习题一　多元函数的基本概念

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、选择题：

1、平面集合$\{(x,y)|x>0,y>0\}\cup\{(x,y)|x<0,y<0\}$是（　）。

（A）开区域；　（B）闭区域；　（C）开集。

2、平面集合$\{(x,y)|y\geq 1\text{或}y\leq -1\}$是（　）。

（A）闭区域；　（B）既非闭区域又非开闭域；　（C）开区域。

3、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^3+y^2}=$（　）。

（A）等于 0；　（B）不存在；　（C）等于 1。

4、定义在R^2上的$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}, & (x,y)\neq(1,-1)\\ 0, & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$的不连续点集合是（　）。

（A）直线$x=1$；　（B）直线$y=-1$；　（C）单点集$\{(1,-1)\}$。

二、填空题：

1、设$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，则$f(x+y,x-y)=$________________________；

2、若$f(x+y,y/x)=x^2-y^2$,则$f(x,y)=$__________________________；

3、$u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$的定义域是______________________________。

三、求下列函数的定义域，并作出定义域的图形：

1、$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　　　　　　　2、$z=\ln(1-(|x|+|y|))$。

四、计算下列极限：

1、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$；　　　　2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

五、证明：极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}$不存在。

六、设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问$f(x,y)$在点$(0,0)$处是否连续？。

习题二　偏导数

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、选择题：

1、$z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处（　）

（A）一定连续；　（B）一定不连续；　（C）不一定连续。

2、曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向间夹角为（　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$；　（B）$\dfrac{\pi}{6}$；　（C）$\dfrac{\pi}{4}$。

3、$z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$，其中 f 可微，则 $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）

（A）1；　（B）$2f'$；　（C）0。

二、填空题：

1、设 $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$，及 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 分别为______和_________。

2、设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}+xe^{-xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____。

3、设 $u=x^{\frac{z}{y}}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$____________________________________，

二、计算题：

1、设 $z=(1+xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}$。

2、设 $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$，求 z_x,z_y。

3、设$u=\arctan(x-y)^z$，求u_x, u_y, u_z。

4、设$z=x\ln(x\sin y)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$

五、设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1、计算$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；　　　2、证明f在$(0,0)$点不连续。

习题三　全微分及其应用

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、是非题：

1、$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$在点$P_0(x_0,y_0)$存在是$f(x,y)$在点$P_0$可微的充分必要条件。　　（　）

2、若函数$z=f(x,y)$)在点$P_0(x_0,y_0)$可微，则偏导数$f_x(x,y), f_y(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处必连续。　　（　　）

二、填空题：

1、设$z=e^{xy}$，则$dz|_{(1,1)}=$________，当$\Delta x=0.01, \Delta y=0.02$时，$dz|_{(1,1)}=$_____。

2、设$z=\ln\sin\frac{x}{y}$，则$dz=$____。

3、设$z=\ln(1+\frac{x}{y^2})$，则$dz|_{(1,1)}=$____。

三、计算题：

1、$z=\arcsin\frac{y^2}{x}$,求dz。

2、$u=\ln(x^x y^y z^z)$，求du。

3、 $z = x2^{xy}$，求 dz 及 $dz|_{(1,0)}$。

四、研究函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0, 0)$ 点的可微性。

五、证明 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点可微。

习题四　多元复合函数的求导法则

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、求下列复合函数的导数或偏导数：

1、$u=x^y$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，则$u'(t)=$________________________________

2、$z=u^2+vw,\ u=x+y,\ v=x^2,w=xy$，则$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=$______；　$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)}=$______

3、设$u=f(x+y,xy)$，其中f可微，则$\frac{\partial u}{\partial x}=$____________________________；

$\frac{\partial u}{\partial y}=$_______________________。

4、设$w=\frac{1}{u}$，$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=$__________________。

5、设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中f可微，则$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=$________________。

二、求下列函数的二阶偏导数，其中f有连续的二阶导数或偏导数：

1、$z=f(x^2+y^2)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

2、$z=f(x,y,\frac{x}{y})$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

三、函数$u(x,t)$有二阶连续偏导数，引入$\xi = x - at$, $\eta = x + at$ ($a \neq 0$为常数)后变为$u(\xi, \eta)$，问方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$变为什么形式？你能写出一个满足此方程的函数$u(\xi, \eta)$吗？

习题五　隐函数微分法

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、设 $\cos(x^2+yz)=xz+y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$。

二、设 $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

三、证明方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$（其中 $F(u)$ 有连续导数）所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$

四、设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{dz}{dx}$。

五、设$x = e^u \cos v,\ \ y = e^u \sin v,\ \ z = uv,$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

六、设$u = f(x, y, z) = xy^2z^3$，而x, y, z满足方程$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$，设$z = z(x, y)$是由上述方程所确定的隐函数，$z(1,1) = 1,$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{(1,1)}$。

习题六　方向导数与梯度

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、是非题：

1、若 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的方向导数均存在，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处必可微。　　　　（　　）

2、若 $u=F(x,y,z)$ 可微，则方向 $\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ 是 u 在点 (x,y,z) 处变化率最大的方向。　　　　（　　）

二、填空题：

1、设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\mathrm{grad}f(0,0,0)=$____________________，$\mathrm{grad}f(1,1,1)=$_____________________。

2、求函数 $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $(1,2)$ 沿 ox 轴成 135° 方向上的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,2)}=$______________________________。

三、计算题：

1、求函数 $u=3x^2+z^2-2yz+2xz$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿点 $(-1,1,-2)$ 至 $(5,4,0)$ 方向上的方向导数。

2、求函数 $u=x^2+y+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿该点外法线方向的方向导数。

3、已知$\vec{\alpha} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} - xz^2\vec{k}, u = z^2 - x^2 y$，试在$M(-1,-1,1)$处计算

（1）$(\vec{\alpha} \cdot \mathrm{grad}u)|_M$，，　　　　（2）$(\vec{\alpha} \times \mathrm{grad}u)|_M$

4、设$f(x,y,z) = \ln(x + y + z + \sqrt{1 + (x + y + z)^2})$，它在点(1,1,1)处沿哪个方向的变化率最大？求出这个方向的方向余弦及f在点(1,1,1)处的最大变化率。

5、求函数$f(x,y) = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$在点$M(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$处沿曲线$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$在这点内法线方向上的方向导数。