习题二十一 内积、特征值与特征向量

一、选择题

1．D　　　　　　　　　　　　　　　　-----------正交向量组可能包含零向量

2．D　3．D

二、填空题

1．　线性无关　；　$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ；　$|A|$。　　2．6；$\dfrac{1}{2^5\cdot 3^2}$。　　3．0

4．相同；它有 n 个线性无关的特征向量。　5．$f(\lambda)$；X。　6．± 1

三、　证明：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$中一组标准正交基，

所以若$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \in R^3$,

$\beta = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + l_3\beta_3 \in R^3$, 则有

$\|\alpha\|^2 = \alpha\cdot\alpha = k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2$, $\alpha\cdot\beta = k_1 l_1 + k_2 l_2 + k_3 l_3$，因此，

$$\|\beta_1\|^2 = \frac{1}{9}(2^2+2^2+(-1)^2)=1,\ \|\beta_2\|^2 = \frac{1}{9}(2^2+(-1)^2+2^2)=1,$$

$$\|\beta_3\|^2 = \frac{1}{9}(1^2+(-2)^2+(-2)^2)=1,\ \beta_1\cdot\beta_2 = \frac{1}{9}(4-2-2)=0,$$

$$\beta_1\cdot\beta_3 = \frac{1}{9}(2-4+2)=0,\ \beta_2\cdot\beta_3 = \frac{1}{9}(2+2-4)=0\text{。}$$

所以，β_1,β_2,β_3也是R^3中一组标准正交基。

四、解：　$\beta_1 = \alpha_1 = (1,1,1)$，

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(-2,1,1)\text{，}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$= (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(-2,1,1) = \text{（}0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

所求标准正交基为

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1),\ \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1),$$

$\alpha = (1,-1,0)$ 在上述标准正交基下的坐标为

$$((\alpha,\eta_1),(\alpha,\eta_2),(\alpha,\eta_3))^T=(0,-\frac{3}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T$$ 。

五、解：$|\lambda E-A|=(\lambda-3)(\lambda+3)^2=0$，

因此，$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=-3$。

当 $\lambda_1=3$ 时，解方程组 $(3E-A)X=0$，

$$3E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-3&4&-1\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故属于 $\lambda_1=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^T,(k\neq 0)$。

当 $\lambda_2=\lambda_3=-3$ 时，解方程组 $(-3E-A)X=0$，

$$-3E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-3&-2&-1\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故属于 $\lambda_2=\lambda_3=-3$ 的特征向量为 $k(1,-2,1)^T,(k\neq 0)$。

六、证明：设 X 是属于特征值 λ 的特征向量，即 $AX=\lambda X$.

由条件得 $(A^2-A)X=(\lambda^2-\lambda)X=O,$ 由于 $X\neq O,$ 得 $\lambda^2-\lambda=0$，

所以 $\lambda=0,1$

习题二十二　相似矩阵与对角化

一、 A　2.　B

二、解：由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&0\\1&\lambda-3&1\\5&7&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2,$

当 $\lambda_1=1$ 时，解方程组 $(E-A)X=0$，

$$E-A=\begin{pmatrix}-2&2&0\\1&-2&1\\5&-7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\therefore \alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$是$A$的属于$\lambda_1=1$的线性无关的特征向量，

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解方程组$(2E-A)X=0$，

$$2E-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&-1&1\\5&-7&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$\therefore \beta=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$是$A$的属于$\lambda_2=2$的线性无关的特征向量，

由于A只有两个线性无关的特征向量，所以A不可与对角阵相似。

三、解：令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix},$$

所以，

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}。$$

四、解：因为矩阵A与矩阵B相似，所以A,B有相同的特征值。由于

$$|\lambda E-A|=(\lambda+2)(\lambda^2-(x+1)\lambda+x-2),$$

所以A有特征值-2，注意到B的特征值为$-1,2,y,$所以$y=-2$。

又由对角线之和相同可得：$x-1=y+1$，$x=0$。

习题二十三　实对称矩阵的性质

一、 1. 实数；正交。 2. 1 ；1。 3. $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},k_1,k_2$不全为零。

二、解：由于α_1,α_2是A的属于两个不同特征值的特征向量，

所以$(\alpha_1,\alpha_2)=0$，即$-1+k=0$，从而$k=1$。

设A的属于 2 的另一个与α_2特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有

$\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_3)=x_1+x_2+x_3=0\\(\alpha_1,\alpha_3)=-x_1+x_2=0\end{cases}$，取$\alpha_3=(1,1,-2)^T$，令

$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}$，则

$P^{-1}AP=diag(8,2,2)$，$A=P\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$。

三、解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$，

所以A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$。

解方程组$(E-A)X=0$可得A的属于$\lambda_1=\lambda_2=1$的两个线性无关的特征向量为

$\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$，令$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\dfrac{\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=$

$\alpha_2-\dfrac{1}{2}\beta_1=-\dfrac{1}{2}(1,1,-2)^T$,取$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T,\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$。

解方程组$(4E-A)X=0$可得A的属于$\lambda_3=4$的一个线性无关的特征向量为

$\alpha_3=(1,1,1)^T$,取$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$。

则正交阵$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, 此时$\Lambda=diag(1,1,4)$。

四、证明：因为A是实对称矩阵，因此存在正交矩阵Q使得：

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^T$$

注意到$\lambda_i \geq 0(i=1,2,\cdots,n)$，令

$$B = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q^T$$, 则$B^T = B$，且B的特征值为$\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n}$，

此时，

$$B^2 = Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q^T \cdot Q\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}Q^T = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^T = A。$$

习题二十四　二次型及其标准形

一、 1. $x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 3x_3{}^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3$， $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$。

2. 0。 3. n 4. $k > 8$。 5. 3，2，1 。 6. $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$。

7. $a > 20, b = 4, c = 1$。 8. $> n$ 9. 大于 0 。

二、解：变量代换的矩阵形式为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$；

由变量x_1, x_2, x_3到变量y_1, y_2, y_3的变量代换为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

三、解： 把这两个变量代换先写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

因此有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}。$$

四、解： $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10),$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$，可得正交矩阵

$$P = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \end{pmatrix},$$

相应的正交变换为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$

此时的标准形为 $f = {y_1}^2 + {y_2}^2 + 10{y_3}^2$。

习题二十五 正定二次型与正定矩阵

一、解：$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$, 因为 $R(A) = 2$, 所以 $|A| = 24(c-3) = 0, c = 3$。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9) = 0,$$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$。

二、解：$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}, |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -a \\ 0 & -a & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - a^2),$

因为 A 有特征值 1，所以 $1-6+9-a^2 = 4-a^2 = 0,$

又 $a > 0$，所以 $a = 2$。

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解方程组 $(E-A)X = 0$，

$$E-A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\therefore\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-x_3,\therefore\alpha_1=\\ x_3=x_3\end{cases}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix};$$

当$\lambda_2=2$时，解方程组$(2E-A)X=0$，

$$2E-A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\therefore\begin{cases}x_1=x_1\\ x_2=0,\therefore\alpha_2=\\ x_3=0\end{cases}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=5$时，解方程组$(5E-A)X=0$，

$$5E-A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\therefore\begin{cases}x_1=0\\ x_2=x_3,\therefore\alpha_3=\\ x_3=x_3\end{cases}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\eta\ =\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

正交变换为$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，

标准形为 $f=y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2$。

三、 解：$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 9\end{pmatrix},1>0,\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2>0,|A|=12>0$，

所以，f 是正定二次型。

四、证明：因为A是n阶正定矩阵，所以A的特征值全大于零，$\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$。

矩阵$A+E$ 的n个特征值为$1+\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$。因此，

$$|A+E|=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\cdots(1+\lambda_n)>1。$$

五、解：证明：设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则$A+tE$ 的特征值为$\lambda_1+t,\lambda_1+t,\cdots,\lambda_n+t.$：

所以:（1）$\lambda_i+t>0$，即$t>-\lambda_i$时，$A+tE$ 的特征值全大于零，所以$A+tE$ 是正定矩阵。

（2）$\lambda_i+t<0$，即$t<-\lambda_i$时，$A+tE$ 的特征值全小于零，所以$A+tE$ 是负定矩阵。

（3） 其余情况$A+tE$ 的特征值有正有负，所以是不定矩阵。

（4） $\lambda_i+t\neq 0$，即$t\neq-\lambda_i$时，$A+tE$ 的特征值都不为零，所以$A+tE$ 是可逆矩阵。