习题一 空间直角坐标系

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、在空间直角坐标系中，点 $M(2,-3,5)$ 关于 xoy 平面的对称点的坐标是______；关于 yoz 平面的对称点是________；关于 xoz 平面的对称点是________；关于原点的对称点是________。

2、在空间直角坐标系中，点 $M(-1,3,4)$ 关于 x 轴的对称点的坐标是________；关于 y 轴的对称点是________；关于 z 轴的对称点是________。

3、在空间直角坐标系中，点 $M(-2,-5,6)$ 在 xoy 平面上的投影点坐标是_________；在 yoz 平面上的投影点是_________；在 xoz 平面上的投影点是_________；在 x 轴上的投影点是________；在 y 轴上的投影点是________；在 z 轴上的投影点是________。

4、在空间直角坐标系中，点 $M(2,1,-3)$ 到 xoy 平面的距离是________；到 yoz 平面的距离是__________；到 xoz 平面的距离是__________；到原点的距离是_______；到 x 轴的距离是________；到 y 轴的距离是________；到 z 轴的距离是_______。

二、已知点 $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, 3)$，M 点在连接 A、B 的直线上，且 $AM : MB = -\frac{3}{2}$，求点 M 的坐标。

三、已知向量$\alpha=(3,5,-1)$，求α的方向余弦及与α平行的单位向量。

四、设$\alpha=(-3,5,-1),\beta=(2,2,3),\gamma=(4,-1,3)$，计算$2\alpha-3\beta+4\gamma$。

五、设三力$\overrightarrow{F_1}=i+3j+2k,\overrightarrow{F_2}=-2i+3j-4k,\overrightarrow{F_3}=3i-4j-5k$，作用于一点，求合力的大小和方向余弦。

习题二 向量及其线性运算

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、下列等式何时成立：

（1）$|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta|$，当______________________________；

（2）$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$，当______________________________；

（3）$|\alpha+\beta|=|\alpha|-|\beta|$，当______________________________；

（4）$\dfrac{\alpha}{|\alpha|}=\dfrac{\beta}{|\beta|}$，$(\alpha,\beta$为非零向量)，当__________________________________。

2、$|\alpha+\beta|>|\alpha-\beta|$，当____________________________________。

二、用几何作图证明：

1、$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=2\alpha$；

2、$(\alpha+\dfrac{1}{2}\beta)-(\beta+\dfrac{1}{2}\alpha)=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$。

三、设 $\overrightarrow{OA}=\alpha,\overrightarrow{OB}=\beta,P$ 为线段 AB 上任一点，证明：存在数 λ，使得

$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta$。

习题三 向量运算的坐标表示及其运算

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、平行于 x 轴的向量一般表示式是___________；平行于 y 轴的向量一般表示式是___________；平行于 z 轴的向量一般表示式是___________。

2、向量 $\alpha=(3,1,4)$，$\beta=(2,-1,1)$，则 $|\alpha|=$ ______________________________，$|\beta|=$__________________，它们的夹角 $<\alpha,\beta>=$_________________。

3、向量 $\alpha=(-2,3,t_1)$，$\beta=(t_2,-6,2)$，当 $t_1=$_________与 $t_2=$_________时，α与β平行；当 t_1，t_2 满足__________________________时，α与β垂直。

4、向量 $\alpha=(2,3,1)$ 在向量 $\beta=(1,-1,2)$ 上的投影向量是____________________ 。

二、设三力 $\vec{F}_1=(3,-4,2)$，$\vec{F}_2=(2,3,-5)$，$\vec{F}_3=(-3,-2,4)$ 作用于一质点，使质点产生的位移向量 $\vec{S}=-i-4j+11k$，求合力所做的功 W。

三、若向量 $\alpha=(3,-1,4)$ 的起点和点 $M(1,2,-3)$ 重合，试确定它的终点 N 的坐标。

四、求单位向量，使它和向量$\alpha = i - 3j + k, \beta = 2i - j + k$都垂直。

五、三角形的三个顶点为$A(4, -1, 2),\ B(-8, 0, 4),\ C(8, 2, 3)$，求其面积。

六、向量$\alpha = (8, -3, 2),\ \beta = (0, 2, -1),\ \gamma = (1, 2, 3)$是否共面？若不共面，试计算以这三个向量为棱所作的平行六面体体积。

习题四 向量的数量积和向量积

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、判断题：

1、若$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$，且$\alpha\neq 0$，则$\beta=\gamma$。 （ ）

2、α,β,γ共面的充分必要条件是$\alpha\cdot(\beta\times\gamma)=0$。 （ ）

3、$\alpha\times\beta=|\alpha|\cdot|\beta|\sin<\alpha,\beta>$。 （ ）

4、$|\alpha\cdot\beta|\leq|\alpha|\cdot|\beta|$ （ ）

二、已知向量α和β的夹角$\varphi=\dfrac{2\pi}{3},|\alpha|=3,|\beta|=4$，试计算：

1、$\alpha\cdot\beta$　　2、$|\alpha+\beta|^2$　　3、$(3\alpha-2\beta)\cdot(\alpha+2\beta)$

三、证明：向量$\omega=\beta(\alpha\cdot\gamma)-\gamma(\alpha\cdot\beta)$和向量$\alpha$垂直。

四、已知α与β垂直，且$|\alpha| = 3, |\beta| = 4$，计算：

1、$|(\alpha \times \beta) \times (\alpha - \beta)|$；　　　　2、$|(3\alpha - \beta) \times (\alpha - 2\beta)|$。

五、已知向量α, β, γ不共线，证明：$\alpha + \beta + \gamma = 0$的充要条件是$\alpha \times \beta = \beta \times \gamma = \gamma \times \alpha$。

六、已知：$|\alpha| = 2, |\beta| = 5, <\alpha, \beta> = \frac{2\pi}{3}, \omega = \lambda\alpha + 17\beta, \gamma = 3\alpha - \beta$。问：

1、λ为何值时，ω与γ平行；　　　　2、λ为何值时，ω与γ垂直。

七、已知：$|\alpha| = 3, |\beta| = 26, |\alpha \times \beta| = 72$，求$\alpha \cdot \beta$。

八、若$\alpha+3\beta$与$7\alpha-5\beta$垂直，$\alpha-4\beta$与$7\alpha-2\beta$垂直，求α与β的夹角。

九、已知$\overrightarrow{AB}=\alpha-2\beta,\ \overrightarrow{AD}=\alpha-3\beta$，其中$|\alpha|=5,\ |\beta|=3,\ <\alpha,\beta>=\dfrac{\pi}{6}$，求△$ABD$的面积。

习题五 平面及其方程

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、平行于平面$5x-14y+2z+36=0$且与此平面的距离为 3 的平面方程是____
____________________________________。

2、如果平面 $ax+2ay+10z-2=0$ 与 $x+2y+5z=0$ 平行，则 $a=$________________；若垂直，则$a=$________________。

二、求满足下列条件的平面方程：

1、过原点引平面的垂线，垂足是点$M(2,9,-6)$的平面方程。

2、通过点$A(2,-1,3)$且平行于向量$\alpha=(1,-2,1)$及$\beta=(0,3,-4)$的平面方程。

3、通过点$A(1,-5,1)$和$B(3,2,-12)$且平行于y轴的平面方程。

4、通过点 $A(5,-7,4)$ 且在 x, y, z 轴上截距相等的平面方程。

5、求过 x 轴且垂直于平面 $5x+y-3z+3=0$ 的平面方程

三、求过点 $A(2,0,-8)$ 且垂直于平面 $y=2z$和$x=0$ 的平面方程。

四、已知两平面 $x-2y+2z+21=0$和$7x+24z-5=0$，求平分它们所夹二面角的平面方程。

习题六 空间直线及其方程

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、过点$M_1(2,3,-1)$和$M_2(-1,0,3)$的直线方程是________________。

2、过点$M(-2,1,3)$且垂直于直线$\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+2}{-3}$的平面方程是__________________。

3、过点$M(0,-1,3)$且垂直于平面$3x-2y+z+9=0$的直线方程是________________，M点在此平面上的投影点坐标是__________；M点关于此平面的对称点坐标是__________。

4、求下列各组中的直线和平面的关系（相交、平行、垂直或直线在平面上）：

（1）$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$和$4x-2y-2z-3=0$，_____________________；

（2）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$和$3x-2y+7z-8=0$，____________________；

（3）$\dfrac{x-2}{3}=y+2=\dfrac{z-3}{-4}$和$x+y+z-3=0$，_____________________。

二、求直线$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases}$的对称式与参数式方程。

三、求过点$(3, 1, -2)$且通过直线$\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+3}{2} = z$的平面方程。

四、求点$(3, -1, 2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离。

五、求过点 $(-1,-4,3)$ 且与直线 $\begin{cases} 2x-4y+z-1=0 \\ x+3y+5=0 \end{cases}$ 和直线 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$ 都垂直的直线方程。

六、求垂直平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线的平面方程。

七、过点 $(-1, 0, 4)$ 引直线，使它平行于平面 $3x-4y+z-10=0$ 且与直线 $\frac{x+3}{3}=y-3=\frac{z}{2}$ 相交，求该直线的方程。

八、判断两直线 $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{4}$，$x-1=y+2=\frac{z-2}{2}$ 是否在同一平面内？若是，是否平行？若相交，求它们的交点坐标。

习题七　空间曲面与曲线

专业班级________________姓名________________学号____________________

一、填空题：

1、方程 $x^2+y^2+z^2-x+2y-2z=0$ 表示的空间曲面是________________。

2、xoy 平面上的曲线 $\begin{cases}3x^2-2y^2=6\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周的旋转曲面是________

__________________，该曲面的方程是____________________。绕 y 轴旋转一周的旋转曲面是____________________，该曲面的方程是__________________。

3、yoz 平面上的曲线 $\begin{cases}2y^2+1=z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面是____________

______________，该曲面的方程是__________________。

4、zox 平面上的曲线 $\begin{cases}4x^2+9z^2=36\\y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周的旋转曲面是_________

__________________，该曲面的方程是__________________。

5、方程 $4x+y^2=0$ 在平面直角坐标系中表示的是____________________，在空间直角坐标系中表示的是____________________。

6、方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\x=-2\end{cases}$ 在平面直角坐标系中表示的是____________________，

在空间直角坐标系中表示的是____________________。

7、曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=10\\x-2y=0\end{cases}$ 的参数方程为_____________________。

8、曲线 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\z=-1\end{cases}$ 的参数方程为_____________________。

9、母线平行于 y 轴，且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程

是______________________。

10、球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 xoy 平面上的投影曲线方程是______________________。

11、曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ z=x+1 \end{cases}$ 在 $y=0$ 坐标面上的投影曲线方程是______________。

二、一球面通过四点 $(1,-2,0),\ (1,0,2),\ (3,-2,2),\ (1,-2,4)$，求该球面的方程。

三、求与点 $A(1,-1,1)$ 及点 $B(-2,2,1)$ 距离之比为 1：2 的点的全体组成的曲面方程，它表示怎样的曲面？

习题八　二次曲面

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、写出下列方程所表示的曲面的名称，并作出图形：

（1）$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$　　（2）$16x^2+4y^2-z^2=64$　　（3）$2y^2+2z^2-x=0$

二、画出曲面$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$的图形以及被下列各平面截得的曲线方程，并指出它们是什么曲线？

（1）$x=2$；　　（2）$y=0$；　　（3）$z=2$。

三、指出下列方程组所表示的曲线：

（1）$\begin{cases} y^2+3z^2-4x+8=0 \\ y=4 \end{cases}$　　　　（2）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1 \\ z=-2 \end{cases}$

四、画出下列各组曲面所围成的立体的图形：

（1）$z=0,\ z=3,\ x-y=0,\ x-\sqrt{3}y=0,\ x^2+y^2=1$，在第一卦限内；

（2）$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2$；

（3）$x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=1,\ z=4-2x^2-y^2$，在第一卦限内。

习题九　多元函数的基本概念

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、选择题：

1、平面集合$\{(x,y)|x>0,y>0\}\cup\{(x,y)|x<0,y<0\}$是（　）。

（A）开区域；　（B）闭区域；　（C）开集。

2、平面集合$\{(x,y)|y\geq 1\text{或}y\leq -1\}$是（　）。

（A）闭区域；　（B）既非闭区域又非开闭域；　（C）开区域。

3、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^3+y^2}=$（　）。

（A）等于 0；　（B）不存在；　（C）等于 1。

4、定义在R^2上的$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}, & (x,y)\neq(1,-1)\\ 0, & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$的不连续点集合是（　）。

（A）直线$x=1$；　（B）直线$y=-1$；　（C）单点集$\{(1,-1)\}$。

二、填空题：

1、设$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，则$f(x+y,x-y)=$________________________；

2、若$f(x+y,y/x)=x^2-y^2$，则$f(x,y)=$___________________________；

3、$u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$的定义域是________________________________。

三、求下列函数的定义域，并作出定义域的图形：

1、$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

2、$z=\ln(1-(|x|+|y|))$。

四、计算下列极限：

1、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$；

2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

五、证明：极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在。

六、设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问$f(x,y)$在点$(0,0)$处是否连续？。

习题十　偏导数

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、选择题：

1、 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处（　）

（A）一定连续；　（B）一定不连续；　（C）不一定连续。

2、曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向间夹角为（　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$；　（B）$\dfrac{\pi}{6}$；　（C）$\dfrac{\pi}{4}$。

3、 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$，其中 f 可微，则 $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）

（A）1；　（B）$2f'$；　（C）0。

二、填空题：

1、设 $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$，及 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 分别为______和__________。

2、设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}+xe^{-xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____。

3、设 $u=x^{\frac{z}{y}}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$____________________________________，

二、计算题：

1、设 $z=(1+xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}$。

2、设 $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$，求 z_x,z_y。

3、设$u=\arctan(x-y)^z$，求u_x, u_y, u_z。

4、设$z=x\ln(x\sin y)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

五、设函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

1、计算$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；　　　2、证明f在$(0,0)$点不连续。

习题十一　全微分及其应用

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、是非题：

1、 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微的充分必要条件。　　（　）

2、若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则偏导数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处必连续。　　（　　）

二、填空题：

1、设 $z=e^{xy}$，则 $dz|_{(1,1)}=$________，当 $\Delta x=0.01, \Delta y=0.02$ 时，$dz|_{(1,1)}=$____。

2、设 $z=\ln\sin\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$____。

3、设 $z=\ln(1+\dfrac{x}{y^2})$，则 $dz|_{(1,1)}=$____。

三、计算题：

1、 $z=\arcsin\dfrac{y^2}{x}$，求 dz。

2、 $u=\ln(x^x y^y z^z)$，求 du。

3、 $z = x2^{xy}$，求 dz 及 $dz|_{(1,0)}$。

四、研究函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0, 0)$ 点的可微性。

五、证明 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点可微。

习题十二　多元复合函数的微分法

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、求下列复合函数的导数或偏导数：

1、$u=x^{y}$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，则 $u'(t)=$__________________________________

2、$z=u^{2}+vw,\ u=x+y,\ v=x^{2},w=xy$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=$______；　$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)}=$______

3、设 $u=f(x+y,xy)$，其中 f 可微，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$_____________________________；

$\frac{\partial u}{\partial y}=$________________________。

4、设 $w=\frac{1}{u}$，$u=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$，则 $\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}w}{\partial z^{2}}=$__________________。

5、设 $z=\frac{y}{f(x^{2}-y^{2})}$，其中 f 可微，则 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=$________________。

二、求下列函数的二阶偏导数，其中 f 有连续的二阶导数或偏导数：

1、$z=f(x^{2}+y^{2})$，求 $\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}},\frac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}$；

2、$z=f(x,y,\frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}},\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}$；

三、函数$u(x,t)$有二阶连续偏导数，引入$\xi = x - at,\ \eta = x + at\ (a \neq 0$为常数$)$后变为$u(\xi,\eta)$，问方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$变为什么形式？你能写出一个满足此方程的函数$u(\xi,\eta)$吗？

习题十三　隐函数微分法

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、设 $\cos(x^2+yz)=xz+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

二、设 $e^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

三、证明方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$（其中 $F(u)$ 有连续导数）所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $(cy-bz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$

四、设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{dz}{dx}$。

五、设$x = e^u \cos v,\ \ y = e^u \sin v,\ \ z = uv,$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

六、设$u = f(x, y, z) = xy^2z^3$，而x, y, z满足方程$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$，设$z = z(x, y)$是由上述方程所确定的隐函数，$z(1,1) = 1,$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1)}$。

习题十四　方向导数与梯度

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、是非题：

1、若 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的方向导数均存在，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处必可微。（　　）

2、若 $u=F(x,y,z)$ 可微，则方向 $\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ 是 u 在点 (x,y,z) 处变化率最大的方向。（　　）

二、填空题：

1、设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\mathrm{grad}f(0,0,0)=$____________________，$\mathrm{grad}f(1,1,1)=$______________________。

2、求函数 $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $(1,2)$ 沿 ox 轴成 135° 方向上的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}|_{(1,2)}=$______________________________。

三、计算题：

1、求函数 $u=3x^2+z^2-2yz+2xz$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿点 $(-1,1,-2)$ 至 $(5,4,0)$ 方向上的方向导数。

2、求函数 $u=x^2+y+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿该点外法线方向的方向导数。

3、已知$\vec{\alpha}=y^2\vec{i}+2xy\vec{j}-xz^2\vec{k}, u=z^2-x^2y$，试在$M(-1,-1,1)$处计算

（1）$(\vec{\alpha}\cdot\operatorname{grad}u)|_M$，，　　　　（2）$(\vec{\alpha}\times\operatorname{grad}u)|_M$

4、设 $f(x,y,z)=\ln(x+y+z+\sqrt{1+(x+y+z)^2})$，它在点(1,1,1)处沿哪个方向的变化率最大？求出这个方向的方向余弦及 f 在点(1,1,1)处的最大变化率。

5、求函数 $f(x,y)=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点内法线方向上的方向导数。

习题十五　多元函数微分法的几何应用

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、椭球面$2x^2+3y^2+z^2=6$ 点$P(1,1,1)$处的切平面方程是______________。

法线方程是________________________。

2、曲线$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\frac{t}{2},$ 在点$(\frac{\pi}{2}-1,1,\ 2\sqrt{2})$处的切线方程是

__________________________；法平面方程是___________________________。

3、设曲面S的方程是$F(cx-az,cy-bz)=0$，其中F可微，a,b,c是非零常数，

则点$M(x_0,y_0,z_0)\in S$处的法向量是___________________________。

二、计算题：

1、求曲线$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$上的点，使曲线在该点的切线平行于平面

$x+2y+z=4$。

2、求曲面$e^z-z+xy=3$在点$(2,1,0)$处的切平面及法线方程。

3、求曲线$\begin{cases} xyz=1 \\ y^2=x \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线的方向余弦。

4、求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2 \\ y^2+x^2=2ax \end{cases}$ $(a>0)$在点$M(a,a,\sqrt{2}a)$处的切线及法平面方程。

三、证明：曲面$xyz=a^3(a>0)$的切平面与坐标平面围成的四面体的体积为常数。

习题十六　多元函数的极值

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、是非题：

1、若点$P(x_0,y_0)$为$z=f(x,y)$的极值点，则必有$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$。

2、设$f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$的某邻域内有连续的二阶偏导数，令$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$，若$A>0,B^2-AC<0$，则$f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$处取极小值。（　）

二、求函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的极值。

三、求曲面$z=xy$被平面$x+y=1$所截的曲线的最高点的坐标。

四、造一个容积等于a的长方形无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小。

五、求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$在第一封限内的点，使得椭球面过该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，最小体积是多少？

六、抛物面$z=x^2+y^2$被平面$x+y+z=1$截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

习题十七　二重积分的概念与性质

专业班级________________姓名________________学号__________________

一、比较下列各对积分值的大小，并说明理由。

（1）$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$_____ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，其中区域$D$由$x$轴，$y$轴与直线$x+y=1$围成。

（2）$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$____ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，其中区域$D$由圆$(x-2)^2+(y-1)^2=2$围成。

（3）$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$____ $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中区域$D$是顶点为(1,0), (1,1)和(2,0)的三角形区域。

（4）$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$____ $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\,|\,3\le x\le 6,\ 0\le y\le 1\right\}$。

二、利用二重积分的性质估计下列积分值：

（1）设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}$，则____ $\le \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma \le$____。

（2）设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$，则______ $\le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma \le$______。

（3）设$D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\le 10\}$，则_____ $\le \iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \le$_____。

三、由二重积分的几何意义，指出$\iint\limits_D (1-x-y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$中$f(\xi,\eta)$的值，其中$D$是顶点为$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$的三角形，σ是D的面积。

四、若 $f(x,y)$ 在闭区域 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 上连续，证明：

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\frac{1}{\pi\alpha\beta}\iint_{D_{\alpha\beta}} f(x,y)\,d\sigma = f(($$

其中 $0<\alpha<a,\ 0<\beta<b,\quad D_{\alpha\beta}=\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}\le 1\}$ 。

习题十八　二重积分的计算

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、交换下列累次积分的积分次序：

（1）$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=$____；

（2）$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx=$________________________。

二、画出积分区域，并计算下列二重积分：

1、$\iint\limits_D \frac{x}{1+y^2}d\sigma$，其中$D$为矩形为区域$0\le x\le 2,\quad -1\le y\le 1$。

2、$\iint\limits_D (x^2+y^2-x)d\sigma$，其中$D$为由直线$y=2,\quad y=x,\quad$及$y=2x$围成的闭区域。

3、$\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$，其中$D$由$|x|+|y|\le 1$所确定的闭区域。

4、$\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{2a-x}}$，其中$D$是由$(x-a)^2+(y-a)^2 \ge a^2, 0 \le x \le a, 0 \le y \le a$所确定的闭区域。

5、$\iint\limits_D e^{y^2} d\sigma$，其中$D$是第一象限内由直线$y=x$和曲线$y=\sqrt[3]{x}$围成的闭区域。

二、计算下列累次积分：

1、$I=\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^1 ye^{xy} dy$；

2、$I=\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$

习题十九　二重积分的计算（续）

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、利用极坐标计算下列二重积分：

1、$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，$D=\{(x,y)\mid x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$；

2、$I=\iint\limits_D |x|dxdy$，其中 D 是以原点为圆心，以 a 为半径的上半圆；

3、$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$， D 为圆 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ 及直线 $y=x, y=0$ 所包围的在第一象限内的区域；

4、$\iint\limits_D xydxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid y\ge 0,\ x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 2x\}$。

二、将下列直角坐标系下的二次积分化为极坐标系下的二次积分：

1、$\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy=$____ 。

2、$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy=$____________________________ 。

三、把下列积分化为极坐标形式的累次积分并计算积分值：

1、$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}(x^2+y^2)dx$；　　2、$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$ 。

四、设 $F(t)=\iint\limits_{D(t)} e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 $D(t)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2, t>0\right\}$，求 $F'(t)$ 。

五、作适当的坐标变换，求 $\iint\limits_{D}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$,其中 $D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$ 。

习题二十　三重积分的概念及计算

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、　填空题：

1、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 是由曲面 $cz=xy,\ (c>0),\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ 围成的第一卦限的区域，则在直角坐标系下化为先对 z 再对 y 最后对 x 的累次积分 $I=$____。

2、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 是由曲面 $2z=x^2+y^2$，平面 $z=1,\ z=2$ 围成的区域，则在直角坐标系下化为先对 x 再对 y 最后对 z 的累次积分

$I=$____。

3、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} \frac{z^3\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dv$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，则积分值 $I=$___

4、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}dv$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$，则积分值 $I=$______________________________。

二、计算题：

1、$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dv}{(1+x+y+z)^3}$，$\Omega$ 为平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 及 $x+y+z=1$ 围成的四面体。

2、$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$，$\Omega$为抛物柱面$y=\sqrt{x}$及平面$y=0,\ z=0,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}$围成的区域。

3、$I=\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dv$，其中$\Omega$是由曲面$z=xy$与平面$y=x,x=1$和$z=0$围成的区域。

4、$\iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz$，其中$\Omega$是平面$z=0,z=y,y=1$及抛物柱面$y=x^2$围成的区域。

5、$\iiint\limits_{\Omega} e^y dv$，其中$\Omega$由$x^2-y^2+z^2=1,y=0,y=2$围成。

习题二十一　三重积分的计算（续）

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的区域，则在直角坐标、柱面坐标系下的累次积分分别为

$I_{直}=$____;

$I_{柱}=$____。

2、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=1,\ z=0$ 围成的区域，则在直角坐标、柱面坐标系下的累次积分分别为

$I_{直}=$____;

$I_{柱}=$____。

3、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\}$，则在球面坐标下的累次积分为 $I=$____。

4、$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2+z^2=1$ 围成的区域（含在锥内），则在三种坐标下的累次积分分别为

$I_{直}=$____;

$I_{柱}=$____;

$I_{球}=$____;

二、计算题：

1、$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dv,\ \Omega$ 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0,z=2,y=0$ 围成的区域。

2、$\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}dv,\ \Omega$是由$z=x^2+y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成的区域。

3、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv,\ \Omega$为两个半球面$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$(A>a>0)$及平面$z=0$围成的区域。

4、$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv,\ \Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$围成的区域。

三、设函数 f 有连续导数且 $f(0)=0$，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2, t>0\}$，

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$，求(1) $F(t)$ 在球坐标系下的表示式；(2) $F'(t)$；

(3) $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{\pi t^4}$。

习题二十二　重积分的应用

专业班级________________姓名_______________学号__________________

、求曲线 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积。

二、求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下部分的曲面面积。

三、求锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截部分的曲面面积。

四、设平面薄片所占的区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\rho(x,y)=x^2y$，求该薄片的重心。

五、求由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=1$ 围成的均匀薄片（面密度为常数 ρ ）对于直线 $y=-1$ 转动惯量。

六、一个物体是由两个半径各为 A 和 $a(0<a<A)$ 的同心球面围成，已知其内部任一点处的密度与该点到球心的距离成反比，且在距离等于 1 处等于 2，求物体的质量。

七、一均匀物体（密度 ρ 为常数）占有的区域 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0,|x|=a,|y|=a$ 围成。

1、求其体积； 2、求物体的重心； 3、求物体关于 z 轴的转动惯量。