几何与线性代数

周忠国 主编

吴道明 董祖引 王启明

李水艳 何朝葵 柳庆新 编著

2020年

目录

前言

几何与代数是工科各个专业的一门重要的数学基础课, 几何学是研究空间事物的形状、位置和性质的基础学科, 它对学生的思维能力的培养和认识客观事物有重要作用, 线性代数中的许多概念与方法已深入到工程和科学技术的各个方面. 随着信息化时代的到来, 科学技术的发展突飞猛进, 几何与代数在本科教学中所占有的位置越发显著, 为学习其它课程所发挥的作用也日益突出. 近年来把代数和几何统一起来的教学思想正在发展与实践中, 本教材就是这方面工作的最新尝试.

与传统的高等数学相比, 几何与代数这门课程的抽象性、严密性和逻辑性分外突出, 对初次接触这门课的同学来说是比较难学的, 该门课程的教学也被中外数学教学界公认为一个难点.

本书试图采用较新的编排体系来帮助克服教学中的困难, 第一章先从较为简单直观的三维向量和空间解析几何开始; 第二章通过学生在中学熟悉的解线性方程组的内容引进矩阵这个本课程的核心概念和重要的应用工具, 介绍矩阵的基本性质和简单运算, 使学生对矩阵这个全新的对象有一个初步的认识; 第三章先介绍行列式这个线性代数中比较直观易懂的概念及其运算性质, 然后再进一步对矩阵进行讨论, 用较大的篇幅强调矩阵的性质和运算, 以加深同学的印象. 在此基础上, 第四章介绍向量组的线性相关性等抽象内容, 使得各种抽象概念的引入比较自然, 以克服理解上的困难. 最后三章介绍矩阵的特征值和二次型等在应用中很重要的内容以及线性空间和线性变换的一般理论.

本教材重点强调工科学生应该掌握的基本概念和基本方法, 注意学生基本技能的训练, 注重提高学生分析问题和解决问题的能力, 不再热衷冗长的推导和内容的全面, 扬弃过于追求技巧的浮华, 在内容安排上突出重点, 对一些较复杂的理论证明作为附录放在每一章的最后, 便于学生的学习和掌握.

本书是河海大学几何与代数课程教研组集体努力的结果, 吴道明编写了第

一章; 周忠国编写了第二章; 王启明编写了第三章; 第四、五、六、七章分别由何朝葵、柳庆新、李水艳、董祖引编写, 最后由周忠国统一修改和定稿.

教学无止境, 由于水平所限, 本书难免有诸多疏漏及不当之处, 敬请广大师生批评指正.

编者感谢河海大学理学院对此项工作的支持, 对河海大学出版社为本书做得很多认真、细致的工作表示诚挚的感谢.

河海大学理学院几何与代数教研组

2011年10月

使用说明

本书涉及到的数除非特别说明, 都默认是实数.

■表示证明的结束或者解题过程的完成.

☞表示此段内容是对正文的解释, 需要注意的地方.

我们详细地列出了一些重要的计算步骤, 请参考使用.

第一章　几何向量及其应用

* **

本章主要内容：

- ▶ 向量的运算
- ▶ 平面直线的方程与相互关系
- ▶ 用向量的运算解决平面直线等几何问题

* **

在日常生活和科学技术中, 某些量完全由它的数值大小所确定, 例如长度、面积、温度、时间等, 这种量称为数量.但也有另一类量, 如力、速度、位移、电场强度等, 它们既有数值大小又有方向, 这种量称为向量(或矢量), 无论对于数学本身还是在科学和工程技术上, 向量都有着广泛的应用.

本章首先介绍几何空间中向量的概念和运算, 然后通过建立向量的坐标, 使向量的运算代数化, 最后以向量为工具来研究空间中的平面与直线.

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量的概念

我们把既有大小, 又有方向的量称为向量.

在数学上, 往往用一条有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以A 为起点, B 为终点的有向线段所表示的向量, 记为$\overrightarrow{AB}$. 向量$\overrightarrow{AB}$ 的大小叫做向量$\overrightarrow{AB}$ 的模(或长度), 记作$\|\overrightarrow{AB}\|$. 今后为方便起见, 也用希腊字母$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\ldots$ 表示向量(图1.1).

用有向线段表示的向量通常称为几何向量.

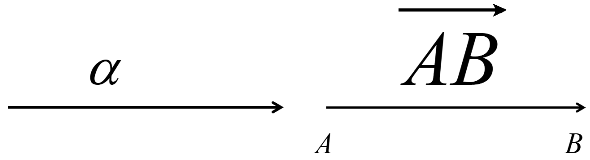

图 1.1:

定义1.1.1. 相等的向量

如果两个向量$\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$ 的模相等, 方向相同, 则称其为相等的向量, 记作$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$.

从定义可知, 两个相等的向量经过平移可以重合在一起, 也就是我们所讲的向量都是自由向量, 它只依赖于向量的大小和方向, 而与向量的起点无关.

定义1.1.2. 负向量

如果向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的模相等, 方向相反, 则称$\boldsymbol{\beta}$ 是$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量, 记作$\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\alpha}$, 显然也有$\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\beta}$.

定义1.1.3. 零向量

模等于零的向量称为零向量, 记作$\boldsymbol{\theta}$.

零向量实质是起点和终点重合的向量, 它的方向可以看作是任意的.

定义1.1.4. 单位向量

模等于1 的向量称为单位向量.

由于每一个方向上都有一个单位向量, 故单位向量有无穷多个, 若将所有单位向量的起点固定为O, 则空间中所有的单位向量的终点构成一个半径为1的球面.

1.1.2 向量的线性运算

物理学中的力与位移都是向量, 作用于一点的两个不共线力的合力, 可以用"平行四边形法则"求出, 如图1.2 中的两个力$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 的合力就是以$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形$OACB$ 的对角线向量$\overrightarrow{OC}$. 两个位移的合成可以用"三角形法则"求出, 如图1.2 中连续两次位移$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ 的结果, 相当于位移$\overrightarrow{OB}$:

定义1.1.5. 向量的和

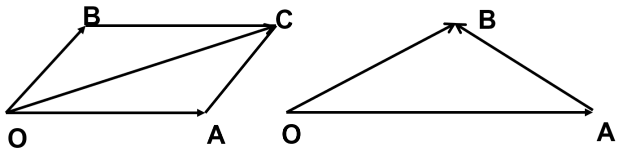

图 1.2:

对于向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 作有向线段$\overrightarrow{AB}$ 表示$\boldsymbol{\alpha}$, 作$\overrightarrow{BC}$ 表示$\boldsymbol{\beta}$, 把$\overrightarrow{AC}$ 表示的向量$\boldsymbol{\gamma}$称为$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和, 记作$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$(图1.1.4), 即$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$(三角形法则).

三角形法则和平行四边形法则是等价的(图1.3, 1.4).

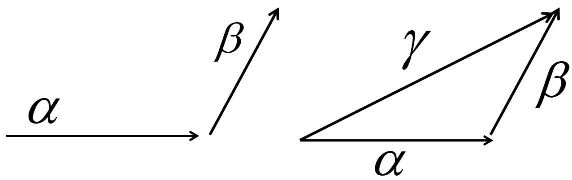

图 1.3:

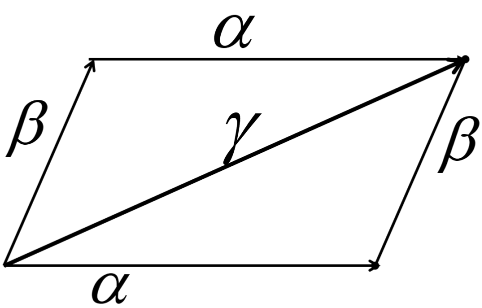

图 1.4:

由定义不难验证向量的加法满足下列运算规律:

1. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ (交换律).

2. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ (结合律).

3. $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

4. $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.

由上述的交换律和结合律, 可得任意多个向量的加法如下: 把前一个向量的终点作为次一向量的起点相继作$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 再以第一个向量的起点$A$ 为起点, 最后一个向量的终点B 为终点作向量$\overrightarrow{AB}$, 那么

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n \ \text{(图1.5)}.$$

利用负向量, 我们规定两个向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的差: $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$.

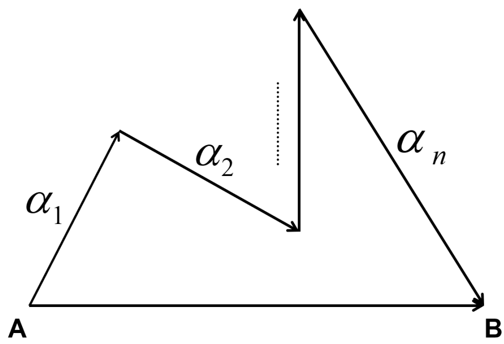

图 1.5:

定义1.1.6. 向量的数乘

实数k 和向量$\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积是一个向量, 记为$k\boldsymbol{\alpha}$, 称$k\boldsymbol{\alpha}$ 为k 与$\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积, 简称**数乘**. 它的模为$|k|\|\boldsymbol{\alpha}\|$; 规定它的方向: 当$k > 0$ 时与$\boldsymbol{\alpha}$ 同向, $k < 0$时与$\boldsymbol{\alpha}$ 反向, $k = 0$时为零向量.

向量的数乘运算满足下列规律:

1. $1\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.

2. $k(l\boldsymbol{\alpha}) = l(k\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$.

3. $k(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = k\boldsymbol{\alpha} + k\boldsymbol{\beta}$.

4. $(k + l)\boldsymbol{\alpha} = k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\alpha}$.

其中k, l 为两个实数, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为两个向量.

由数乘运算可知, 若$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}$ 时, $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个与$\boldsymbol{\alpha}$ 同方向的单位向量, 记作$\boldsymbol{\alpha}^0$(又称为$\boldsymbol{\alpha}$ 的单位化).

$$\text{即 } \boldsymbol{\alpha}^0 = \frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha} \ \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha} = \|\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\alpha}^0.$$

向量的加法和数乘运算统称为线性运算.

☞ 向量的加法和数乘运算和数的加法, 乘法满足相同的运算规律, 如结合律, 结合律, 分配律等.

1.1.3 向量的共线与共面

定义1.1.7. 线性组合与线性表示

设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$ 是一组向量, 若存在一组实数k_1, $k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称$\boldsymbol{\beta}$ 是$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个线性组合或称$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

例如, 若有合力$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, 则合力$\overrightarrow{F}$是分力$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ 的线性组合, 也可以说$\overrightarrow{F}$ 可由$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ 线性表示.

定义1.1.8. 共线向量与共面向量

方向相同或相反的向量称为共线向量, 而平行于同一平面的向量称为共面向量.若$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 共线, 则记为$\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$.

定理1.1.9. 共线的充要条件

向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数k, l 使得

$$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}.$$

证明: 必要性 当$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ 时, 显然有

$$1\boldsymbol{\alpha} + 0\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}.$$

当$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}$ 时, $\|\boldsymbol{\alpha}\| \neq 0$, 因而有非负实数$m$ 使得

$$\|\boldsymbol{\beta}\| = m\|\boldsymbol{\alpha}\|.$$

当$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 同向时, 取$k = m, l = -1$; 当$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 反向时, 取$k = m, l = 1$就都有$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$, 这里$k$ 与l 不全为零.

充分性 如果$k\boldsymbol{\alpha} + l\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$, 这里$k, l$ 不全为零, 不妨设$k \neq 0$,于是有

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{l}{k}\boldsymbol{\beta},$$

由数乘运算的定义知$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 同向或反向, 即$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 共线. ■

推论1.1.10. 共线的充要条件

$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 共线的充分必要条件是其中一个向量可以由另一个向量线性表示. ■

定理1.1.11. 共面的充要条件

三个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的数k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}.$$

证明: 必要性 若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 中有两个向量共线, 如$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线, 则由定理1.1.9, 存在不全为零的数k_1,k_2 使得$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$, 从而有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+0\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}.$$

若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 中两两均不共线, 作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{\alpha},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\beta},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\gamma}$, 过$C$ 点作直线与$\overrightarrow{OA}$ 平行, 交于$\overrightarrow{OB}$ 所在直线于D 点(图1.6).

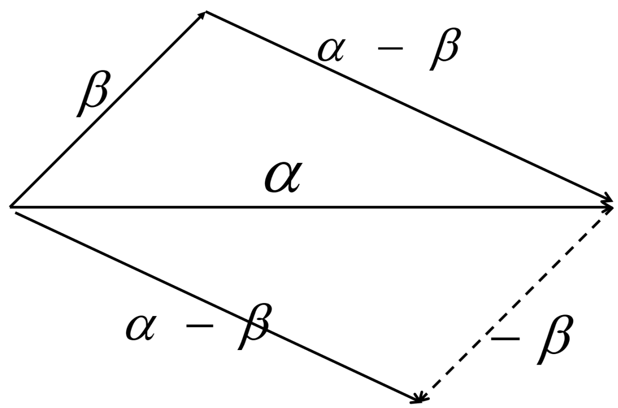

图 1.6:

于是有$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}$. 从而有

$$k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+(-1)\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\theta}.$$

充分性 若有不全为零的实数k_1,k_2,k_3 使得

$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}$, 不妨设$k_3\neq 0$, 则有

$$\boldsymbol{\gamma}=-\frac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}-\frac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\beta}.$$

这表明$\boldsymbol{\gamma}$ 是以$-\dfrac{k_1}{k_3}\boldsymbol{\alpha}, -\dfrac{k_2}{k_3}\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的对角线, 因此$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面. ■

推论1.1.12. 共面的充要条件

向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是其中一个向量可由另两个向量线性表示. ■

一般地有

定义1.1.13. 线性相关与线性无关

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为一组向量, 如果存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\theta},$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性相关的; 否则就称为是线性无关的.

由此可见, 共线与共面是线性相关的特殊情况.

****

内容小结

本节我们学习了

- **向量的线性运算**. 线性运算使得不同向量之间建立了联系, 一个向量可以用其它向量表示, 这样本质上减少了向量的个数.
- **共线共面**. 描述了几个向量之间的关系.
- **线性相关与线性无关**. 共线共面的推广, 描述向量之间有没有关系, 怎么用最少的向量表示最多的向量.

****

习题1.1

1. 设向量$\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$, 试用$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 表示$2\boldsymbol{\xi}-3\boldsymbol{\eta}$.

2. 设点M 为平行四边形$ABCD$ 的对角线的交点, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\beta}$, 试用$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 表示$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$.

3. 判断下列各组向量是否线性相关?

(1) $\boldsymbol{\theta}$; (2) $\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}$; (3) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$, 其中$\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{\beta}$; (4) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$, 其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 不共面.

1.2 内积、外积和混合积

1.2.1 向量的内积

在物理学中我们知道一恒力$\overrightarrow{F}$ 作用于某物体上, 其位移为$\overrightarrow{S}$, 则力$\overrightarrow{F}$ 所作的功$W = \|\overrightarrow{F}\| \cdot \|\overrightarrow{S}\| \cos\varphi$,

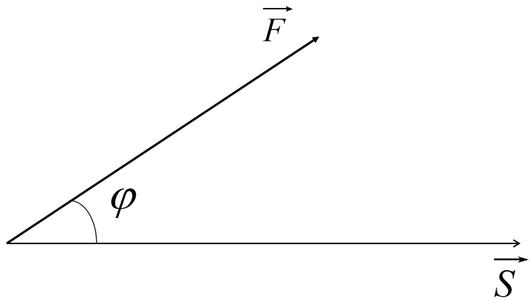

图 1.7:

其中φ 为$\overrightarrow{F}$ 与$\overrightarrow{S}$ 之间的夹角(图1.7), 由此引入

定义1.2.1. 内积

向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 的内积（也称数量积、点积）$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 是一个数, 定义为

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\| \cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})},$$

其中$0 \le \widehat{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} \le \pi$ 表示$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 之间的夹角.

由此可知, 功是力和位移的内积.

定义1.2.2. 投影

称向量$\boldsymbol{\alpha}$ 在向量$\boldsymbol{\beta}$ 方向上的投影为:

$$(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{\beta}} = Proj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha} = \|\boldsymbol{\alpha}\| \cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})} (\text{图}1.8).$$

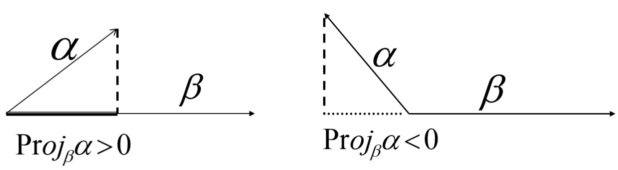

图 1.8:

投影具有性质$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)_{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{\alpha}_1)_{\boldsymbol{\beta}}+(\boldsymbol{\alpha}_2)_{\boldsymbol{\beta}}$.

于是有$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\alpha}\|(\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{\alpha}}=\|\boldsymbol{\beta}\|(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{\beta}}$; 而当$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\theta}$ 时, $(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{\beta}}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}$.

命题1.2.3. 内积的性质

内积具有下列性质:

1. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\geq 0$, $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$.
2. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.
3. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}$(交换律).
4. $(k\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}=k(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$(结合律).
5. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$(分配律).

证明: $(1)-(4)$ 易证.下面证明(5).

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}&=\|\boldsymbol{\gamma}\|(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{\gamma}}=\|\boldsymbol{\gamma}\|((\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{\gamma}}+(\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{\gamma}})\\&=\|\boldsymbol{\gamma}\|(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{\gamma}}+\|\boldsymbol{\gamma}\|(\boldsymbol{\beta})_{\boldsymbol{\gamma}}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}$$ ■

当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零向量时, 由内积的定义得

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}.$$

☞ 一般用上面的公式计算两个向量之间的夹角.

例1.2.4. 用向量的内积证明

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\beta}\|^2.$$

证明: $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$
$=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})$
$=2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})=2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+2\|\boldsymbol{\beta}\|^2$. ■

在几何上, 这表明平行四边形的两个对角线的平方和等于四边的平方和.

1.2.2 向量的外积

在力学中, 力$\overrightarrow{F}$ 对定点O的力矩是一个向量$\overrightarrow{M}$, 其中

$$\|\overrightarrow{M}\|=\|\overrightarrow{F}\|\cdot\|\vec{r}\|\sin\varphi,$$

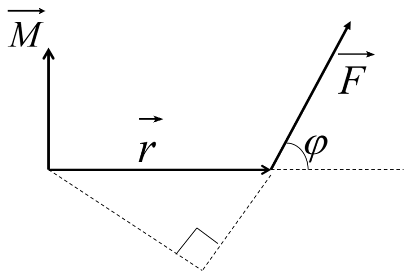

图 1.9:

这里φ 为$\vec{r}$ 与$\overrightarrow{F}$ 的夹角, $\overrightarrow{M}$ 的方向与$\vec{r}$, $\overrightarrow{F}$ 垂直, 且$\vec{r}$, $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{M}$ 符合右手规则(即$\overrightarrow{M}$ 的指向按右手从$\vec{r}$ 转向$\overrightarrow{F}$来确定)(图1.9), 由此引入

定义1.2.5. 外积

向量$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 的外积$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 是一个向量, 它的模

$$\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\| = \|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|\sin\widehat{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}.$$

$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 的方向垂直于$\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 所决定的平面, 且$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 的方向按右手规则从$\boldsymbol{\alpha}$ 转向$\boldsymbol{\beta}$ 来确定(图1.10).

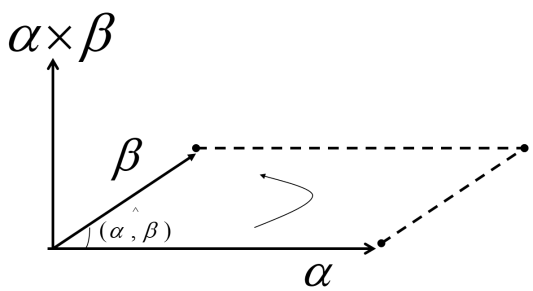

图 1.10:

外积的几何意义: $\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|$ 的数值大小等于以$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的面积.

命题1.2.6. 外积的性质

外积有下列性质:

1. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$.

2. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\beta}$.

3. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ (反交换律).

4. $(k\boldsymbol{\alpha})\times\boldsymbol{\beta}=k(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$(结合律).

5. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}$(分配律).

证明: (1) – (3)可按定义直接验证, (4), (5)的证明从略. ■

1.2.3 向量的混合积

定义1.2.7. 混合积

三个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 的混合积 是指$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}$, 它是一个数, 记作$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

由于$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|\cdot\|\boldsymbol{\gamma}\|\cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}$, 当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 组成右手系时, $\widehat{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}$ 为锐角, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$为正; 而当$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 组成左手系时, $\widehat{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}$ 为钝角, $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$为负.

而以向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为棱的平行六面体的底面积S在数值上等于$\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|$, 它的高等于向量$\boldsymbol{\gamma}$ 在向量$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 上的投影的绝对值(图1.2.7),

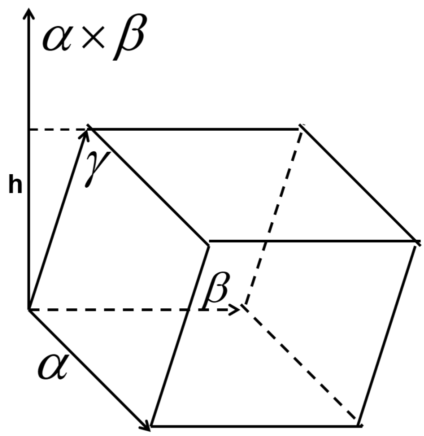

图 1.11:

即高$h=\pm\|\boldsymbol{\gamma}\|\cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}$. 所以平行六面体的体积

$$V=Sh=\pm\|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\|\cdot\|\boldsymbol{\gamma}\|\cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})}=\pm(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}).$$

因此向量的混合积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ 是这样一个数, 它的绝对值表示以向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$为棱的平行六面体的体积.

由混合积的几何意义, 有

$$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\text{ 共面}\Longleftrightarrow(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0.$$

****

内容小结

本节我们学习了

- **向量的内积, 外积, 混合积的定义, 性质和意义**. 这些运算是用来解决几何问题的主要工具, 要熟练掌握. 主要学习是什么, 怎么算, 如何用.

****

习题1.2

1. 设$\|\ \boldsymbol{\alpha}\ \|=3, \|\ \boldsymbol{\beta}\ \|=2, \widehat{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})}=\dfrac{2\pi}{3}$, 计算

   (1) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$;

   (2) $\|\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\ \|^2$;

   (3) $(3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta})$;

   (4) $\boldsymbol{\alpha}$ 在$\boldsymbol{\beta}$ 上的投影$Proj_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}$.

2. 如果$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$ 且$\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{\theta}$, 问能否有$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$?

3. 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为单位向量, 且满足$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}$, 求$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

4. 设$\|\ \boldsymbol{\alpha}\ \|=13, \|\ \boldsymbol{\beta}\ \|=19$, $\|\ \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\ \|=24$, 求$\|\ \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\ \|$.

5. 证明等式$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\times(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=2(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})$, 并说明它的几何意义.

6. 证明: 若$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\theta}$, 则$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha}$.

1.3 向量及其运算的坐标表示

向量的有向线段表示法的优点是比较直观, 但它的计算不如数的计算方便, 为此, 我们将在本节给向量引进坐标, 从而可将向量的运算转化为数的运算.

1.3.1 仿射坐标系

定理1.3.1. 空间中任给三个不共面的向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 则任意一个向量$\boldsymbol{\eta}$ 可以唯一地表示成$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合, 即存在唯一一组实数x, y, z 使得

$$\boldsymbol{\eta} = x\boldsymbol{\alpha}_1 + y\boldsymbol{\alpha}_2 + z\boldsymbol{\alpha}_3.$$

证明: 取一定点O,作向量$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OM}$ 分别表示$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\eta}$, 过$M$点作一直线与$\overrightarrow{OA_3}$ 平行且与$\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ 决定的平面交于N 点, 过N点作一直线与$\overrightarrow{OA_2}$ 平行且与$\overrightarrow{OA_1}$ 交于点P(图1.3.1).

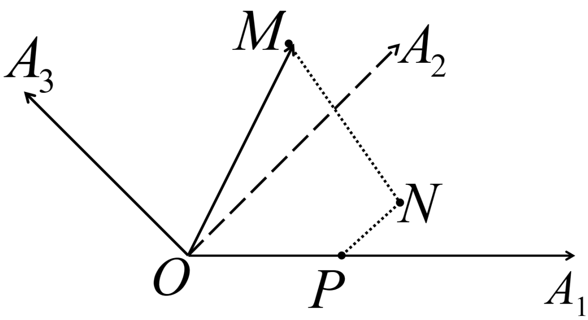

图 1.12:

因为$\overrightarrow{OP} \parallel \boldsymbol{\alpha}_1$, $\overrightarrow{PN} \parallel \boldsymbol{\alpha}_2$, $\overrightarrow{NM} \parallel \boldsymbol{\alpha}_3$, 从而$\boldsymbol{\eta} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{\alpha}_1 + y\boldsymbol{\alpha}_2 + z\boldsymbol{\alpha}$.

下面再证唯一性.

若$\boldsymbol{\eta} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{\alpha}_1 + y\boldsymbol{\alpha}_2 + z\boldsymbol{\alpha}_3 = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + y_1\boldsymbol{\alpha}_2 + z_1\boldsymbol{\alpha}_3$.

就有

$$(x - x_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (y - y_1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (z - z_1)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\theta}.$$

由定理1.1.11 知

$$x - x_1 = y - y_1 = z - z_1 = 0,$$

即$x = x_1, y = y_1, z = z_1$, 定理得证. ■

定义1.3.2. 仿射坐标系

在空间中取一定点O与三个有序的不共面向量$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, 则称取定了一个仿射坐标系, 记作$[O; \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$,其中$O$ 称为坐标原点, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 称为坐标向量, 又称基向量, 简称基.

1.3.2 空间直角坐标系

定义1.3.3. 对于一个仿射坐标系$[O;\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 若坐标向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是相互垂直的单位向量, 则称此仿射坐标系为空间直角坐标系, 并改记为$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$.

从现在开始, 本章所讨论的问题均在右手直角坐标系中进行, 即三个坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 形成右手系(图1.3.2).

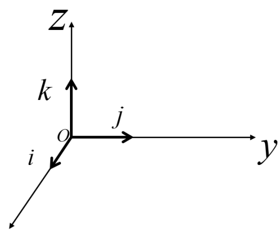

图 1.13:

基向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 所在的有向直线称为坐标轴, 分别称为x 轴、y 轴、z 轴, 每两根坐标轴所决定的平面称为坐标平面, 分别称为xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面, 三个坐标平面将空间划分为八个部分, 称为八个卦限(图1.14).

含有x轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限, 按逆时针方向, 其它第二第三第四卦限在xOy平面上方, 第五卦限至第八卦限均在xOy平面下方, 其中第五卦限在第一卦限下方, 然后再按逆时针方向确定第六, 第七, 第八卦限.

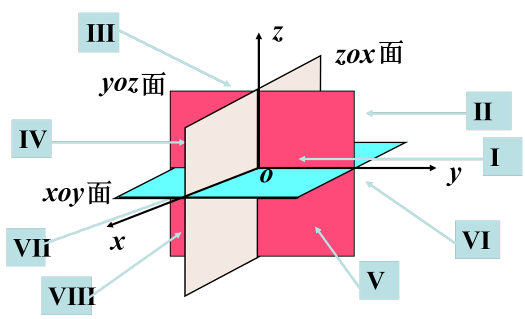

图 1.14:

在直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$中, 任一空间向量$\boldsymbol{\alpha}$ 都存在唯一一组有序实数x,y,z 使得

$$\boldsymbol{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

我们称x,y,z 为**向量α 的坐标**, 并记作(x,y,z); 反之, 对于任意三个有序实数可唯一地决定一个空间向量, 故空间向量与它的坐标(x,y,z) 是一一对应的.因此可记作$\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)$.

1.3.3 向量运算的坐标表示

有了向量的坐标, 下面就看如何把向量的运算以及几何问题通过向量的坐标解决.

1. 线性运算的坐标表示

设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$ 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} &= (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\ &= (x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k},\end{aligned}$$

因此

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \tag{1.3.1}$$

同样

$$k\,(x_1,y_1,z_1)=(kx_1,ky_1,kz_1)\,. \tag{1.3.2}$$

2. 内积的坐标表示

由于坐标向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 是相互垂直的单位向量, 所以有

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.$$

于是对于任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{1.3.3}$$

特别地有

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \tag{1.3.4}$$

$$\cos\widehat{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{1.3.5}$$

3. 外积的坐标表示

由于 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\quad \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\boldsymbol{\theta}$,
于是对于任意两个向量$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2)$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} &= (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\ &= (y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

为了简单起见, 引进记号$\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$, 称为2阶行列式, 这时有

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right). \tag{1.3.6}$$

4. 混合积的坐标表示

设$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{\beta}=(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{\gamma}=(x_3,y_3,z_3)$, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) &= (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}\\ &= (y_1z_2-y_2z_1,x_2z_1-x_1z_2,x_1y_2-x_2y_1)\cdot(x_3,y_3,z_3)\\ &= (y_1z_2-y_2z_1)x_3+(x_2z_1-x_1z_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)z_3\\ &= x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2.\end{aligned}$$

引进记号

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2,$$

称为3阶行列式, 这时

$$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{1.3.7}$$

根据定义, 2 阶行列式和3 阶行列式之间有关系式

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=x_1\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}. \tag{1.3.8}$$

从而又有

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{1.3.9}$$

☞ 引入了2阶和3阶行列式之后，外积和混合积就可以方便地表示了.

例1.3.4. 求向量$\boldsymbol{\alpha}=(3,-2,5)$在向量$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-2)$上的投影.

解: 由于$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=3\times 1+(-2)\times 3+5\times(-2)=-13$,

$\|\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

所以$Proj_{\boldsymbol{\beta}}\,\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha})_{\boldsymbol{\beta}}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\beta}\|}=-\dfrac{13}{\sqrt{14}}$. ■

例1.3.5. 设$\boldsymbol{\alpha}=(-2,1,1),\boldsymbol{\beta}=(1,-2,-1)$,求与$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都垂直的单位向量.

解: 设$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, 则$\boldsymbol{\gamma}$ 与$\boldsymbol{\alpha}$ 及$\boldsymbol{\beta}$ 都垂直.

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=(1,-1,3).$$

又 $\|\boldsymbol{\gamma}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$, 因此, 与$\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$ 同时垂直的的单位向量是

$$\pm\frac{1}{\|\boldsymbol{\gamma}\|}\boldsymbol{\gamma}=\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(1,-1,3).$$ ■

5. 空间中点的坐标

在直角坐标系$[O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}]$ 下, 对于空间中一点M, 称向量$\overrightarrow{OM}$ 是点M 的向径, 并称向径的坐标为点M的坐标, 若$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$, 则点$M$的坐标记作$M(x,y,z)$.

易见, x,y,z 恰好是向径$\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影(图1.15), 通过向径, 空间中的点与三元有序数组一一对应.我们已经知道, 三个坐标平面将空间分为八个卦限, 在八个卦限中点的坐标的符号规律为:

$I(+,+,+),II(-,+,+),III(-,-,+),IV(+,-,+)$,

$V(+,+,-),VI(-,+,-),VII(-,-,-),VIII(+,-,-)$.

特别地, 坐标原点的坐标为$O(0,0,0)$, z 轴上的坐标为$(0,0,z)$, xOy 平面上点的坐标为$(x,y,0)$, 对于空间中一点$M(x,y,z)$, 其关于原点的对称点为$(-x,-y,-z)$, 关于z 轴的对称点为$(-x,-y,z)$, 关于xOy 平面的对称点为$(x,y,-z)$.

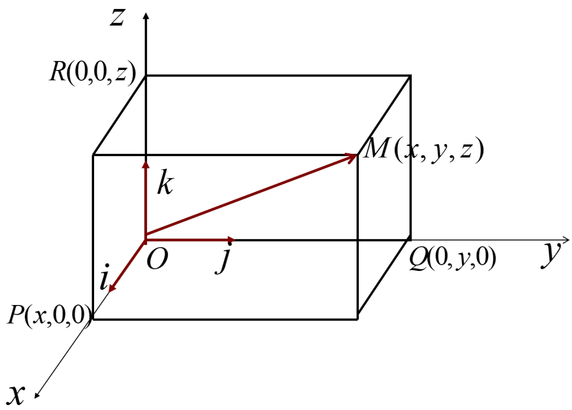

图 1.15:

6. 方向角与方向余弦

对于非零向量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)$, 我们可以用$\boldsymbol{\alpha}$ 与三个坐标轴正向的夹角$\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$ 来表示它的方向$(0\le\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z\le\pi)$, 称$\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z$ 为非零向量$\boldsymbol{\alpha}$ 的方向角(图1.3.5), 这时有

$$\cos\varphi_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\varphi_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\varphi_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{1.3.10}$$

称$\cos\varphi_x,\cos\varphi_y,\cos\varphi_z$ 为向量$\boldsymbol{\alpha}$ 的方向余弦, 通常也用向量的方向余弦来表示向量的方向, 方向余弦有关系式

$$\cos^2\varphi_x+\cos^2\varphi_y+\cos^2\varphi_z=1.$$

并且有 $$\boldsymbol{\alpha}^0=\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}=(\cos\varphi_x,\cos\varphi_y,\cos\varphi_z).$$

7. 两点间的距离公式

设$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间中的两点, 则由(图1.16),
$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$, 从而$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, 因此两点间的距离

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例1.3.6. 证明以点$M_1(4,3,1),M_2(7,1,2),M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形, 并求$\triangle M_1M_2M_3$ 的面积.

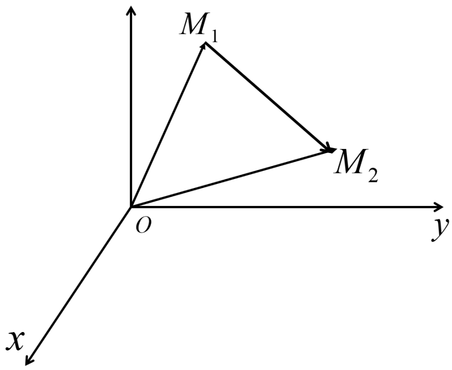

图 1.16:

证明: 因为

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 &= (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,\\
\|\overrightarrow{M_2M_3}\|^2 &= (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,\\
\|\overrightarrow{M_3M_1}\|^2 &= (4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6.
\end{aligned}$$

因此$|\overrightarrow{M_2M_3}\| = |\overrightarrow{M_3M_1}\|$, 即$\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

由于
$$\overrightarrow{M_1M_3}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}.$$

所以它的面积

$$S_{\triangle M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{M_1M_3}\times\overrightarrow{M_2M_3}\|=\frac{\sqrt{35}}{2}.$$ ■

例1.3.7. *在z 轴上求与两点$A(-4,1,7)$和$B(3,5,-2)$ 等距离的点M.*

解: 设$M(0,0,z)$为所求之点, 由题设$\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$, 得

$$[(0-4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2]^{\frac{1}{2}}=[(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2]^{\frac{1}{2}},$$

解得$z=\dfrac{14}{9}$,故所求的点为$M(0,0,\dfrac{14}{9})$. ■

* *

内容小结

本节我们学习了

- **坐标系**. 建立坐标系之后, 几何和代数就建立了一座桥梁, 可以用代数方法解决几何问题, 反之亦然. 主要学习是什么, 怎么算, 如何用.

- **内积外积和混合积的坐标计算方法**. 先要会用坐标这种简单的方法把它们计算出来, 这是解决几何问题的第一步. 注意：这些计算公式的证明都是遵循先易后难(先特殊再一般)的原则进行的, 这个原则特别注意.
- **中点等几何问题的坐标计算方法**. 了解和几何问题和代数方法的相互转化之后, 许多几何问题就变得非常简单.
- **向量的运算作为工具解决几何问题**. 其实真正的工具是下面三个

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$
$$\alpha // \beta \Leftrightarrow \alpha = k\beta \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$
$$\alpha, \beta, \gamma \text{共面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

注意, 上面的等式的左面说得都是几何关系, 右面说得是一个数是否为0, 坐标是否对应成比例等代数问题.

****

习题1.3

1. 已知$\boldsymbol{\alpha} = (-1, 2, 3), \boldsymbol{\beta} = (2, 1, 3), \boldsymbol{\gamma} = (1, -1, 2)$. 求

   (1) $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$;

   (2) $2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - 3\boldsymbol{\gamma}$;

   (3) 分别求与$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$同方向的单位向量$\boldsymbol{\alpha}^0, \boldsymbol{\beta}^0, \boldsymbol{\gamma}^0$.

2. 设$\boldsymbol{\alpha} = (x, 1, 2), \boldsymbol{\beta} = (0, y, -1)$, 问$x, y$ 为何值时, $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$?

3. 已知$\boldsymbol{\alpha} = (2, -3, 1), \boldsymbol{\beta} = (1, 2, -3)$, 求

   (1) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$;

   (2) $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$;

   (3) $\boldsymbol{\alpha}$ 与$\boldsymbol{\beta}$ 的夹角;

   (4) $\boldsymbol{\alpha}$ 的方向余弦.

4. 求向量$\boldsymbol{\alpha}=(4,-3,4)$ 在$\boldsymbol{\beta}=(2,2,1)$ 上的投影.

5. 求点(a,b,c)关于(1) 各坐标平面;(2) 各坐标轴;(3) 坐标原点的对称点的坐标.

6. 自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标平面和坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

7. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在那个卦限?

   $A(1,-2,3), B(2,3,-4), C(2,-3,-4), D(-2,-3,1)$.

8. 已知$\overrightarrow{AB}=(4,6,7)$, 和点$A(2,1,3)$, 求$B$ 点的坐标.

9. 在yOz 平面上求与三点$A(3,1,2), B(4,-2,-2)$ 和$C(0,5,1)$ 等距离的点.

10. 已知四点$A(-1,2,4), B(6,3,2), C(2,4,3), D(-1,-2,3)$, 求

    (1) $\triangle ABC$ 的面积;

    (2) 四面体$ABCD$ 的体积.

11. 判断$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是否共面?

    (1) $\boldsymbol{\alpha}=(4,0,2), \boldsymbol{\beta}=(6,-9,8), \boldsymbol{\gamma}=(6,-3,3)$;

    (2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3), \boldsymbol{\beta}=(3,3,1), \boldsymbol{\gamma}=(1,7,-5)$.

12. 设$\boldsymbol{\alpha}$ 和$\boldsymbol{\beta}$ 是相互垂直的单位向量, 求以$\xi=2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$ 和$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}-4\boldsymbol{\beta}$ 为边的平行四边形的面积.

1.4 平面及其方程

在本节和下一节, 我们将以几何向量作为工具, 在空间直角坐标系中讨论最简单的几何图形, 即平面与直线, 建立常用的平面与直线的方程并研究它们之间的位置关系.

1.4.1 平面的点法式方程

如果一个非零向量垂直于一已知平面, 则称该向量为该平面的法向量. 设已知平面π 上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 以及它的一个法向量$\vec{n}=(a,b,c)$, 我们来建立平面π 的方程, 也即求出平面π 上任一点$M(x,y,z)$ 的坐标应满足的等式(图1.17).

由法向量的概念可知, 点M在平面π 上的充要条件是$\overrightarrow{M_0M}$ 与$\vec{n}$ 垂直, 即

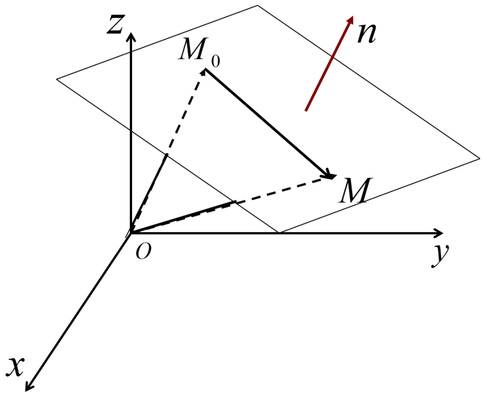

图 1.17:

$$M \in \pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0.$$

由于$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\,, \vec{n} = (a, b, c)$,
故所求平面方程为:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0. \tag{1.4.1}$$

这就是用坐标表示的过已知点$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 而法向量为$\vec{n} = (a, b, c)$ 的平面π 的方程, 方程(1.4.1)称为平面的点法式方程.

例1.4.1. *求过点$M_0(-1, 2, 4)$且以$\vec{n} = (2, -1, 3)$ 为法向量的平面方程.*
解: 据平面的点法式方程(1.4.1),得所求方程为:

$$2(x + 1) - (y - 2) + 3(z - 4) = 0,$$

即

$$2x - y + 3z - 8 = 0.$$

■

例1.4.2. *给出不在同一直线上的三个点$P_0(x_0, y_0, z_0), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, 求通过这三个点的平面方程.*
解: 由于$P(x, y, z)$ 在平面上的充要条件是$\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ 共面, 即混合积

$$(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) = 0,$$

也就是

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.2}$$

这就是所求的平面方程, 称为平面的三点式方程. ■

1.4.2 平面的一般式方程

我们注意到, 方程(1.4.1) 可化为

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1.4.3}$$

其中$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, 这是关于x, y, z 的一次方程; 反之, 任一个三元一次方程(1.4.3)都可以化为(1.4.1)形式(当然其中的x_0, y_0, z_0 不是唯一的).因此任一个三元一次方程所表示的图形是一个平面, 并且x, y, z 的系数就是该平面的一个法向量的坐标, 即$\vec{n} = (a, b, c)$, 我们称方程(1.4.3)为平面的一般式方程.

例如, 方程$3x - 4y + 2z + 8 = 0$ 表示一个平面, 其法向量为$\vec{n} = (3, -4, 2)$.

例1.4.3. 设一平面与x, y, z 轴分别交于$P(p, 0, 0), Q(0, q, 0), R(0, 0, r)$ 三点(图1.18),

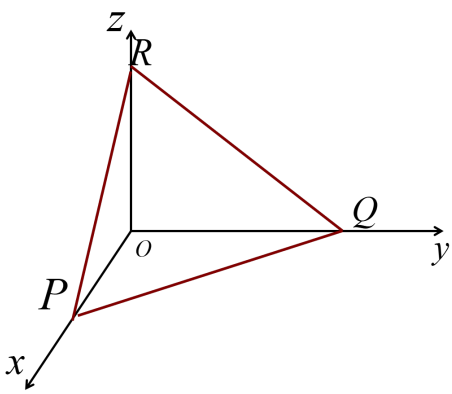

图 1.18:

求这平面的方程(其中$pqr \neq 0$).

解: 设所求平面方程为

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{1.4.4}$$

因为P, Q, R三点都在这平面上, 所以点P, Q, R 都满足方程(1.4.4), 即有

$$ap + d = 0, bq + d = 0, cr + d = 0.$$

由此可得

$$a = -\frac{d}{p}, b = -\frac{d}{q}, c = -\frac{d}{r}.$$

由此代人(1.4.4)并除以$d(d\neq 0)$, 可得所求的平面方程为

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1. \tag{1.4.5}$$ ■

方程(1.4.5)称为平面的截距式方程, 而p,q,r 分别称为平面在x,y,z 轴上的截距.

1.4.3 两个平面间的相互位置

设有两个平面:

$$\pi_1:\quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$\pi_2:\quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.$$

我们把这两个平面法向量的夹角称为两平面的夹角(通常指锐角), 于是有

$$\cos\widehat{(\pi_1,\pi_2)}=\cos\widehat{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}. \tag{1.4.6}$$

由两平面法向量的关系可得下列结论:

1. π_1 与π_2 相交但不重合$\Longleftrightarrow \vec{n}_1\nparallel\vec{n}_2 \Longleftrightarrow a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2$;
2. π_1 与π_2 平行但不重合$\Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$;
3. π_1 与π_2 重合$\Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

再从夹角公式(1.4.6) 可知

4. π_1 与π_2 垂直$\Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

例1.4.4. *一平面过两点$M_1(1,1,1)$ 和$M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面$x+y+z=0$, 求它的方程.*

解: 由平面的点法式方程, 设所求平面方程为

$$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0.$$

其法向量$\vec{n}=(a,b,c)$, 因为$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$ 在所求平面上, 故$\overrightarrow{M_1M_2}\perp\vec{n}$, 所以有

$$-a-2c=0.$$

又已知所求平面垂直于已知平面$x+y+z=0$,故有

$$a+b+c=0.$$

由以上两式得到$a=-2c, b=c$, 代人所求方程中并约去$c(c\neq 0)$ 得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0.$$

或

$$2x-y-z=0.$$

这就是所求的方程. ■

例1.4.5. 设$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面$ax+by+cz+d=0$ 外一点, 求M_0 到这个平面的距离(图1.19).

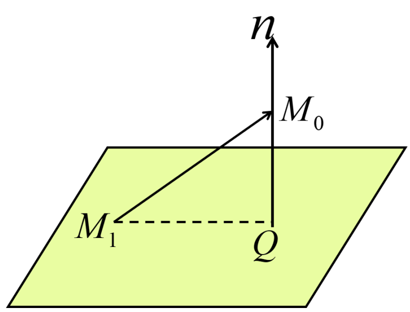

图 1.19:

解: 在平面上取一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, 并作一法向量$\vec{n}$, 那么由图1.4.3,可知所求的距离为

$$d=|(\overrightarrow{M_1M_0})_{\vec{n}}|=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{\parallel\vec{n}\parallel}.$$

而$\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1),\vec{n}=(a,b,c)$.

因此,

$$d=\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (1.4.7)$$ ■

例如, 求点(2, 1, 1) 到平面$x-y+z+1=0$ 的距离, 利用公式(1.4.7) 得

$$d=\frac{|1\times 2-1\times 1+1\times 1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

* *

内容小结

本节我们学习了

- **平面及其方程**. 平面最重要的是其法向量；解决问题的关键是要清楚几何问题如何转化为代数的语言.
- **平面间的位置关系**. 位置关系完全由法向量决定.
- **点到平面的距离**. 转化为一向量在另一向量上的投影向量.

* *

习题1.4

1. 求下列各平面的方程:

(1) 经过点$A(-3,1,-2)$和z 轴;
(2) 经过点$A(4,0,-2)$ 和$B(5,1,7)$,且平行于x 轴；
(3) 经过点$A(2,1,-3)$ 且平行于向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2),\boldsymbol{\beta}=(0,2,3)$;
(4) 经过三点$A(1,2,1),B(-3,0,2)$ 和$C(0,5,1)$;
(5) 经过点$A(1,-3,2)$ 且垂直于点$M(0,0,3)$ 和点$N(1,-3,-4)$的连线;
(6) 经过点$A(6,-10,1)$, 且在x 轴上的截距为-3, 在y轴上的截距为2.

2. 求点$P(1,2,1)$到平面$x+2y+2z-10=0$ 的距离.

3. 已知两个平面$x-2y+3z+d=0,-2x+4y+cz+5=0$,问$c,d$为何值时, 两平面平行?重合?

1.5 空间直线及其方程

1.5.1 空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线, 这个向量就称为该直线的方向向量.于是, 如果已知直线l 上的一个定点$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 以及该直线的一个方向向量$\vec{s}=(m,n,p)$, 这条直线就完全确定了(图1.20).

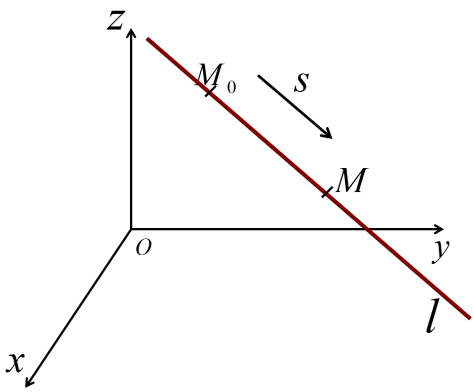

图 1.20:

我们来建立直线l 的方程, 设$M(x,y,z)$ 为直线l 上任一点, 那么有

$$M(x,y,z)\in l \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}.$$

即

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(m,n,p).$$

因此有方程

$$\begin{cases} x-x_0 = mt \\ y-y_0 = nt \\ z-z_0 = pt \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = x_0+mt \\ y = y_0+nt \\ z = z_0+pt \end{cases}. \tag{1.5.1}$$

方程(1.5.1)称为直线l 的参数方程, 其中t 称为参数, 直线的参数方程给出了直线上的点M与参数t 的一一对应关系, 任取参数t 的一个值, 由公式(1.5.1) 容易得到直线l 上与之对应的一个点.

从参数方程中消去参数t可得

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \tag{1.5.2}$$

方程(1.5.2)称为直线的对称式方程(或标准方程).

直线的标准方程清楚地显示了直线l 过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$, 以及它的方向向量为$\vec{s}=(m,n,p)$, 我们也把$\vec{s}$ 的坐标m,n,p 称为直线l 的方向数.

例1.5.1. 求过点$M_0(1,-2,3)$ 且以$\vec{s}=(2,-1,4)$为方向向量的直线l 的方程.
解: 由标准方程(1.5.2) 得l 的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

或l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \quad (t\in R). \\ z=3+4t \end{cases}$$ ■

例1.5.2. 求过两个不同点$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程.
解: 可以取$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 为直线的方向向量, 于是直线的对称式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1.5.3}$$ ■

1.5.2 空间直线的一般方程

空间直线也可以看作是两个平面的交线, 因而方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad ((a_1,b_1,c_1)\nparallel(a_2,b_2,c_2))$$

表示一条直线, 称为直线的一般式方程.

例1.5.3. 把直线方程$\begin{cases} 3x+2y-4z-5=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases}$ 化为对称式方程和参数式方程.
解: 先求出直线上一点, 令$z=0$,得

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}.$$

解此方程组得$x=-7,y=13$, 因此点$P_0(-7,13,0)$ 在直线上.

再求直线的方向向量$\vec{s}$,由于两平面的交线与这两个平面的法向量$\vec{n}_1=(3,2,-4),\vec{n}_2=(2,1,-2)$都垂直, 故可取

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=(0,-2,-1).$$

因此, 所给直线的对称式方程为

$$\frac{x+7}{0}=\frac{y-13}{-2}=\frac{z}{-1}.$$

参数式方程为

$$\begin{cases} x=-7\\ y=-2t+13\\ z=-t\end{cases}.$$

■

例1.5.4. 化直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-4}{7}$ 为一般式方程.

解: 方程可改写为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-5}\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z-4}{7}\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}5x+2y-1=0\\ 7x-2z+1=0\end{cases}.$$

■

1.5.3 空间直线的位置关系

设空间中两条直线的方程分别为:

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$
$$l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

从几何上来看, 它们可以是: 相交、平行、异面及重合, 已知$M_1(x_1,y_1,z_1)\in l_1$, $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 为l_1 的方向向量; $M_2(x_2,y_2,z_2)\in l_2,\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ 为l_2 的方向向量(图1.21), 故有下列结论:

1. $l_1\parallel l_2$但不重合$\Longleftrightarrow \vec{s}_1\parallel\vec{s}_2\nparallel\overrightarrow{M_1M_2}$;
2. l_1,l_2 重合$\Longleftrightarrow \vec{s}_1\parallel\vec{s}_2\parallel\overrightarrow{M_1M_2}$;

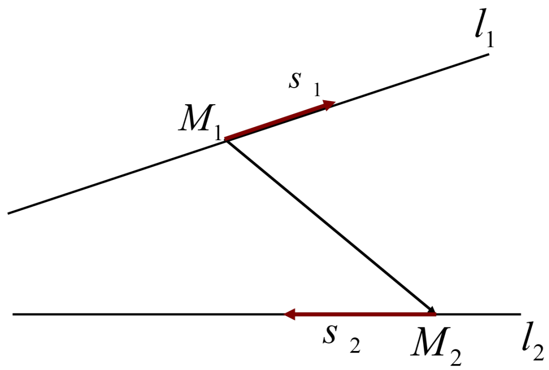

图 1.21:

3. l_1 与l_2 相交$\Longleftrightarrow \vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共面且$l_1 \not\parallel l_2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$且$m_1 : n_1 : p_1 \neq m_2 : n_2 : p_2$;

4. l_1 与l_2 异面$\Longleftrightarrow \vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$不共面$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$;

5. $l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

例1.5.5. 证明直线l_1 : $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ 与直线l_2 : $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{-4}$ 共面, 并求它所在的平面方程.

解: 在l_1 上取点$M_1(2,4,4)$, 在l_2 上取点$M_2(3,4,5)$, 得$\overrightarrow{M_1M_2} = (1,0,1)$, 又直线的方向向量为$\vec{s}_1 = (1,-1,3), \vec{s}_2 = (2,3,-4)$,由于

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

所以$\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ 共面, 又$\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$, 故可确定一平面.可取

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-5,10,5) \parallel (-1,2,1).$$

为平面的法向量, 所以所求的平面方程为

$$-(x-2)+2(y-4)+(z-4)=0.$$

即

$$-x+2y+z-10=0. \qquad \blacksquare$$

例1.5.6. 求过点$M(2,1,3)$ 且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解: 根据直线的参数方程, 设两直线的交点为$M_0(-1+3t,1+2t,-t)$, 由两条直线垂直相交得$\overrightarrow{MM_0}\perp\vec{s_1}$, 因此

$$(-1+3t-2,1+2t-1,-t-3)\cdot(3,2,-1)=0.$$

解得$t=\dfrac{3}{7}$. 这样所求直线的方向向量

$$\vec{s_2}=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7})=-\frac{6}{7}(2,-1,4).$$

于是得所求直线方程

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}. \qquad \blacksquare$$

例1.5.7. 设l_1 与 l_2 是两条异面直线, 求l_1 与 l_2 的距离.

解: 设l_1 与 l_2 的方向向量分别是$\vec{s_1}$ 和$\vec{s_2}$, 且分别经过M_1,M_2 点.

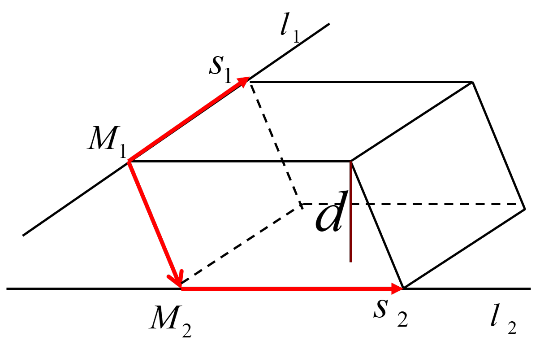

图 1.22:

现利用平行六面体的体积来求l_1 与 l_2 的距离d.

现以$\vec{s_1},\vec{s_2},\overrightarrow{M_1M_2}$ 为棱作一个平面六面体(图1.22), 则d等于这个平行六面体的高, 从而

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)}{\|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\|}\right|. \tag{1.5.4}$$ ■

例如, 容易证明直线l_1: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=z$与$l_2$: $x+1=y-1=z-2$ 是异面直线, 它们之间的距离

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(s_1\times s_2)}{\|\ s_1\times s_2\ \|}\right|=\left\|\begin{vmatrix}-1&1&2\\3&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}\Big/\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\right\|=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

1.5.4 直线与平面的位置关系

设空间直线与平面的方程分别为:

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\ \text{这里}\vec{s}=(m,n,p),$$

$$\pi:\ ax+by+cz+d=0,\ \ \text{这里}\vec{n}=(a,b,c).$$

从几何上看, 它们可以是:相交、平行、及直线在平面上, 下面来讨论判别方法.

我们从求直线与平面的交点入手, 把直线l 的方程改为参数方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}.$$

把它代人到平面π 的方程中, 整理后得t的方程

$$(am+bn+cp)t+ax_0+by_0+cz_0+d=0. \tag{1.5.5}$$

(1) 当$am+bn+cp\neq 0$ 时, 可求出唯一的t, 因而直线l 与平面π 相交于一点.

(2) 当$am+bn+cp=0$, 且$ax_0+by_0+cz_0+d=0$ 时, 方程(1.5.5)有无穷多解, 说明直线l 在平面π 上.

(3) 当$am+bn+cp=0$, 且$ax_0+by_0+cz_0+d\neq 0$ 时, 方程(1.5.5)无解, 说明直线l 与平面π 平行(且不在平面上).

特别地, $l\perp\pi\Longleftrightarrow\vec{n}\parallel\vec{s}\Longleftrightarrow\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}$.

例1.5.8. 判断直线l 与平面π 的位置关系,

$$l: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2},$$
$$\pi: 2x + ky + z - 6 = 0.$$

解: 直线l的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases},$$

代人平面π 的方程中, 得

$$2(2+t) + k(3+t) + (4+2t) - 6 = 0.$$

即 $(k+4)t = -2 - 3k.$ 所以

(1) 当$k \neq -4$ 时, l 与π相交, 交点为 $\left(\frac{6-k}{k+4}, \frac{10}{k+4}, \frac{12-2k}{k+4}\right)$;

(2) 当$k = -4$时, $l \parallel \pi$. ■

设直线l 过点M_0, 且方向向量为$\vec{s}$, 从图(1.23) 可以看出

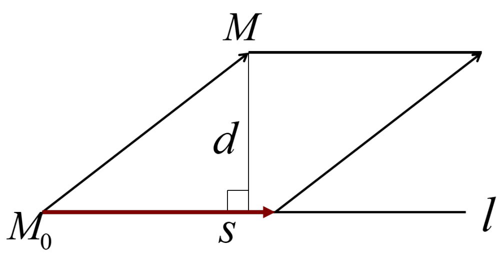

图 1.23:

点M到直线l 的距离d 等于以$\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}$为邻边的平行四边形的高, 也即

$$d = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}. \tag{1.5.6}$$

易见, 两平行直线间的距离可化为点到直线间的距离.

例1.5.9. 求点$M(1,2,1)$到直线$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1}$ 的距离.

解: 应用公式(1.5.6), 所求距离

$$d = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{|(-1,-1,-3) \times (2,1,1)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{5}\,.$$ ■

****

内容小结

本节我们学习了

- **直线及其方程**. 直线最重要的是其方向向量.
- **直线, 平面间的位置关系**. 位置关系由平面的法向量和直线的方向向量决定; 解决问题的关键是要清楚几何问题如何转化为代数的语言.
- **异面直线的距离**. 转化为平行六面体的高.

****

习题1.5

1. 求下列直线方程:

   (1) 过点$P(-1,0,3)$平行于$\boldsymbol{\alpha}=(3,-2,5)$;

   (2) 过点$P(-2,-3,4)$ 平行于x 轴;

   (3) 过$A(3,-2,1)$ 和$B(-1,0,2)$ 两点;

   (4) 过点$A(4,-1,3)$,且垂直于平面$x-2y+2z+1=0$.

2. 把下列直线方程化为对称式方程和参数方程:

   (1) $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases}$, (2) $\begin{cases} 3x-y+2=0 \\ 4x+3z-1=0 \end{cases}$.

3. 判断下列两直线

$$l_1 \ : \frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4};\ l_2:\ x-1=y+2=\frac{z-2}{2}$$

是否在同一平面内?是则求它们所在平面的方程.

4. 判断直线与平面的位置关系, 若有交点, 求出交点坐标.

   (1) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 和$2x-2y+3z-2=0$;

   (2) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z}{3}$ 和$2x-y-2z+2=0$;

   (3) $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ 和$x+2y-4z+1=0$.

5. 已知直线$\begin{cases} 3x-y+2z-6=0 \\ x+4y-z+d=0 \end{cases}$ 与x 轴相交, 求d 的值.

6. 试证:

$$l_1: \frac{x+7}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+3}{2},\ l_2:\ \frac{x+5}{0}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-2}{3}$$

是异面直线, 并求它们之间的距离.

7. 求异面直线$x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与$x-1=y+1=z-2$ 的公垂线的长.

8. 求直线$l:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面$\pi:\ x-y+2z-1=0$上的投影直线的方程.

9. 求λ 的值, 使直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 和直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$ 相交.

10. 求直线$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+4}{3}$ 与平面$2x-3y+5z-8=0$ 的交点与夹角.

11. 求$P(3,-1,2)$ 点到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x+5y-z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

第二章 线性方程组与矩阵的运算

****

本章主要内容：

- ▶ 高斯消元法解方程组与解的判断
- ▶ 矩阵的定义, 性质与运算; 矩阵的乘法
- ▶ 分块矩阵的性质与运算

****

求解线性方程组是数学问题中最重要的问题之一, 也是解决很多实际问题的有力工具, 在经济管理活动分析中也有着广泛的应用. 我们高中就已学过用加减消元法和代入消元法来解线性方程组.现在要把这种方法整理一下加以系统化, 也就是用矩阵的语言来描述.

矩阵是数学中的一个重要的基本概念, 是代数学的一个重要研究对象, 也是数学研究和应用的一个重要工具. "矩阵"这一术语由英国数学家西尔维斯特在1850年首次使用. 矩阵及其理论现已应用于自然科学、工程技术、社会科学等许多领域. 随着现代化数字计算机的飞速发展和广泛应用, 许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决, 于是作为处理离散问题的矩阵计算成为了从事社会经济问题的工作人员的基本数学工具.

2.1 线性方程组与矩阵的基本概念

2.1.1 线性方程组的相关概念

线性方程和线性方程组的概念我们以前已经接触过, 下面回忆一下有关的内容.

定义2.1.1. 线性方程与线性方程组

形如下面含有n个未知量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_1$$

称为一个n元线性方程.

联立m个n元线性方程, 得到形如下面的一组线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad\vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

称为n**元线性方程组**. 其中a_{ij}是未知量x_j的系数, b_i称为常数项. 如果它的常数项$b_i = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, 则称为**齐次线性方程组**, 否则称为非齐次线性方程组.

如果把$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 代人上面的方程组, 使每个方程都是恒等式, 则称有序数组$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$为方程组的解. 方程组所有的解放在一起组成的集合称为该方程组的解集.

一个方程组如果有解, 则称为相容的, 否则称为不相容的或矛盾方程组.

下面举几个方程组的例子.

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ \sqrt{2}x_1 + 3x_2 = 16 \end{cases}; \quad (b)\ \begin{cases} x_1 + 2\sin x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 16 \end{cases}; \quad (c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1^2 + 3x_2 = 1 \end{cases}.$$

方程组(a)是线性方程组, 并且是非齐次的. 而方程组$(b), (c)$ 不是线性方程组, 因为在这两个方程组中$2\sin x_2$, $2x_1^2$ 都不是未知量的1次函数.

☞ 线性方程组中的线性是指方程中的每一项都是未知量的1次函数或常数. 不特别说明的话, 以后把线性方程组都简称为方程组.

2.1.2 线性方程组的矩阵表示

注意到线性方程组由未知量的系数以及常数项完全确定, 所以为方便起见, 引入以下的概念.

定义2.1.2. 矩阵

由$m \times n$个数a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排列组成的$m$行$n$列矩形数表:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为m行n列矩阵, 简记为$m \times n$矩阵. 矩阵的第i行是$(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \cdots\ \ a_{in})$, 矩阵的第$j$列是$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$. a_{ij}称为矩阵的元素, 下标i,j表示a_{ij}位于矩阵中的第i行第j列. 矩阵通常用大写黑体字母$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$等表示, 也可以表示为$(a_{ij})_{m\times n}$.

例2.1.3. 写出2×3矩阵$\boldsymbol{A}$,其中$a_{11}=1,a_{12}=2,a_{13}=0,a_{21}=4,a_{22}=5,a_{23}=-2$.

解: 把矩阵的每个位置上写上相应的数, 得$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. ■

考虑方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases},$$

把此方程组的系数和常数项按先后次序放在一起写成一个矩阵的形式

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

则方程组就可以用矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$比较简洁地表示出来了, 最后一列表示方程组右边的常数项, 前三列分别是未知量x_1,x_2,x_3的系数, 行分别表示每个方程的系数. 反过来, 知道了这个矩阵, 也可以把原来的方程组重新写出来. 就把矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$称为此方程组的增广矩阵.

定义2.1.4. 系数矩阵与增广矩阵

一般地, 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

称矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为方程组的系数矩阵. 称矩阵

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

为方程组的常数项矩阵. 称矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为方程组的增广矩阵. 为了刻画增广矩阵是由系数矩阵和常数项矩阵拼合而成, 也把增广矩阵写成

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}).$$

任给一个方程组, 可以写出一个矩阵, 即它的增广矩阵, 而任给一个矩阵, 也可以把这个矩阵看成某个方程组的增广矩阵.这样方程组和矩阵之间就有了一个对应关系.

例2.1.5. 写出方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \qquad -5x_2 - 8x_3 = -13 \\ \qquad\qquad -5x_3 = -5 \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵.

解: 方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-5&-8\\0&0&-5\end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\0&-5&-8&-13\\0&0&-5&-5\end{pmatrix}.$$ ■

例2.1.6. 已知方程组的增广矩阵为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\3&-2&7&1\\2&1&0&1\end{pmatrix},$$

写出此方程组.

解: 此矩阵对应的方程组为$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-1\\3x_1-2x_2+7x_3=1\\2x_1+x_2=1\end{cases}$. ■

由于方程组和增广矩阵的一一对应关系, 可以用矩阵简洁、方便地表示方程组, 不仅如此, 在后面我们可以看到, 解方程组的时候, 用矩阵的形式去做, 会使得解方程组的过程也很方便.

☞ 现在完成了解方程组的第一步: 用简单的符号把方程组表示出来.

2.1.3 方程组和矩阵的初等变换

对于方程组, 主要的目标是求出它的解集, 在高中时我们学过用加减消元法和代入消元法来解方程组, 简单说就是把方程组中的方程加加减减, 在一些方程中消去某些未知量, 最后得到方程组的解. 现在就详细研究, 总结一下怎样加减, 如何消元.

定义2.1.7. 同解方程组

两个含有相同未知量的方程组如果具有相同的解集, 则称这两个方程组为同解方程组.

定义2.1.8. 方程组的初等变换

下面3种方程组的运算称为方程组的初等变换.

1. 交换两个方程.

2. 一个方程乘上一个非零数.

3. 一个方程加上另外一个方程的k倍.

以前就是用这三种方法对方程组进行消元的, 之所以这样做的是因为

定理2.1.9. *初等变换保持方程组同解*

一个方程组经过一次方程组的初等变换得到一个新方程组, 则这两个方程组是同解方程组. 从而方程组经过有限多次方程组的初等变换后, 方程组的解集不变.

证明: 对3种初等变换分别证明一个方程组的解也是另外一个方程组的解, 请读者尝试证明. ■

☞ 解方程组的过程就是通过方程组的初等变换, 一步步的把原来复杂的方程组化为一个同解的简单的方程组.

为了简单起见, 分别用记号

$E_i \leftrightarrow E_j$	交换第i个方程和第j个方程
kE_i	第i个方程乘上一个非零数k
$E_i + kE_j$	第i个方程加上第j个方程的k倍

表示方程组的3种初等变换.

例2.1.10. *用方程组的初等变换法解方程组*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}.$$

解: 用初等变换$E_2 + E_1$得到同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_2 = 9 \end{cases}.$$

再进行$\frac{1}{3}E_2$有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

最后用初等变换$E_1 - E_2$就有

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

由于最后的方程组和原来的方程组是同解方程组, 所以原来的方程组有唯一解

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3. \qquad \blacksquare$$

虽说这个例子比较简单, 但是求解的方法和步骤也适用于一般的方程组. 这种解方程组的加减消元法也称为Gauss消元法.

由于增广矩阵可以简洁地表示方程组, 所以和方程组的初等变换相对应, 有下面的概念.

定义2.1.11. *矩阵的行初等变换*

*下面3种矩阵的运算称为*矩阵的行初等变换.

1. *交换矩阵的两行.*
2. *矩阵的一行同时乘上一个非零数.*
3. *一行加上另外一行的k倍.*

同样地, 分别用记号

$r_i \leftrightarrow r_j$	交换矩阵的第i行和第j行
kr_i	矩阵的第i行乘上一个非零数k
$r_i + kr_j$	矩阵的第i行加上第j行的k倍

表示矩阵的3种行初等变换.

下面用例子说明如何用消元法解方程组, 如何用矩阵的记号简洁地表示解方程组的过程.

例2.1.12. *考虑方程组*

$$\begin{cases} \phantom{3x_1 + {}} 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases},$$

分别用方程组的初等变换和增广矩阵的行初等变换方法求其解.

解: 为了方便这两种方法的对照, 分为两栏来做.

消元法的第一步目标是只让未知量x_1出现在第一个方程中, 把其余方程中的x_1 用方程的加减法消去.

方程组: 增广矩阵:

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$E_1 \leftrightarrow E_3$: $r_1 \leftrightarrow r_3$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$\frac{1}{2}E_1$: $\frac{1}{2}r_1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 1 \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$E_2 - 3E_1$: $r_2 - 3r_1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad -x_2 - 2x_3 = -2 \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

第二步消元的目标是只让x_2出现在第一个、第二个方程中, 把其余方程中的x_2 用方程的加减法消去.

$-E_2$: $-r_2$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$E_3 - 2E_2$: $r_3 - 2r_2$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad\quad\quad -3x_3 = -6 \end{cases}. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

下面把前两个方程中的x_3消去, 把第一个方程中的x_2消去,

$-\frac{1}{3}E_3:$ $-\frac{1}{3}r_3:$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$E_1 + E_3:$ $r_1 + r_3:$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$E_2 - 2E_3:$ $r_2 - 2r_3:$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$E_1 - 2E_2:$ $r_1 - 2r_2:$

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

明显地, 最后一个方程组有唯一解, 它和原来的方程组同解, 所以原方程有唯一解

$$x_1 = 7,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$$

■

这个例子说明, 解方程组就是用初等变换不断进行消元, 最后得到简单的同解方程组.通过对比也会发现, 用增广矩阵的记号解方程组比较简洁、方便, 看起来也比较清楚.

* *

内容小结

本节我们学习了

- **方程组的基本概念与增广矩阵**. 用增广矩阵可以方便的表示方程组.
- **高斯消元法解方程组**. 系统地介绍高斯消元法的过程.
- **矩阵的初等变换**. 把解方程组的过程用矩阵的行初等变换表示, 简洁,明了. 行初等变换是一种重要的方法, 在后面还会对次用来解决其它问题.

* *

习题2.1

1. 判断下列方程是不是线性方程.

(1) $x+5y=1$; (2) $x_1x_2+x_3=1$; (3) $\sqrt{x}+y=1$; (4) $\sqrt{3}x+y=1$.

2. 写出方程组$\begin{cases} 3x_1+\ \ x_2+4x_3=\ \ 1 \\ \ \ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3=\ \ 1 \\ \ \ x_1-2x_2+3x_3=-2 \end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵, 并验证$x_1=1, x_2=1, x_3=1$和$x_1=0, x_2=1, x_3=0$是不是此方程组的解.

3. 分别写出增广矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$对应的方程组.

4. 写出3×3矩阵$\boldsymbol{A}$,其中$a_{ij}=i-j$, $i=1,2,3, j=1,2,3$.

5. 某商店在一年中三种商品的销售情况如下表所示:

表 2.1: 各季度销售情况表

季度	商品1	商品2	商品3
第一季度	123	100	9
第二季度	98	131	19
第三季度	111	123	10
第四季度	100	90	26

设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 3}$表示此商店各种商品一年的销售情况, 其中$a_{ij}$等于第$i$季度商品$j$的销售量, 矩阵$\boldsymbol{A}$称为销售矩阵. 请写出销售矩阵$\boldsymbol{A}$.矩阵$\boldsymbol{A}$ 的第3列表示

什么意思?矩阵$\boldsymbol{A}$ 的第1行表示什么意思? 如何表示商品2的销售情况以及如何表示第3季度三种商品的销售情况?

2.2 解方程组

2.2.1 阶梯形矩阵

既然要把方程组化简为一个简单的同解方程组, 下面就看看哪样的方程组比较简单, 或者说哪样的增广矩阵比较简单.根据例题2.1.12比较容易想到, 并不是方程组的未知量越少越简单, 而是说方程组里面每个方程中的未知量越少, 方程组会越简单. 特别地, 如果一个方程中只有一个未知量, 则就是方程组的解了. 准确地说有下面的定义.

定义2.2.1. *阶梯形矩阵*

如果矩阵某一行的元素不全为零, 则称为非零行. 一个$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$如果满足:

1. *全为零的行都在非零行的下面;*
2. *矩阵的每行的第一个非零元素出现在上一行的第一个非零元素的右边.*

*则称$\boldsymbol{A}$为*阶梯形矩阵.

形象一点的说法, 对于阶梯形矩阵, 可以画出一个阶梯线来, 使得线的下方全是0; 每个阶梯(台阶)只占一行, 并且阶梯线的竖线后面的第一个元素就是非零行的第一个非零元.为了叙述方便, 把非零行中的第一个非零元素称为此行的拐角元素. 举个阶梯形矩阵的例子.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵中的$*$代表任意的数, 可以为0, 也可以不为0.

☞ 拐角元素就是位于台阶拐角处的元素, 请仔细理解拐角元素的定义, 后面还要多次用到这个名词.阶梯形矩阵中的每个台阶可以长一些, 但一个台阶只能包含一行.

再举几个阶梯形矩阵的例子.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & -5 & * \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & -5 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

而矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 8 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 5 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不是阶梯形矩阵, 因为第4行的第一个非零元素5在第4列, 第3行的非零元素8也在第4列, 不满足定义中的第2个条件.或者说由于有一个台阶包含了第3, 4 两行.

下面再从方程组的角度理解一下阶梯形矩阵. 如果一个方程组的增广矩阵是阶梯形的, 则第1个条件是说$0 = 0$这种类型的方程都放在方程组的最下面了.第2个条件是说, 如果在第i个方程中, x_k是第一个系数不为0的未知量, 则下面的方程中x_k的系数都为0.或者说就不含未知量x_k. 所以阶梯形矩阵作为增广矩阵对应的方程组比较简单, 解方程组时就是用初等变换把复杂的方程组化简成这种类型的简单的方程组.

在例题2.1.12中的消元过程就是把方程组的未知量不断消去的过程.从矩阵的角度来说, 就是把增广矩阵变成阶梯形矩阵的过程. 根据上面的描述以及方程组和增广矩阵的关系, 利用归纳法可以证明

命题2.2.2. 任意矩阵都可以经过有限多次行初等变换化成阶梯形矩阵. ■

考虑到增广矩阵为阶梯形的方程组还可以进一步的化简. 参考例题2.1.12中的过程.如果在第i个方程中, x_k是第一个系数不为0的未知量, 则其余的方程加上第i个方程的适当的倍数, 可以使其它的所有方程中x_k的系数都为0. 也就是只有第i个方程中含有未知量x_k, 这种方程组对应的矩阵更为简单.

定义2.2.3. 简化阶梯形矩阵

如果阶梯形矩阵的非零行的第一个非零元素是1,并且此非零元素所在列的其余元素都是0,则称为简化阶梯形矩阵.

下面几个是简化阶梯形矩阵的例子.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

同样地, 根据方程组和增广矩阵的关系, 对于简化阶梯形矩阵有

定理2.2.4. *任意矩阵都可以经过有限多次行初等变换化成简化阶梯形矩阵.* ■

现在可以总结解方程组的步骤:

1. 解线性方程组的步骤

1. *写出方程组对应的增广矩阵*
2. *用行初等变换把增广矩阵化成简化阶梯形矩阵*
3. *写出简化阶梯形矩阵对应的简单的方程组*
4. *求出此简单的方程组的解, 从而得到原方程组的解*

现在还有两个细节问题没有解决.一是具体解方程组时, 要按照什么规则把一个矩阵化成简化阶梯形. 再就是对应于简化阶梯形矩阵的方程组如何求解.

2.2.2 方程组解的判定

为了叙述方便先介绍几个定义.

定义2.2.5. 自由未知量与固定未知量

如果一个方程组对应的增广矩阵是阶梯形的, 并且此方程组有解, 则拐角元素所在的列对应的未知量称为固定未知量, 其余的未知量称为自由未知量.

☞ 一般在方程组有解时才谈论自由未知量和固定未知量.

例如方程组$\begin{cases} x_1 \quad\quad + 2x_3 = 2 \\ \quad\quad x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ 对应的增广矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, 拐角元素1, 1在第1, 2列, 所以$x_1, x_2$是固定未知量, x_3是自由未知量. 这个方程组的

解是

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t \\ x_2 = 3 - 3t \\ x_3 = t \end{cases}.$$

可以看到, x_3可以取任意数值, 所以称为自由未知量, 当x_3取定一个数t之后, x_1, x_2就完全由t决定了, 不能有别的选择, 所以称为固定未知量.

下面具体求解几个方程组.

例2.2.6. 设下面的简化阶梯形矩阵分别是对应的方程组的增广矩阵, 写出每个方程组并求其解.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解: 矩阵$\boldsymbol{A}$ 对应的方程组为:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 7 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

每个未知量都是固定未知量, 都有唯一的值, 因此方程组有唯一解

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 7.$$

矩阵$\boldsymbol{B}$ 对应的方程组为:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases},$$

由于最后一个方程出现了矛盾方程$0 = 1$,因此方程组无解.

矩阵$\boldsymbol{C}$ 对应的方程组为:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \qquad + 4x_4 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases},$$

x_2, x_4是自由未知量, 在每个方程中, 把固定未知量用自由未知量表示出来, 得

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3x_2 - 4x_4 \\ x_3 = 1 + 5x_4 \end{cases},$$

自由未知量x_2, x_4取定数值后, 固定未知量x_1, x_3就可以得到相应的数值, 所以方程组有无穷多解. 并且此方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 &=& 2 &+& 3s &-& 4t \\ x_3 &=& 1 &+& 5t \\ x_2 &=& s \\ x_4 &=& t \end{cases}.$$

■

这个含有任意常数s, t的解称为方程组的通解, 通常把s, t称为参数. 特别地, 如果取$x_2 = 1, x_4 = 0$就得到方程组的一个解

$$x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0,$$

称为方程组的特解.

☞ 方程组无解或有唯一解都可以方便地表示, 比较麻烦的是有无穷多解的情况, 这时令自由未知量为任意常数, 把固定未知量用自由未知量表示出来, 就得到方程组的通解了.

从上面的例子可以看出, 一个简化阶梯形矩阵对应的方程组有解无解的关键是有没有矛盾方程出现, 即有没有出现$0 = 1$这样的方程, 也就是拐角元素是否出现在最后一列. 而且, 如果有解的话, 当不全为0的方程的个数小于未知量的个数时, 这时就有自由未知量, 从而方程组有无穷多解, 否则所有的未知量都是固定未知量, 此时方程组有唯一解.总之, 有下面的定理.

定理2.2.7. 方程组有没有解的判定

设方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵, $\boldsymbol{b}$是常数项, 设$\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$是增广矩阵, $\tilde{\boldsymbol{A}}$经过行初等变换化成简化阶梯形矩阵$\boldsymbol{R}$. 则方程组有解的充要条件是$\boldsymbol{R}$中的拐角元素不出现在最后一列. ■

方程组有解时, 如果所有未知量都是固定未知量, 此时方程组有唯一解. 又由于拐角元素的个数等于固定未知量的个数, 所以有

定理2.2.8. 方程组有唯一解的判定

条件同上, 则方程组有唯一解的充要条件是$\boldsymbol{R}$中的拐角元素不出现在最后一列, 并且拐角元素的个数等于未知量的个数. ■

如果出现了自由未知量, 自由未知量取不同的值, 方程组就会有不同的解, 所以有

定理2.2.9. 方程组有无穷多解的判定

条件同上, 则方程组有无穷多解的充要条件是$\boldsymbol{R}$中的拐角元素不出现在最后一列, 并且拐角元素的个数小于未知量的个数. ■

☞ 这里把方程组解的判定情况归结为简化阶梯形矩阵的拐角元素出现的位置以及个数, 比较直观, 后面会用更为数学化的语言来描述这些情况.

对于齐次方程组来说, 由于它对应的增广矩阵的最后一列总为零, 所以拐角元素不会出现在最后一列, 由定理2.2.7知道齐次方程组总有解. 事实上, 每个未知量都为零就是它的一个解, 通常称为零解. 如果齐次方程组有无穷多解, 此时方程组除了零解之外含有非零解.

☞ 一般不说齐次方程组有无穷多解, 而是说此时方程组有非零解.

推论2.2.10. 如果齐次方程组的方程的个数小于未知量的个数, 则齐次方程组一定有非零解.

证明: 设$\widetilde{\boldsymbol{A}}$是齐次方程组的增广矩阵, 由于方程的个数小于未知量的个数, 所以$\widetilde{\boldsymbol{A}}$的非零行的个数也小于未知量的个数, 从而它化成的简化阶梯形矩阵的拐角元素的个数要小于未知量的个数, 由定理2.2.9知道方程组有无穷多解, 从而有非零解. ■

2.2.3 把矩阵化为简化阶梯形矩阵

和解方程组相对应, 就有

2. 把矩阵化为简化阶梯形的步骤

1. 从左向右确定第一个不全为0的列, 设为第i列
2. 如果需要, 可以交换第一行和其它行, 使得第一行的第i列的数不为0
3. 把第一行的适当的倍数加到下面的行上, 使得这些行的第i列为0
4. 不考虑第一行, 从第二行开始, 在剩下的矩阵中重复$1-3$步, 直到化成阶梯形矩阵为止
5. 继续化简, 把拐角元素所在列的其它行的元素都变成0
6. 每一行乘上相应的数, 把拐角元素变为1

☞ 上面的过程简单记为“从左到右, 从上到下”.

例2.2.11. 用行初等变换把矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

化成简化阶梯形矩阵.

解:

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+4r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_4]{r_2+2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}r_4]{-r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

最后给出一个完整的解方程组的例子.

例2.2.12. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

解: 用矩阵表示, 并做如下变换

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -8 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix};$$

继续使用矩阵的3种行初等变换得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+8r_3]{r_1-3r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

把最后一个增广矩阵对应的方程组写出来, $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ 就是原方程组的解. ■

至此, 对于一个方程组, 总可以用上面的方法求解, 似乎问题已经很好的解决了. 不过仔细想一想发现还有问题, 如果方程组有无穷多解, 我们得到的是不是所有的解呢? 方程组这些不同的解之间有没有关系? 所以下一步是继续介绍一些新的概念和工具, 可以帮助我们更好的回答这两个问题.

****

内容小结

本节我们学习了

- **阶梯形矩阵**. 阶梯形矩阵是一类特殊的矩阵, 对应于一类比较简单的方程组.

- **方程组解的判断**. 方程组解的情况完全由阶梯形矩阵中拐角元素出现的位置和个数等简单的参数决定.

- **解方程组的一般步骤**. 把矩阵化为阶梯形遵循从左到右, 从上到下的简单原则, 这也同时总结了高斯消元法的步骤.

****

习题2.2

1. 判断下列矩阵哪些是阶梯形矩阵, 哪些不是?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 用行初等变换把第1题中的矩阵化成简化阶梯形矩阵.

3. 若第1题中的矩阵为方程组对应的增广矩阵, 求方程组的解.

4. 请写出满足要求的3×4矩阵. 不是阶梯形的矩阵;简化阶梯形矩阵; 是阶梯形不是简化阶梯形的矩阵.

5. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 是否可以用行初等变换把矩阵$\boldsymbol{B}$ 变为$\boldsymbol{A}$?

6. 证明如果可以用一系列行初等变换把矩阵$\boldsymbol{B}$ 变为$\boldsymbol{A}$, 则也可以用行初等变换把矩阵$\boldsymbol{A}$ 变为$\boldsymbol{B}$.

7. 若下面的简化阶梯形矩阵分别是对应的方程组的增广矩阵, 写出每个方程组;

如果有自由未知量, 确定每个方程组中哪些变量是自由未知量; 并求方程组的解.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0&4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&0&2&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

8. 分别给出满足下述条件的方程组的例子

(1) 无解的非齐次方程组;
(2) 有唯一解的非齐次方程组;
(3) 有无穷多解的非齐次方程组;
(4) 有非零解的齐次方程组;
(5) 只有零解的齐次方程组.

9. 用加减消元法解下列方程组

$$(1)\begin{cases}x_1+2x_2=-1\\2x_1+2x_2=1\\3x_1+4x_2=1\end{cases};\ (2)\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4\\2x_1+x_2+x_3=3\\3x_1+2x_2-x_3=1\end{cases};\ (3)\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0\\4x_1+2x_2+2x_3=0\\-2x_1+5x_2-4x_3=0\end{cases}.$$

10. 参数k取何值时, 方程组

$$\begin{cases}x+y=2\\2x-ky=3\end{cases}$$

有唯一解; 无解?

11. 证明方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$$

如果有两个不同的解, 就一定有无穷多解.

12. 一条抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点$P(1,2),Q(-1,3)$和$R(-4,5)$. 请写

出a,b,c满足的方程组并求出此抛物线.

13. 一个投资者想把1万元投资给三种股票a_1,a_2,a_3,预计得到的利润分别为$12\%,15\%,22\%$, 如果投给a_2的钱是投给a_1的钱的两倍, 他想得到1720元的利润, 那么应当分别给a_1,a_2,a_3投资多少?

2.3　矩阵的线性运算和乘法

对于一个方程组, 在前面已经介绍了它的系数矩阵和增广矩阵.其实矩阵还有更多的其它应用.所以本节开始专门介绍矩阵的运算法则、性质等.

根据定义, 矩阵是一些数按照一定的规则排列在一起形成的矩形数表. 如果没有特别地说明, 要求矩阵的元素都是实数.

首先罗列一些特殊的矩阵.

1. 一个1×1矩阵$\boldsymbol{A}=(a)$其实就是一个数.

2. 一个$1\times n$矩阵$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为行矩阵, 也叫n维行向量.

3. 一个$n\times 1$矩阵$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为列矩阵, 也叫$n$维列向量. n维行向量和n维列向量都简称n维向量. 这说明矩阵是数和向量的推广.

4. 一个$n\times n$矩阵称为n阶方阵. 元素$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$形成矩阵的主对角线.

5. 一个所有元素都是0的$m\times n$矩阵称为零矩阵, 记作$\boldsymbol{O}_{m\times n}$, 简记为$\boldsymbol{O}$.

6. n阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为n阶上三角方阵.它的主对角线下方的元素全为0, 可以表示为$i>j$时$a_{ij}=0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为n阶下三角方阵.

7. n阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为n阶对角阵, 记为$\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

8. n阶方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为n阶单位矩阵, 记为$\boldsymbol{E}_n$, 简记为$\boldsymbol{E}$.

为了比较两个矩阵是否相同, 下面定义两个矩阵相等的概念.

定义2.3.1. 矩阵的相等

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$是$m \times n$矩阵, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$是$r \times s$矩阵. 如果$m = r, n = s$且对任意的$i, j,\quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,$都有$a_{ij} = b_{ij}$则称$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相等, 记作$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

因此两个矩阵相等就是说它们有相同的行数和列数, 并且对应位置上的元素也相同.

例2.3.2. 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & r & 2 \\ s & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix}$, 且$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. 求$r, s, t$.

解: 由矩阵相等的定义得$r = 2, s = 3, t = 2$. ■

2.3.1 矩阵的加法和数乘

矩阵的加法和数乘两个运算都可以自然地定义. 若$\boldsymbol{A}$是矩阵, 用$(\boldsymbol{A})_{ij}$表示$\boldsymbol{A}$的第i行第j列的元素.

定义2.3.3. 矩阵的加法

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$是两个$m \times n$矩阵.那么矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的和$\boldsymbol{C}$, 记为$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$. 规定: $\boldsymbol{C}$仍为$m \times n$矩阵, 且

$$(\boldsymbol{C})_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

注意, 只有当两个矩阵的行数和列数都相同时, 这两个矩阵才可以进行加法运算. 根据矩阵加法的定义, 两个矩阵相加就是两个矩阵对应位置上的元素相加.由此可以推出:如果$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$是任意三个$m \times n$矩阵, 则满足

1. 交换律: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.
2. 结合律:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.
3. 设$\boldsymbol{O}$是$m \times n$零矩阵, 则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

矩阵$\boldsymbol{A}$的负矩阵仍是一个$m \times n$矩阵, 记作$-\boldsymbol{A}$. 它的元素这样规定:$(-\boldsymbol{A})_{ij}=-a_{ij}$. 利用负矩阵可以定义矩阵的减法, $\boldsymbol{A}$减去$\boldsymbol{B}$, 记作$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,规定

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}), \text{ 即 } (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.$$

这样矩阵的加法运算还满足

4. $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

例2.3.4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解: $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

同样, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. ■

定义2.3.5. 矩阵的数量乘法

设k是一个数, 矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是$m \times n$矩阵, 用k去乘$\boldsymbol{A}$的每一个元素得到的新矩阵记作$k\boldsymbol{A}$. 称为k与$\boldsymbol{A}$的数量乘法.即

$$(k\boldsymbol{A})_{ij}=ka_{ij}.$$

数与矩阵的数量乘法满足下列运算规律.设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为$m \times n$矩阵, k, l为实数, 则

1. $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.
2. $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.
3. $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$.

4. $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

☞ 由于矩阵的加法和数量乘法都是矩阵的对应元素相加或相乘, 所以矩阵的加法和数量乘法与数的加法、乘法的运算性质相同就不太奇怪了.

2.3.2 方程组解的向量表示

如果一个方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t \\ x_2 = 3 - 3t \\ x_3 = t \end{cases}.$$

让t等于任意一个数, 就会得到方程组的一个解, 所以方程组有无穷多解.重新把解用向量的形式写一写, 有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2t \\ 3-3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这样方程组的无穷多解就可以很方便地描述:是一个固定的向量, 再加上另外一个向量的倍数.从几何图形上看, 这所有的解实际上是空间中的一条直线. 所以介绍了向量、矩阵的运算之后, 方程组的解之间的联系就很明显了, 就变得很有规律. 只需要这两个向量就可以把方程组的无穷多解都表示出来, 所以求解这个方程组的问题也可以简化为求这样两个向量的问题.

为了研究问题的方便, 下面引入矩阵乘法的概念.

2.3.3 矩阵的乘法

定义2.3.6. 矩阵的乘法

设$\boldsymbol{A} = (a_{ij})$是$m \times n$矩阵, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$是$n \times s$矩阵, 则矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积$\boldsymbol{C}$, 记为$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$. 对$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times s}$, $i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, s$, 规定:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

c_{ij}是矩阵$\boldsymbol{A}$的第i行

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

与矩阵$\boldsymbol{B}$的第j列

$$\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

的对应位置上的元素乘积的和.

根据矩阵乘法的定义, 两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时, 两个矩阵才能相乘.若$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, 则

$$\boldsymbol{C}\text{的行数}=\boldsymbol{A}\text{的行数},$$
$$\boldsymbol{C}\text{的列数}=\boldsymbol{B}\text{的列数}.$$

$\boldsymbol{C}$中的元素是$\boldsymbol{A}$的一行与$\boldsymbol{B}$的一列对应相乘得到的, 例如:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{2 \quad 3 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & \boxed{11} & * \end{pmatrix}$$

其中

$$(2 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (1 \cdot 3) = 11.$$

举个矩阵乘法的例子. 假设数学课有平时成绩和期末成绩, 满分都是100分, 最后的总成绩中平时成绩占30%,期末成绩占70%. 一位同学平时成绩为90, 期末成绩为80, 设$\boldsymbol{v}_1 = (90\ 80)$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$. 则总成绩可以这样算.

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w} = (90\ 80) \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = 90 \cdot 0.3 + 80 \cdot 0.7 = 83.$$

如果另一位同学平时成绩为70, 期末成绩为90, 他的总成绩为

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{w} = (70\ 90) \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = 70 \cdot 0.3 + 90 \cdot 0.7 = 84.$$

把两个人的成绩写在一起, 根据矩阵乘法就可以这样计算两个人的总成绩:

$$\begin{pmatrix} 90 & 80 \\ 70 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 \\ 84 \end{pmatrix}.$$

下面再通过几个例子理解矩阵的乘法.

例2.3.7. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$.

解: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\times 0+0\times(-1)+4\times 1=4.$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\times 3 & 0\times 0 & 0\times 4 \\ -1\times 3 & -1\times 0 & -1\times 4 \\ 1\times 3 & 1\times 0 & 1\times 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$ ■

例2.3.8. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$求$\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$.

解: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 3\times 1+0\times 0+4\times 1 & 3\times 0+0\times(-1)+4\times 1 \\ -1\times 1+5\times 0+2\times 1 & -1\times 0+5\times(-1)+2\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1\times 3+0\times(-1) & 1\times 0+0\times 5 & 1\times 4+0\times 2 \\ 0\times 3+(-1)\times(-1) & 0\times 0+(-1)\times 5 & 0\times 4+(-1)\times 2 \\ 1\times 3+1\times(-1) & 1\times 0+1\times 5 & 1\times 4+1\times 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

在上面两个例子中, 可以发现, 矩阵的乘法中, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. 甚至矩阵$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$的行数和列数都不相同.

再看几个例子.

例2.3.9. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{AB}$.

解: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

例2.3.10. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{CB}$.

解: $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{CB}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ■

这两个例子说明, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 但是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 再有$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$, 但是$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{C}$. 综合上面几个例子, 会发现, 矩阵与矩阵相乘并“不一定”满足交换律和消去律, 且两个非零矩阵相乘, 结果可能为零矩阵, 这与以前学习的数与数相乘的规律不同, 需特别注意.

但是矩阵与矩阵的乘法仍然满足下列性质（结合律和分配律, 前提是可以相乘）:

1. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

2. $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

3. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}, \quad (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

证明: 上述性质的证明请读者自己完成. ■

对于n阶方阵$\boldsymbol{A}$, 如下定义$\boldsymbol{A}$的方幂:

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}.$$

其中k是非负整数, 由于矩阵乘法满足结合律, 就有:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l};\quad (\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}.$$

例2.3.11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}^3$.

解: 由定义

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&16\\4&8\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&16\\4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&64\\16&32\end{pmatrix}.$$

■

例2.3.12. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 证明$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{O}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}_{s\times m}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明: 直接验证即可. ■

这说明单位矩阵$\boldsymbol{E}$以及$\boldsymbol{O}$矩阵在矩阵乘法中的作用和1, 0在普通数的乘法中的作用类似.任何矩阵和$\boldsymbol{O}$矩阵相乘(能够相乘)都是$\boldsymbol{O}$矩阵, 任何矩阵和单位矩阵相乘(能够相乘)还是它自己.

☞ 矩阵的乘法除了不满足交换律、消去律, 以及两个非零矩阵相乘可能为零矩阵之外, 其余的和数的乘法规律都一样了.

2.3.4 矩阵乘法的应用

矩阵的乘法有许多应用, 先看在方程组中的应用.

例2.3.13. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$, 计算$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

解: 直接计算有$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$. ■

则方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以用矩阵的形式表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}.$$

这是线性方程组的矩阵表示.利用矩阵的乘法, 方程组就可以很简洁地表示出来.

☞ 前面说增广矩阵和方程组之间有一一对应关系, 也仅仅是一种对应关系, 没有表示出方程组中的等式和未知量. 在介绍了矩阵的乘法之后, 用$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$完全把方程组给表示出来了.

下面再看看矩阵乘法在实际生活中的应用.

例2.3.14. *某厂生产三种型号的数码相机, 第一季度的产量分别为4万台, 2万台, 3万台; 第二季度的产量分别为3万台, 1万台, 5万台, 每万台的收入分别为1500万元, 1100万元, 1300万元, 每万台的利润分别是400万元, 300万元, 500万元, 请问两个季度的收入和利润分别是多少?*

解: 第一, 二季度的收入分别是:

$$4\times1500+2\times1100+3\times1300=12100\text{万元}$$
$$3\times1500+1\times1100+5\times1300=12100\text{万元}.$$

第一, 二季度的利润分别是:

$$4\times400+2\times300+3\times500=3700\text{万元}$$
$$3\times400+1\times300+5\times500=4000\text{万元}.$$

用矩阵重新解答如下:

如果把两个季度的产量罗列在一起, 写成矩阵的形式, 得到产量矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\3&1&5\end{pmatrix}.$$

同样, 把每个型号的数码相机的单位收入与利润放在一起也可得到矩阵:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1500&400\\1100&300\\1300&500\end{pmatrix}.$$

则总收入和利润矩阵就是两者的乘积:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}12100&3700\\12100&4000\end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

2.3.5 矩阵的转置

定义2.3.15. 转置矩阵

把矩阵$\boldsymbol{A}$的行写成列而保持其元素的次序不变所得到的矩阵叫做$\boldsymbol{A}$的转置矩阵, 记作$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$或记作$\boldsymbol{A}'$. 如果

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

显然, 一个$m\times n$矩阵的转置矩阵就是一个$n\times m$矩阵.且

$$(\boldsymbol{A})_{ij}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{ji},\quad i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n.$$

例如$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

矩阵的转置也是一种运算, 满足下列运算规律:

1. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
4. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明: 请读者自己验证上面的性质. ■

例2.3.16. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法一

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix},$$

所以$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

解法二

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$ ■

定义2.3.17. 对称矩阵与反对称矩阵

n阶方阵$\boldsymbol{A}$如果满足$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 则称为对称矩阵; 如果$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 则称为反对称矩阵.

由定义可知, 如果$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是对称矩阵, 则$a_{ij}=a_{ji}$; 如果$\boldsymbol{A}$是反对称矩阵, 则$a_{ij}=-a_{ji}$. 因此$a_{ii}=0$.

例2.3.18. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\a&1&4\\b&c&1\end{pmatrix}$是对称矩阵, 求$a,b,c$.

解: 根据对称矩阵的定义, 有$a=2,b=3,c=4$. ■

例2.3.19. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 证明$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$都是对称矩阵.

证明: 因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是$n$阶方阵, 且

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}.$$

由定义知$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$是对称矩阵. 同理可证$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$也是对称矩阵. ■

****

内容小结

本节我们学习了

- **矩阵的线性运算**. 矩阵之间的加法和数乘类似向量的加法和数乘.
- **矩阵的乘法**. 矩阵的乘法不满足交换律和消去律..
- **矩阵的转置与对称矩阵**.

****

习题2.3

1. 举例说明下列命题错误:

   (1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

   (2) 若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

   (3) 若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$;

   (4) 若$\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{AY}$, 且$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, 则$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Y}$.

2. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&1\\3&4&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$, 计算

   (1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, $2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{B}$, $3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}$;

   (2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

3. 计算下列各题

$$(1)\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix},\ (2)\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ (3)\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^n,$$

$$(4)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\ (5)\begin{pmatrix}x_1&x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ (6)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n.$$

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$, 问下列等式是否成立?

   (1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

   (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

   (3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

5. 设$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}, n$是正整数, 证明:

   (1) $(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n$.

   (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}^{n-i}$, 其中$\binom{n}{i}$是二项式系数.

6. 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵, 证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是对称矩阵, $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$是反对称矩阵.

7. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n$阶矩阵, 且$\boldsymbol{A}$是对称矩阵, 证明$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$也是对称矩阵.

8. 证明两个对角矩阵的和与差仍是对角矩阵.

9. 证明两个上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵.

2.4 分块矩阵

在矩阵的研究中, 有时为了更有效地处理矩阵, 人们往往将矩阵分成若干小矩阵块进行研究.

2.4.1　分块矩阵的概念

分块矩阵顾名思义, 就是把矩阵分块, 利用横线和竖线把一个大矩阵分成若干个小矩阵.

☞ 把矩阵分成若干个小块后, 会使得矩阵的计算和描述更方便.

对矩阵有不同的分块方法, 例如

$$\boldsymbol{A}_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix},$$

以下几种方法构成不同的分块矩阵.

1. 按选定的横线和竖线分块

$$\boldsymbol{A}_{3\times 4}=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24}\\ a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}.$$

2. 按列分块

$$\boldsymbol{A}_{3\times 4}=\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right)=(\boldsymbol{A}_1\ \ \boldsymbol{A}_2\ \ \boldsymbol{A}_3\ \ \boldsymbol{A}_4),$$

这里$\boldsymbol{A}_i$表示$\boldsymbol{A}$的第i列.

3. 按行分块

$$\boldsymbol{A}_{3\times 4}=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3\end{pmatrix},$$

这里$\boldsymbol{B}_i$表示$\boldsymbol{A}$的第i行.

4. 当n阶矩阵$\boldsymbol{A}$中非零元素都集中在主对角线附近, 有时可以分成下列的分

块对角矩阵(又称准对角阵)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}.$$

例如$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$,

其中$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, 没有写出的子块默认为$\boldsymbol{O}$矩阵.

一般的矩阵大体上也按照上面的方法分块.

2.4.2 分块矩阵的运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相似.在可以运算的前提下, 把每一个小分块矩阵当作矩阵中的一个元素进行运算.具体来说.

1. 分块矩阵的加法和数乘

设有两个$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, 对它们进行相同的分块:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}+\boldsymbol{B}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2}+\boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st} \end{pmatrix};$$

$$\lambda \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \boldsymbol{A}_{11} & \lambda \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{1t} \\ \lambda \boldsymbol{A}_{21} & \lambda \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \boldsymbol{A}_{s1} & \lambda \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \lambda \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix}.$$

2. 分块矩阵的乘法

设有两个矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times s}$, 对$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$分块, 使得$\boldsymbol{A}$的列的分块法与$\boldsymbol{B}$的行的分块法相同

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{p1} & \boldsymbol{A}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pt} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1q} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{t1} & \boldsymbol{B}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tq} \end{pmatrix},$$

即$\boldsymbol{B}$的块行数等于$\boldsymbol{A}$的块列数.如果$\boldsymbol{A}_{ik}$的列数等于$\boldsymbol{B}_{kj}$的行数, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12} & \cdots & \boldsymbol{D}_{1q} \\ \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22} & \cdots & \boldsymbol{D}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{D}_{p1} & \boldsymbol{D}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{D}_{pq} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{ij} = \boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j} + \boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j} + \cdots + \boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj} = \sum_{k=1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

☞ 把矩阵进行分块的原则简单说就是分完后能够进行运算, 并且使计算更为简洁、方便.

例2.4.1. 用分块矩阵计算$\boldsymbol{AB}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解: 把$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分块成

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{EO} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{EE} \\ \boldsymbol{OB}_{11} + 2\boldsymbol{EO} & \boldsymbol{OB}_{12} + 2\boldsymbol{EE} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

■

3. 分块矩阵的转置

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st} \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

2.4.3 分块矩阵的应用

设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$阶矩阵, $\boldsymbol{B}$是$n \times s$ 阶矩阵, 如果把$\boldsymbol{B}$ 按列分块就有:

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \cdots\ \boldsymbol{B}_s),$$

这里$\boldsymbol{B}_i$表示$\boldsymbol{B}$的第i列. 则乘积

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \cdots\ \boldsymbol{B}_s) = (\boldsymbol{AB}_1\ \boldsymbol{AB}_2\ \cdots\ \boldsymbol{AB}_s).$$

☞ 请记住这个结论, 后面要经常用到.

下面讨论单位矩阵的分块.将n阶单位矩阵$\boldsymbol{E}_n$按列分块, 则

$$\boldsymbol{E}_n = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n).$$

其中

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{第}i\text{行}$$

是$\boldsymbol{E}_n$的第i列, 这个列向量$\boldsymbol{e}_i$只有第i行的数是1, 其余位置的数全为0. 也可以将$\boldsymbol{E}_n$按行分块, 则有

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

例2.4.2. 设$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1 \ \ \boldsymbol{A}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{A}_n)$, 其中$\boldsymbol{A}_i$是$\boldsymbol{A}$的第$i$列, 又设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n \end{pmatrix}$,其中$\boldsymbol{B}_i$是$\boldsymbol{A}$的第$i$行, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{A}_j, \quad \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}_i, \quad \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j = a_{ij}.$$

证明: 根据矩阵乘法直接计算即得, 请读者验证. ■

☞ 这个例子说明矩阵和一个特殊的行向量或列向量相乘就可以得到此矩阵的某一行或某一列, 想得到矩阵的第i行第j列的数a_{ij}也可以用矩阵的乘法做到.

例2.4.3. 设$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵, 如果对任意的$n \times 1$矩阵$\boldsymbol{x}$都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,证明$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

证明: 选取$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i, i = 1, 2, \cdots, n$,则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{0}$. 所以$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. ■

例2.4.4. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

证明: 把$\boldsymbol{A}$按列分块有$\boldsymbol{A}=(\mathbf{0},\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, 所以

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\mathbf{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2)=(\mathbf{0},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)=(\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{e}_1).$$

因此

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}(\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{e}_1)=(\boldsymbol{A}\mathbf{0},\boldsymbol{A}\mathbf{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{O}.$$ ■

例2.4.5. 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{AB}$.

解: $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$按列分块有$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\lambda_2\boldsymbol{e}_2,\lambda_3\boldsymbol{e}_3)$, 所以

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\lambda_2\boldsymbol{e}_2,\lambda_3\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{A}\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{A}\lambda_2\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{A}\lambda_3\boldsymbol{e}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{A}_1,\lambda_2\boldsymbol{A}_2,\lambda_3\boldsymbol{A}_3).$$

这说明一个矩阵右边乘上一个对角矩阵得到的结果, 其实是原矩阵的每一列分别乘上对角矩阵对应对角线上的元素而组成的矩阵. ■

☞ 上面两个例子都可以推广到一般情况, 请自己尝试一下. 并且这种把矩阵按列分块进行计算的方法后面还经常使用, 请仔细体会.

例2.4.6. 把向量方程

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$$

写成线性方程组的形式.

解: 按照矩阵的数乘和加法, 原式变为

$$\begin{pmatrix}k_1+7k_2+2k_3\\2k_1+k_2+k_3\\6k_1+k_2+3k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}.$$

写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

☞ 这个例题说明线性方程组可以写成向量方程的形式; 向量方程也可以写成线性方程组的样子.

* *

内容小结

本节我们学习了

- ■ **分块矩阵**. 对矩阵进行分块的目的是为了提高效率. 其中较为重要的是按列分块. 后面会多次用到.

* *

习题2.4

1. 利用分块矩阵的乘法计算$\boldsymbol{AB}$,其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 设$\boldsymbol{A}$是2阶方阵, 按列分块为$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$, 证明$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$,且

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$

3. 设$\boldsymbol{A}$为$m \times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$是$n \times s$矩阵, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$是$m \times s$矩阵. 按照不同分块方

式, 计算乘积并说明矩阵$\boldsymbol{C}$的元素是如何得到的.

(1) $\boldsymbol{A}$按行分块, $\boldsymbol{B}$按列分块;

(2) $\boldsymbol{A}$不分块, $\boldsymbol{B}$按列分块;

(3) $\boldsymbol{B}$不分块, $\boldsymbol{A}$按行分块.

4. 设$\boldsymbol{A}$为$m \times n$矩阵, $\boldsymbol{B}$是$n \times s$矩阵, $\boldsymbol{X}$为$n \times 1$矩阵, 证明$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$的充要条件是$\boldsymbol{B}$的每一列都是齐次方程组$\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$的解.

第三章　行列式与矩阵

****

本章主要内容：

- ▶ 行列式的性质与计算
- ▶ 逆矩阵与克莱姆法则
- ▶ 矩阵的秩与方程组解的判断
- ▶ 初等变换

****

行列式是一个重要的数学工具, 不仅在数学中有广泛的应用, 在其它学科中也经常遇到.

历史上, 最早使用行列式概念的是17世纪的德国数学家莱布尼兹, 后来瑞士数学家克莱姆于1750年发表了著名的用行列式解线性方程组的克莱姆法则.首先将行列式的理论脱离开线性方程组的是数学家范德蒙, 1772年他对行列式做出了连贯的逻辑阐述, 法国数学家柯西于1841年首先创立了现代的行列式概念和符号, 包括行列式一词的使用, 但他的某些思想和方法是来自高斯的. 在行列式理论的形成与发展的过程中做出过重大贡献的还有拉格朗日、维尔斯特拉斯、西尔维斯特和凯莱等数学家.

3.1　行列式

前面学习了如何解一般的线性方程组, 现在换一个角度看这个问题. 一元二次方程有求根公式, 方程组是否也有求解的公式呢? 为了回答这个问题, 先从2元方程组开始.

3.1.1　2元线性方程组与2阶行列式

用加减消元法解2元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

为消去第一个方程中的未知量 x_2 , 以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端, 然后两个方程相减, 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

类似地消去 x_1 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 得到方程组的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

方程组的这个解形式比较复杂, 不容易记住, 也不便推广到 n 元线性方程组中去, 更难从中找出规律. 为了方便记忆, 下面引入行列式的概念.

定义3.1.1. 2阶行列式

$$设\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

是2阶矩阵, 表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式, 并记做$|\boldsymbol{A}|$或$\det(\boldsymbol{A})$, 或者

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2阶矩阵对应的行列式就称为2阶行列式.

例3.1.2. 计算矩阵$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$的行列式.

解: $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1) \times 3 = 13,\quad \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2.$ ■

☞ 需要注意矩阵和行列式的联系和区别. 矩阵是一些数按某种规律排列在一起, 是一个整体. 行列式则是由矩阵的这些数按照某种规则得到的一个数.

利用2阶行列式的概念, 2元线性方程组的解可以写成如下的形式:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

可以看出, 方程组的解中的每个未知量都等于一个分数, 分子分母都是某个行列式, 其中分母 D 是由方程组的系数所确定的2阶行列式（称系数行列式）, x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得到的2阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得到的2阶行列式.

上述结论称为2元线性方程组的克莱姆法则.可以看出上述表达式不仅简单而且方便记忆, 那么n元线性方程组是否有上述简单的计算公式呢? 答案是肯定的, 后面再来解决这个问题.

3.1.2 n阶行列式

下面用递推的方法给出 n 阶行列式的定义.

定义3.1.3. n 阶行列式

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是n 阶矩阵, 其行列式是一个数, 简称为n 阶行列式, 记作$|\boldsymbol{A}|$或$\det(\boldsymbol{A})$, 也直接记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

它如下递推地定义:

当$n=1$ 时, $|\boldsymbol{A}|=|a_{11}|=a_{11}$;

当$n\geq 2$ 时,

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}.$$

按照定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,|a_{22}|-a_{12}\,|a_{21}|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

正好和前面2阶行列式的定义相同.而且2阶行列式是两个1阶行列式的交错和(系数一正一负).

例3.1.4. 计算$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$的行列式.

解: $|\boldsymbol{A}|=1\times(-1)^{(1+1)}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$
$+3\times(-1)^{(1+3)}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-58.$ ■

3阶行列式是3个2阶行列式的交错和, 同样n阶行列式是n个$n-1$ 阶行列式的交错和. 注意每个$n-1$阶行列式都是在原来的行列式的基础上划去第一行和某一列剩下的数组成的.

行列式的定义形式虽然有规律, 却不好记忆. 为了简化上述行列式的定义, 介绍两个概念.

定义3.1.5. 余子式与代数余子式

在 n 阶矩阵中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 留下来的元素按原来的次序构成的一个 $n-1$ 阶矩阵的行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij};

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

在上述定义的基础上, n 阶行列式可写为:

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{A}_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

☞ 有了代数余子式的概念和记号, 行列式的定义写起来就比较简洁了, 不过大家不要忘了这些抽象的记号的含义.

例3.1.6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4\\ 0 & 2 & -1\\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, 求$a_{21}$, a_{22} 的余子式及代数余子式.

解: 根据定义

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 3 & -4\\ 4 & -3 \end{vmatrix}=7, \qquad \boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-7,$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -4\\ -5 & -3 \end{vmatrix}=-23, \qquad \boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=-23.$$

■

例3.1.7. 求下三角矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$的行列式.

解: 由行列式的定义得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

■

例3.1.8. 求行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解: 对于这样4阶行列式, 现在的方法只有按照定义求解.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 17 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -306.$$ ■

3.1.3 拉普拉斯展开定理

从前面几个例题可以看出, 如果第一行 “零” 比较多, 那么计算就相当的简单, 如果第一行 “零” 不多, 但是其它行或者列 “零” 比较多的时候, 是否能利用其它行或者列 “零”多的特点来进行计算呢? 下面来介绍一个著名的定理.

定理3.1.9. 拉普拉斯展开定理

n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式

乘积之和.即

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\text{或 } |\boldsymbol{A}| = a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}, \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

这种计算行列式的方法分别称为按第i行展开, 按第j列展开.

证明: 定理的证明请参考文献[**?**]. ■

根据拉普拉斯定理, 重新计算上面的例题.

例3.1.10. 按第2列展开求行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$

解: 根据定理3.1.9, 按第2列展开得到

$$D = -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \times 29 = -58.$$ ■

例3.1.11. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 17 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解: 对于这个4阶行列式, 首先按照最后一列展开

$$D = 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

针对上面的3阶行列式按最后一行展开

$$D = 3\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 17 \end{vmatrix} = -306.$$ ■

例3.1.12. 计算上三角矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解: 每次都按照第一列展开得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \qquad \blacksquare$$

☞ 一般的矩阵的行列式并不容易求出, 但是对于上三角或下三角矩阵来说, 它们的行列式等于主对角线上元素的乘积.

可以看出, 根据拉普拉斯定理, 按照 “零” 较多的行或者列进行展开, 能够大大简化计算. 如果行列式中的元素零不多, 可以按照一些规则创造一些零, 这需要利用行列式的性质.

3.2 行列式的性质与计算

3.2.1 行列式的主要性质

一般地, 按照行列式的递推定义来计算 n 阶行列式, 通常是很繁琐的. 所以有必要来研究行列式的性质, 利用这些性质可使行列式的计算简化. 行列式的主要性质有下面3条, 证明请参考附录.

性质3.2.1. 行列式一行或一列的倍数可以提到行列式外面

行列式一行（列）的公因子可以提出去, 或者说用一个数乘行列式的一行

（列）相当于用这个数乘此行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质3.2.2. 行列式某行（列）加上另一行（列）的倍数, 行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质3.2.3. 交换行列式的两行（列）, 行列式改变符号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式上面的性质也是行列式的运算, 和矩阵的3种初等变换对应. 这3个性质常常用来化简一个行列式. 前面证明了上(下)三角矩阵的行列式等于主对角线上元素的乘积, 所以计算一个一般的行列式, 常用的方法是用行列式的这3个性质把要求的行列式化成一个上(下)三角行列式. 或者把行列式的某一行(列)化出尽可能多的零, 然后从行列式的定义出发求出行列式的值.

例3.2.4. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 427 & 327 \\ 5 & 543 & 443 \\ 7 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

解:

$$D \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & 100 & 327 \\ 5 & 100 & 443 \\ 7 & 100 & 621 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\div 100} 100\begin{vmatrix} 4 & 1 & 327 \\ 5 & 1 & 443 \\ 7 & 1 & 621 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-r_1]{r_3-r_1} 100\begin{vmatrix} 4 & 1 & 327 \\ 5 & 0 & 443 \\ 7 & 0 & 621 \end{vmatrix} = 100\times 1\times(-1)^{(1+2)}\begin{vmatrix} 1 & 116 \\ 3 & 294 \end{vmatrix} = 5400. \quad ■$$

例3.2.5. 求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

解:
$$D \xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-r_1}]{r_2+5r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 14 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_3]{r_2+3r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 28. \quad ■$$

例3.2.6. 计算$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}.$

解:
$$D \xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4.$$

■

例3.2.7. 计算n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解: 这个行列式的特点是每列(行)元素的和均相等, 根据行列式的性质, 把第$2, 3, \ldots, n$列都加到第1列上, 行列式不变, 得

$$D = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

■

☞ 计算行列式一般是用上面的3条性质, 把原来的行列式变成上三角或下三角行列式.

根据行列式的性质, 容易得到

性质3.2.8. 行列式两行(两列)对应元素相同, 则此行列式为零. ■

推论3.2.9. 行列式中如果有两行(列)元素成比例, 则此行列式为零 ■

例如$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}$. 由于第1列和第3列对应成比例, 所以此行列式为0.

性质3.2.10. 一个行列式可以拆分成两个行列式的和, 这两个行列式的某对应行(列)上相同位置的元素之和, 等于原行列式的对应位置的元素, 而其它行(列)的元素都与原行列式相同.

证明见附录.

例如$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+b_1' & b_2+b_2' & b_3+b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.
这是由于$(b_1+b_1', b_2+b_2', b_3+b_3') = (b_1, b_2, b_3) + (b_1', b_2', b_3')$,根据性质3.2.10即得.

例3.2.11. 证明范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j).$$

证明: 用数学归纳法.

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, 所以$n=2$时结论成立.

现假设$n-1$时结论成立, 下证n时结论也成立:因为

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_2 - x_1 r_1}]{\substack{r_n - x_1 r_{n-1} \\ r_{n-1} - x_1 r_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2\cdots} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j) \quad = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

所以命题成立. ■

3.2.2 矩阵的行列式运算性质

下面是行列式的其它的比较重要的性质.

性质3.2.12. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为两个$n$阶方阵, 则

1. $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$.
2. $|k\boldsymbol{A}| = k^n\,|\boldsymbol{A}|$.
3. $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

证明: 第1个证明在后面一章介绍. 第3个用拉普拉斯展开定理, 对行列式的阶数用数学归纳法即可证明, 请读者自行补充.这里只证明第二个性质.

$$设\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, 则k\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix},$$

$$|k\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= k^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

■

例3.2.13. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是3阶矩阵, 且$|\boldsymbol{A}| = 2, |\boldsymbol{B}| = 5$,求$|7\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$.

解: $|7\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = 7^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = 7^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 10 \cdot 7^3$. ■

习题3.2

1. 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 计算$|\boldsymbol{A}|, |\boldsymbol{3A}|, |\boldsymbol{AB}|, |\boldsymbol{BA}|, |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

2. 计算下列行列式:

$$
(1) \begin{vmatrix} \sqrt{a} & 1 \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}, (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}, (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.
$$

3. 计算下列行列式:

$$
(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \ (2) \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & w & 0 & u \end{vmatrix}.
$$

4. 证明

$$(1)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b).$$

5. 计算下列n阶行列式:

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},\ (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

6. 计算行列式

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3x \end{vmatrix}$$

中x^4, x^3的系数, 由此你能发现什么结果? 用你的结论, 不计算行列式直接得到行列式

$$g(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 2 \\ x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中x^4的系数.

7. 证明奇数阶反对称矩阵的行列式一定等于零.

8. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, 计算$|\boldsymbol{AB}|, |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

3.3 逆矩阵

3.3.1 逆矩阵的定义

在第一章学习了对于一个具体的方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

通过行初等变换如何求解, 但是这个解方程组的过程比较繁琐, 也不怎么直接.下面看看还有没有更为直接的解方程组的办法. 先看最简单的情况.

设a, b是实数且$a\neq 0$, 则一元一次方程

$$ax=b$$

的解为

$$x=a^{-1}b.$$

为了便于推广, 把上面解方程的过程详细写一下:

$$ax=b\Rightarrow a^{-1}ax=a^{-1}b\Rightarrow x=a^{-1}b.$$

这里, 关键的步骤是在方程的两边同时乘上a的倒数a^{-1},由于

$$a^{-1}a=1.$$

这样一来就可以把x前面的系数a消去, 从而得到方程的解.类似地, 对于一般的方程组, 如果也有一个类似的矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$,等式两边同乘, 就消去$\boldsymbol{x}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$, 从而得到方程的解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b},$$

那么就能直接得到方程组的解.其实, 在某些情况下上述说法是对的.这需要引入逆矩阵的概念.

定义3.3.1. 逆矩阵

对n阶方阵$\boldsymbol{A}$, 如果存在n阶方阵$\boldsymbol{B}$, 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称$\boldsymbol{A}$为可逆(非奇异)矩阵, $\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.否则称$\boldsymbol{A}$为不可逆(奇异)矩阵.有时简单的把逆矩阵$\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的逆.

特别地, 如果$n=1$,此时的矩阵就是一个数, 按照定义, 它的逆矩阵就是这个数的倒数.所以逆矩阵的概念是数的倒数的推广.

对于逆矩阵的概念有几点要注意.首先, 只有对方阵才讨论它可逆不可逆.其次, 如果$\boldsymbol{A}$可逆, 那么它的逆矩阵也是同阶方阵. 最后, 如果$\boldsymbol{A}$可逆, 那么它的逆矩阵是唯一的. 这是由于: 假设$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$都是$\boldsymbol{A}$的逆矩阵, 则根据逆矩阵的定义得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{EC}=\boldsymbol{C}.$$

所以逆矩阵是唯一的, 以后就把$\boldsymbol{A}$的这个唯一的逆矩阵记作$\boldsymbol{A}^{-1}$.

例3.3.2. 证明矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$的逆矩阵.

证明: 直接验证得:

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

根据逆矩阵的定义得$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的逆矩阵. ■

例3.3.3. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

解: 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{A}$的逆, 则有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\a+2c&b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

所以有:

$$\begin{cases} a+\ \ c=1 \\ b+\ \ d=0 \\ a+2c=0 \\ b+2d=1 \end{cases}.$$

解得$a=2,b=-1,c=-1,d=1$. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

验证知道$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$, 所以$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$的逆矩阵. ■

例3.3.4. 求方程组

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2=1 \\ x_1+2x_2=2 \end{cases}$$

的解.

解: 把上面的方程组写成矩阵的形式为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ■

3.3.2 矩阵可逆的充要条件

如果方程组的系数矩阵是可逆矩阵, 则可以用逆矩阵把方程组的解表示出来, 并且方程组的解是唯一的.但是并不是所有方阵都是可逆的. 比如

例3.3.5. 证明矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$不可逆.

证明: 假设可逆, 设逆矩阵为$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.则根据逆矩阵的定义要有

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} = 1 \\ a_{12} + a_{22} = 0 \\ 2a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 2a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}.$$

这个方程组显然无解, 所以原矩阵不可逆. ■

☞ 从上面的例子可以看出, 不能简单通过矩阵是否是零矩阵来判断可逆性.

命题3.3.6. 代数余子式的组合

矩阵的某行(列)元素与本行(列)元素的代数余子式乘积之和等于该矩阵的行列式; 某行(列)元素与另一行(列) 元素的代数余子式乘积之和等于零.

用公式表示为:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\boldsymbol{A}_{j\,k} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k\,i}\boldsymbol{A}_{k\,j} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}.$$

证明: 这里只证明当$i\neq j$ 时, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{A}_{jk} = a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2}+\ldots+a_{in}\boldsymbol{A}_{jn}=0$, 其它结论可以类似地证明.

构造行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ r_i \\ \\ r_j \\ \\ \\ \end{matrix}$, 由于行列式$D$的第$i$行与第$j$行相同, 根据性质3.2.8可得, $D=0$.

对于行列式D按照第j行展开可以得到:

$$D=a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2}+\ldots+a_{in}\boldsymbol{A}_{jn},$$

综上, 命题得证. ■

定义3.3.7. 伴随矩阵

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是一个$n$阶方阵, $\boldsymbol{A}_{ij}$是元素a_{ij}的代数余子式, 则矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n1} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1n} & \boldsymbol{A}_{2n} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵.

注意$\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}_{ij})^{\mathrm{T}}$, 伴随矩阵的元素是矩阵$\boldsymbol{A}$中元素的代数余子式.

对于伴随矩阵有:

命题3.3.8. 伴随矩阵的性质

对n阶方阵$\boldsymbol{A}$有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

证明: 根据上面代数余子式的组合性质, 直接计算即得. ■

例3.3.9. 求$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的伴随矩阵并验证等式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

解: 根据定义

$$\boldsymbol{A}_{11} = d,\ \boldsymbol{A}_{12} = -b,\ \boldsymbol{A}_{21} = -c,\ \boldsymbol{A}_{22} = a,$$

所以有$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.直接验证可知等式成立. ■

下面讨论矩阵可逆的充要条件:

定理3.3.10. n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 并且, 当$|\boldsymbol{A}| \neq 0$时,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}.$$

证明: 先证必要性. 假设$\boldsymbol{A}$可逆, 则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$. 两边取行列式, 根据行列式的性质得

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{E}| = 1 \neq 0.$$

所以$|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

再证充分性.假设$|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由伴随矩阵的定义和性质得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

由于$|\boldsymbol{A}| \neq 0$,上式两边同时除以$|\boldsymbol{A}|$得

$$\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

所以$\boldsymbol{A}$可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}.$$ ■

☞ 这个定理给出了一种通过计算伴随矩阵来求逆矩阵的方法, 对于低阶的矩阵这种方法比较有效.而随着矩阵的阶数的增加, 计算量会变得很大, 这种方法就不实用了.

例3.3.11. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc\neq 0$.求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

解: 由于$|\boldsymbol{A}|=ad-bc\neq 0$,所以$\boldsymbol{A}$可逆, 由定理3.3.10 得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

■

例3.3.12. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

解: 由定理3.3.10, 只需求出$\boldsymbol{A}$的所有代数余子式和行列式即可.由于$|\boldsymbol{A}|=14$,

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2.$$

同样可得

$$\boldsymbol{A}_{12}=-3, \boldsymbol{A}_{13}=2, \boldsymbol{A}_{21}=18, \boldsymbol{A}_{22}=-6, \boldsymbol{A}_{23}=-10, \boldsymbol{A}_{31}=-8, \boldsymbol{A}_{32}=5, \boldsymbol{A}_{33}=6.$$

所以有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 18 & -8 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

■

推论3.3.13. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为方阵, 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$, 则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是可逆的, 且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$.

证明: 因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,两边取行列式得

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|=1\neq 0.$$

所以$|\boldsymbol{A}|\neq 0, |\boldsymbol{B}|\neq 0$.因此$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都可逆.因此有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

同样地有$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}$. ■

☞ 只要两个方阵乘起来是单位矩阵, 则它们是互逆的矩阵, 每个矩阵分别是另外一个的逆矩阵. 这样, 关于逆矩阵只需验证等式$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$ 成立就行了.

3.3.3 可逆矩阵的性质

从几个可逆矩阵出发, 利用可逆矩阵的性质, 可以方便地求出某些矩阵的逆矩阵.

定理3.3.14. 可逆矩阵的性质

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是可逆矩阵, 则

1. $\boldsymbol{A}^{-1}$可逆, 且$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.
2. $\boldsymbol{AB}$可逆, 且$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
3. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.
4. 若$k\neq 0$, 则$k\boldsymbol{A}$可逆, 且$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

证明: 直接应用推论3.3.13和行列式的性质即可证明, 请读者自己证明. ■

3.3.4 抽象矩阵的逆矩阵计算

对于一个2阶矩阵, 根据例题3.3.11 直接可以写出它的逆矩阵.对于一般的矩阵, 可以用伴随矩阵得到逆矩阵.但是用这种方法求高阶矩阵的逆矩阵的计算量很大, 后面会学习比较简单的方法, 也就是用初等变换的方法求逆矩阵.

上面都是介绍具体的矩阵的逆矩阵如何求, 下面来看抽象矩阵的逆矩阵如何求.

例3.3.15. 已知矩阵$\boldsymbol{A}$满足方程$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,求$\boldsymbol{A}$的逆矩阵.

解: 对方程进行变形得

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}.$$

所以由推论3.3.13知$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$. ■

例3.3.16. 已知矩阵$\boldsymbol{A}$满足方程$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,求$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的逆矩阵.

解: 把原等式变形得$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{E}$, 因此$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$, 所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\,(-\frac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{2})=\boldsymbol{E}.$$

所以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{2}$. ■

例3.3.17. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$是$n$阶矩阵且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为可逆矩阵, 求分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解: 设$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}&\boldsymbol{W}\end{pmatrix}$是其逆矩阵. 则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}&\boldsymbol{Y}\\\boldsymbol{Z}&\boldsymbol{W}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{AX}&\boldsymbol{AY}\\\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{BZ}&\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{BW}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{CX}+\boldsymbol{BZ}=\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{CY}+\boldsymbol{BW}=\boldsymbol{E}\end{cases},$$

解得$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$,由于$\boldsymbol{A}$可逆, 得$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{O}$. 同样可得$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{Z}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$. 所以原分块矩阵的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}.$$ ■

习题3.3

1. 用伴随矩阵求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1)\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix},\ (2)\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\ (3)\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}.$$

2. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足方程$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$都可逆, 并求它们的逆矩阵.

3. 设$\boldsymbol{A}$是3阶矩阵且$|\boldsymbol{A}|=2$,求(1) $|\boldsymbol{A}^{-1}|$; (2) $|(4\boldsymbol{A})^{-1}|$; (3) $|(2\boldsymbol{A})^{*}|$; (4) $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^{*}|$; (5) $|(\boldsymbol{A}^{*})^{*}|$.

4. 若$\boldsymbol{A}$可逆, 证明$\boldsymbol{A}^{*}$也可逆并求其逆.

5. 若$\boldsymbol{A}$可逆, 证明$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

6. 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$是$n$阶矩阵且$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$可逆, 求$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$的逆矩阵.

7. 设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 证明$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$. 若令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求$\boldsymbol{A}$ 及$\boldsymbol{A}^k$, k为任意自然数.

3.4 克莱姆法则

定理3.4.1. 克莱姆法则

设$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$是含有 n 个未知量, n 个方程的线性方程组, 则系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时, 方程组有且仅有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{|\boldsymbol{A}|},\quad j=1,2,\ldots,n,$$

其中 $D_j(j=1,2,\ldots,n)$是以方程组的常数项 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 替换 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列元素后形成的行列式

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 在等式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$两边同乘以$\boldsymbol{A}^{*}$得

$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{b}.$$

由于$|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 就有

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}.$$

直接计算就有

$$x_j = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}_{1j}b_1 + \boldsymbol{A}_{2j}b_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_{nj}b_n) = \frac{D_j}{|\boldsymbol{A}|}.$$

■

例3.4.2. 利用克莱姆法则解3元线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = \ 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \ 4 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 16 \end{cases}.$$

解:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 16 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 16 & 9 \end{vmatrix} = -6, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6,$$

则

$$x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3.$$

■

此定理称为克莱姆法则.克莱姆法则只能用于方程的个数与未知量个数相等且行列式不等于零的线性方程组, 对于方程个数与未知量个数不等或未知量个数与方程个数相等, 但系数行列式等于零的情况, 需用另外的方法求解.

习题3.4

1. 计算下列矩阵的伴随矩阵并验证等式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$:

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. 利用克莱姆法则解2元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}.$$

3.5 矩阵的秩

在解方程组的时候知道, 第一步先要判断方程组有没有解, 如果有解再去求解.下面就研究如何判断一个方程组有没有解, 前面通过研究增广矩阵的拐角元素是否出现在最后一列来判断方程组是否有解, 下面采取更加数学化的说法来描述这一情况.

3.5.1 秩的定义

为了定义矩阵的秩, 先介绍几个概念.在$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$中, 任取k行$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m$, 再任取$k$列$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 位于这些行和列交叉点上的$k^2$个数按照原来的次序排成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

称为$\boldsymbol{A}$的k阶子式. 注意$\boldsymbol{A}$的最高阶的子式是$\min\{m, n\}$阶子式. k阶子式并不是多么神秘的东西, 简单地说, 子式就是从矩阵$\boldsymbol{A}$中选些数出来组成比较小的行列式.不过取法要按照某些规则才行. 例如, 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

选取第1, 3行, 第2, 3列组成行列式, 就得到一个2阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

如果选取不同的行和列, 就会得到不同的子式, 所以$\boldsymbol{A}$共有$C_3^2C_4^2$个不同选择的2阶子式.

下面定义矩阵的秩这个重要的概念.

定义3.5.1. 矩阵的秩

如果矩阵$\boldsymbol{A}$有一个r阶子式不为0,所有的$r+1$阶子式(如果存在的话)都为0,则r称为矩阵的秩, 规定零矩阵的秩为0.把矩阵的秩记作

$$r(\boldsymbol{A}) = r,\ \text{或}\ R(\boldsymbol{A}) = r.$$

矩阵的秩是一个和该矩阵有关的、不变的数, 这个数决定了矩阵的重要的性质.如果矩阵是某个方程组的增广矩阵, 则秩和方程组有没有解就有密切的关系.

注意到矩阵的秩等于r就意味着至少有一个r阶子式不为0.如果$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 则

$$R(\boldsymbol{A}) \le \min\{m, n\}.$$

例3.5.2. 证明n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是$R(\boldsymbol{A}) = n$.

证明: 由秩的定义以及$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是其行列式不为0即得. ■

由于矩阵和它的转置矩阵的行列式相等, 再由秩的定义, 马上有

定理3.5.3. 矩阵和它的转置矩阵的秩相等. ■

给出了秩的概念之后, 接下来的问题就是如何计算矩阵的秩.

3.5.2 秩的计算

当然, 求矩阵的秩的最原始的方法就是用定义去求.

例3.5.4. 求下列矩阵的秩

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

解: 由于$|\boldsymbol{A}| = 1 \neq 0$, 有一个2阶子式不为0, 所以$R(\boldsymbol{A}) = 2$. 由于$|\boldsymbol{B}| = 0$,但$\boldsymbol{B}$中有非零元素, 即$\boldsymbol{B}$有1阶子式不为零.所以根据秩的定义有$R(\boldsymbol{B}) = 1$.根据前面的两个例子的讨论, 同样可以得到

$$R(\boldsymbol{C})=\begin{cases}0, & a=b=c=d=0;\\ 2, & ad-bc\neq 0;\\ 1, & \text{其它情况}.\end{cases}$$ ■

明显地, 用定义求一般矩阵的秩是非常麻烦的事, 得求好多行列式, 要做大量的计算. 然而, 对于一类特殊的矩阵, 用定义求还是非常简单的.

命题3.5.5. *阶梯形矩阵的秩等于其非零行数*

设矩阵$\boldsymbol{A}$是阶梯形矩阵, 则$R(\boldsymbol{A})=r$.其中r是$\boldsymbol{A}$的非零行的行数.

证明: 由于$\boldsymbol{A}$只有r行不全为0, 所以当$k>r$时, $\boldsymbol{A}$的任意k阶子式中至少有一行全为0, 所以行列式为0. 这样$R(\boldsymbol{A})\leq r$. 另一方面, 选取$\boldsymbol{A}$ 的拐角元素所在的行和列, 得到一个特殊的r阶子式D_r, 它是一个上三角行列式, 对角元素是拐角元素, 所以$D_r\neq 0$. 因此$R(\boldsymbol{A})\geq r$. 这样就有$R(\boldsymbol{A})=r$. ■

对于任意一个矩阵$\boldsymbol{A}$, 根据前面的命题2.2.2, 经过有限多次行初等变换总可以把$\boldsymbol{A}$变成一个阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$, 根据命题3.5.5, 阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$的秩直接数出非零行的行数就可以得到. 如果这两个矩阵的秩之间有某些关系的话, 那么就可以根据$\boldsymbol{B}$的秩求出$\boldsymbol{A}$的秩. 这样就把一个复杂矩阵的求秩的问题变成了一个简单矩阵的求秩的问题. 为此, 需要研究初等变换对矩阵的秩的影响.

前面介绍了矩阵的行初等变换, 同样地可以定义矩阵的3种列初等变换. 行初等变换和列初等变换统称为矩阵的初等变换.

☞ 所谓变换, 就是一种操作, 把一个矩阵$\boldsymbol{A}$变成另外一个矩阵$\boldsymbol{B}$, 如果有另外一种操作, 可以把$\boldsymbol{B}$ 再变成$\boldsymbol{A}$, 这种变换称为可逆变换.

显然, 三种初等变换都是可逆的, 且逆变换是同一类型的初等变换. $r_i\leftrightarrow r_j$的逆就是它自己;kr_i的逆是$\dfrac{1}{k}r_i$; r_i+kr_j的逆是r_i-kr_j. 有了这些准备工作, 下面证明

定理3.5.6. *初等变换不改变矩阵的秩*

对矩阵$\boldsymbol{A}$进行一系列行(列)初等变换得到矩阵$\boldsymbol{B}$,则$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证明: 参考附录. ■

根据这个定理, 就有:

3. 求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩的步骤

1. 用初等变换把矩阵$\boldsymbol{A}$变成阶梯形矩阵$\boldsymbol{B}$

2. 数一数矩阵$\boldsymbol{B}$的非零行数, 记为r

3. 得到$\boldsymbol{A}$的秩为r

例3.5.7. 求矩阵的秩

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

解: $\boldsymbol{B}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 所以$R(\boldsymbol{B})=3$. ■

☞ 注意, 这种求矩阵的秩的方法蕴含着一种解决问题的有效思想. 对于一个问题, 如果不好直接求解, 就想法把问题变一变, 在保证问题的实质不变的前提下, 看看在变化之后, 问题有没有简单一些, 同时两个问题的答案之间是否有比较密切的联系.比如求矩阵的秩, 变成一个求阶梯形矩阵的秩的问题, 并且两个问题的答案相同. 再比如, 解线性方程组, 也是把方程组进行同解变形, 变成一个简单的方程组, 同时两个方程组同解.还有求矩阵的行列式, 用行列式的性质把原来的行列式化成上三角或下三角形的行列式等等.

习题3.5

1. 如果$\boldsymbol{A}$是3×3矩阵, 那么$\boldsymbol{A}$的秩最大为多少? 如果$\boldsymbol{A}$是3×4矩阵呢?

2. 在秩为r的矩阵$\boldsymbol{A}$中, 有没有等于0的$r-1$阶子式? 有没有等于0的r阶子式? 有没有不等于0的$r+1$阶子式?

3. 求下列矩阵的秩:

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ (2).\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},\ (3).\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵且$r(\boldsymbol{A})=n$, 证明方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有唯一解并求其解.

3.6 初等变换的矩阵解释

在前面, 我们看到, 不论是求矩阵的秩、解方程组, 还是求行列式都有些相似的东西, 都有初等变换的影子出现.在这一节详细地研究一下隐藏在初等变换后面的东西, 解释为什么初等变换会自然地出现. 这需要用矩阵的语言解释初等变换.

3.6.1 初等矩阵

我们知道, 共有3种初等变换, 实际上, 每一种初等变换都和某个矩阵相联系.

定义3.6.1. *初等矩阵*

*由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为*初等矩阵.

初等变换有3种, 相应的, 初等矩阵也有3种.下面考虑3种行初等变换对应的初等矩阵.

- 交换单位矩阵的第i行和第j行, 得到初等矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

这个矩阵也可以看成交换单位矩阵的第i列和第j列得到

- 单位矩阵的第i行乘上$k, k \neq 0$,得到初等矩阵

$$\boldsymbol{E}_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

也可以看成单位矩阵的第i列乘上$k, k \neq 0$,得到.

- 单位矩阵的第i行加上第j行的k倍, 得到初等矩阵

$$\boldsymbol{E}_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第}i\text{行} \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

也可以看成单位矩阵的第j列加上第i列的k倍得到这个初等矩阵.

进行简单的计算就有

$$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E}_i(\lambda)\boldsymbol{E}_i(\frac{1}{\lambda}) = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E}_{ij}(k)\boldsymbol{E}_{ij}(-k) = \boldsymbol{E}.$$

所以有

命题3.6.2. *初等矩阵都是可逆矩阵, 并且它们的逆矩阵仍然是初等矩阵.* ■

3.6.2 左行右列准则

初等矩阵具体有何种应用呢, 我们通过简单的实例来认识一下. 针对如下的矩阵做一次行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

很显然, 箭头左右两端的矩阵是不等的, 不过我希望这种变换能够通过一个等式来描述, 那么有

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

观察等号左端**“左”**乘上去的矩阵, 其实这个矩阵即是第一类初等矩阵$\boldsymbol{E}_{12}$.

类似的我们可以再来看两个例子:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

观察等号左端**“左”**乘上去的矩阵, 其实这个矩阵即是第二类初等矩阵$\boldsymbol{E}_2(2)$, 实现的功能是将原矩阵的第二行乘以2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 12 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

观察等号左端**“左”**乘上去的矩阵, 其实这个矩阵即是第三类初等矩阵$\boldsymbol{E}_{21}(2)$, 实现的功能是将原矩阵的第二行加上第一行的2倍.

如果对矩阵进行初等列变换会如何呢, 我们看这样的例子:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

同样地, 也可以用如下等式来描述这种变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

观察等号右端**“右”**乘上去的矩阵, 可以看出其实这个矩阵即是第一类初等矩阵$\boldsymbol{E}_{12}$, 其它的列变换同样可以检验.因此总结得到如下的结论:

定理3.6.3. 左行右列

对矩阵$\boldsymbol{A}$进行一次行初等变换就相当于用一个初等矩阵$\boldsymbol{P}$去左乘$\boldsymbol{A}$. 同样地对矩阵$\boldsymbol{A}$进行一次列初等变换就相当于用一个初等矩阵$\boldsymbol{Q}$去右乘$\boldsymbol{A}$. 简称左行右列.即

如果$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{进行一次行初等变换}} \boldsymbol{B}$, 则存在初等矩阵$\boldsymbol{P}$, 有$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$.

如果$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{进行一次列初等变换}} \boldsymbol{C}$, 则存在初等矩阵$\boldsymbol{Q}$, 有$\boldsymbol{AQ} = \boldsymbol{C}$.

证明: 参考附录. ■

☞ 左行右列的意思是说, 从矩阵$\boldsymbol{A}$得到矩阵$\boldsymbol{B}$有两种方法: 一是进行一次初等变换;另外一种就是乘上一个初等矩阵.这两种方法得到的矩阵都是相同的. 就是说获得相同的结果, 但是可以有两种说法, 这样我们会在不同的情况下选择不同的说法.

3.6.3 逆矩阵的初等变换求法

一个矩阵$\boldsymbol{A}$通过行初等变换总可以化成简化阶梯形矩阵, 如果继续用列初等变换化简, 还可以得到更简单的矩阵. 比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4 - c_1 - 2c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_5 + c_2 - c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}.$$

矩阵$\boldsymbol{D}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的标准形, 其特点是$\boldsymbol{D}$的左上角是一个单位矩阵, 其余元素全为0.

综上, 可得

定理3.6.4. 任意$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$总可以经过有限次初等变换化成标准形

$$\boldsymbol{I_A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

其中$r = R(\boldsymbol{A})$. ■

例3.6.5. 证明n阶可逆矩阵总可以经过有限次行初等变换化成单位矩阵.

证明: 由于可逆矩阵的秩为n, 再由行初等变换不改变矩阵的秩, 所以可逆矩阵经过有限次行初等变换最后化成的简化阶梯形矩阵一定是单位矩阵. ■

用初等变换可以方便地求矩阵的逆矩阵.

定理3.6.6. 可逆矩阵是初等矩阵的乘积

$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_l$,使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l.$$

证明: 由于初等矩阵都是可逆的, 所以它们的乘积也可逆, 因此充分性得证.

再证必要性. 矩阵$\boldsymbol{A}$可逆, 由例题3.6.5, 所以它可以经过有限次行初等变换化成单位矩阵. 根据定理3.6.3, 就是说$\boldsymbol{A}$ 左乘上一系列初等变换对应的初等矩阵就得到单位矩阵, 因此$\boldsymbol{A}$可逆.

所以定理得证. ■

根据上面的定理,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l,$$

所以有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{E}.$$

和

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}.$$

比较一下就会发现, 用一系列的初等矩阵$\boldsymbol{P}_l^{-1}, \boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}, \cdots \boldsymbol{P}_1^{-1}$ 左乘上$\boldsymbol{A}$就会得到单位矩阵$\boldsymbol{E}$, 同样地用这些初等矩阵左乘上$\boldsymbol{E}$就会得到逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$. 把上面的矩阵的乘法用初等变换的语言描述一下就是:

命题3.6.7. 用行初等变换求逆矩阵

对n阶可逆矩阵$\boldsymbol{A}$依次进行行初等变换, 使$\boldsymbol{A}$变成单位矩阵$\boldsymbol{E}$时, 对$\boldsymbol{E}$依次进行相同的行初等变换, $\boldsymbol{E}$就变成$\boldsymbol{A}$的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$. ■

根据这个命题可以得到

4. 用行初等变换法求方阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵的步骤

1. 构造分块矩阵$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})$; 即在$\boldsymbol{A}$的后面添上一个相同阶数的单位矩阵
2. 用行初等变换把$\boldsymbol{M}$化成简化阶梯形矩阵,

$$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行初等变换}}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{E}\ \boldsymbol{B})$$

3. 当$\boldsymbol{A}$变成单位矩阵$\boldsymbol{E}$时, 后面的单位矩阵就变成$\boldsymbol{A}^{-1}$, 即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$

☞ 对任意一个方阵都可以这样进行行初等变换, 如果左边的小块变不成单位矩阵, 说明原来的矩阵不是可逆矩阵.

例3.6.8. 用行初等变换求矩阵的逆

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&3\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

解: $$(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&1&3&0&1&0\\2&2&-1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&-4&1&-1&0\\0&1&3&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+4r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-7&-1&4\\0&1&0&6&1&-3\\0&0&1&-2&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-7&-1&4\\6&1&-3\\-2&0&1\end{pmatrix}.$$ ■

3.6.4 矩阵方程

利用逆矩阵可求解矩阵方程:设n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆, m阶方阵$\boldsymbol{B}$可逆, $\boldsymbol{C}$ 是$n\times m$矩阵, 求$n\times m$矩阵$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}$满足矩阵方程$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$. 实际上, 在方程的两边左乘$\boldsymbol{A}^{-1}$, 右乘$\boldsymbol{B}^{-1}$, 即得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}.$$

例3.6.9. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix},$$

求矩阵$\boldsymbol{X}$, 使$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

解: $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&2&4\\-16&-3&-7\end{pmatrix}$. ■

最后要指出的是由于矩阵的乘法不满足交换律, 所以解矩阵方程的时候一定要分清是左乘还是右乘.比如矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$的解是$X=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$而不是$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

3.6.5 矩阵的等价

根据定理3.6.3, 对矩阵进行一系列初等变换就相当于乘上一系列初等矩阵, 所以有

定理3.6.10. *对任意$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$,总存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$使得*

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

■

利用初等变换, 可以定义矩阵的等价.

定义3.6.11. 矩阵的等价

若矩阵$\boldsymbol{B}$可以由矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换得到, 则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是等价的, 也称是相抵的.

等价的矩阵之间具有下面的性质.

命题3.6.12. *等价矩阵的性质*

1. 自反性, $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}$等价.

2. 对称性, 如果$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价, 则$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$等价.

3. 传递性, 如果$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价, $\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$等价, 则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$等价.

证明: 证明请读者补充自己完成. ■

所有与$\boldsymbol{A}$等价的矩阵组成的集合称为一个等价类, 标准形$\boldsymbol{I_A}$是这个等价类中形状最简单的矩阵, 所有与$\boldsymbol{A}$等价的矩阵的标准形都是$\boldsymbol{I_A}$, 最后, 两个矩阵等价当且仅当它们的秩相等, 当且仅当它们有相同的标准形.

☞ 如果所有$m\times n$矩阵按照秩是否相同进行分类, 那么标准形就是每个类里面最简单的代表.

习题3.6

1. 写出下列初等变换对应的3阶初等矩阵:

   (1) $r_1 - r_3$; (2) $r_3 \times 2$; (3) $c_2 + 2c_3$.

2. 用行初等变换求下列矩阵的逆矩阵:

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ (2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 解下列矩阵方程:

$$(1)\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ (2)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. 如果矩阵$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$经过有限多次行初等变换得到的, 证明方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$是同解方程组.

3.7 方程组解的判断

有了矩阵的秩的概念之后, 可以方便地判断一个方程组的解的情况. 对于阶梯形矩阵来说, 矩阵的秩等于非零行数, 等于拐角元素的个数.同时, 行初等变换保持秩不变, 也保持方程组是同解方程组. 所以下面把定理2.2.7, 2.2.9, 2.2.8重新用秩的语言叙述如下.

定理3.7.1. 方程组有没有解的判定

设方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 设$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$, n 为未知量的个数, 则方程组有解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 方程组无解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})\neq R(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

定理3.7.2. 方程组有唯一解的判定

条件同上, 则方程组有唯一解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})=n$.

定理3.7.3. 方程组有无穷多解的判定

条件同上, 则方程组有无穷多解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=R(\tilde{\boldsymbol{A}})<n$.

至此, 我们比较简洁、完整地解决了方程组何时有解, 何时无解, 何时有无穷多解的问题. 方程组解的情况完全就由矩阵(系数矩阵、增广矩阵)的秩和未知量的个数决定了.

下面再给出上述定理的其它描述和一些特殊的情形.

推论3.7.4. 设方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, 其中$\boldsymbol{A}$是$n\times n$方阵, 则方程组有唯一解的充要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 且其唯一解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. ■

对于齐次方程组, 由于它总有一个零解, 所以结论更为简洁

定理3.7.5. 齐次方程组有没有非零解的判定

设齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其中$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵, 则方程组有非零解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})<n$, 方程组只有零解的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=n$. ■

例3.7.6. 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2-x_3=3 \end{cases}.$$

解: 对增广矩阵进行行初等变换得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

所以方程组有唯一解

$$x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=-1.$$

■

例3.7.7. 讨论λ取何值时, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解;有无穷多解;无解?

解: 解法一

直接对方程组的增广矩阵进行行初等变换得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

因此有:

当$\lambda \neq 1, -2$时, $R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 3$, 方程组有唯一解;

当$\lambda = -2$时, $R(\boldsymbol{A}) = 2$, $R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 3$, 方程组无解;

当$\lambda = 1$时, $R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 1$, 方程组有无穷多解.

解法二

由于方程的个数与未知量的个数相同, 可以利用推论3.7.4解决本问题.

由于

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

所以当$\lambda \neq 1, -2$时, 方程组有唯一解.

当$\lambda = -2$时,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

此时$R(\boldsymbol{A}) = 2$, $R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 3$, 方程组无解;

当$\lambda = 1$时,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时$R(\boldsymbol{A}) = R(\widetilde{\boldsymbol{A}}) = 1$, 方程组有无穷多解. ■

☞ 一般地, 含参变量的线性方程中, 若方程的个数与未知量的个数相等, 解法二比解法一要简单一些.

例3.7.8. *讨论齐次方程组*

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \\ bx_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

何时有非零解?其中a, b为参数.

解: 由于此方程组的方程个数和未知量的个数相同, 根据定理3.7.5, 可以用行列式不为零来判断方程组何时只有零解.

由于

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ b & 1 & a \end{vmatrix} = (a-b)(a-1).$$

因此有

(1) 当$a \neq b$, 且$a \neq 1$时, 方程组只有零解;

(2) 当$a = b$, 或$a = 1$时, 方程组有非零解. ■

习题3.7

1. 讨论λ为何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$

有唯一解?

2. 讨论λ为何值时, 齐次方程组

$$\begin{cases} (5-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

附录: 定理的证明

性质3.2.1的证明: 按照第i行展开

左边$= ka_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + ka_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + ka_{in}\boldsymbol{A}_{in}$.

右边$= k(a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in})$.

左右相等, 所以命题成立. ■

性质3.2.2的证明: 利用性质3.2.10, 右边的行列式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

与

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的和, 再根据推论3.2.9, 第2个行列式为0. 所以左右相等, 命题成立. ■

性质3.2.3的证明: 设矩阵$\boldsymbol{B}$是交换$\boldsymbol{A}$的第i, j两行得到的, 那么$\boldsymbol{B}$也可以这样从$\boldsymbol{A}$得到,

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i - r_j} \boldsymbol{C} \xrightarrow{r_j + r_i} \boldsymbol{D} \xrightarrow{r_i - r_j} \boldsymbol{E} \xrightarrow{(-1)\cdot r_i} \boldsymbol{B}.$$

根据性质3.2.1和3.2.2, 知$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$,命题成立. ■

性质3.2.8的证明: 使用归纳法证明.这里只对行的情形证明, 列的情形可以类似地证明.

当n=2 时$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$, 由行列式的定义$D_2 = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$, 命题成立.

假设当$n = m$ 时成立. 当$n = m+1$时, 此时可设$n > 2$.所以矩阵至少有3行, 假设矩阵的第i行和第j行相同, 选择k, $k \neq i$, $k \neq j$. 根据拉普拉斯定理, 把行列式按照第k行展开, 得

$$D_{m+1} = a_{k1}\boldsymbol{A}_{k1} + a_{k2}\boldsymbol{A}_{k2} + \cdots + a_{kn}\boldsymbol{A}_{kn},$$

注意到每一个代数余子式$\boldsymbol{A}_{kt} = (-1)^{k+t}M_{kt}$, $t = 1, 2, \cdots, m+1$, 其中子式M_{kt}是一个m阶行列式, 并且有两行相同, 由归纳假设得, $M_{kt} = 0$. 所以$D_{m+1} = 0$.命题得证. ■

性质3.2.10的证明: 只对列的情形证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等式左边按第i 列展开得到

$$\text{左边} = (a_{1i} + a'_{1i})\boldsymbol{A}_{1i} + (a_{2i} + a'_{2i})\boldsymbol{A}_{2i} + \cdots + (a_{ni} + a'_{ni})\boldsymbol{A}_{ni},$$

等式右边两个行列式同样按第i 列展开得到

$$\text{右边} = (a_{1i}\boldsymbol{A}_{1i} + a_{2i}\boldsymbol{A}_{2i} + \cdots + a_{ni}\boldsymbol{A}_{ni}) + (a'_{1i}\boldsymbol{A}_{1i} + a'_{2i}\boldsymbol{A}_{2i} + \cdots + a'_{ni}\boldsymbol{A}_{ni}),$$

左右相等, 所以命题成立. ■

性质3.2.12的证明: 对初等矩阵$\boldsymbol{P}$,设$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AP}$,则$\boldsymbol{C}$是$\boldsymbol{A}$经过一次列初等变换得到的, 由行列式的性质和定理3.6.3得$|\boldsymbol{AP}| = |\boldsymbol{C}|$.同样有$|\boldsymbol{AP}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|$.所以对可逆矩阵$\boldsymbol{D}$有$|\boldsymbol{AD}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$.

若$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{AF} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

所以$|\boldsymbol{F}|=0, |\boldsymbol{AF}|=0$. 因此$|\boldsymbol{AF}|=|\boldsymbol{F}|$.

对任意的矩阵$\boldsymbol{B}$, 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}.$$

因此

$$|\boldsymbol{AB}|=\left|\boldsymbol{AP}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\right|\left|\boldsymbol{Q}^{-1}\right|,$$

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\right|=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{P}^{-1}\right|\left|\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\right|\left|\boldsymbol{Q}^{-1}\right|,$$

所以$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, 命题得证. ■

命题3.5.6的证明: 只对行初等变换证明, 列初等变换可以类似地证明.

现在假设$R(\boldsymbol{A})=r$, 即$\boldsymbol{A}$的任意$r+1$阶子式都是0. 设$\boldsymbol{B}$是$\boldsymbol{A}$经过一次行初等变换得到的矩阵, 证明

$$R(\boldsymbol{A})\geq R(\boldsymbol{B}).$$

下面设M是矩阵$\boldsymbol{B}$的任意一个$r+1$阶子式.

1. 如果$\boldsymbol{A}\xrightarrow{kr_i}\boldsymbol{B},\quad k\neq 0.$

当M不包含第i行时, M本身就是$\boldsymbol{A}$的一个$r+1$阶子式, 所以$M=0$.

当M包含第i行时, M就是$\boldsymbol{A}$的一个$r+1$阶子式的k倍, 也有$M=0$.

2. 如果$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$.

类似上面的讨论只考虑M包含第i行的情况. 此时M可以表示成两个行列式的和, 其中一个就是$\boldsymbol{A}$的一个$r+1$阶子式, 其值为0, 另外一个或者是两行成比例(M包含第j行), 或者是$\boldsymbol{A}$中某个$r+1$阶子式的k倍或$-k$倍.它们都是0, 所以总有$M=0$.

3. 如果$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$.

这时M或者是$\boldsymbol{A}$的一个$k+1$阶子式, 或者和某个$k+1$阶子式相差一个正负号, 不论哪种情况都有$M=0$.

由于初等变换是可逆的, 同样可以得到$R(\boldsymbol{B})\geq R(\boldsymbol{A})$. 所以就有$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

因此, 经过一次行初等变换不改变矩阵的秩, 所以经过有限次行初等变换也不改变矩阵的秩. ■

定理3.6.3的证明: 只对列初等变换证明. 为了叙述方便, 回忆分块矩阵的定义, 和几个特殊的列向量.

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{行}.$$

则单位矩阵可以写为$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$.

用分块矩阵表示3种初等矩阵.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_{ij} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n);\\
&\boldsymbol{E}_i(\lambda) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \lambda\boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{e}_n);\\
&\boldsymbol{E}_{ji}(k) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_i + k\boldsymbol{e}_j, \cdots, \boldsymbol{e}_n)
\end{aligned}$$

把$\boldsymbol{A}$按列分块, 设$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n)$, 则有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}_i$. 下面就列初等变换分3种情况分别验证.

1. 设$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_{ij}$. 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n)\\
&= (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_{i-1}, \boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{A}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{A}_{j-1}, \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{A}_n)\\
&= \boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

交换$\boldsymbol{A}$的第i列和第j列也得到$\boldsymbol{B}$,所以这种情况下定理成立.

2. 设$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}_i(\lambda), \lambda \neq 0$. 则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(\lambda) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \lambda\boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \cdots, \lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n)\\
&= (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \lambda\boldsymbol{A}_i, \cdots, \boldsymbol{A}_n)\\
&= \boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

把$\boldsymbol{A}$的第i列乘上λ也得到$\boldsymbol{B}$,所以这种情况下定理成立.

3. 设$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}_{ji}(k)$. 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ji}(k) &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_i+k\boldsymbol{e}_j,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\\ &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i+k\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n)\\ &= (\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_i+k\boldsymbol{A}_j,\cdots,\boldsymbol{A}_n)\\ &= \boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$的第i列加上第j列的k倍也得到$\boldsymbol{B}$,所以这种情况下定理成立.

综上所述, 定理成立. ■

索引