.}$$

性质 4 (积分中值定理) 若 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) A(D).$$

证 因为 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 由连续函数在有界闭区域上的最大最小值定理, 可

得 $m \leq f(x, y) \leq M$, 其中 m, M 分别是 $f(x, y)$ 在 D 上的最小值与最大值;

在性质 3 的推论 2 的不等式两边除以 $A(D)$, 得到 $m \leq \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$; 即数值

$\frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) d\sigma$ 是介于最小值 m 与最大值 M 之间的数值, 由连续函数在有界闭区域上的

介值定理, 至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使得 $f(\xi, \eta) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) d\sigma$.

上式两端各乘以 $A(D)$, 即得所需证明的公式.

例 2 估计积分 $\iint_D (x - y + 5) d\sigma$ 的大小, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的圆盘。

解 令 $f(x, y) = x - y + 5$, 先求 $f(x, y)$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4$ 上的最大与最小值.

$f_x(x, y) = 1, f_y(x, y) = -1, f(x, y)$ 无驻点, 令: $L = x - y + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$,

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L_y = -1 + 2\lambda y = 0 & (2), \text{ 由(1),(2)式得: } x = -y, \text{ 代入(3) 式得:} \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}. \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 5, f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 5. \text{ 比较得:}$$

$f(x, y)$ 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 4$ 上的最大为 $2\sqrt{2} + 5$, 最小值为 $-2\sqrt{2} + 5$.

由估值定理得:

$$(-2\sqrt{2}+5)A(D) \leq \iint_D (x-y+5)d\sigma \leq (2\sqrt{2}+5)A(D), \quad A(D)=4\pi.$$

即
$$4(-2\sqrt{2}+5)\pi \leq \iint_D (x-y+5)d\sigma \leq 4(2\sqrt{2}+5)\pi.$$

例 3 求极限
$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \iint_{\substack{R \leq |x| \leq 2R \\ R \leq |y| \leq 2R}} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma.$$

首先说明: $\iint_{\substack{R \leq |x| \leq 2R \\ R \leq |y| \leq 2R}} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma$ 表示 $\iint_D (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma$, 其中

$$D: R \leq |x| \leq 2R, R \leq |y| \leq 2R.$$

解 $f(x, y) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ 在闭区域 $D: R \leq |x| \leq 2R, R \leq |y| \leq 2R$ 上连续,

由积分中值定理, 存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得:

$$\iint_{\substack{R \leq |x| \leq 2R \\ R \leq |y| \leq 2R}} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma = (\xi^2+\eta^2) \sin \frac{1}{\xi^2+\eta^2} A(D), \quad A(D)=15R^2 \text{ 是 } D \text{ 的面积.}$$

$R \leq |\xi| \leq 2R, R \leq |\eta| \leq 2R$, 当 $R \rightarrow +\infty$ 时, $\xi^2+\eta^2 \rightarrow +\infty, r = \frac{1}{\xi^2+\eta^2} \rightarrow 0+0$, 则

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \iint_{\substack{R \leq |x| \leq 2R \\ R \leq |y| \leq 2R}} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} d\sigma = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \frac{\sin r}{r} 15R^2 = 15 \lim_{r \rightarrow 0+0} \frac{\sin r}{r} = 15.$$

9.1.2 直角坐标系下二重积分的计算

我们知道, 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 存在, 那么积分值与区域

D 的分法和各小区域 $\Delta\sigma_i$ 上点 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 因此可以选择一种便于计算的划分方式.

在直角坐标系下, 采用平行于坐标轴的直线族分割区域 D , 除了含 D 边界的小区域是不规则的外, 其余都是矩形区域, 设矩形小区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k , 这时可以写成

$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \Delta y_k$, 因此在直角坐标系下, 积分面积微元 $d\sigma$ 可记为 $dx dy$, 则二重积分可写为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

二重积分的几何意义是曲顶柱体的体积,我们通过推导曲顶柱体的体积,从而得出二重积分的计算方法.设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续,且 $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$.

我们注意到,二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 中,除了被积函数外,积分区域的各种复杂的形状也给实际计算带来困难.为此,我们选择一种所谓 X 形区域 D 作为积分区域来进行积分讨论. X 形区域 $D: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ (如图 9-4),所求积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 就是如图 9-5 空间立体的体积.

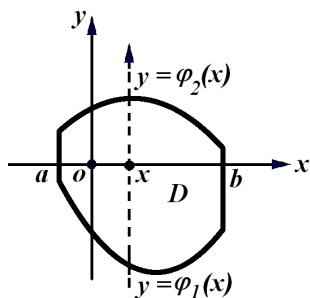


图 9-4

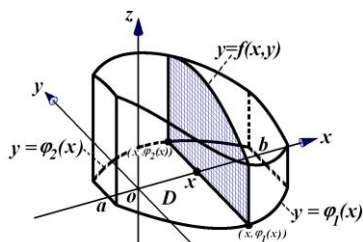


图 9-5

下面利用“平行截面面积为已知的立体体积”的计算方法计算其体积.为此,在区间 $[a, b]$ 上任意固定一点 x ,考察曲顶柱体与平面 $x = x$ 的截面面积 $S(x)$,如图 9-5 阴影部分所示,这一截面是曲线

$\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x \end{cases}$, 在区间 $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ 上所形成的曲边梯形,它的面积可用定积分

表示为

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

由平行截面面积为已知的立体体积的计算方法,可得所求曲顶柱体的体积为

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

这个体积也就是所求二重积分的值,从而有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

称上式右端的积分为先对 y 后对 x 的二次积分.即先把 x 视作常数,把 $f(x, y)$ 只看作 y 的函数,对 y 从 $\varphi_1(x)$ 至 $\varphi_2(x)$ 计算的定积分(亦称为单积分),所得结果是 x 的函数,再对 x 计算在区间 $[a, b]$ 上的定积分.这个二次积分通常记做

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (9.1)$$

类似地,如果区域 D 是所谓 Y 形区域,即可用不等式表示为

$D: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, 其中 $\psi_1(y), \psi_2(y)$ 均在区间 $[c, d]$ 上连续(如图 9-6). 则可得如下的公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (9.2)$$

称上式右端的积分为先对 x 后对 y 的二次积分.

在上述讨论中,假定 $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$, 实际上公式(9.1), (9.2)的成立不受此条件的限制.

一般地,有界闭区域都可以分解为有限个除了有公共边界点而无公共内点的 X -型区域或 Y -型区域,如图 9-7 所示把区域分为三个区域,其中 D_1, D_3 为 X -型区域, D_2 为 Y -型区域.因而,解决了 X -型区域与 Y -型区域上的二重积分的计算,则一般区域上的二重积分计算也得到了解决.

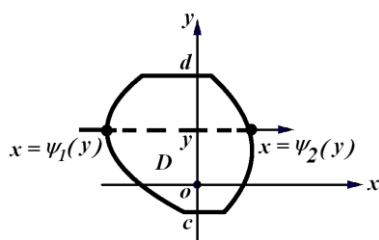


图 9-6

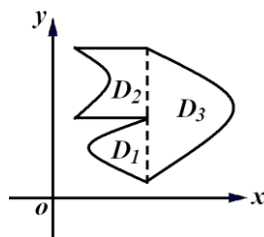


图 9-7

例 1 计算 $\iint_D (2-x-y) dx dy$, 其中 D 为直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域.

解法一 区域 D 的图形如图 9-8 所示,

先对 y 后对 x 积分,得 $\iint_D (2-x-y) dx dy =$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2-x-y) dy &= \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - \frac{7x^2}{2} + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

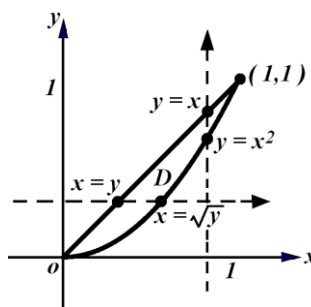


图 9-8

法二 区域 D 的图形如图 9-8 所示,先对 x 后对 y 积分,得

$$\iint_D (2-x-y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2-x-y) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{x^2}{2} - yx \right) \Big|_y^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^1 (2y^{\frac{1}{2}} - \frac{5y}{2} - y^{\frac{3}{2}} + \frac{3y^2}{2}) dy = \frac{11}{60}.$$

例 2 计算 $\iint_D xy^2 dx dy$, 其中 D 为直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = x$ 所围成的区域.

解 区域 D 的图形如图 9-9 所示, 求出直线与抛物线的交点 $A(4, 2)$ 与 $B(1, -1)$, 先对 x 后

对 y 积分, 得 $\iint_D xy^2 dx dy = \int_{-1}^2 y^2 dy \int_{y^2}^{y+2} x dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y^2 [(y+2)^2 - y^4] dy = \frac{531}{70}.$

如果先对 y 后对 x 积分, 则要用直线 $x=1$ 把区域 D 分成两部分, 如图 9-10 所示, 即

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy^2 dy. \text{ 显然这种方法要麻烦一些.}$$

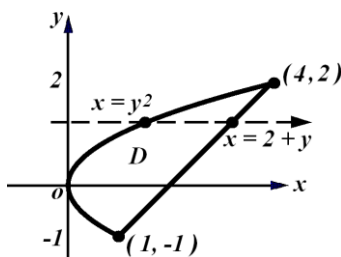


图 9-9

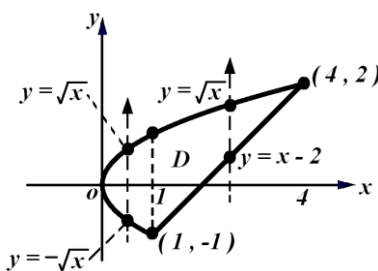


图 9-10

例 3 计算二重积分 $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中 D 是由 $x = 0$ 与 $x = \sqrt{2ay - y^2}$

($a > 0$) 所围成的闭区域.

解 区域 D 的图形如图 9-11 所示,

$$\text{比较 } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \text{ 与 } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$$

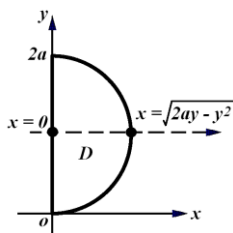


图 9-11

的计算难度, 决定选择 Y 形区域定限形式.

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{2a} dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = \int_0^{2a} (\sqrt{x^2 + y^2}) \Big|_0^{\sqrt{2ay-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^{2a} (\sqrt{2ay} - y) dy = (\sqrt{2a} \times \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^2) \Big|_0^{2a} = \frac{2}{3} a^2.$$

例 3 计算二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$.

解 如图 9-12 所示, 积分区域既是 X -型区域又是 Y -型区域, 若采用先对 y 后对 x 积分,

由于 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示,因而无法继续进行计算,故改为先对 x 后对 y 积分,得

$$I = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 ye^{-y^2} dy = -\frac{e^{-y^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

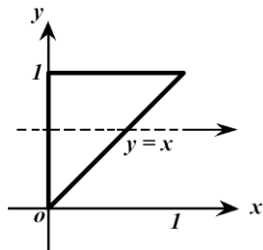


图 9-12

例 4 交换下列积分顺序

$$(1) I = \int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x, y) dx ;$$

$$(2) I = \int_{-\sqrt{2}}^0 dx \int_0^{2-x^2} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy .$$

解 (1) 这是先对 x 后对 y 积分,由积分上下限

可知积分区域为 $D: \sqrt{a^2-y^2} \leq x \leq y+a, 0 \leq y \leq a$

区域如图 9-13 所示,再把原积分化为先对 y 后对 x 的积分,为此用直线 $x=a$ 把区域分成两部分,得

$$I = \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{x-a}^a f(x, y) dy .$$

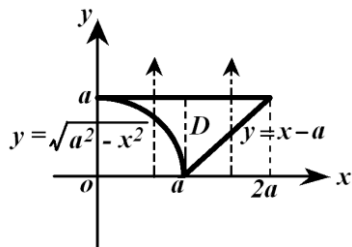


图 9-13

(2) 这是先对 y 后对 x 的积分,由两部分组成,

其积分区域为 $D_1: 0 \leq y \leq 2-x^2, -\sqrt{2} \leq x \leq 0$,

$D_2: x \leq y \leq 2-x^2, 0 \leq x \leq 1$, 见图 9-14

把原积分化为先对 x 后对 y 的积分,得

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{2-y}}^y f(x, y) dx .$$

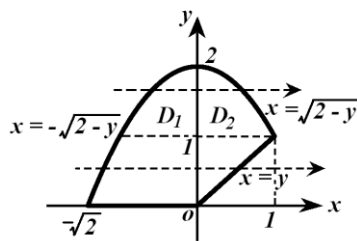


图 9-14

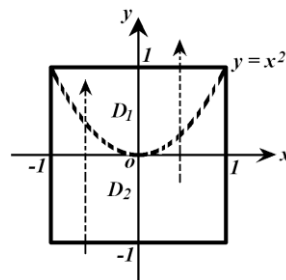
例 5 计算二重积分 $I = \iint_D \sqrt{y^2 - 2x^2y + x^4} dx dy$, 其中

$$D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 .$$

解 由于被积函数 $\sqrt{y^2 - 2x^2y + x^4} = \sqrt{(y-x^2)^2} = |y-x^2|$ 含有绝对值,为了去掉绝对

值,作辅助曲线 $y-x^2=0$ 把区域分成两部分,如图 9-15 所示;

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} |y - x^2| dx dy + \iint_{D_2} |y - x^2| dx dy = \\
&= \iint_{D_1} (y - x^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 - y) dx dy = \\
&= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{x^2} (x^2 - y) dy = \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (y - x^2)^2 \Big|_{x^2}^1 dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (x^2 - y)^2 \Big|_{-1}^{x^2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + x^2)^2 dx = . \\
&= \int_0^1 (1 - x^2)^2 dx + \int_0^1 (1 + x^2)^2 dx = 2 \int_0^1 (1 + x^4) dx = \frac{12}{5} .
\end{aligned}$$



9-15

9.1.3 极坐标系下二重积分的计算

$$\text{由二重积分定义 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i ,$$

设被积函数在积分区域上可积,若积分区域 D 与被积函数 $f(x, y)$ 用极坐标表示更为简便,则应考虑在极坐标系中计算二重积分.以直角坐标的原点为极点, X 轴的正半轴为极轴,则直角坐标与极坐标间有关系式

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

用以极点为圆心的一族同心圆 : $r = \text{常数}$, 和从极点出发的一族射线 :

$\theta = \text{常数}$, 把区域 D 分割成 n 个小区间(图 9-16), 则有第 i 块小区间的面积 $\Delta\sigma_i$ 为

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2} (r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\theta_i - \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i = (r_i + \frac{\Delta r_i}{2}) \Delta r_i \Delta\theta_i = \tilde{r}_i \Delta r_i \Delta\theta_i, i = 1, 2, \dots, n . \text{ 其中}$$

$$\tilde{r}_i = \frac{1}{2} [r_i + (r_i + \Delta r_i)] \text{ 是相邻两圆弧的平均值.}$$

在 $\Delta\sigma_i$ 小区内且在圆周 $r = \tilde{r}_i$ 上任取一点

$(\tilde{r}_i, \tilde{\theta}_i)$, 设该点的直角坐标为 (ξ_i, η_i) , 于是有

$$\xi_i = \tilde{r}_i \cos \tilde{\theta}_i, \eta_i = \tilde{r}_i \sin \tilde{\theta}_i ; \text{ 于是}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tilde{r}_i \cos \tilde{\theta}_i, \tilde{r}_i \sin \tilde{\theta}_i) \tilde{r}_i \Delta r_i \Delta\theta_i ,$$

$$\text{即 } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (9.3)$$

这就是二重积分从直角坐标变换为极坐标的变换公式,其中区域 D 的边界曲线由极坐标方程给出,在极坐标系下的面积微元为 $dx dy = r dr d\theta$.

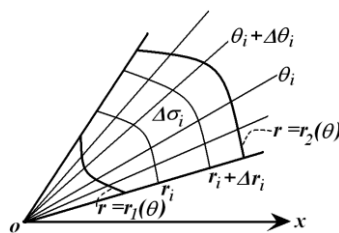


图 9-16

极坐标系中的二重积分,同样可以化为二次积分,为此不妨设从极点 O 作的穿过区域 D 内部的射线与 D 的边界曲线至多交于两点,即积分区域 D 可以表示为

$$D: \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

其中 $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$ 均在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续(图 9-17),

称为 θ -型区域.

与前面相仿,这时二重积分可化为先对 r 后对 θ 的二次积分,此时常写为

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

特别地,若极点 O 在积分区域 D 内时(图 9-18),

此时有 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$,

其中 $r = r(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ 为区域 D 的边界曲线方程.

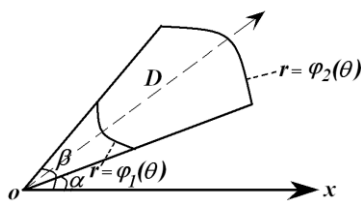


图 9-17

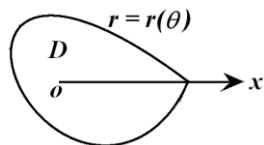


图 9-18

例 6 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中 $D: \pi^2/4 \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

解 积分区域(如图 9-19)为一个圆环,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin r}{r} r dr = \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin r dr = -2\pi \cos r \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

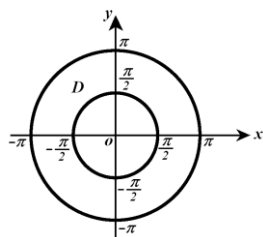


图 9-19

例 7 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $x + y = 2$ 及曲线 $x^2 + y^2 = 2y$ 所围成的弓形部分.

解 积分区域(如图 9-20),

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{2}{\sin\theta + \cos\theta}}^{2\sin\theta} r^3 \sin\theta \cos\theta dr = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \frac{1}{4} r^4 \Big|_{\frac{2}{\sin\theta + \cos\theta}}^{2\sin\theta} d\theta = \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos\theta d\theta - 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \cos\theta d\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^4} = \end{aligned}$$

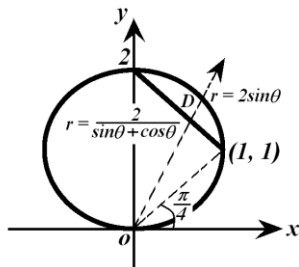


图 9-20

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \sin^6 \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan \theta d \tan \theta}{(1 + \tan \theta)^4} = \frac{7}{12} - 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} d(1 + \tan \theta)}{(1 + \tan \theta)^3} + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2} d(1 + \tan \theta)}{(1 + \tan \theta)^4} = \\
&= \frac{7}{12} + \frac{2}{(1 + \tan \theta)^2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3} \frac{1}{(1 + \tan \theta)^3} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

例 8 (1) 计算 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, $D: x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$;

(2) 计算概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

解 (1) 在极坐标系下计算

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^a = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

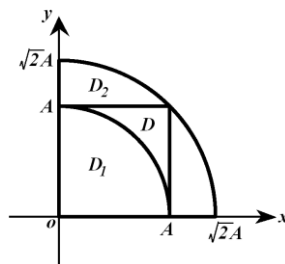
(2) 由于 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x^2} dx$, 故考虑 $I(A) = \int_0^A e^{-x^2} dx$, 于是

$$I^2(A) = \int_0^A e^{-x^2} dx \int_0^A e^{-y^2} dy = \int_0^A e^{-x^2} dx \int_0^A e^{-y^2} dy = \iint_{D(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

其中 $D(A): 0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq A$; 如图 9-21 所示, 作

$$D_1(A): x^2 + y^2 \leq A^2, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$D_2(A): x^2 + y^2 \leq 2A^2, x \geq 0, y \geq 0.$$



因为被积函数非负, 且 $D_1(A) \subset D(A) \subset D_2(A)$, 所以

图 9-21

$$\iint_{D_1(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < \iint_{D(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy < \iint_{D_2(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

由(1)的结果有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \iint_{D_1(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-A^2}) = \frac{\pi}{4}; \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \iint_{D_2(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2A^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

故由夹逼定理可得

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \iint_{D(A)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{A \rightarrow +\infty} I^2(A) = \frac{\pi}{4},$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 9 将累次积分 $I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$ 化为极坐标系中的累次积分.

解 这是先对 y 后对 x 的积分,
积分区域为:

$$D: x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1,$$

如图 9-22 所示, 则

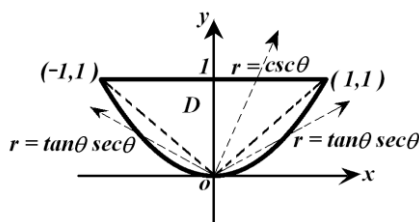


图 9-22

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\csc \theta} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \\ &\quad + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\tan \theta \sec \theta} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr. \end{aligned}$$

这里我们再给出直角坐标与广义极坐标的变换公式

$$\begin{cases} x = a r \cos \theta \\ y = b r \sin \theta \end{cases}, a > 0, b > 0, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

这样得到二重积分从直角坐标变换为广义极坐标的变换公式,而在广义极坐标系下的面积微元为 $dxdy = ab r dr d\theta$, 于是

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) ab r dr d\theta \quad (9.4)$$

这个公式可以用后面的二重积分的换元公式推导,这里就不再证明了.

例 10 计算二重积分 $\iint_D (1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dxdy$, $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

解 利用广义极坐标计算,得

$$\iint_D (1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r^2) ab r dr = 2ab\pi [\frac{1}{4}(1 + r^2)^2]_0^1 = \frac{3ab\pi}{2}.$$

* 9.1.4. 二重积分的换元法

前面运用极坐标变换有时可以使二重积分的计算简化,极坐标变换只是一种特殊的坐标变换.下面介绍在一般的坐标变换下计算二重积分的公式.先回想一下定积分的换元公式:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $x = \varphi(t)$ 将区间 $[\alpha, \beta]$ 变化到 $[a, b]$, 即 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $\varphi(t)$ 在区间

$[\alpha, \beta]$ 上有连续导数, 则 $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$. 由此可以看出变换后的变化有: (1) 积分

区间改变了, 由 $[a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$; (2) 被积函数由 $f(x)$ 改变为 $f(\varphi(t))$; (3) 特别是 dx 的变化为:

$dx = \varphi'(t)dt$, $\varphi'(t)$ 可以看作是从 dx 变化到 dt 的“放大”系数. 类似地二重积分的换元法也要解决这些问题: (1) 积分区域的变换; (2) 被积函数的变换; (3) 特别是面积微元的变换.

作坐标变换 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, 设变换使 uOv 平面上的区域 \tilde{D} 变化为 xOy 平面上的区域

D . 且区域 \tilde{D} 与区域 D 上的点是一一对应的. 这样把积分区域 D 变化为区域 \tilde{D} , 被积函数化成 $f(x, y) = f[x(u, v), y(u, v)]$; 下面主要来解决面积微元的变换.

为此设函数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在区域 \tilde{D} 上具有一阶连续偏导数, 且雅可比(Jacobi)行列式在 \tilde{D} 上不等于零, 即 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. 设 uOv 平面上面积微元 $\Delta\tilde{\sigma} = \Delta u \Delta v$ 经过坐标变换变为 xOy 平面上的面积微元 $\Delta\sigma$, 设 $\Delta\tilde{\sigma}$ 的四个顶点

$$\tilde{M}_1(u, v), \tilde{M}_2(u + \Delta u, v), \tilde{M}_3(u + \Delta u, v + \Delta v), \tilde{M}_4(u, v + \Delta v),$$

它们对应 $\Delta\sigma$ 的四个顶点分别为 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), M_4(x_4, y_4)$, 如图 9-23.

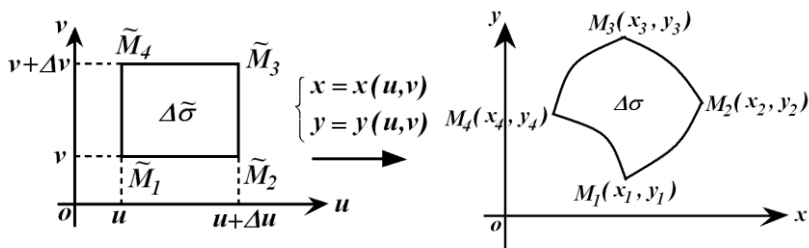


图 9-23

在分割足够小时, 曲边四边形 $\Delta\sigma$ 可以近似地看作以 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_4}$ 为边的平行四边形, 由坐标变换可得

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = [x(u + \Delta u, v) - x(u, v)]\mathbf{i} + [y(u + \Delta u, v) - y(u, v)]\mathbf{j}.$$

对上式右端向量的两个坐标分别用一元函数的微分去近似并予以取代, 仍记为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = x_u \Delta u \mathbf{i} + y_u \Delta u \mathbf{j}.$$

同理可得 $\overrightarrow{M_1M_4} = x_v \Delta v \mathbf{i} + y_v \Delta v \mathbf{j}$.

于是面积微元 $\Delta\sigma$ 的面积可近似地等于 $\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\|$, 即

$$\Delta\sigma \approx \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u \Delta u & y_u \Delta u & 0 \\ x_v \Delta v & y_v \Delta v & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

这样,再把二重积分的定义简化地写为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_D f(x, y) \Delta\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\tilde{D}} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v ,$$

即得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{\tilde{D}} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv .$$

因此有下面的二重积分的换元定理

定理 2 设函数 $f(x, y)$ 在 xOy 平面的有界闭区域 D 上可积,坐标变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 将 uOv 平面上的有界闭区域 \tilde{D} 变化为 xOy 平面上的有界闭区域 D , $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在 \tilde{D} 上一阶偏连续导数, 且在 \tilde{D} 上雅可比行列式 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$; 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{\tilde{D}} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv . \quad (9.5)$$

上述公式就是二重积分的变量换元公式,另一方面亦可得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{\tilde{D}} f[x(u, v), y(u, v)] \frac{du dv}{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|} . \quad (9.6)$$

在极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 的特殊情况下,其雅可比行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r ,$$

它仅在 $r=0$ 处为零,可以证明不论闭区域 D 是否含有极点,相应的换元公式仍成立,即

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta ,$$

用定理 2 可以证明以下结论:

推论 1 设函数 $f(x, y)$ 在 xOy 平面的有界闭区域 D 上可积, $D = D_1 + D_2$,

(1).若 D_1 与 D_2 关于 x 轴对称,则: 当 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数时, $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$,

当 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数时, $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$.

(2).若 D_1 与 D_2 关于 y 轴对称,则: 当 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数时, $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$,

当 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数时, $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$.

推论 2 设函数 $f(x, y)$ 在 xOy 平面的有界闭区域 D 上可积,且区域 D 关于直线 $y = x$ 对称,则 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$.

例 11 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{xy} dx dy$, 其中 D 由曲线 $xy=1, xy=4, y=x, y=2x$

($x > 0, y > 0$) 所围成的闭区域 .

解 由图 9-24 可见,如果在直角坐标系中计算较复杂,采用换元法.

令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$, 在此变换下区域 D 变为 $\tilde{D}: 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 2$ (图 9-25)

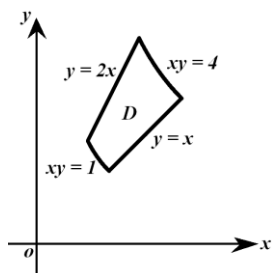


图 9-24

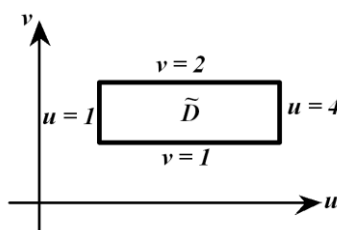


图 9-25

且 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{y}{x} & \frac{x}{x} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v$, 由换元公式(9.6), 得

$$\iint_D \sqrt{xy} dx dy = \iint_{\tilde{D}} \sqrt{u} \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dv}{v} \int_1^4 \sqrt{u} du = \frac{7 \ln 2}{3} .$$

例 12 计算二重积分 $\iint_D \cos \frac{y-x}{y+x} dx dy$, 其中 D 是由 x 轴, y 轴及直线

$x+y=1, x+y=2$ 围成的区域 .

解 对给定被积函数,对应的积分难以计算,故采用换元法

令 $u = y-x, v = y+x$, 则 $x = \frac{v-u}{2}, y = \frac{v+u}{2}$. 通过变换把 xOy 平面上的区域 D (图 9-26)

变化为 uOv 平面上的区域 \tilde{D} (图 9-27)

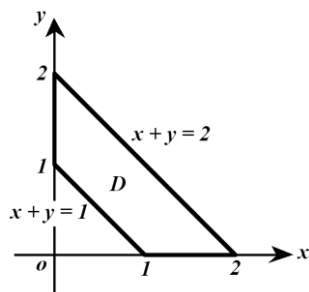


图 9-26

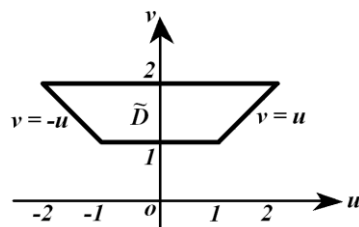


图 9-27

其雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} . \text{利用公式(9.5), 得} \iint_D \cos \frac{y-x}{y+x} dx dy$$

$$= \iint_D \cos \frac{u}{v} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 dv \int_{-v}^v \cos \frac{u}{v} du = \sin 1 \int_1^2 v dv = \frac{3 \sin 1}{2} .$$

习 题 9.1

1. 试用二重积分的定义计算 $\iint_D xy d\sigma$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
2. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:
 - (1) $I_1 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (x+y)^4 d\sigma$, 其中 D 由 $x=0, y=0$ 和 $x+y=1$ 围成.
 - (2) $I_1 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (x+y)^4 d\sigma$, 其中 $D: (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 2$.
 - (3) $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D [\ln(x+y)]^4 d\sigma$, 其中 D 是以 $(1, 0), (1, 1), (2, 0)$ 为顶点的三角形区域.
 - (4) $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D [\ln(x+y)]^4 d\sigma$, 其中 $D: 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1$.
 - (5) $I_1 = \iint_D (2x+3y^2) d\sigma$ 与 $I_2 = \iint_D (3x^2+4y) d\sigma$, 其中 $D: |x|+|y| \leq 1$.
3. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:
 - (1) $\iint_D xy(x+y)^2 d\sigma$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
 - (2) $\iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中 $D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$.
 - (3) $\iint_D (x+y+2) d\sigma$, 其中 $D: x^2+y^2 \leq 4$.
 - (4) $\iint_D \sqrt{4+xy} d\sigma$, 其中 $D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
4. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 函数 $g(x, y)$ 在 D 上可积, 且 $g(x, y) \geq 0, (x, y) \in D$, 则至少存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma .$$

5. 化二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 为两种顺序的二次积分, 其中积分区域 D 如下:

$$(1) D: x \geq 0, y \geq 0, x+2y \leq 4; \quad (2) D: y-x \geq 2, x^2+y^2 \leq 4;$$

$$(3) D \text{ 是由 } xy=1, y=x \text{ 与 } x=2 \text{ 所围成的区域}; \quad (4) D: x^2+y^2 \leq 2y.$$

6. 交换下列累次积分的积分顺序:

$$(1) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx; \quad (2) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy; \quad (4) \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy.$$

7. 计算下列积分:

$$(1) \iint_D xy(x+y)^2 d\sigma, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(2) \iint_D \sin(x+y) d\sigma, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$(3) \iint_D x \cos(x+y) d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 是以 } (0, 0), (\pi, 0) \text{ 和 } (\pi, \pi) \text{ 为顶点的三角形区域};$$

$$(4) \iint_D xy d\sigma, \text{ 其中 } D \text{ 由抛物线 } y^2 = x \text{ 与直线 } y = x-2 \text{ 所围}.$$

8. 画出积分区域并计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D x\sqrt{y} d\sigma, D \text{ 由抛物线 } x^2 = y \text{ 与 } y = \sqrt{x} \text{ 所围};$$

$$(2) \iint_D (x+y+e^{x+y}) d\sigma, D: |x|+|y| \leq 1;$$

$$(3) \iint_D (x^2+y^2-x) d\sigma, D \text{ 是直线 } y=x, y=2 \text{ 和 } y=2x \text{ 围成};$$

$$(4) \iint_D x e^{\frac{x^2}{y}} d\sigma, D \text{ 是直线 } y=x, y=2 \text{ 和抛物线 } x^2=y \text{ 所围区域中 } x \geq \sqrt{y} \text{ 的部分};$$

分;

$$(5) \iint_D \frac{xdy}{\sqrt{2a-x}} (a>0), \text{ 其中 } D: (x-a)^2+(y-a)^2 \geq a^2, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$(6) \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy, D: 0 \leq |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

9. 计算下列积分:

$$(1) \int_1^2 dy \int_y^{\frac{\sin x}{x-1}} dx; \quad (2) \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{y} \cos x^5 dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy ; \quad (4) \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy .$$

10. 画出积分区域,将二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 化为极坐标系下的二次积分:

$$(1) D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0 ; \quad (2) D: x^2 + y^2 \leq 2y ;$$

$$(3) D: x+y \geq 2, x^2 + y^2 \leq 4 ; \quad (4) D: x+y \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 .$$

11. 将下列积分化为极坐标系下的二次积分并计算积分值:

$$(1) \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2) dy ; \quad (2) \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy ;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_x^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy ; \quad (4) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy .$$

12. 利用极坐标计算下列积分

$$(1) \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy , D: x^2 + y^2 \leq ax ;$$

$$(2) \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy , D: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2 ;$$

$$(3) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy , D: (x^2 + y^2)^2 \leq a^2 (x^2 - y^2) ;$$

$$(4) \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy , D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x ;$$

$$(5) \iint_D (x+y) dx dy , D: x^2 + y^2 \leq x+y ;$$

$$(6) \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy , D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq x ;$$

13. 求下列各组曲线所围成图形的面积:

$$(1) (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2 (x^2 - y^2), x^2 + y^2 \geq a^2 (a > 0) ;$$

$$(2) r = a(1 + \sin \theta) (a > 0) .$$

14. 求由坐标平面及平面 $x=2, y=1, x+y+z=4$ 所围成的立体的体积 .

15. 计算以 xOy 平面上的圆 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 为底, 曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积 .

16. 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - x^2 - y^2$ 所围成的立体体积 .

17. 计算 $\iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)]dxdy$. 其中 D 是由 $y = x^3, y = 1, x = -1$ 所围区域, f 是连续函数.

18*. 作适当的变换, 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x - y)^2 \sin^2(x + y)dxdy$, 其中 D 是以 $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ 和 $(0, \pi)$ 为顶点的平行四边形区域;

(2) $\iint_D x^2 y^2 dxdy$, 其中 D 由 $xy = 1, xy = 2$ 与 $y = x, y = 4x$ 围成的在第一象限内的区域 ;

(3) $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} d\sigma$, 其中 D 是由 x 轴, y 轴和直线 $y + x = 2$ 围成的三角形区域;

(4) $\iint_D x d\sigma$, 其中 D 是由 $y = ax^3, y = bx^3$ 与 $y^2 = px, y^2 = qx$ 围成的区域

$(0 < a < b, 0 < p < q)$.

19*. 利用二重积分的换元法证明: 若积分区域 D 关于 y 轴对称, 则

(1) 当 $f(x, y)$ 是 x 的奇函数时, 二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma = 0$;

(2) 当 $f(x, y)$ 是 x 的偶函数时, 二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x, y)d\sigma$,

其中 D_1 是 D 在右半平面 $x \geq 0$ 中的部分区域 .

20. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明 $(\int_a^b f(x)dx)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

21. 设 $f(x)$ 具有连续导数, 证明 $\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy = \pi[f(a) - f(0)]$.

9.2 三重积分

三重积分是定积分, 二重积分在三维空间的推广, 积分从一维推广至二维时, 其变化是实质性的; 由二维推广至三维乃至 n 维时, 出现的变化仅仅是形式上的维数与变量个数的增加, 而没有实质性的改变.

9.2.1 三重积分的基本概念

在物理学中, 求一个体密度为: $\rho = \rho(x, y, z)$, 占据的空间立体为 Ω 的物体质量, 就是典型的三重积分的问题.

第一步 用曲线将区域 Ω 任意分割为 n 个小区域: $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$; 其中 Δv_i 既表示

第 i 块小区域,又表示该区域的体积.

第二步 求每个小区域的近似质量.在每个小区域内任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$, 假设 ρ 连续, 则当 Δv_i 足够小时, 第 i 个小区域 Δv_i 的质量 Δm_i 近似等于 $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i, i = 1, 2, \dots, n$;

第三步 作和式 $\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$, 因此物体 Ω 的质量 M 可以近似地表示为

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

第四步 设 d_i 为 Δv_i 的直径, 记 $\lambda = \max\{d_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, 由于 ρ 在 D 上连续, 故当 λ 越小,

计算 Δm_i 引起的误差就越小. 因此物体 Ω 的质量 M 为

$$M = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

在科学技术中还有大量类似的问题都可以看成是分布在某一区域上可加量的求和问题, 从而可化为同一形式和的极限. 为了从数量关系上给出解决这类问题的一般方法, 我们抛开它们的实际意义, 保留其数学结构的特征, 给出三重积分的概念.

定义 1 设 $f(x, y, z)$ 是定义在空间有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将区域 Ω 任意分割为 n 个小区域: $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$; 其中 Δv_i 既表示第 i 块小区域, 又表示该区域的体积, 在每个小区域 Δv_i 内任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i, i = 1, 2, \dots, n$, 作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \Delta v_1 + f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \Delta v_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \Delta v_n.$$

d_i 表示 Δv_i 中任意两点间距离的最大值(称 d_i 为 Δv_i 的直径), 记 $\lambda = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$,

如果不论 Ω 怎样分割, 点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 在 Δv_i 中怎样选取, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$

都趋于同一极限值, 则称此极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上的三重积分, 记做

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv, \text{ 即}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

并称函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上可积, 其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, $f(x, y, z) dv$ 称为被积

表达式, Ω 称为积分区域, x, y, z 称为积分变量, dv 称为积分体积微元.

由三重积分的定义可知, 它与二重积分类似是某种形式的和式极限, 因此三重积分具有与二重积分完全类似的性质. 这里就不一一列举, 下面着重讨论三重积分的计算方法.

9.2.2 直角坐标系下三重积分的计算

与二重积分类似在直角坐标系中, 当被积函数 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上可积时, 用平行于坐标面的平面来分割 Ω , 这样积分体积微元为 $dv = dxdydz$, 因此在直角坐标系中三重积分常记为 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz$.

下面讨论三重积分在直角坐标系中的计算方法. 三重积分也可化为三次积分来积分, 这里仅限于叙述三重积分化为三次积分的方法.

前面已经知道定积分与二重积分的计算法, 因此如能把 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz$ 化为单积分与二重积分的累次积分, 则它的计算问题也就得到了解决. 为此先把 Ω 垂直投影到 xOy 坐标平面, 其投影区域记为 D_{xy} , 设过 D_{xy} 内部任一点且平行于 z 轴的直线至多与 Ω 的边界曲面交于两点 (如若不是这样, 总可以把 Ω 划分成若干部分, 使每一部分有这样的性质). 由此不妨设 Ω 的下面的边界曲面为 $\Sigma_1: z = z_1(x, y)$, 上面的边界曲面为 $\Sigma_2: z = z_2(x, y)$, 其中

$z_1(x, y), z_2(x, y)$ 是在 D_{xy} 上连续的函数, 亦即区域 Ω 可用不等式表示为 $\Omega: z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}$,

如图 9-28 所示 (称为 xy -型区域).

则三重积分可表示为

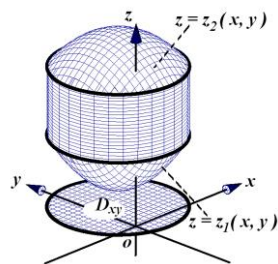


图 9-28

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (9.7)$$

公式(9.7)就把三重积分化为单积分与二重积分的累次积分, 这样一种积分顺序简称为“先一后二”. 另一方面, 若 D_{xy} 可用不等式表示为 $D_{xy}: y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b$, 再把其中的二重积分化为二次积分, 于是得到三重积分的计算公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (9.8)$$

公式(9.8)是把三重积分化为先对 z , 再对 y , 后对 x 的三次积分.

类似地, 如果平行于 x 轴或 y 轴且穿过区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面至多交于两点, 就把 Ω 投影到 yOz 面上或 xOz 面上 (分别称为 yz -型区域与 zx -型区域), 这样就可以把三重积分化为其他顺序的累次积分或三次积分.

例 1 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dv$, 其中 Ω 由坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 和平面 $x+y+z=1$ 所

围成 .

解 积分区域 Ω 可视为 xy -型区域,

如图 9-29 所示区域 Ω 满足不等式

$$0 \leq z \leq 1-x-y, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1 ;$$

因此由公式(9.8)得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyz dv &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{720} . \end{aligned}$$

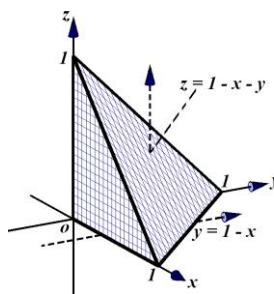


图 9-29

例 2 计算 $\iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dx dy dz$, 其中 Ω 由平

面 $y=x, x+z=\frac{\pi}{2}$ 及坐标面 $y=0, z=0$ 所围成 .

解 区域 Ω 向 xOy 平面投影,

则投影区域 $D_{xy}: 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

如图 9-30,故由公式(9.7) 有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} y dx dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+z) dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x) dx \int_0^x y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1-\sin x) dx = \frac{\pi^2}{48} - \frac{\pi}{2} + 1 . \end{aligned}$$

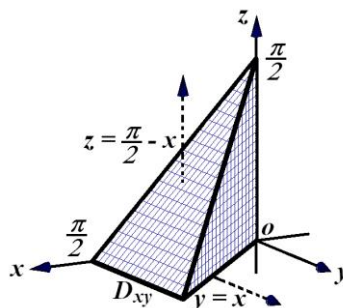


图 9-30

例 3 计算 $I = \iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是以原点为球心, a 为半径的上半球体.

解 区域 Ω 满足 $\Omega: 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2$, 而它在 xOy 平面的投影区域是 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq a^2$, 由公式(9.7)有

$$I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (a^2 - x^2 - y^2) dx dy .$$

对这个二重积分,用极坐标计算比较方便,于是

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2) r dr = \frac{\pi a^4}{4} .$$

下面再介绍用平行截面法计算三重积分的方法,就是把三重积分化为先计算一个二重积分,再计算一个定积分的计算法.为此设积分区域 Ω 可以表为(图 9-31),即

$$\Omega: (x, y) \in D(z), c_1 \leq z \leq c_2,$$

其中 $D(z)$ 是平面 $z = z$ 与 Ω 相交所得的截面在 xoy 面上的投影区域. 即得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \quad (9.9)$$

同样可得其他两种情况的计算公式:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{b_1}^{b_2} dy \iint_{D(y)} f(x, y, z) dx dz \quad (9.10)$$

其中 $D(y)$ 是平面 $y = y$ 与 Ω 相交所得的截面在 xoz 面上的投影区域;

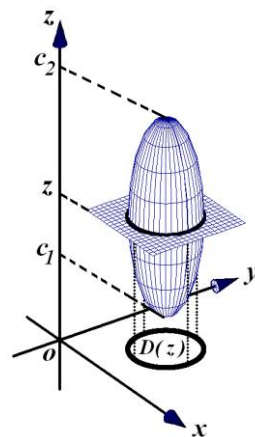


图 9-31

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{a_2} dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz \quad (9.11)$$

其中 $D(x)$ 是平面 $x = x$ 与 Ω 相交所得的截面在 $yo z$ 面上的投影区域. 这种积分顺序简称为“先后一”.

例 4 计算 $I = \iiint_{\Omega} x^3 dv$, 其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的第一卦限部分.

解 为计算方便, 我们采用“先后一”的方法, 如图 9-32 所示其中 $D(x)$ 是 Ω 被平行于 $yo z$ 面的平面 $x = x$ 所截的截面在 $yo z$ 面的投影区域, 其面积为 $\frac{bc\pi}{4}(1 - \frac{x^2}{a^2})$, 由公式(9.11), 得

$$I = \iiint_{\Omega} x^3 dv = \int_0^a x^3 dx \iint_{D(x)} dy dz = \frac{bc\pi}{4} \int_0^a x^3 (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx = \frac{a^4 bc\pi}{48}$$

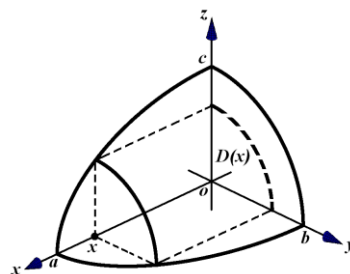


图 9-32

例 5 计算 $I = \iiint_{\Omega} e^z dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 和平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的区域.

解 区域可表为 $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1 + z^2, 0 \leq z \leq 2$,

如图 9-33 所示, 由公式(9.9)得

$$I = \iiint_{\Omega} e^z dv = \int_0^2 e^z dz \iint_{x^2+y^2 \leq 1+z^2} dx dy = \pi \int_0^2 e^z (1 + z^2) dz = 3\pi(e^2 - 1).$$

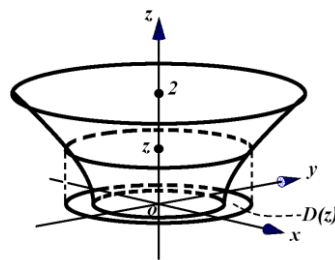


图 9-33

9.2.3 柱面坐标系与球面坐标系下三重积分的计算

与二重积分算法引入极坐标系的理由相似,三重积分中某些积分区域及被积函数,用空间的另一些坐标系来计算会更方便一些,为此我们引入柱面坐标系及球面坐标系,再来讨论三重积分在这些坐标系下的计算方法.

1. 柱面坐标系下三重积分的计算

所谓柱面坐标系,是指在空间直角坐标系中, xOy 坐标面的极坐标与 z 轴结合的空间坐标系.

设 $M(x, y, z)$ 为空间一点,点 M 在 xOy 平面上的投影点 P 的极坐标为 (r, θ) ,则有序数组 (r, θ, z) 称为点 M 的柱面坐标, r, θ 的规定与平面上的极坐标相同.因此, r, θ, z 的变化范围为

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty$$

由柱面坐标的定义易有柱面坐标与直角坐标之间的关系(图 9-34)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

三组坐标面分别是

$r = \text{常数}$,表示以 z 轴为对称轴的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$,表示过 z 轴的半平面;

$z = \text{常数}$,表示平行于 xOy 平面的平面.

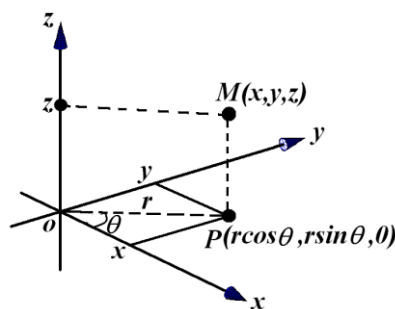


图 9-34

现在讨论三重积分在柱面坐标系中的算法,

设 $f(x, y, z)$ 在区域 Ω 上可积,把 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$

中的变量变换为柱面坐标,区域 Ω 的边界曲面方程用柱面坐标表示; 因此主要问题在于体积微元的变化,由可积性知,积分值与区域 Ω 的分法及小区域上点的取法无关,取特殊的方法分割区域 Ω ,

用三组坐标面 $r = \text{常数}$, $\theta = \text{常数}$, $z = \text{常数}$

分割区域 Ω ,这样除了含 Ω 边界的小区域是不规则的外,都是小的柱体;因此考虑由

$$r = r, r = r + dr; \theta = \theta, \theta = \theta + d\theta;$$

$$z = z, z = z + dz$$

所围微元的体积(图 9-35),这个体积等于

高 dz 与底面积的乘积,底面积在不计高阶无穷小时近似等于 $r dr d\theta$ (正是极坐标系中的面积微元),于是得 $dv = r dr d\theta dz$,并称

之为柱面坐标系中的体积微元.从而可得三重积分的从直角坐标变换为柱面坐标的公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz \quad (9.12)$$

它的计算方法与直角坐标系类似,先对 z 积分,将空间区域 Ω 向 xOy 坐标面投影得平面域

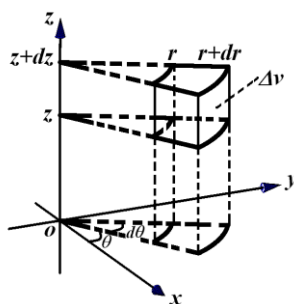


图 9-35

D_{xy} , Ω 上面的边界曲面与下面的边界曲面,就是对 z 积分的上限与下限,注意把曲面方程用柱面坐标来表示,然后在 D_{xy} 上用极坐标系计算即可.

例 6 计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z$.

解 Ω 如图 9-36 所示, Ω 在 xOy 坐标面上的投影域为 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 3$; 从而 Ω 的柱面坐标的表达形式为:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \frac{1}{3}r^2 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}.$$

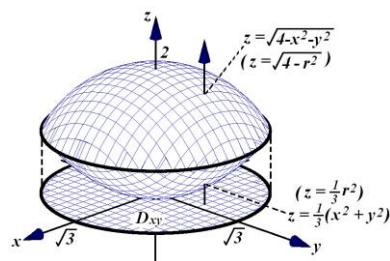


图 9-36

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r \left(4 - r^2 - \frac{r^4}{9} \right) dr = \frac{13\pi}{4}.$$

2. 球面坐标系下三重积分的计算

在直角坐标系中,空间一点 M 在 xOy 平面上的投影点为 P ,连接 OM , OP , M 点到原点 O 的距离为 r ; OM 与 z 轴正向的夹角为 φ ; OP 与 x 轴正向的夹角为 θ . 这样空间点 M 就有一组有序数组 (r, θ, φ) 与之对应,这样确定的坐标系称为球面坐标系.

球面坐标与直角坐标之间的关系是(图 9-36):

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

三组坐标面分别是

$r = \text{常数}$, 表示以原点为球心的球面;

$\theta = \text{常数}$, 表示过 z 轴的半平面;

$\varphi = \text{常数}$, 表示以原点为顶点, z 轴为对称轴, 半顶角为 φ 的圆锥面.

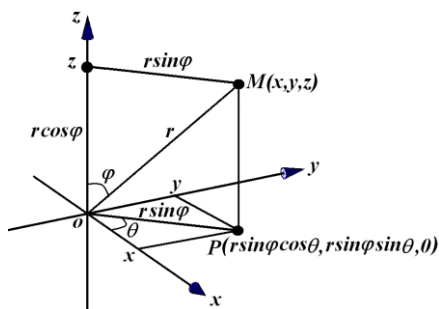


图 9-36

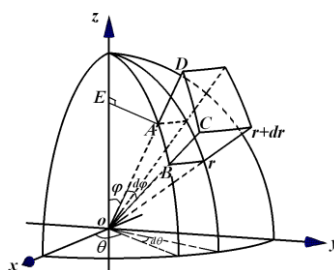


图 9-37

类似柱面坐标系中的讨论,主要考虑体积微元的变化;为此考虑由

$r = r, r = r + dr; \theta = \theta, \theta = \theta + d\theta; \varphi = \varphi, \varphi = \varphi + d\varphi$ 所围微元的体积,如图 9-37 所示,微元 Δv 可近似地看成以 AB, AC 及 AD 为边长的长方体的体积,即有

$$\Delta v \approx |AB| \cdot |AC| \cdot |AD|,$$

而 $|AB| = r d\varphi, |AC| = |AE| d\theta = r \sin \varphi d\theta, |AD| = dr$, 故有 $\Delta v \approx dv = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$. 称之为球面坐标系中的体积微元. 于是可得三重积分从直角坐标变换为球面坐标的公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \quad (9.13)$$

特别,如果原点在区域 Ω 的内部,而边界曲面的球面坐标方程为 $r = r(\theta, \varphi)$ 时,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\theta, \varphi)} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr.$$

如果原点不在区域 Ω 的内部,则先对 r 积分,从原点作一射线交区域 Ω 于两点,其 r 坐标分别是 $r_1(\theta, \varphi), r_2(\theta, \varphi)$, 并设 $r_1(\theta, \varphi) \leq r_2(\theta, \varphi)$, 则 $r_1(\theta, \varphi), r_2(\theta, \varphi)$ 分别是对 r 积分的下限与上限;然后再根据区域 Ω 的具体形状化为先对 φ 后对 θ 的积分. 这样就可以把三重积分在球面坐标系中化为三次积分,下面用具体例子加以说明.

例 7 求 $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$, 其中 Ω 为: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ 与 $x^2 + y^2 \leq 3z^2$ 所围立体 (包含 z 轴的部分).

解 由题意可知立体如图 9-38 所示,选用球面坐标系计算,此时立体表示为

$$\Omega: 0 \leq r \leq 4 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} r^3 dr =$$

$$= 2\pi \times 4^3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = -\frac{2 \times 4^3}{5} \pi \cos^5 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{124}{5} \pi.$$

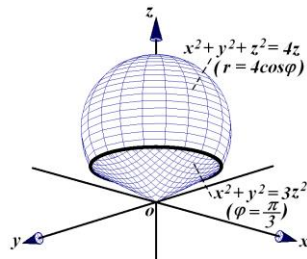


图 9-38

例 8 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

$$\text{解 } I = \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) dx dy dz,$$

而积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 关于三个坐标面都对称,被积函数中 $2xy, 2xz$ 关于 x 是奇函数, $2yz$ 关于 y 为奇函数,故 $\iiint_{\Omega} (2xy + 2xz + 2yz) dx dy dz = 0$, 这样

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi a^5}{5}.$$

这里再给出直角坐标与广义球面坐标的变换公式:

$$\begin{cases} x = ar \cos \theta \sin \varphi, \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, \\ z = cr \cos \varphi. \end{cases} \quad 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

可以得到三重积分从直角坐标变换为广义球面坐标的变换公式,而在广义球面坐标系下的体积微元为 $dv = abc r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$. 于是可得三重积分从直角坐标变换为广义球面坐标的公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) abc r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \quad (9.14)$$

例 9 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$, 其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, y \leq x$.

解 由题意可知立体如图 9-39 所示,选用广义球面坐标系计算,此时立体表示为

$$\Omega: -\pi + \arctan \frac{a}{b} \leq \theta \leq \arctan \frac{a}{b}, \dots$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 1$$

在广义球面坐标系下计算,由公式(9.14),得

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz =$$

$$= abc \int_{-\pi + \arctan \frac{a}{b}}^{\arctan \frac{a}{b}} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2} abc.$$

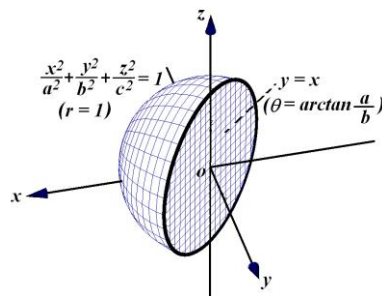


图 9-39

*9.2.4 三重积分的换元法

与二重积分的换元法类似,下面给出三重积分的换元公式.设坐标变换

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega^*,$$

将空间有界闭区域 Ω^* 变换为 Ω , 函数 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 在 Ω^* 上有连续的偏导数,且雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, (u, v, w) \in \Omega^*,$$

于是三重积分换元公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw .$$

其体积微元是 $dv = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$.

因此对于柱面坐标系有 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$ 于是

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r ,$$

因而体积微元为 $dv = r dr d\theta dz$.

对于球面坐标系有 $\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$ 于是

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi ,$$

其体积微元为 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$. 这些与前面推导的结果一致.

习 题 9.2

1. 将三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 化为直角坐标系下的三次积分, 其中积分区域 Ω 如下:

(1) 由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 2 - x^2$ 所围成的区域;

(2) 由曲面 $x = \sqrt{y - z^2}$ 和 $y = 1$ 所围成的区域;

(3) 由曲面 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = x$ ($x > 0$), $x = 0$ 所围成的区域;

(4) 由曲面 $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$ 及平面 $y = 1$, $z = 0$ 所围成的区域.

2. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = xy$ 及平面 $y = x$, $x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的区域;

(2) $\iiint_{\Omega} 2y^2 e^{xy} dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ 和 $z = 0$, $z = 1$ 所围成的区域;

(3) $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$, 其中 Ω 是由平面 $z=0, y=1, z=y$ 与柱面 $y=x^2$ 所围成的区域 .

3. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} \sin y^2 dv$, 其中 Ω 是由曲面 $y = \frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{4}$ 与平面 $y = \sqrt{\pi}, y = \sqrt{2\pi}$ 所围成的区域;

(2) $\iiint_{\Omega} y \cos(x+z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $y = \sqrt{x}$ 与 $y=0, z=0$ 和 $x+z = \frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

4. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x \geq 0, y \geq 0, z=0$ 和 $z=1$ 所围区域;

(2) $\iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成 ;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq x^2 + y^2$;

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面

$z=2, z=8$ 所围成的区域.

5. 选择适当的坐标系, 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dv$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{b^2 - x^2 - y^2}$ 与平面 $z=0$

所围成的区域 ($0 < a < b$).

(3) $\iiint_{\Omega} \frac{x^2 + y^2}{z^2} dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$;

(4) $\iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$, 其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

6. 设 $F(t) = \iiint_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, 其中 $\Omega(t): x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$, $f(u)$

是可微函数, 求 $F'(t)$.

7. 设 $f(x, y, z)$ 是连续函数, $\Omega(t): x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3}{t^3} \iiint_{\Omega(t)} f(x, y, z) dx dy dz .$$

8*. 利用三重积分的换元法证明: 若积分区域 Ω 关于 xOy 平面对称, 则

(1) 当 $f(x, y, z)$ 是 z 的奇函数时, 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0$;

(2) 当 $f(x, y, z)$ 是 z 的偶函数时, 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv$,

其中 Ω_1 是 Ω 在 $z \geq 0$ 中的部分区域.

9.3 重积分的应用

9.3.1 几何应用

1. 立体的体积

由二重积分的定义可知可用二重积分求空间立体的体积, 另一方面, 当在区域 Ω 上 $f(x, y, z) \equiv 1$ 时, 则 $\iiint_{\Omega} dv = V(\Omega)$ 就是 Ω 的体积..

例 1 求由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = x + y$ 所围立体的体积.

解 把立体向 xOy 平面投影,

$$\text{即 } \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = x + y. \end{cases} \text{ 消去 } z,$$

$$\text{得投影区域 } D: (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}$$

(图 9-39), 故

$$V = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy$$

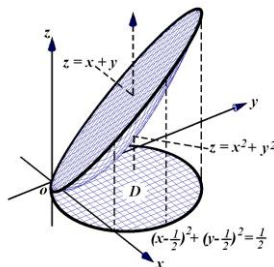


图 9-39

$$\text{令 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + r \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} + r \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ 即把极点置于圆点 } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ 上, 则}$$

$$V = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\frac{1}{2} - r^2) r dr = \frac{\pi}{8}. \text{ 若用三重积分计算, 即}$$

$$V = \iiint_{\Omega} dv = \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy, \text{ 与上式一样.}$$

例 2 求由不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ 与 $x^2 + y^2 \leq 2ay$ ($a > 0$) 所确定的立体的体积.

解 两个不等式表示的立体为位于球面与圆柱面内的公共部分的立体, 其图形如图 9-40,

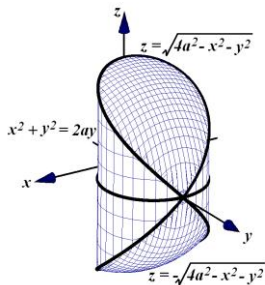


图 9-40

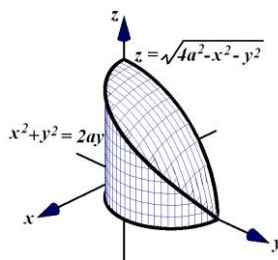


图 9-41

由对称性所求立体的体积是它在第一卦限部分体积的四倍. 第一卦限部分的立体是以球面 $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ 为顶, 半圆 D (图 9-41) 为底的曲顶柱体, 在极坐标系下计算

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{2a \sin \theta} d\theta = \frac{32a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \theta) d\theta = \frac{16a^3}{9} (3\pi - 4) . \end{aligned}$$

2. 面积

(1). 平面区域的面积

当在平面区域 D 上, 被积函数 $f(x, y) = 1$ 时的二重积分 $\iint_D d\sigma$, 就是 D 的面积..

例 3 求贝努利(Bernoulli)双纽线 $(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ 所围区域的面积.

解 显然在直角坐标系下计算困难, 采用在极坐标系下计算, 双纽线的极坐标方程是 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$,

由于 $r^2 \geq 0$, 故 $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$, 其

图形见图 9-42. 由对称性, 只考虑第一象限

D_1 即可, 因此得

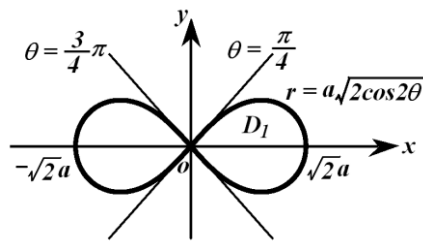


图 9-42

$$A = 4 \iint_{D_1} d\sigma = 4 \iint_{D_1} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 .$$

(2). 空间曲面的面积

设曲面 Σ 的方程为 $\Sigma: z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, 其中 D_{xy} 为曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影域且函数 $f(x, y)$ 在 D_{xy} 上具有连续的偏导数. 将 D_{xy} 分割成 n 个小区域, 用 $d\sigma$ 记为

典型小区域(既表示区域, 又表示其面积), 而在直角坐标系中其面积微元为 $d\sigma = dx dy$; 在 $d\sigma$

上任取一点 $P(x, y)$, 过 P 点作 xOy 平面的垂线交曲面 Σ 于点 $M(x, y, z)$, 其中 $z = f(x, y)$.

过点 M 作曲面的切平面 π ; 再作以 $d\sigma$ 的边界为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 该柱面在曲面 Σ 上截得一片小曲面记为 ΔS (既表示曲面, 又表示其面积), 在切平面 π 上截得一块小平面记为 ΔA (既表示小平面, 又表示其面积), 如图 9-43 所示; 当分割足够小时, ΔS 面积可用 ΔA 的面积近似(图 9-44),

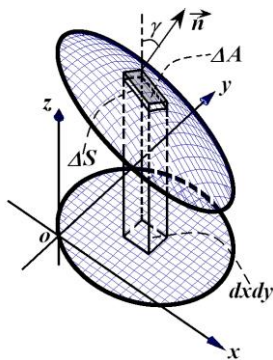


图 9-43

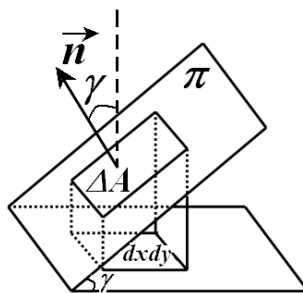


图 9-44

曲面 Σ 在点 M 的法向量 $\vec{n} = \pm(f_x(x, y), f_y(x, y), -1)$, \vec{n} 与 z 轴之间的夹角为 γ , 这样就有

$$\Delta S \approx dS = \Delta A = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|}, \text{ 而 } |\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1}}, \text{ 于是曲面 } \Sigma \text{ 的面积微元为}$$

$dS = \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dxdy$, 积分便得曲面 Σ 的面积为

$$S = \iint_{D_{xy}} \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dxdy \quad (9.15)$$

如果曲面 Σ 的方程为 $\Sigma: y = f(x, z)$, $(x, z) \in D_{zx}$,

或者表为 $\Sigma: x = f(y, z)$, $(y, z) \in D_{yz}$, 其中 D_{zx} 和 D_{yz} 分别为曲面 Σ 在 zOx 和 yOz 平面上的投影域. 这时曲面 Σ 面积计算公式分别是

$$S = \iint_{D_{zx}} \sqrt{f_x^2(x, z) + f_z^2(x, z) + 1} dzdx \quad (9.16)$$

与

$$S = \iint_{D_{yz}} \sqrt{f_y^2(y, z) + f_z^2(y, z) + 1} dydz \quad (9.17)$$

例 2 求半径为 a 的球面的面积.

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则上半球面的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 它在 xOy 平面上的投影为 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$. 由于 $dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$,

由公式(9.15)可得球面面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= 4\pi(-\sqrt{a^2 - r^2}) \Big|_0^a = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

例3 求柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 含在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 内部的面积.

解 如图 9-45(a)(b)(c)所示,由对称性只需计算柱面在第一卦限部分 Σ_1 的面积, 因此

$$\Sigma_1: y = \sqrt{ax - x^2}, \text{把} \Sigma_1 \text{向} zOx \text{平面投影, 由} \begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \text{消去} y \text{得}$$

$$D_{zx}: z^2 \leq a^2 - ax, 0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq a.$$

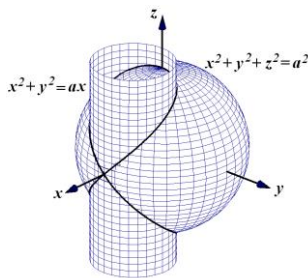


图 9-45(a)

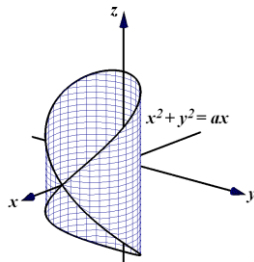


图 9-45(b)

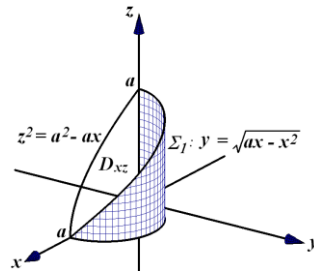


图 9-45(c)

由于 $dS = \sqrt{y_x^2 + y_z^2 + 1} dz dx = \frac{adz dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$, 由公式(9.16)得

$$S = 4 \iint_{D_{zx}} \frac{adz dx}{2\sqrt{ax - x^2}} = 2a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} dz = 2a \int_0^a \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} dx = 4a^2.$$

9.3.2 物理应用

1. 物体的质量

前面引入二重积分时,若平面薄片占有区域 D ,且它的面密度为 $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$, 则它的质量是 $M = \iint_D \rho(x, y) d\sigma$. 同样地,若空间物体占有区域 Ω , 且它的体密度为

$\rho = \rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$, 则它的质量亦可用三重积分表示 $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$.

例4 如果球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ ($a > 0$) 上各点的密度与坐标原点到该点的距离成反比,求球体的质量.

解 由题意,体密度 $\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, k 为常数,则所求质量为

$$M = \iiint_{\Omega} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv,$$

利用球面坐标系计算得

$$M = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \frac{1}{r} \cdot r^2 dr = 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{4ka^2\pi}{3} .$$

2. 物体的重心

先考察平面的情况, 设 xOy 平面上有 n 个质点, 它们的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n , 根据静力学知识, 该质点系关于 x 轴与 y 轴的静力矩和总质量分别是

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i, M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i, M = \sum_{i=1}^n m_i .$$

因此该质点系的重心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) 为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} .$$

设平面薄片所在区域为 D , 其面密度为 $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$, 取区域 D 上的微元 $d\sigma$ (既表示小区域, 又表示面积), 则 $d\sigma$ 关于 x 轴与 y 轴的静力矩和总质量分别是

$$dM_x = y\rho(x, y)d\sigma, dM_y = x\rho(x, y)d\sigma, dM = \rho(x, y)d\sigma,$$

于是平面薄片关于 x 轴与 y 轴的静力矩和总质量分别是:

$$M_x = \iint_D y\rho(x, y)d\sigma, M_y = \iint_D x\rho(x, y)d\sigma, M = \iint_D \rho(x, y)d\sigma .$$

则其重心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) 为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x, y)d\sigma}{\iint_D \rho(x, y)d\sigma}, \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x, y)d\sigma}{\iint_D \rho(x, y)d\sigma} .$$

特别, 当物体为匀质时, 即密度 $\rho = \text{常数}$, 重心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) 为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma} .$$

这就是几何上区域 D 的形心坐标.

上述重心坐标的计算公式可以推广到空间物体上, 为此设空间物体占有区域 Ω , 其体密度 $\rho = \rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$, 则重心坐标为:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv}, \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv}, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)dv}.$$

例 5 求介于两圆 $r = 2\sin\theta$ 与 $r = 4\sin\theta$ 之间部分的均匀薄片的重心.

解 由对称性(图 9-46)知, $\bar{x} = 0$, 又

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{1}{4\pi - \pi} \int_0^{\pi} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{56}{9\pi} \int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{7}{3}.$$

所以重心坐标是 $(0, \frac{7}{3})$.

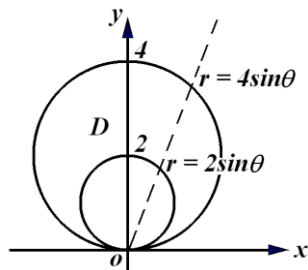


图 9-46

例 6 如果球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ ($a > 0$) 上各点的密度与坐标原点到该点的距离成反比, 求球体的重心坐标.

解 球体的质量是 $M = \frac{4ka^2\pi}{3}$. 由于立体关于 yOz 平面及 zOx 平面均对称, 且其密度函数

$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 关于三个变量都是偶函数, 故其重心坐标 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 中, $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$, 又

$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \frac{kz dv}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. 利用球面坐标系计算有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{kz dv}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \frac{1}{r} \cdot r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr \\ &= \frac{2k\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8a^3 \cos^4\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{16ka^3\pi}{15}, \end{aligned}$$

所以 $\bar{z} = \frac{4a}{5}$, 即得球体的重心坐标为 $(0, 0, \frac{4a}{5})$.

3. 转动惯量

由力学知识知, 若质量为 m 的质点到 u 轴的距离为 d , 则质点关于 u 轴的转动惯量为

$$J = d^2 m.$$

假设 xOy 平面上有 n 个质点, 它们的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 质量分别

为 m_1, m_2, \dots, m_n , 则该质点系关于 x 轴与 y 轴的转动惯量就分别是:

$$J_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i, I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i.$$

若平面薄片所在区域为 D , 其面密度为 $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$, 取区域 D 上的微元

$d\sigma$ (既表示小区域, 又表示面积), 把 $d\sigma$ 视为质点, 这样 $d\sigma$ 关于 x 轴与 y 轴的转动惯量分别为:

$$dJ_x = y^2 \rho(x, y) d\sigma, dJ_y = x^2 \rho(x, y) d\sigma,$$

于是平面薄片关于 x 轴与 y 轴的转动惯量分别为:

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) d\sigma, J_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma.$$

关于原点的转动惯量是

$$J_0 = J_x + J_y = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\sigma.$$

上述公式可以推广到空间物体上, 设空间物体占有区域 Ω , 体密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$, 则该物体关于 x 轴, y 轴以及 z 轴的转动惯量分别是:

$$J_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$J_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv,$$

$$J_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv.$$

例 7 求半径为 a 的均匀半圆薄片对于其直径边的转动惯量.

解 如图 9-47 建立坐标系,

则薄片所占区域 $D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0$;

所求的转动惯量即是半圆薄片关于 x 轴的转动惯量, 因为是均匀薄片, 故面密度 $\rho = \text{常数}$;

$$J_x = \rho \iint_D y^2 d\sigma$$

$$= \rho \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^3 \sin^2 \theta dr = \frac{a^4 \rho}{4} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{a^4 \pi \rho}{8}.$$

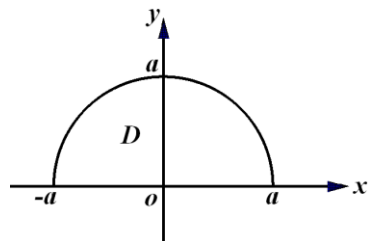


图 9-47

例 8 如果球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ ($a > 0$) 上各点的密度与坐标原点到该点的距离成反比, 求球体关于 z 轴的转动惯量.

解 球体的体密度是 $\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, k 为常数, 所以由公式球体关于 z 轴的转动惯

量为:

$$J_z = \iiint_{\Omega} \frac{k(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv,$$

利用球面坐标系计算得

$$\begin{aligned} J_z &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{r} \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 8ka^4 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{16ka^4 \pi}{35} . \end{aligned}$$

习 题 9.3

1. 设平面薄片所占有的闭区域 D 是由直线 $x + y = 2$, $y = x$ 和 x 轴围成, 其面密度为 $\rho = x^2 y$, 求该薄片的质量与重心.
2. 设平面薄片由 $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ 围成, 其密度 $\rho = xy$, 求薄片关于 x 轴的转动惯量 I_x .
3. 一金属薄片, 形如心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$), 如果它在任一点的密度与原点到此点的距离成正比, 求其质量.
4. 设平面薄片占有的闭区域 D 由螺线 $r = 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 围成, 其面密度为 $\rho = x^2 + y^2$, 求该薄片的质量及关于极点的转动惯量.
5. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在柱面 $x^2 + y^2 = ax$ ($a > 0$) 内部的面积.
6. 求柱面 $y^2 = 4x$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$ 截下部分的面积.
7. 设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ 任一点的密度等于它到坐标原点的距离, 求该球体的质量及关于 x 轴的转动惯量.
8. 求以抛物柱面 $z = 4 - x^2$ 和平面 $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 0$ ($x \geq 0$) 所围成的均匀物体的重心.
9. 均匀物体 Ω 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $|x| = a$, $|y| = b$, $z = 0$ 所围成, 求该物体的体积, 重心和关于 z 轴的转动惯量.

*9.4 含参变量的积分

设 $f(x, y)$ 是定义在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上的二元函数, 当 x 取 $[a, b]$ 上某定值时, 函数 $f(x, y)$ 即为 $[c, d]$ 上以 y 为自变量的一元函数; 若 $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 则积分值是 x 在 $[a, b]$ 上取值的函数, 记为

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b] \quad (9.18)$$

一般地, 设 $f(x, y)$ 是定义在区域 $D: \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b$ 上的二元函数, 其中 $\alpha(x), \beta(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 对 $[a, b]$ 上每一固定的 x , $f(x, y)$ 是 y 的一元函数, 并且 $f(x, y)$ 在 $[\alpha(x), \beta(x)]$ 上可积, 则其积分值是 x 在 $[a, b]$ 上取值的函数, 记为

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy, \quad x \in [a, b] \quad (9.19)$$

用积分形式所定义的函数(9.18)与(9.19)通称为含参变量 x 的积分, 简称为含参积分.

下面讨论含参积分的连续性, 可微性与可积性.

定理 1 (连续性) 若函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 则函数 $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ 在 $[a, b]$ 上连续.

证 设 $x \in [a, b]$, 取 Δx , 使得 $x + \Delta x \in [a, b]$, 于是

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \int_c^d [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] dy \quad (9.20)$$

由于 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 所以一致连续, 即对任给 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 对 D 内任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 只要 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta$, 就有

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon,$$

于是对任何 $x \in [a, b]$ 及 $|\Delta x| < \delta$, 有

$$|f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| < \varepsilon \quad (9.21)$$

所以由(9.20)及(9.21)式, 可得

$$|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| \leq \int_c^d |f(x + \Delta x, y) - f(x, y)| dy < \varepsilon(d - c),$$

这就证得 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

这个定理的结论也可以写为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy = \int_c^d f(x_0, y) dy$$

定理 2 (连续性) 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D: \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b$ 上连续, 其中 $\alpha(x), \beta(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则函数

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \quad (9.22)$$

在 $[a, b]$ 上连续.

证 对积分(9.22)用换元积分法, 令 $y = \alpha(x) + t[\beta(x) - \alpha(x)]$, 当 y 在 $[\alpha(x), \beta(x)]$ 上取

值时, $t \in [0, 1]$, 且 $dy = [\beta(x) - \alpha(x)]dt$, 所以由(9.22)式, 可得

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_0^1 f(x, \alpha(x) + t[\beta(x) - \alpha(x)]) [\beta(x) - \alpha(x)] dt,$$

由于被积函数

$$f(x, \alpha(x) + t[\beta(x) - \alpha(x)]) [\beta(x) - \alpha(x)]$$

在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq 1$ 上连续, 由定理 1 得积分(9.22)所确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

这样由定理 1 知, 若函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 则函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 那么 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 即

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (9.23)$$

同样地, 令 $\psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $y \in [c, d]$, 则 $\psi(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 在 $[c, d]$ 上可积, 亦有

$$\int_c^d \psi(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (9.24)$$

(9.23) 式与 (9.24) 式正是函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上的二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 在区域 D 上的两种顺序的二次积分. 可以证明下面的定理

定理 3 (可积性) 若函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 则

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

下面来讨论积分(9.18)式的微分问题.

定理 4 (可微性) 若函数 $f(x, y)$ 及其偏导数 $f_x(x, y)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, 则由积分(1)式确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy. \quad (9.25)$$

证 对任意 $x \in [a, b]$, 且 $x + \Delta x \in [a, b]$ (若 x 是端点就讨论单侧导数), 于是

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} dy,$$

因为 $f(x, y)$ 及 $f_x(x, y)$ 在区域 D 上连续, 由微分中值定理,

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \int_c^d f_x(x + \theta \Delta x, y) dy, \quad 0 < \theta < 1,$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 右端的积分再利用定理 1 的结果, 得

$$\varphi'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

即得所要证明的结果.

定理 5 (可微性) 若函数 $f(x, y)$ 及其偏导数 $f_x(x, y)$ 在矩形区域 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上连续, $\alpha(x), \beta(x)$ 是 $[a, b]$ 上的可微函数, 并且 $c \leq \alpha(x) \leq d, c \leq \beta(x) \leq d, x \in [a, b]$, 则由积分(9.19)式确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) \quad (9.26)$$

证 将 $\Phi(x)$ 看作复合函数,为此令

$$\Phi(x) = G(x, u, v) = \int_v^u f(x, y) dy, u = \beta(x), v = \alpha(x),$$

由复合函数求导法则,有

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx} &= \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} = \int_v^u f_x(x, y) dy + f(x, u)\beta'(x) - f(x, v)\alpha'(x) \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy + f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x). \end{aligned}$$

即证.

公式(9.26)称为莱布尼兹(Leibniz)公式.

例 1 求 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

解 记 $\varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$, 由于 $\alpha, 1+\alpha, \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ 都是连续函数,由定理 2 知

$\varphi(x)$ 在 $\alpha=0$ 处连续,所以

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

例 2 设 $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y} dy$, 求 $\varphi'(x)$.

解 由莱布尼兹公式(9.26),得

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \int_x^{x^2} \cos(xy) dy + \frac{\sin x^3}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin x^2}{x} \\ &= \frac{1}{x} [\sin(xy)]_x^{x^2} + \frac{2 \sin x^3 - \sin x^2}{x} = \frac{3 \sin x^3 - 2 \sin x^2}{x}. \end{aligned}$$

例 3 求 $I(\theta) = \int_0^{\pi} \ln(1+\theta \cos x) dx$, 其中 $|\theta| < 1$.

解 令 $f(x, \theta) = \ln(1+\theta \cos x)$, 则 $f_{\theta}(x, \theta) = \frac{\cos x}{1+\theta \cos x}$. 因为 $f(x, \theta), f_{\theta}(x, \theta)$ 在 $D: 0 \leq x \leq \pi, -1 < \theta < 1$ 上连续,由定理 4 可得

$$I'(\theta) = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\theta \cos x} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{\pi} (1 - \frac{1}{1+\theta \cos x}) dx = \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\theta \cos x},$$

利用万能代换,求不定积分

$$\int \frac{dx}{1+\theta \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\theta \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2dt}{(1+\theta) + (1-\theta)t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \arctan(\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \tan \frac{x}{2}) + C$$

所以

$$I'(\theta) = \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\theta \cos x} = \frac{\pi}{\theta} - \frac{2}{\theta \sqrt{1-\theta^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta \sqrt{1-\theta^2}}).$$

再对 θ 积分,得

$$I(\theta) = \pi \int (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta \sqrt{1-\theta^2}}) d\theta = \pi(\ln \theta + \ln \frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}) + C = \pi \ln(1+\sqrt{1-\theta^2}) + C,$$

又 $I(0) = 0$, 于是得 $C = -\pi \ln 2$, 从而得 $I(\theta) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \theta^2}}{2}$.

习 题 9.4*

1. 求下列含参积分的极限:

$$(1) \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}; \quad (2) \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{1+y^2} \sqrt[3]{x^4+y^2} dx;$$

$$(3) \lim_{y \rightarrow 0} \int_1^2 x^3 \cos(xy) dx; \quad (4) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_a^b [f(x+y) - f(x)] dx \quad (f \text{ 可导}).$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \varphi(x) = \int_0^{x^2} \frac{\ln(1+xy)}{y} dy; \quad (2) \varphi(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} (y^2 \sin x - y^3) dy;$$

$$(3) \varphi(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan \frac{y}{x} dy; \quad (4) \varphi(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy.$$

3. 设 $F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x - yz) f(z) dz$, 其中 $f(z)$ 是可微函数, 求 $F_{xy}(x, y)$.

9.5 综合例题

例 1、设 $p(x)$ 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数, $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 证明:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$$

, 证明: 令: $\Delta = \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx - \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx$,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad \Delta &= \int_a^b \int_a^b p(x) f(x) p(y) [g(x) - g(y)] dx dy = \\ &= \int_a^b \int_a^b p(y) f(y) p(x) [g(y) - g(x)] dx dy, \end{aligned}$$

以上两式相加得

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x) p(y) [f(x) - f(y)] [g(y) - g(x)] dx dy,$$

由题设可知: $\Delta \geq 0$, 故

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx.$$

例 2、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $n > 0$, 证明:

$$\int_a^b dy \int_a^y (y-x)^n f(x) dx = \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-x)^{n+1} f(x) dx.$$

, 证明: 如图 9-48, 改变积分次序得

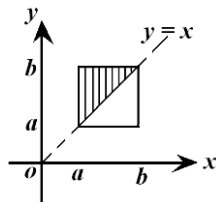


图 9-48

$$\int_a^b dy \int_a^y (y-x)^n f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \int_x^b (y-x)^n dy = \frac{1}{n+1} \int_a^b (b-x)^{n+1} f(x) dx.$$

例 3、确定积分 $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy$ 的符号.

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy + \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy + \iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy = \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy - \iint_{1 \leq x^2+y^2 \leq 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy - \iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy = \\ &\leq \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy - 0 - \iint_{2 \leq x^2+y^2 \leq 4} dx dy = \pi - (\pi \times 2^2 - \pi \times 2) = -\pi < 0. \end{aligned}$$

例 4、将对极坐标的二次积分: $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 交换积分次序,

再把它化为直角坐标系,先对 x 再对 y 以及先对 y 再对 x 的两个累次积分.

解 根据二次积分的限,可知如图 9-49

所示的积分区域,将其分成 $D = D_1 + D_2$,

$$D_1: 0 \leq r \leq \sqrt{2}a, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \arccos \frac{r}{a};$$

$$D_2: \sqrt{2}a \leq r \leq 2a, -\arccos \frac{r}{2a} \leq \theta \leq \arccos \frac{r}{2a}$$

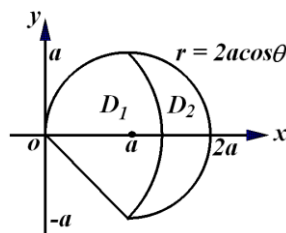


图 9-49

$$I = \int_0^{\sqrt{2}a} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}a}^{2a} r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2a}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

在直角坐标系下,

$$D: -a \leq y \leq 0, -y \leq x \leq a + \sqrt{a^2 - y^2}; \quad 0 \leq y \leq a, a - \sqrt{a^2 - y^2} \leq x \leq a + \sqrt{a^2 - y^2},$$

$$\text{则 } I = \int_{-a}^0 dy \int_{-y}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$D: 0 \leq x \leq a, -x \leq y \leq \sqrt{2ax - x^2}; \quad a \leq x \leq 2a, -\sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax - x^2},$$

$$\text{则 } I = \int_0^a dx \int_{-x}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy.$$

例 5、计算 $\iint_D [1 + yf(x^2 + y^2)]xdxdy$, 其中 D 是由 $y = x^3$, $y = 1$, $x = -1$ 围成的区域, f 为连续函数.

解法 1 因为 f 连续,

所以 f 可积, 令 $\int_0^x f(x)dx = F(x)$,

D 的图形如图 9-50 所示, 则

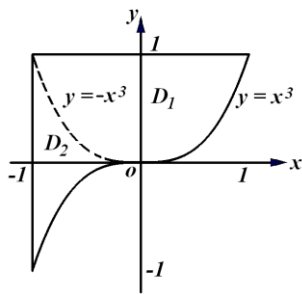


图 9-50

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xdx dy + \iint_D xyf(x^2 + y^2)dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 xdy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 xyf(x^2 + y^2)dy = \\ &= \int_{-1}^1 x(1 - x^3)dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} xF(x^2 + y^2) \Big|_{x^3}^1 dx = -\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x[F(1 + x^2) - F(x^2 + x^6)]dx; \\ &\text{因为 } x[F(1 + x^2) - F(x^2 + x^6)] \text{ 是奇函数, 所以 } \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x[F(1 + x^2) - F(x^2 + x^6)]dx = 0, \\ &\text{则 } I = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

解法 2 用 $y = -x^3$ 将 D 分割为 D_1 与 D_2 (如图 9-50 所示), 则

$$I = \iint_{D_1} xdx dy + \iint_{D_2} xdx dy + \iint_{D_1} xyf(x^2 + y^2)dx dy + \iint_{D_2} xyf(x^2 + y^2)dx dy;$$

因为 D_1 关于 y 轴对称, 函数 $x, xyf(x^2 + y^2)$ 关于 x 为奇函数, 所以 $\iint_{D_1} xdx dy = 0$,

$\iint_{D_1} xyf(x^2 + y^2)dx dy = 0$; 因为 D_2 关于 x 轴对称, 函数 $xyf(x^2 + y^2)$ 关于 y 为奇函数,

$$\text{所以 } \iint_{D_2} xyf(x^2 + y^2)dx dy = 0. \text{ 则 } I = \int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^{-x^3} xdy = \int_{-1}^0 (-2x^4)dx = -\frac{2}{5}.$$

例 6、证明: 曲面 $(z - a)\varphi(x) + (z - b)\varphi(y) = 0$, $x^2 + y^2 = c^2$ 和 $z = 0$ 所围成的立体体积为 $V = \frac{\pi(a+b)c^2}{2}$; 其中 $\varphi(t)$ 为任意正值连续函数, a, b, c 为正常数.

证明 $V = \iint_D zdx dy = \iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)}dx dy$; $D: x^2 + y^2 \leq c^2$, D 关于 $y = x$ 对称,

$$\text{则 } V = \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)}dx dy, \quad 2V = \iint_D \frac{a\varphi(x) + b\varphi(y)}{\varphi(x) + \varphi(y)}dx dy + \iint_D \frac{a\varphi(y) + b\varphi(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)}dx dy =$$

$$2V = \iint_D \frac{(a+b)[\varphi(x) + \varphi(y)]}{\varphi(x) + \varphi(y)}dx dy = (a+b)\pi c^2, \text{ 即 } V = \frac{\pi(a+b)c^2}{2}.$$

例 7、设 $f(x)$ 连续, $f(0) = k$, Ω_t 由 $0 \leq z \leq k, x^2 + y^2 \leq t^2$ 确定, 试求,

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F(t)}{t^2}, \text{ 其中 } F(t) = \iiint_{\Omega_t} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dx dy dz.$$

解 记 $D: x^2 + y^2 \leq t^2$, 则 $F(t) = \iint_D dx dy \int_0^k z^2 dz + \iint_D dx dy \int_0^k f(x^2 + y^2) dz =$

$$= \frac{k^3}{3} \pi t^2 + k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr \stackrel{u=r^2}{=} \frac{k^3}{3} \pi t^2 + \pi k \int_0^{t^2} f(u) du, \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{F(t)}{t^2} =$$

$$= \frac{\pi}{3} k^3 + \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\pi k \int_0^{t^2} f(u) du}{t^2} = \frac{\pi}{3} k^3 + \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{\pi k 2t f(t^2)}{2t} = \frac{\pi}{3} k^3 + \pi k^2.$$

例 8、曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周生成的曲面与 $z=1, z=2$ 所围成的立体区域.

$$(1). \text{ 求 } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz; \quad (2). \text{ 求 } \iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

解(1). 曲面方程为 $x^2 + y^2 = 2z$,

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 (r^2 + z^2) dz - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^1 (r^2 + z^2) dz$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2r^3 - \frac{1}{2}r^5 + \frac{8}{3}r - \frac{1}{24}r^7) dr - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (r^3 - \frac{r^5}{2} + \frac{1}{3}r - \frac{r^7}{24}) dr = \frac{73}{6} \pi.$$

(2). 记 $D(z): x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2z})^2$.

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_1^2 dz \iint_{D(z)} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy = \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \frac{r}{r^2 + z^2} dr =$$

$$= 2\pi \int_1^2 \frac{1}{2} \ln(r^2 + z^2) \Big|_0^{\sqrt{2z}} dz = \pi \int_1^2 \ln(1 + \frac{2}{z}) dz = \pi z \ln(1 + \frac{2}{z}) \Big|_1^2 + \pi \int_1^2 \frac{2}{2+z} dz =$$

$$= \pi \ln \frac{4}{3} + 2\pi \ln \frac{4}{3} = 3\pi \ln \frac{4}{3}.$$

例 9、设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = m$, 求 $\int_0^1 f(x) dx \int_x^1 f(y) dy \int_x^y f(z) dz$.

解 令: $F(u) = \int_0^u f(t) dt$, 则 $F(0) = 0, F(1) = m, F'(u) = f(u)$. 由于

$$\begin{aligned}
\int_x^y f(z)dz &= F(u)|_x^y = F(y) - F(x), \quad \int_x^1 f(y)[F(y) - F(x)]dy = \\
&= \int_x^1 [F(y) - F(x)]dF(y) = \int_x^1 F(y)dF(y) - \int_x^1 F(x)dF(y) = \\
&= \frac{1}{2}F^2(y)|_0^1 - F(x)F(y)|_0^1 = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}F^2(x) - mF(x). \\
\text{则 } \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 f(y)dy \int_x^y f(z)dz &= \int_0^1 f(x)\left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}F^2(x) - mF(x)\right]dx = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}F^2(x) - mF(x)\right]dF(x) = \left[\frac{1}{2}m^2F(x) + \frac{1}{6}F^3(x) - \frac{1}{2}mF^2(x)\right]_0^1 = \\
&= \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{6}m^3.
\end{aligned}$$

例 10、求证: $\frac{3}{2}\pi < \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x+2y-2z+5} dv < 3\pi$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

证明 首先求 $f = x + 2y - 2z + 5$, 在 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值, 在 $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 的内部, 由于 $f'_x = 1 \neq 0, f'_y = 2 \neq 0, f'_z = -2 \neq 0$, 故 f 在 $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ 上无驻点. 在 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上应用拉格朗日乘数法, 令:

$$F = x + 2y - 2z + 5 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1), \text{ 由}$$

$$F'_x = 1 + 2\lambda y = 0, F'_y = 2 + 2\lambda x = 0, F'_z = -2 + 2\lambda z = 0, F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

解得 $P_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), P_2(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = 8, f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 2$. 故

$$\sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{f} = \sqrt[3]{x+2y-2z+5} \leq \sqrt[3]{8} = 2$$

即 $\sqrt[3]{2} \iiint_{\Omega} dv \leq \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x+2y-2z+5} \leq 2 \iiint_{\Omega} dv$ 则

$$\frac{3}{2}\pi < \sqrt[3]{2} \times \frac{4}{3}\pi \leq \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x+2y-2z+5} \leq 2 \times \frac{4}{3}\pi < 3\pi$$

例 11、三个有相同半径的正圆柱, 其对称轴两两正交, 求它们公共部分的体积与表面积.

解 设三个圆柱的柱面方程为 $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$ 由对称性, 只要求第 1 卦限部分 $\frac{1}{2}$ 体积和 $\frac{1}{3}$ 面积, 见图 9-51(a)(b). 记 $D: x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0, x \geq y$, 则

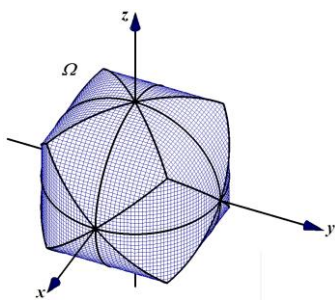


图 9-51(a)

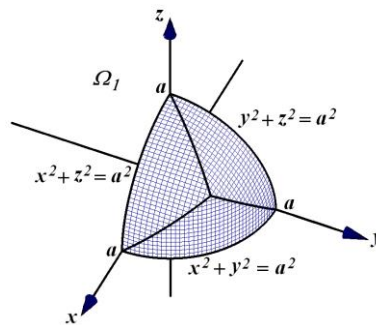


图 9-51(b)

$$\begin{aligned} \frac{V}{16} &= \iiint_{\Omega_I} dv = \iint_D dx dy \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta} \cdot r dr = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{3 \cos^2 \theta} (a^3 \sin^3 \theta - a^3) d\theta = \frac{a^3}{3} \left(\tan \theta - \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) a^3, \end{aligned}$$

所求体积为 $V = 8(2 - \sqrt{2})a^3$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{24} &= \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \theta}} r dr = \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a}{\cos^2 \theta} (a \sin \theta - a) d\theta = a^2 \left(\tan \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 (2 - \sqrt{2}), \end{aligned}$$

所求表面积为 $A = 24(2 - \sqrt{2})a^2$.

例 12、设由螺线 $r = 2\theta$ 与直线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 围成一平面薄片 D , 它的面密度 $\rho = x^2 + y^2$, 求它的质量.

解 见图 9-52,

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\theta} r^3 dr \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^4 d\theta = \frac{\pi^5}{40}. \end{aligned}$$

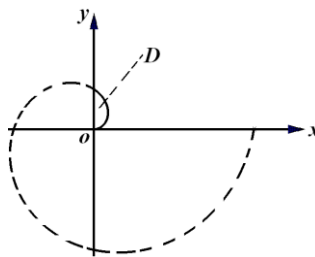


图 9-52

例 13、已知单位立方体 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, 在点 (x, y, z) 处的密度与该点到原点距离的平方成正比, 求这立体的重心坐标.

解 $\rho = k(x^2 + y^2 + z^2)$, k 为常数. $M = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2) dz =$

$$= k \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 + \frac{1}{3}) dy = k \int_0^1 (x^2 + \frac{2}{3}) dx = k,$$

$$M_{yz} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 kx(x^2 + y^2 + z^2) dz = k \int_0^1 x(x^2 + \frac{2}{3}) dx = \frac{7}{12}k.$$

则 $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{7}{12}$, 同理可得: $\bar{y} = \frac{7}{12}, \bar{z} = \frac{7}{12}$. 重心坐标为: $(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12})$.

例 14、设一由 $y = \ln x$, x 轴以及 $x = e$ 所围成的均匀薄板, 其密度为 $\rho = 1$, 求此板绕直线

$x = t$ 旋转的转动惯量 $I(t)$, 并问 t 为何值时 $I(t)$ 最小?

$$\text{解 } I(t) = \iint_D (x-t)^2 dx dy = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} (x-t)^2 dy = \int_1^e (x-t)^2 \ln x dx =$$

$$= \frac{1}{3}(x-t)^3 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e (x-t)^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3}(e-t)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}t + 3xt^2 - t^3 \ln x \right) \Big|_1^e =$$

$$= t^2 - \frac{1}{2}(e^2 + 1)t + \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}. \quad I'(t) = [t^2 - \frac{1}{2}(e^2 + 1)t + \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}]' = 2t - \frac{1}{2}(e^2 + 1),$$

令: $I'(t) = 0$, 得 $t = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$, $I''(t) = 2 > 0$, 所以当 $t = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$ 时, $I(t)$ 为最小.

例 15、证明由 $x = a$, $y = b$, $y = f(x)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的

立体对 x 轴的转动惯量($\rho = 1$)为

$$I_x = \frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(x) dx, f(x) \text{ 为正值连续函数.}$$

证明 曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转曲面为 $f(x) = \sqrt{y^2 + z^2}$, 设

$y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$, 则曲面在柱坐标系下的方程为 $r = f(x)$.

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{D_x} r^2 r dr d\theta = \int_a^b dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(x)} r^3 dr =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{4} \cdot 2\pi f^4(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_a^b f^4(x) dx.$$

总 习 题 九

1. 交换下列累次积分的积分顺序:

$$(1) \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+x}^{x+1} f(x, y) dy ; \quad (2) \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{2y^2} f(x, y) dx .$$

2. 计算下列二重积分:

$$(1) \iint_D \sqrt{1 - \sin^2(x+y)} dx dy , \text{ 其中 } D \text{ 由 } y=x \text{ 与 } y=0, x=\frac{\pi}{2} \text{ 围成的区域} ;$$

$$(2) \iint_D \frac{d\sigma}{(a^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} , \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a ;$$

$$(3) \iint_D |y + \sqrt{3}x| dx dy , D: x^2 + y^2 \leq 1 .$$

$$3^*. \text{ 设 } f(u) \text{ 连续, 证明 } \iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) d\sigma = \int_{-1}^1 f(u) du .$$

$$4^*. \text{ 设 } f(t) \text{ 为连续函数, 证明 } \iint_D f(x-y) d\sigma = \int_{-A}^A f(t)(A-|t|) dt , \text{ 其中}$$

$$D: |x| \leq \frac{A}{2}, |y| \leq \frac{A}{2}, A \text{ 为常数} .$$

5. 计算下列三重积分:

$$(1) \iiint_{\Omega} (1+2x^3) dx dy dz , \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲面 } z=\sqrt{xy} \text{ 与平面 } x=1, y=0, y=9x \text{ 和 } z=0 \text{ 所围成的区域};$$

$$(2) \iiint_{\Omega} z dv , \text{ 其中 } \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az (a > 0);$$

$$(3) \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dv , \text{ 其中 } \Omega \text{ 是由曲面 } y=\sqrt{2x-x^2} \text{ 与平面 } y=0, z=0, z=2 \text{ 所围成的区域};$$

$$(4) \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv , \text{ 其中 } \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z^2, z \geq 0 .$$

$$6. \text{ 设 } f(u) \text{ 具有连续导数, } f(0)=0, \text{ 且 } \Omega(t): x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2 , \text{ 求}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz .$$

$$7. \text{ 求曲面 } z=\sqrt{x^2 + y^2} \text{ 夹在两曲面 } x^2 + y^2 = y, x^2 + y^2 = 2y \text{ 之间部分的面积}.$$

$$8. \text{ 曲面 } z=13-x^2-y^2 \text{ 割球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ 成三部分, 求这三部分曲面面积之比}.$$

9 在斜边长为 a 的一切匀质直角三角形薄片, 求绕一直角边旋转的转动惯量最大的直角三角形薄片.

$$10. \text{ 设 } f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续, 证明 } \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x) f(y) f(z) dz = \frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^3 .$$

补充内容: 数学家-华罗庚和陈省身

数学家-华罗庚



华罗庚，（1910.11.12—1985.6.12），出生于江苏常州金坛区，祖籍江苏丹阳。世界著名数学家，中国科学院院士，美国国家科学院外籍院士，第三世界科学院院士，联邦德国巴伐利亚科学院院士。中国第一至第六届全国人大常委会委员。

华罗庚是中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论与多元复变函数论等多方面研究的创始人和开拓者，也是中国在世界上最有影响力的数学家之一，被列为芝加哥科学技术博物馆中当今世界 88 位数学伟人之一。国际上以华氏命名的数学科研成果有“华氏定理”、“华氏不等式”、“华—王方法”等。

成长历程

1910 年 11 月 12 日出生于江苏常州金坛区，他幼时爱动脑筋，因思考问题过于专心常被同伴们戏称为“罗呆子”。1922 年，12 岁从县城仁劬小学毕业后，进入金坛县立初中，王维克老师发现其数学才能，并尽力予以培养。1925 年，初中毕业后，就读上海中华职业学校，因拿不出学费而中途退学，退学回家帮助父亲料理杂货铺，故一生只有初中毕业文凭。此后，他用 5 年时间自学完了高中和大学低年级的全部数学课程。

1927 年秋，和吴筱元结婚。1929 年冬，他不幸染上伤寒病，落下左腿终身残疾，走路要借助手杖。1929 年，华罗庚受雇为金坛中学庶务员，并开始在上海《科学》等杂志上发表论文。1930 年春，华罗庚在上海《科学》杂志上发表《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》轰动数学界。同年，清华大学数学系主任熊庆来，了解到华罗庚的自学经历和数学才华后，打破常规，让华罗庚进入清华大学图书馆担任馆员。1931 年，在清华大学数学系担任助理。他自学了英、法、德文、日文，在国外杂志上发表了 3 篇论文。

1933 年，被破格提升为助教。1934 年 9 月，被提升为讲师。

出国求学

1935 年，数学家诺伯特·维纳（Norbert Wiener）访问中国，他注意到华罗庚的潜质，向当时英国著名数学家哈代极力推荐。1936 年，华罗庚前往英国剑桥大学，度过了关键性的两年。这时他已经在华林问题（Waring's problem）上有了很多结果，而且在英国的哈代—李特伍德学派的影响下受益。他至少有 15 篇文章是在剑桥的时期发表的。其中一篇关于高斯的论文给他在世界上赢得了声誉。

毅然回国

1937 年，华罗庚回到清华大学担任正教授，后来迁至昆明的国立西南联合大学直至 1945 年。1939 年到 1941 年，在昆明的一个吊脚楼上，写了 20 多篇论文，完成了第一部数学专著《堆垒素数论》。

1946 年 2 月至 5 月，他应邀赴苏联访问。同年 9 月，在美国普林斯顿高等研究院访问。1947 年，《堆垒素数论》在苏联出版俄文版，又先后在各被翻译出版了德、英、日、匈牙利和中文版。1948 年，被美国伊利诺依大学聘为正教授至 1950 年。

新中国成立后不久，华罗庚毅然决定放弃在美国的优厚待遇，奔向祖国的怀抱。1950 年春，携夫人、孩子从美国经香港抵达北京，回到了清华园，担任清华大学数学系主任。1952 年 7 月，受中国科学院院长郭沫若的邀请，成立了数学研究所，并担任所长。9 月加入民盟。

1953 年，他参加中国科学家代表团赴苏联访问。并出席了在匈牙利召开的二战后首次世界数学家代表大会，以及亚太和平会议、世界和平理事会。

1955 年，被选聘为中国科学院学部委员（院士）。1956 年，他着手筹建中科院计算数学研究所，他的论文《典型域上的多元复变函数论》于 1956 年获国家自然科学一等奖，并先后出版了中、俄、英文版专著。

1958 年，他担任中国科技大学副校长兼数学系主任，同年申请加入中国共产党。同年，他和郭沫若一

起率中国代表团出席在新德里召开的“在科学、技术和工程问题上协调”的会议。

文革时期

文革开始后，正在外地推广“双法”的华罗庚被造反派急电召回北京写检查，接受批判。华罗庚凭个人的声誉，到各地借调了得力的人员组建“推广优选法、统筹法小分队”，亲自带领小分队到全国各地去推广“双法”，所到之处，都掀起了科学实验与实践的群众性活动，取得了很大的经济效益和社会效益。

1969年，推出《优选学》一书，并将手稿作为国庆20周年的献礼送给了国务院。1970年4月，国务院根据周总理的指示，邀请了七个工业部的负责人听华罗庚讲优选法、统筹法。1975年8月，在大兴安岭推广“双法”时，从大兴安岭采伐场地来到哈尔滨，积劳成疾，第一次患心肌梗塞。他昏迷了6个星期，一度病危。

文革以后

粉碎“四人帮”后，华罗庚被任命为中国科学院副院长。他多年的著作成果相继正式出版。1979年5月，他到西欧作了七个月的访问，把自己的数学研究成果介绍给国际同行。1979年，当选为民盟中央副主席。1979年6月，被批准加入中国共产党。1982年11月，第二次患心肌梗塞症。

1983年10月，应美国加州理工学院邀请，华罗庚赴美作为期一年的讲学活动。在美期间，赴意大利里亚利特市出席第三世界科学院成立大会，并被选为院士。

1984年4月，在华盛顿出席了美国科学院授予他外籍院士的仪式，成为第一位获此殊荣的中国人。1985年4月，在全国政协六届三次会议上，被选为全国政协副主席。1985年6月3日，应日本亚洲文化交流协会邀请赴日本访问。

1985年6月12日下午4时，在东京大学数理学部讲演厅向日本数学界作主题为《理论数学及其应用》的演讲，由于突发急性心肌梗塞，于当日晚上10时9分逝世。

个人贡献

华罗庚早年的研究领域是解析数论，他在解析数论方面的成就尤其广为人知，国际间颇具盛名的“中国解析数论学派”即华罗庚开创的学派，该学派对于质数分布问题与哥德巴赫猜想做出了许多重大贡献。

华罗庚也是中国解析数论、矩阵几何学、典型群、自守函数论等多方面研究的创始人和开拓者。他在多复变函数论，典型群方面的研究领先西方数学界10多年，是国际上有名的“典型群中国学派”，开创中国数学学派，并带领达到世界一流水平。培养出众多优秀青年，如王元、陈景润、万哲先、陆启铿、龚升等。

科研成果

在国际上以华氏命名的数学科研成果就有“华氏定理”、“怀依—华不等式”、“华氏不等式”、“普劳威尔—加当华定理”、“华氏算子”、“华—王方法”等。

20世纪40年代，他解决了高斯完整三角和的估计这一历史难题，得到了最佳误差阶估计；对G.H.哈代与J.E.李特尔伍德关于华林问题及E.赖特关于塔里问题的结果作了重大的改进，三角和研究成果被国际数学界称为“华氏定理”。

在代数方面，他证明了历史长久遗留的一维射影几何的基本定理；给出了体的正规子体一定包含在它的中心之中这个结果的一个简单而直接的证明，被称为嘉当-布饶尔-华定理。

他与王元教授合作在近代数论方法应用研究方面获重要成果，被称为“华-王方法”。

学术著作

华罗庚一生留下了十部巨著：《堆垒素数论》、《指数和的估价及其在数论中的应用》、《多复变函数论中的典型域的调和分析》、《数论导引》、《典型群》（与万哲先合著）、《从单位圆谈起》、《数论在近似分析中的应用》（与王元合著）、《二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组》（与他人合著）、《优选学》及《计划经济范围最优化的数学理论》，其中八部为国外翻译出版，已列入20世纪数学的经典著作之列。此外，还有学术论文150余篇，科普作品《优选法评话及其补充》、《统筹法评话及补充》等，辑为《华罗庚科普著作选集》。

主要荣誉

华罗庚为中国数学发展作出的贡献，被誉为“中国现代数学之父”，“中国数学之神”，“人民数学家”。在国际上享有盛誉的数学大师，他的名字在美国施密斯松尼博物馆与芝加哥科技博物馆等著名博物馆中，与少数经典数学家列在一起，被列为“芝加哥科学技术博物馆中当今世界 88 位数学伟人之一”。1948 年当选为中央研究院院士。1955 年被选聘为中国科学院学部委员（院士）。1982 年当选为美国科学院外籍院士。1983 年被选聘为第三世界科学院院士。1985 年当选为德国巴伐利亚科学院院士。被授予法国南锡大学、香港中文大学与美国伊利诺伊大学荣誉博士。他还是建国六十年来“感动中国一百人物之一”。

数学家-陈省身

陈省身，1911 年 10 月 28 日生于浙江嘉兴秀水县，美籍华裔数学大师，20 世纪伟大的几何学家。

1926 年，陈省身进入南开大学数学系。1934 年夏，他毕业于清华大学研究院，获硕士学位，成为中国自己培养的第一名数学研究生。1943 年发表《闭黎曼流形的高斯-博内公式的一个简单内蕴证明》《Hermitian 流形的示性类》。1963 年至 1964 年，陈省身担任美国数学会副主席。1995 年陈省身当选为首批中国科学院外籍院士。1999 年被聘为嘉兴学院首任名誉院长。

2004 年 12 月 3 日 19 时 14 分，陈省身在天津医科大学总医院逝世，享年 93 岁。



求学阶段

1911 年 10 月 28 日，陈省身生于浙江嘉兴秀水县。少年时就喜爱数学，觉得数学既有趣又较容易，并且喜欢独立思考，自主发展，常常“自己主动去看书，不是老师指定什么参考书才去看”。从秀水中学毕业后，1922 年随父迁往天津，1923 年进入天津扶轮中学，1926 年从天津扶轮中学毕业。1926 年，陈省身进入南开大学数学系，该系的姜立夫教授对陈省身影响很大。在南开大学学习期间，他还为姜立夫当助教。

1930 年陈省身毕业于南开大学，1931 年考入清华大学研究院，成为中国国内最早的数学研究生之一。1932 年在孙光远博士指导下，他在《清华大学理科报告》发表了第一篇数学论文：关于射影微分几何的《具有一一对应的平面曲线对》。

1932 年 4 月应邀来华讲学的汉堡大学教授布拉希克对陈省身影响也不小，使他确定了以微分几何为以后的研究方向。在清华，陈省身曾经听过杨振宁的父亲杨武之的课，并且做过当时还是本科生的杨振宁的教师。

1934 年夏，他毕业于清华大学研究院，获硕士学位，成为中国自己培养的第一名数学研究生。同年，获得中华文化教育基金会奖学金（一说受清华大学资助），赴布拉希克所在的汉堡大学数学系留学。

1935 年 10 月陈省身完成博士论文《关于网的计算》和《 $2n$ 维空间中 n 维流形三重网的不变理论》，在汉堡大学数学讨论会论文集上发表。并于 1936 年 2 月获科学博士学位；毕业时奖学金还有剩余，同年夏得到中华文化基金会资助，于是又转去法国巴黎跟从嘉当（E. Cartan）研究微分几何。1936 年至 1937 年间在法国几何学大师 E·嘉当那里从事研究。E·嘉当每两个星期约陈省身去他家里谈一次，每次一小时。“听君一席话，胜读十年书”。大师面对面的指导，使陈省身学到了老师的数学语言及思维方式，终身受益。陈省身数十年后回忆这段紧张而愉快的时光时说，“年轻人做学问应该去找这方面最好的人”。

工作阶段

1937 年夏离开法国经过美国回国，受聘为清华大学的数学教授。

1938 年，因抗战随学校内迁至云南昆明，任由北京大学、清华大学、南开大学合组的西南联合大学教授，讲授微分几何。

1943 年，应美国数学家奥斯瓦尔德维布伦（O. Veblen）之邀，到普林斯顿高等研究院工作，为研究

员。此后两年间，他发表了划时代的论文《闭黎曼流形的高斯-博内公式的一个简单内蕴证明》，《Hermitian 流形的示性类》。这是他一生中最重要的工作，奠定了他在数学史中的地位。

1946 年抗战胜利后，陈省身回到上海。

1948 年，南京中央研究院数学研究所正式成立，陈省身任代理所长，主持数学所一切工作。他还入选中央研究院第一届院士。此后两三年中，他培养了一批青年拓扑学家。

1949 年初，中央研究院迁往台湾，陈省身应普林斯顿高级研究所所长奥本海默之邀举家迁往美国。

1949 年夏，在芝加哥大学接替了 E. P. Lane 的教授职位（E. P. Lane 正是陈省身的硕士导师孙光远在美留学时的导师）。

1960 年，陈省身受聘为加州大学伯克利分校教授，直到 1980 年退休为止。

1961 年，陈省身被美国科学院推举为院士，并加入美国国籍。

1963 年至 1964 年间，担任美国数学会副主席。

1972 年 9 月，陈省身首次偕夫人回到新中国，与当时中科院院长郭沫若等会见。

晚年生活

1981 年陈省身在加州大学伯克利分校筹建以纯粹数学为主的数学研究所（MSRI），担任第一任所长，直到 1984 年。

邓小平复出后，中国数学界恢复了同外界的交流。陈省身也开始帮助推动中国数学的复苏。1977 年 9 月 26 日，邓小平会见了陈省身。1984 年 8 月 25 日，邓小平设午宴招待陈省身夫妇，支持他任南开大学数学所所长，鼓励他为发展中国数学所做的努力。1984 年中华人民共和国教育部聘请陈省身担任南开数学研究所所长（任期至 1992 年）。

1985 年 10 月 17 日南开数学研究所正式成立。陈省身随即以南开为基地，亲自主持举办学术活动，在中国数学界的支持下，培养了许多优秀的青年数学家。

1986 年 11 月 2 日，邓小平设午宴招待陈省身夫妇。正是这次会见，引发了提高国内知识分子工资待遇、颁发国务院特殊津贴的措施。

1989 年 10 月 10 日，刚当选几个月的中共中央总书记江泽民，在中南海会见陈省身夫妇，并设宴招待。后来，江泽民数次接见陈省身和夫人郑士宁。

1992 年至 2004 年，陈省身任天津南开数学研究所名誉所长。

1995 年陈省身当选为首批中国科学院外籍院士。1999 年被聘为嘉兴学院首任名誉院长。

1998 年他再次捐出 100 万美元建立“陈省身基金”，供南开数学所发展使用。

2000 年他与夫人郑士宁回到母校南开大学定居，亲自为本科生讲课，指导研究生，

2001 年开始，陈省身设想在南开大学建立国际数学研究中心。以招揽人才，推动南开数学学科的发展。副校长胡国定在 2001 年 7 月 22 日致信中央，以陈省身的名义申请建立国际数学研究中心。这件事得到了江泽民的支持。

2004 年 12 月 3 日 19 时 14 分，陈省身在天津医科大学总医院逝世，享年 93 岁。

数学研究

陈省身是 20 世纪重要的微分几何学家，被誉为“微分几何之父”。早在 40 年代，陈省身他结合微分几何与拓扑学的方法，完成了两项划时代的重要工作：高斯-博内-陈定理和 Hermitian 流形的示性类理论，为大范围微分几何提供了不可缺少的工具。这些概念和工具，已远远超过微分几何与拓扑学的范围，成为整个现代数学中的重要组成部分。

数学教育

陈省身曾先后任教于国立西南联合大学、芝加哥大学和加州大学伯克利分校，是原中央研究院数学所、美国国家数学研究所、南开数学研究所的创始所长。培养了包括廖山涛、吴文俊、丘成桐、郑绍远，李伟光等在内的著名数学家。其中，丘成桐是取得国际数学联盟的菲尔兹奖（Fields Medal）的第一个华人，也是继陈省身之后第二个获沃尔夫奖的华人。

社会影响

在那个国门初开的年代，数学家华罗庚、陈景润是人们心目中的英雄，家喻户晓。其实，那时陈省身早已在国际数学界声名鹊起，却为国人所不知。有人根据狄多涅的纯粹数学全貌和岩波数学百科全书、苏联出版的数学百科全书综合量化分析得出的二十世纪数学家排名陈省身先生（S.-S.Chern）排在第 31 位，华罗庚排在第九十位，陈景润进入前 1500 名。

陈省身在整体微分几何上的卓越成就，影响了整个数学的发展，被杨振宁誉为继欧拉、高斯、黎曼、嘉当之后又一里程碑式的人物。也许你没有听说过他，因为他很长时间都在美国工作，但是至少中国数学界应该是知道的，因为他早已蜚声海内外。

获奖记录

2004 年首届邵逸夫奖数学奖（获奖）；

2002 年俄罗斯罗巴切夫斯基奖章（获奖）；

1984 年以色列沃尔夫数学奖（获奖）；

1983 年美国数学会的斯蒂尔终生成就奖（获奖）；

1982 年德国洪堡奖（获奖）；

1976 年美国国家科学奖（获奖）；

1970 年美国数学会的肖夫内奖（获奖）。