本周教学内容

回溯算法的设计与实现

搜索树结点数的估计

图的着色问题

回溯算法的递归与迭代实现

回溯算法的基本思想和适用条件

回溯算法的例子：
n后放置、0-1背包、货郎问题

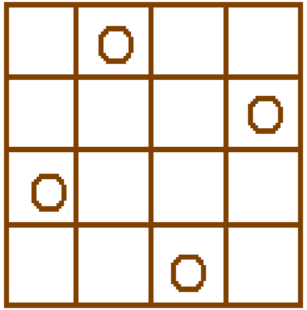
几个回溯算法的例子

4后问题

4后问题：在 4×4 的方格棋盘上放置4个皇后，使得没有两个皇后在同一行、同一列、也不在同一条45度的斜线上. 问有多少种可能的布局？

解是 4 维向量 $< x_1, x_2, x_3, x_4 >$

解：<2,4,1,3>，<3,1,4,2>

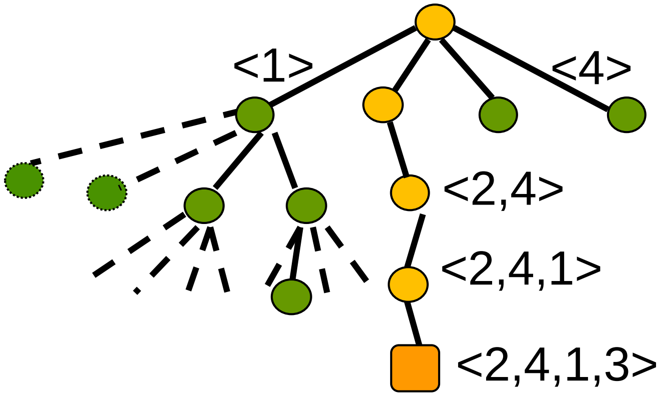


推广到8后问题

解： 8维向量，有 92个.

例如：<1,5,8,6,3,7,2,4>是解.

搜索空间：4叉树



每个结点有4个儿子，分别代表选择1,2,3,4列位置

第 *i* 层选择解向量中第 *i* 个分量的值

最深层的树叶是解

按深度优先次序遍历树，找到所有解

0-1背包问题

问题：

有n种物品，每种物品只有 1个. 第i 种物品价值为 v_i, 重量为 w_i, i =1,2,…, n. 问如何选择放入背包的物品，使得总重量不超过 B, 而价值达到最大?

实例：

V={12,11,9,8}，W={8,6,4,3}，B=13

最优解：

<0,1,1,1>，价值: 28，重量: 13

算法设计

解：n维0-1向量$<x_1, x_2, ..., x_n>$，
$x_i=1 \Leftrightarrow$物品 i 选入背包

结点：$<x_1, x_2,..., x_k>$（部分向量）

搜索空间：0-1取值的二叉树，称为**子集树**，有2^n片树叶.

可行解:满足约束条件$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le B$ 的解
最优解:可行解中价值达到最大的解

实例

输入：

V={12,11,9,8}，W={8,6,4,3}，B=13

2个可行解：

<0,1,1,1>，选入物品2,3,4，价值为28，重量为13

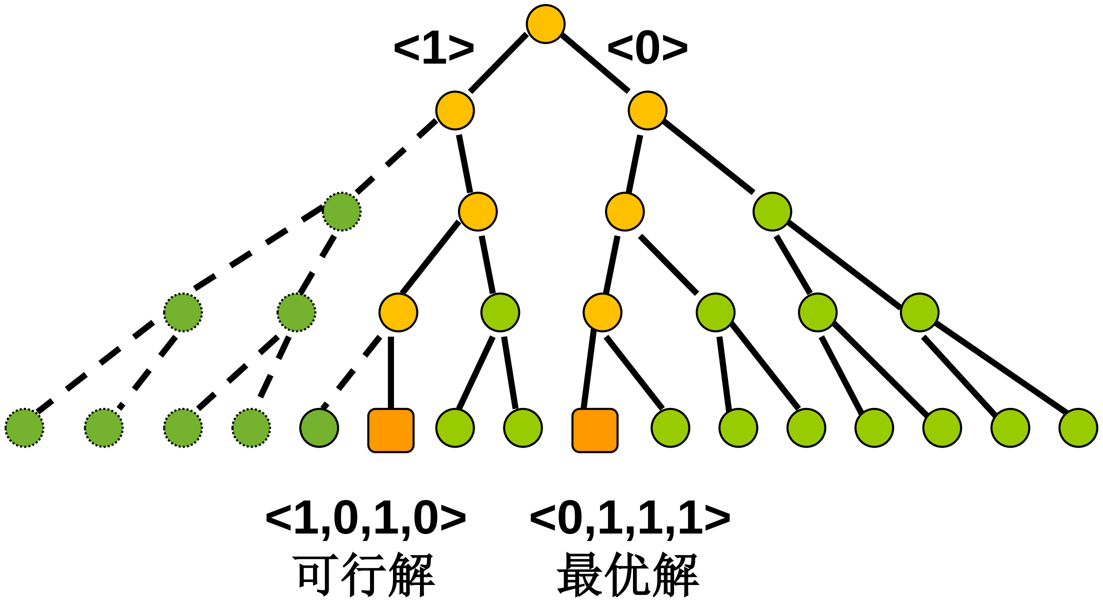
<1,0,1,0>，选入物品1,3，价值为21，重量为12

最优解：<0,1,1,1>

搜索空间

实例:V={12,11,9,8}, W={8,6,4,3}, B=13

搜索空间：子集树，2^n片树叶



货郎问题

问题：有n个城市，已知任两个城市之间的距离，求一条每个城市恰好经过一次的回路，使得总长度最小.

建模：城市集$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$, 距离

$$d(c_i,c_j)=d(c_j,c_i)\in \mathrm{Z}^+,\ 1\le i<j\le n$$

求：$\underline{1,2,\ldots,n\text{的排列 } k_1,k_2,\ldots,k_n}$使得

$$\boxed{\min\{\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{k_i},c_{k_{i+1}})+d(c_{k_n},c_{k_1})\}}$$

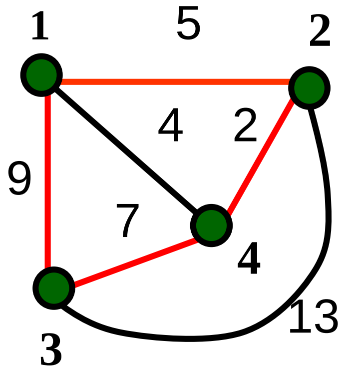
实例

$C = \{1,2,3,4\}$

$d(1,2)=5$, $d(1,3)=9$,

$d(1,4)=4$, $d(2,3)=13$,

$d(2,4)=2$, $d(3,4)=7$

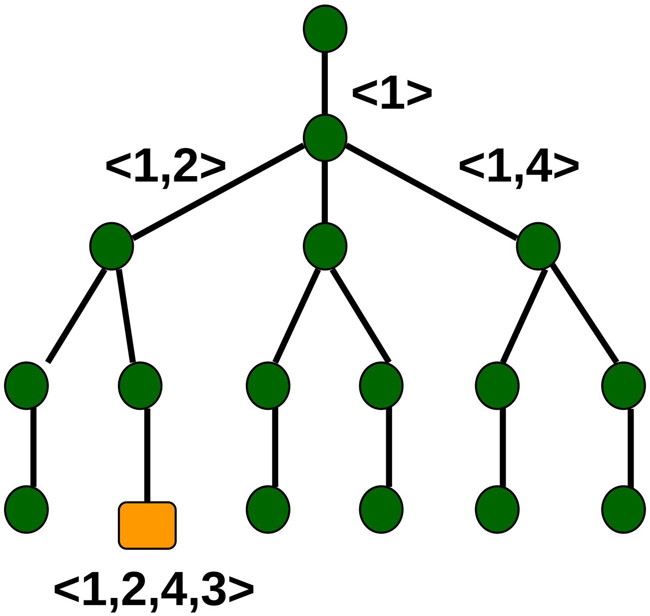


解：< 1, 2, 4, 3 > ,

长度 = 5 + 2 + 7 + 9 = 23

搜索空间

排列树, 有(n-1)!片树叶



小结

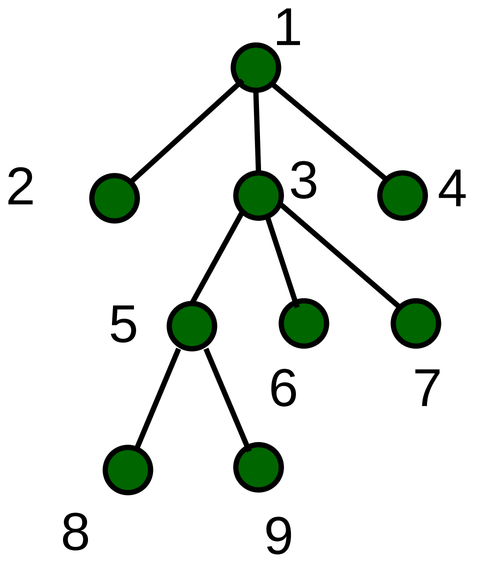
- 回朔算法的例子：*n*后问题，0-1背包问题，货郎问题
- 解：向量
- 搜索空间：树，可能是*n*叉树、子集树、排列树等等，树的结点对应于部分向量，可行解在叶结点
- 搜索方法：深度优先, 宽度优先, ... 跳越式遍历搜索树，找到解

回溯算法的设计
思想和适用条件

问题分析

问题	解性质	解描述向量	搜索空间	搜索方式	约束条件
n 后	可行解	$<x_1, x_2,\ldots,x_n>$ x_i：第 i 行列号	***n*** 叉树	深度,宽度优先	彼此不攻击
0-1 背包	最优解	$<x_1, x_2,\ldots,x_n>$ $x_i = 0,1$, $x_i = 1 \Leftrightarrow$ 选 i	子集树	深度,宽度优先	不超背包重量
货郎	最优解	$< i_1=1, i_2,\ldots,i_n>$ $1,2,\ldots,n$ 的排列	排列树	深度,宽度优先	选没有经过的城市
特点	搜索解	向量，不断扩张部分向量	树	跳跃式遍历	约束条件回溯判定

深度与宽度优先搜索



深度优先访问顺序：

1→2→3→5→8→9 →6→7→4

宽度优先访问顺序：

1→2→3→4→5→6 →7→8→9

回溯算法基本思想

(1) 适用：求解搜索问题和优化问题.

(2) 搜索空间：树，结点对应部分解向量，可行解在树叶上.

(3) 搜索过程：采用系统的方法隐含遍历搜索树.

(4) 搜索策略：深度优先，宽度优先，函数优先，宽深结合等.

回溯算法基本思想(续)

(5) 结点分支判定条件：

满足约束条件---分支扩张解向量

不满足约束条件，回溯到该结点的父结点.

(6) 结点状态：动态生成

白结点(尚未访问)

灰结点(正在访问该结点为根的子树)

黑结点(该结点为根的子树遍历完成)

(7) 存储：当前路径

结点状态

深度优先

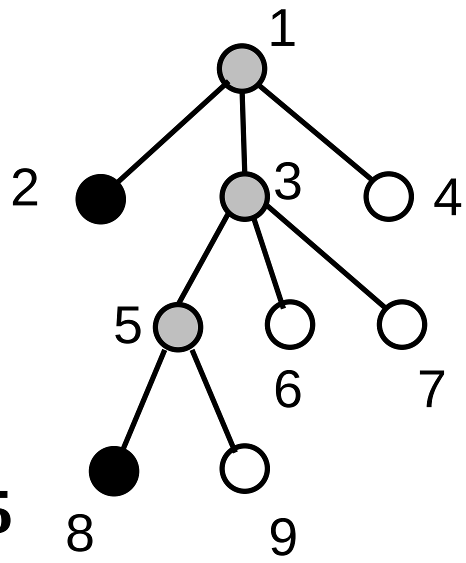
访问次序：

1→2→3→5→8

已完成访问：**2, 8**

已访问但未结束：**1, 3, 5**

尚未访问：**9, 6, 7, 4**



回溯算法的适用条件

在结点$<x_1,x_2,\ldots,x_k>$处

$P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 为真

$\Leftrightarrow$ 向量$<x_1, x_2, \ldots, x_k>$ 满足某个性质

(n后中 k个皇后放在彼此不攻击的位置）

多米诺性质

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}) \rightarrow P(x_1,x_2,\ldots,x_k) \quad 0<k<n$$

$$\neg P(x_1,x_2,\ldots,x_k) \rightarrow \neg P(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}) \quad 0<k<n$$

k 维向量不满足约束条件，扩张向量到 k+1维仍旧不满足，可以回溯.

一个反例

例 求不等式的整数解

$$5x_1+4x_2-x_3\le 10,\ 1\le x_k\le 3,\ k=1,2,3$$

$P(x_1, \ldots, x_k)$：将 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 代入原不等式的相应部分，部分和小于等于10

不满足多米诺性质：

$$5x_1+4x_2-x_3\le 10 \not\Rightarrow 5x_1+4x_2\le 10$$

变换使得问题满足多米诺性质：

令 $x_3 = 3 - x_3'$,

$$5x_1+4x_2+x_3'\le 13$$

$$1\le x_1,\ x_2\le 3,\ 0\le x_3'\le 2$$

小结

- 回溯算法的适用条件：
  多米诺性质

- 回溯算法的设计步骤

  (1) 定义解向量和每个分量的取值范围
  解向量 为 $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$
  确定 x_i 的取值集合为 X_i , $i = 1,2,\ldots, n$.

小结（续）

(2) 在<x_1,x_2,…,$x_{k\text{-}1}$>确定如何计算 x_k 取值集合S_k, $S_k \subseteq X_k$

(3) 确定结点儿子的排列规则

(4) 判断是否满足多米诺性质

(5) 确定每个结点分支的约束条件

(6) 确定搜索策略: 深度优先,宽度优先等

(7) 确定存储搜索路径的数据结构

回溯算法的
实现及实例

回溯算法递归实现

算法 **ReBack** (k)

1. if $k>n$ then $<x_1,x_2,\ldots,x_n>$是解
2. else while $S_k \neq \varnothing$ do
3. $\quad x_k \leftarrow S_k$ 中最小值
4. $\quad S_k \leftarrow S_k - \{x_k\}$
5. $\quad$计算 S_{k+1}
6. $\quad$**ReBack** (k+1)

算法 ReBacktrack (n)

输入：n

输出：所有的解

1. for $k \leftarrow 1$ to n 计算 X_k且$S_k \leftarrow X_k$
2. ReBack (1)

迭代实现

迭代算法 Backtrack

输入：n

输出：所有的解

1. 对于 i =1, 2, … , n 确定X_i
2. $k \leftarrow 1$
3. 计算 S_k
4. while $S_k \neq \varnothing$ do
5. $x_k \leftarrow S_k$中最小值； $S_k \leftarrow S_k - \{x_k\}$
6. if $k < n$ then
7. $k \leftarrow k+1$； 计算 S_k
8. else $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$是解
9. if $k > 1$ then $k \leftarrow k-1$； goto 4

确定初始取值

满足约束分支搜索

回溯

装载问题

问题：有n个集装箱，需要装上两艘载重分别为c_1和c_2的轮船. w_i为第 i 个集装箱的重量，且 $w_1+w_2+\ldots+w_n \leq c_1+c_2$

问：是否存在一种合理的装载方案把这 n 个集装箱装上船？如果有，请给出一种方案.

实例：

$W = < \underline{90},80,\underline{40},30,20,\underline{12,10} >$

c_1=152，c_2=130

解: 1,3,6,7装第一艘船，其余第2艘船

求解思路

输入: $W=<w_1,w_2, \ldots, w_n>$为集装箱重量

c_1和c_2为船的最大载重量

算法思想：令第一艘船的装入量为W_1,

1. 用回溯算法求使得c_1-W_1达到最小的装载方案.
2. 若满足

$$w_1+w_2+\ldots+w_n-W_1 \le c_2$$

则回答“Yes”，否则回答“No”

伪码

B为当前空隙
best 最小空隙

算法 Loading (W, c_1),

1. Sort(W);
2. $B \leftarrow c_1$; $best \leftarrow c_1$; $i \leftarrow 1$;
3. while $i \le n$ do
4. if 装入 i后重量不超过 c_1
5. then $B \leftarrow B - w_i$; $x[i] \leftarrow 1$; $i \leftarrow i+1$;
6. else $x[i] \leftarrow 0$; $i \leftarrow i+1$;
7. if $B < best$ then 记录解；$best \leftarrow B$;
8. Backtrack(i); 回溯
9. if i=1 then return 最优解
10. else goto 3 .

子过程 Backtrack

算法 Backtrack(i)

```
while i >1 and x[ i ] = 0 do
    i←i–1;
if  x[i]=1
then  x[i]←0;
      B←B+w_i ;
      i←i+1.
```

沿右分支一
直回溯发现
左分支边,
或到根为止

实例

$W = < 90,80,40,30,20,12,10 >$

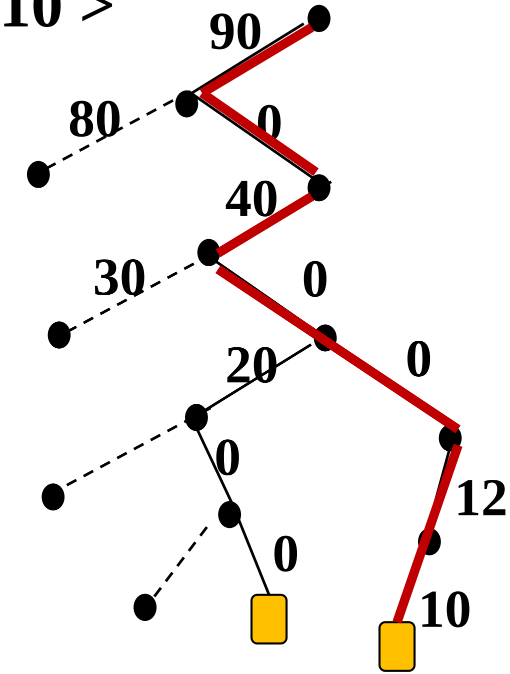
c_1=152, c_2=130

解:

可以装，方案如下:

1,3,6,7 装第一艘船

2,4,5 装第二艘船



时间复杂性:

$W(n)=O(2^n)$

小结

- 回溯算法的实现：
  递归实现、迭代实现

- 装载问题
  问题描述
  算法伪码
  最坏情况下时间复杂度$O(2^n)$

图的着色

着色问题

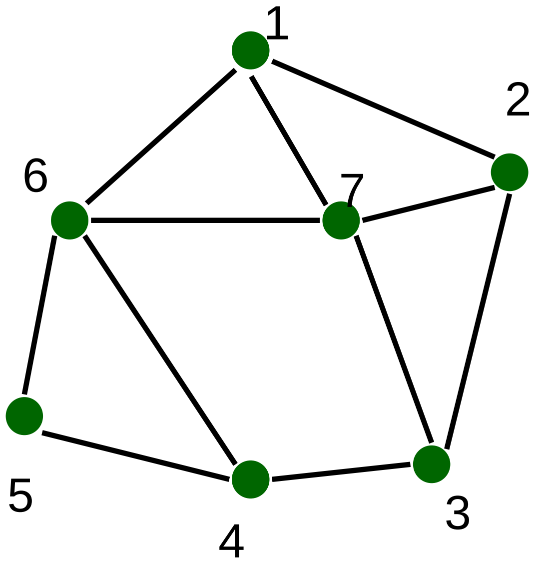
输入：

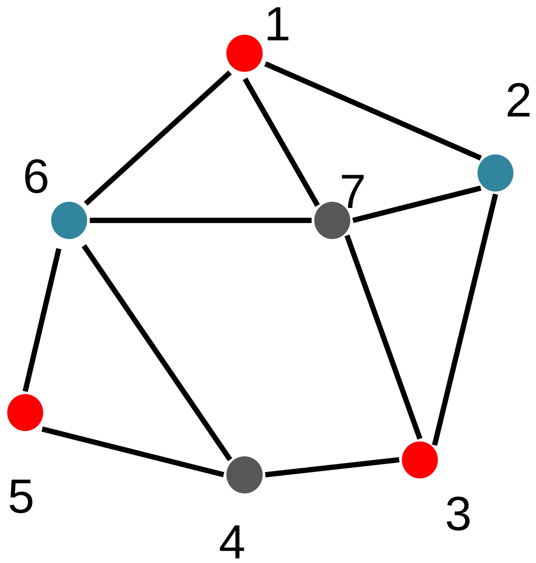
无向连通图 G和 m 种颜色的集合

用这些颜色给图的顶点着色，每个顶点一种颜色. 要求是：G 的每条边的两个顶点着不同颜色.

输出：所有可能的着色方案.
如果不存在着色方案，回答 “**No**”.

实例





***n*=7，*m*=3**

解向量

设 $G=(V,E)$，$V=\{1,2, \ldots, n\}$

颜色编号：$1, 2, \ldots, m$

解向量：$<x_1, x_2, \ldots, x_n>$，

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1,2, \ldots, m\}$

结点的部分向量 $<x_1, x_2, \ldots, x_k>$

$x_1, x_2, \ldots, x_k,\ 1 \le k \le n$，

表示只给顶点1,2,...,k着色的部分方案

算法设计

搜索树：m叉树

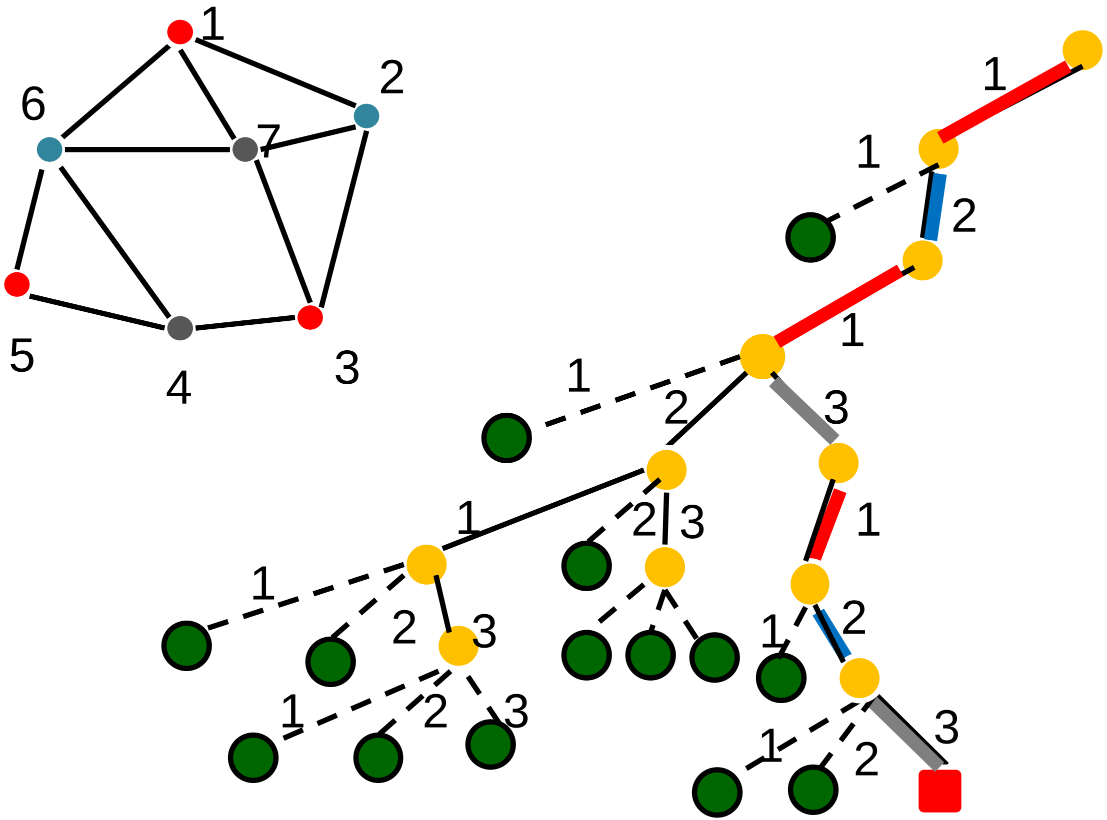
约束条件：在结点$<x_1, x_2, \dots, x_k>$处，顶点 k+1 的邻接表中结点已用过的颜色不能再用

如果邻接表中结点已用过m种颜色，则结点 k+1没法着色，从该结点回溯到其父结点. 满足多米诺性质

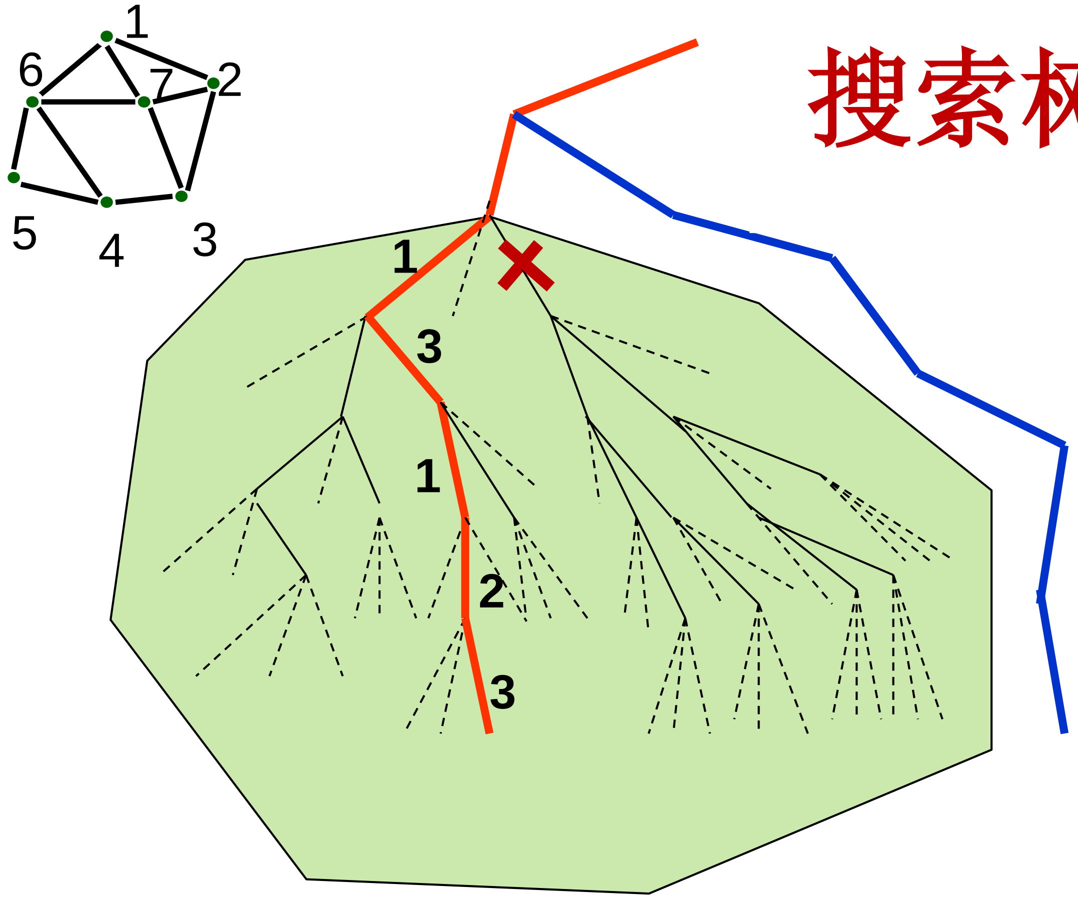
搜索策略：深度优先

时间复杂度：$O(n\, m^n)$

运行实例



搜索树



第一个解向量：< 1, 2, 1, 3, 1, 2, 3 >

时间复杂度与改进途径

时间复杂度：$O(nm^n)$

根据对称性，只需搜索 1/3 的解空间. 当1和2确定, 即<1,2> 以后，只有 1 个解, 在 <1,3> 为根的子树中也只有 1 个解. 由于3个子树的对称性，总共6个解.

在取定<1,2>后，不可扩张成<1,2,3>, 因为7和1,2,3都相邻. 7没法着色. 可以从打叉的结点回溯，而不必搜索其子树.

着色问题的应用

会场分配问题：

有 n项活动需要安排, 对于活动 i, j, 如果 i, j 时间冲突，就说 i 与 j 不相容. 如何分配这些活动,使得每个会场的活动相容且占用会场数最少?

建模：

活动作为图的顶点，如果i, j不相容, 则在 i 与 j之间加一条边，会场标号作为颜色标号. 求图的一种着色方案, 使得使用的颜色数最少.

小结

- 着色问题的描述
- 着色问题的算法设计
- 时间复杂度及改进途径
- 着色问题的应用

搜索树结点数的估计

搜索树结点数估计

Monte Carlo方法

1. 从根开始，随机选择一条路经，直到不能分支为止, 即从 $x_1, x_2, \ldots,$ 依次对 x_i 赋值，每个 x_i 的值是从当时的 S_i 中随机选取，直到向量不能扩张为止.

2. 假定搜索树的其他 $|S_i|-1$ 个分支与以上随机选出的路径一样，计数搜索树的点数.

3. 重复步骤 1 和 2，将结点数进行概率平均.

伪码

Monte Carlo

输入：*n* 为皇后数，*t* 为抽样次数

输出：*sum*, 即*t* 次抽样路长平均值

```
sum ← 0
for i ← 1 to t do          // 取样次数 t
    m ← Estimate(n)        // m为结点数
    sum ← sum + m
sum ← sum / t
```

一次抽样结果

一次抽样

m为本次取样得到的树结点总数

k 为层数

r_2为上层结点数

r_1为本层结点数

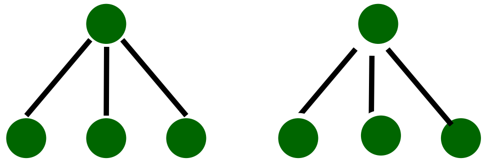
$r_1 = r_2 \cdot$ 分支数

n 为树的层数

从树根向下计算,随机选择,直到树叶.

$r_2 = 2$

$r_1 = r_2 \cdot 3 = 6$



子过程的伪码

算法Estimate(n)

1. $m \leftarrow 1$; $r_2 \leftarrow 1$; $k \leftarrow 1$ // m 为结点总数
2. **while** $k \le n$ **do**
3. **if** $S_k = \varnothing$ **then return** m

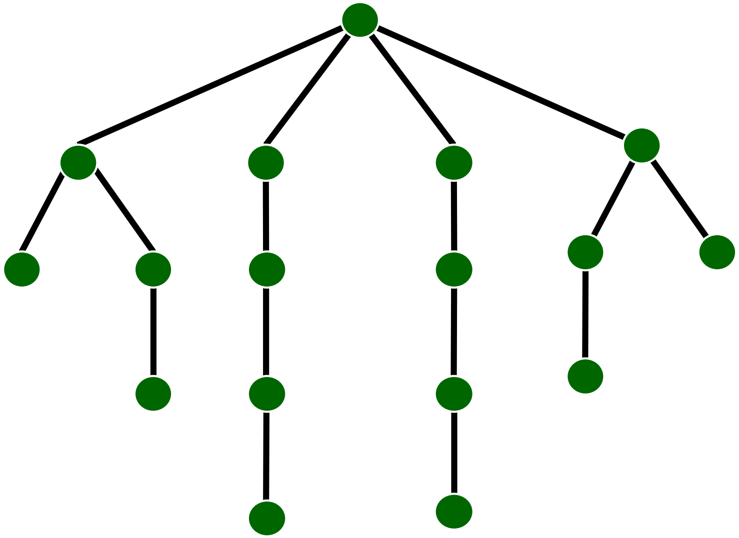
   不能分支

4. $r_1 \leftarrow |S_k| * r_2$ // r_1为扩张后结点总数
5. $m \leftarrow m + r_1$ // r_2为扩张前结点总数
6. $x_k \leftarrow$随机选择 S_k 的元素

   随机选择一步

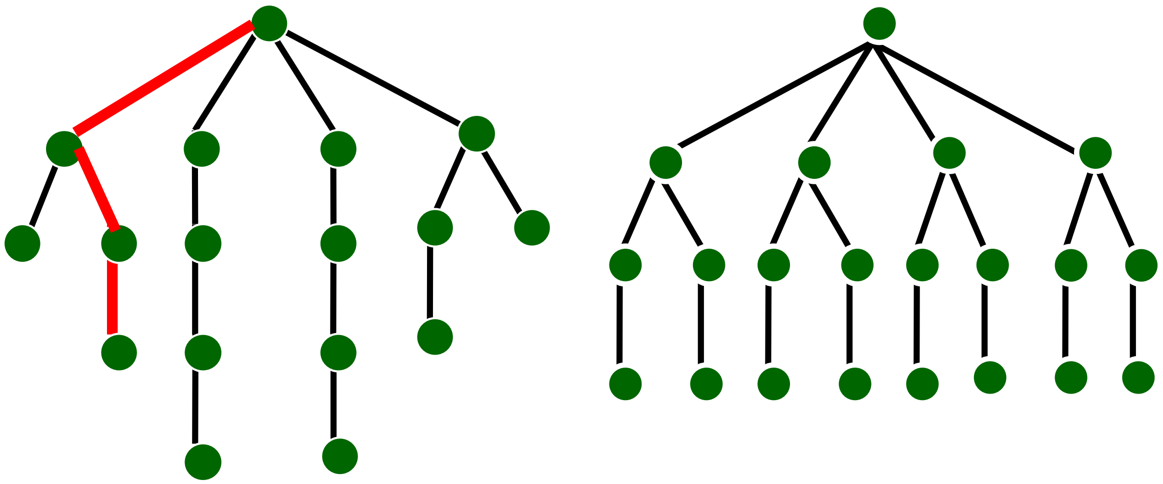
7. $r_2 \leftarrow r_1$
8. $k \leftarrow k+1$

4后搜索树遍历的结点



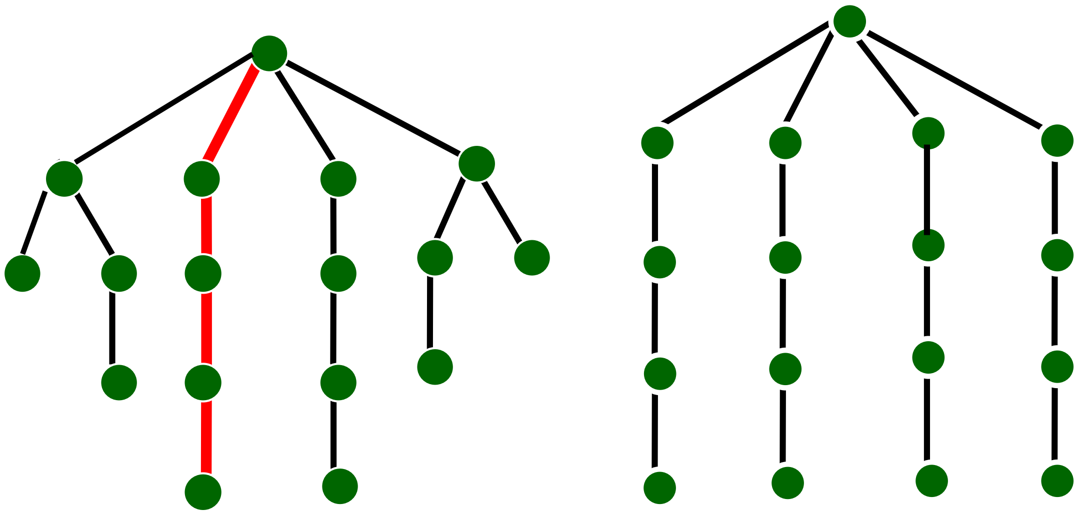
结点数=17

随机选择路径1



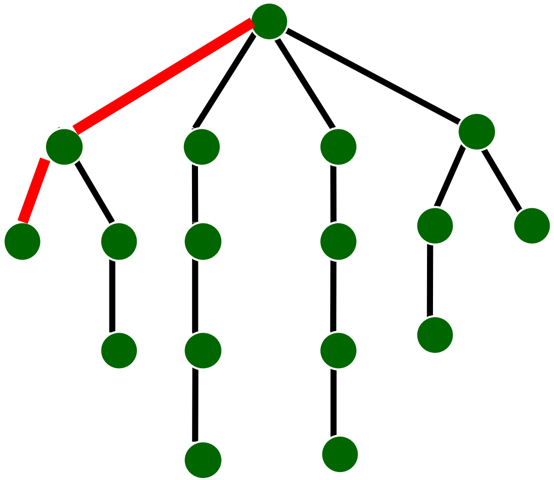
Case1: <1,4,2>,　　　结点数 21

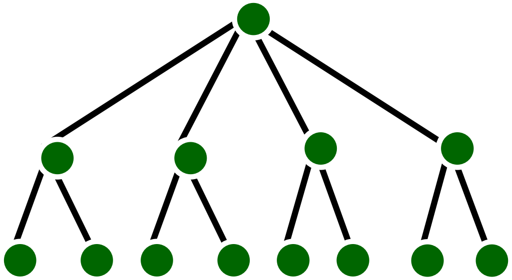
随机选择路径2



Case1: <2,4,1,3>, 结点数 17

随机选择路径3





Case3: <1,3>, **结点数 13**

估计结果

假设 4 次抽样测试：

case1：1次，

case2：1次，

case3：2次，

平均结点数 =(21×1+17×1+13×2)/4=16

搜索空间访问的结点数为 17

小结

- **Monte Carlo 方法**

目的： 估计搜索树真正访问结点数

步骤：

随机抽样，选择一条路径

用这条路径代替其他路径

逐层累加树的结点数

多次选择，取结点数的平均值

本周教学内容

回溯算法的应用及小结

回溯算法小结

最大团问题	货郎问题	圆排列问题	连续邮资问题

分支限界：背包问题

分支限界
及其应用

组合优化问题

- 组合优化问题的相关概念

  目标函数（极大化或极小化）

  约束条件（解满足的条件）

  可行解: 搜索空间满足约束条件的解

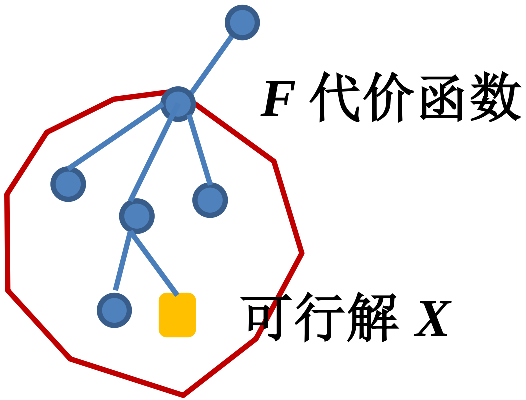
  最优解: 使得目标函数达到极大 (或极小)的可行解

- 背包问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\
& 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \le 10 \\
& x_i \in \mathrm{N},\ i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

代价函数

- 计算位置：搜索树的结点
- 值：极大化问题是以该点为根的子树所有可行解的值的上界（极小化问题为下界）
- 性质：对极大化问题父结点代价不小于子结点的代价 (极小化问题相反)

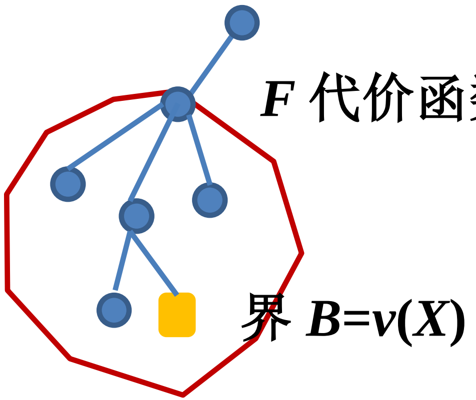


$F \geq v(X)$

极大化

界

- 含义：当前得到可行解的目标函数的最大值(极小化问题相反）
- 初值：极大化问题初值为 0 (极小化问题为最大值)
- 更新：得到更好的可行解时



分支限界

停止分支回溯父结点的依据：

1. 不满足约束条件

2. 对于极大化问题，代价函数值小于当前界（对于极小化问题是大于界）

界的更新

对极大化问题，如果一个新的可行解的优化函数值大于 (极小化问题为小于) 当前的界，则把界更新为该可行解的值

实例

背包问题：

4 种物品，重量 w_i 与价值 v_i 分别为

$v_1=1, v_2=3, v_3=5, v_4=9$

$w_1=2, w_2=3, w_3=4, w_4=7$

背包重量限制为10

$$\max x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \le 10$$

$$x_i \in \mathrm{N}, i = 1,2,3,4$$

代价函数的设定

- 对结点$< x_1, x_2, \ldots, x_k >$，估计以该结点为根的子树中可行解的上界.
- 按 v_i/w_i 从大到小排序，$i = 1,2, \ldots, n$
- 代价函数 = 已装入价值+ Δ

  Δ：还可继续装入最大价值的上界

  Δ = 背包剩余重量 $\times\, v_{k+1}/w_{k+1}$ (可装)

  $\Delta = 0$ (不可装)

实例：背包问题

$$\max x_1+3x_2+5x_3+9x_4$$
$$2x_1+3x_2+4x_3+7x_4\le 10$$
$$x_i\in \mathrm{N}, i=1,2,3,4$$

对变元重新排序使得 $\dfrac{v_i}{w_i}\ge\dfrac{v_{i+1}}{w_{i+1}}$

排序后

$$\max 9x_1+5x_2+3x_3+x_4$$
$$7x_1+4x_2+3x_3+2x_4\le 10$$
$$x_i\in \mathrm{N}, i=1,2,3,4$$

代价函数与分支策略

结点< $x_1, x_2, \ldots, x_k$ > 的代价函数

$$\sum_{i=1}^{k} v_i x_i + \left(b - \sum_{i=1}^{k} w_i x_i\right) \cdot v_{k+1}/w_{k+1}$$

若对某个 $j > k$ □ $b - \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \geq w_j$

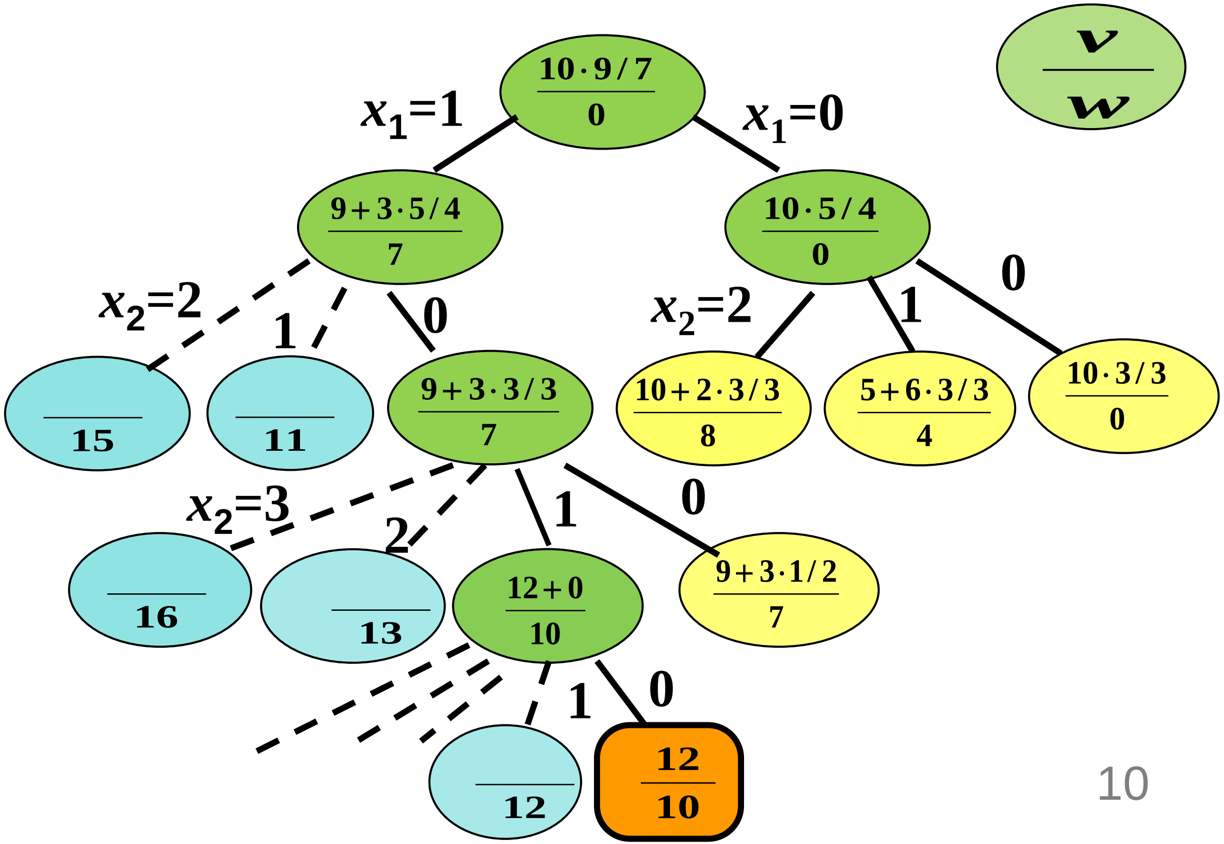
$\sum_{i=1}^{k} v_i x_i$ 否则

分支策略----深度优先

实例

$$\max 9x_1+5x_2+3x_3+x_4$$

$$7x_1+4x_2+3x_3+2x_4 \le 10,\quad x_i \in \mathrm{N}, i=1,2,3,4$$



小结

- 分支限界适用于组合优化问题
- 对结点<$x_1, \ldots, x_k$>定义代价函数

  当前结点为根子树的可行解的上界或下界

  极大化问题与极小化问题的区别
- 定义界的初值

  得到新的更好的可行解就更新界

最大团问题

最大团问题

问题: 无向图$G=<V,E>$, 求G的最大团.

G的子图: $G'=<V',E'>$, 其中$V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$,

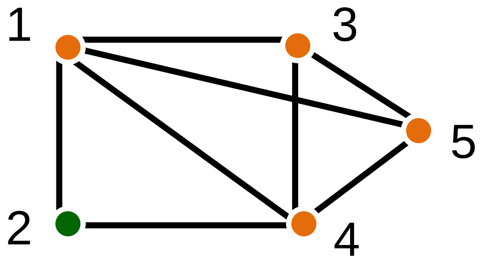
G的补图: $\overline{G}=<V, E'>$, E'是E关于完全图边集的补集

G中的团: G 的完全子图

G的最大团: 顶点数最多的团

实例

最大团: { 1, 3, 4, 5 },



独立集与团

G 的点独立集：*G* 的顶点子集 *A*，且

$$\forall u, v \in A, \{u,v\} \notin E.$$

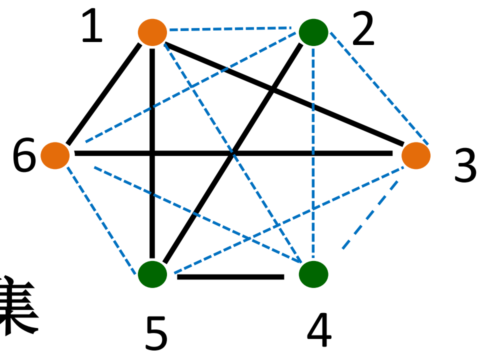
最大点独立集：顶点最多的点独立集

命题：*U* 是 *G* 的最大团当且仅当 *U* 是 $\overline{G}$ 的最大点独立集.

G 的最大团：

$U = \{ 1, 3, 6 \}$

补图 $\overline{G}$ 的最大点独立集



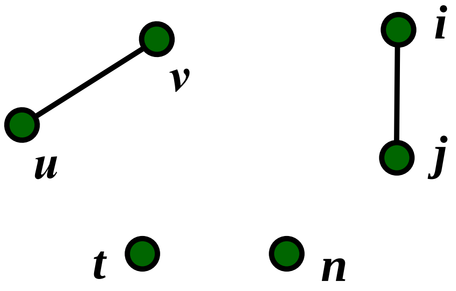
应用

编码, 故障诊断, 计算机视觉, 聚类分析, 经济学, 移动通信,VLSI电路设计,...

例子: 噪音使信道传输字符发生混淆

混淆图 $G=\langle V,E\rangle$， V为有穷字符集，

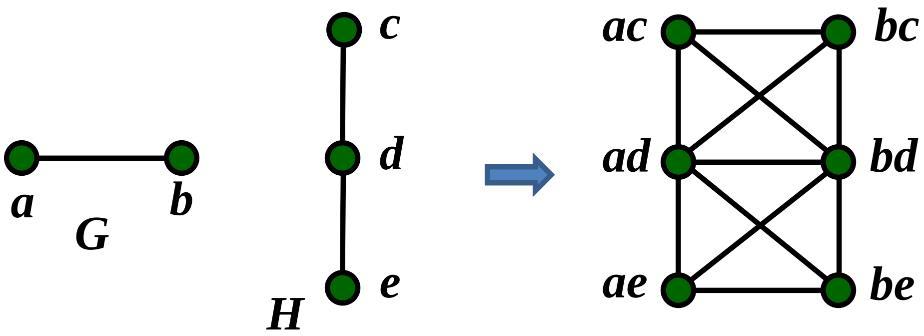
$\{u,v\}\in E \Leftrightarrow u$和$v$易混淆



编码设计

xy与uv混淆 $\Leftrightarrow$ x与u混淆且y与v混淆

$\vee$ $x=u$且y与v混淆$\vee$ x与u混淆且$y=v$



G与H 的正规积

为减少噪音干扰，设计代码应该找混淆图中的最大点独立集

最大团问题

问题：给定无向图 $G = < V, E >$, 其中顶点集 $V = \{ 1, 2, \dots , n \}$，边集为 E . 求 G 中的最大团.

解： $< x_1, x_2, \dots , x_n >$为 0−1向量，

x_k=1当且仅当顶点 k属于最大团.

蛮力算法：对每个顶点子集，检查是否构成团，即其中每对顶点之间是否都有边. 有 2^n 个子集，至少需要指数时间.

分支限界算法设计

搜索树为子集树.

结点 $< x_1, x_2, \ldots, x_k >$ 的含义：

已检索顶点 1, 2, … , k, 其中 x_i =1表示顶点 i 在当前的团内, $i = 1, 2, \ldots, k$

约束条件：该顶点与当前团内每个顶点都有边相连

界：当前已检索到的极大团的顶点数

代价函数

代价函数：目前的团可能扩张为极大团的顶点数上界

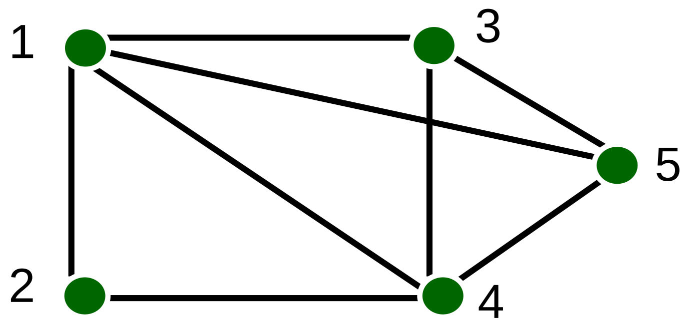
$$F = C_n + n - k$$

其中 C_n 为目前团的顶点数（初始为0）

k 为结点层数

最坏情况下时间：$O(n2^n)$

实例



顶点编号顺序为 1, 2, 3, 4, 5,

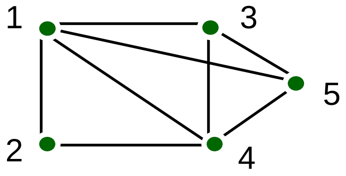
对应 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,

$x_i = 1$ 当且仅当 i 在团内

分支规定左子树为 1，右子树为 0.

B 为界，F 为代价函数值.

搜索树



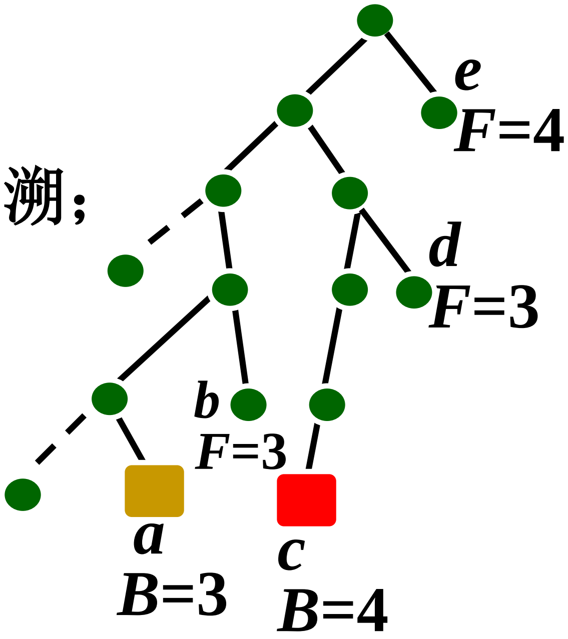
a: 极大团 {1,2,4},
顶点数为 3, 界 *B*=3;

b:代价函数值 *F*=3，回溯;

c: 极大团 {1,3,4,5},
顶点数为 4,
修改界 *B*=4;

d: *F*=3,不必搜索;

e: *F*=4, 不必搜索.



输出最大团 {1,3,4,5}，顶点数为 4.

小结

- 最大团问题的定义

  与点独立集的关系

- 分支限界算法的设计

  树的结构：子集树

  分支约束条件

  代价函数与界的设定

- 最坏情况的时间复杂度：$O(n2^n)$

货郎问题

货郎问题的定义

- **输入**

  有穷个城市的集合 $C=\{c_1,c_2, \ldots, c_n\}$,

  距离 $d(c_i,c_j)=d(c_j,c_i)\in Z^+$, $1\le i < j \le n$

- **解**：$1,2,\ldots,n$ 的排列 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 使得：

$$\min\{\sum_{i=1}^{n-1} d(c_{k_i},c_{k_{i+1}})+d(c_{k_n},c_{k_1})\}$$

算法设计

解向量为 $<1, i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}>$, 其中 $i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}$ 为 $\{2,3,\ldots,n\}$ 的排列.

搜索空间为排列树，结点 $<i_1,i_2,\ldots,i_k>$ 表示得到 k 步路线 .

约束条件：令 $B = \{ i_1, i_2, \ldots , i_k \}$, 则

$$i_{k+1} \in \{ 2, \ldots , n \} - B$$

即每个结点只能访问一次 .

代价函数与界

界：当前得到的最短巡回路线长度

代价函数：设顶点 c_i 出发的最短边长度为 l_i，d_j 为选定巡回路线中第 j 段的长度

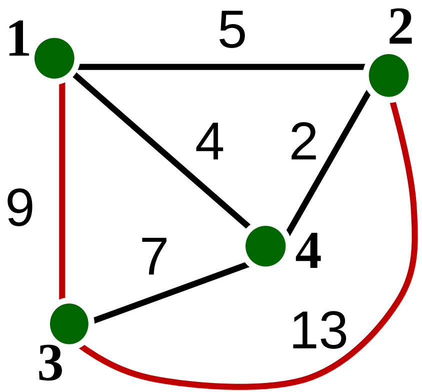
$$L = \sum_{j=1}^{k} d_j + l_{i_k} + \sum_{i_j \notin B} l_{i_j}$$

已走过路径长

剩余长度下界

代价函数

$$L=\sum_{j=1}^{k}d_j+l_{i_k}+\sum_{i_j\notin B}l_{i_j}$$



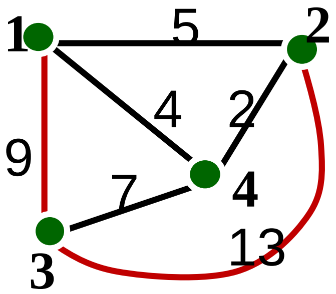
部分路线<1,3,2>

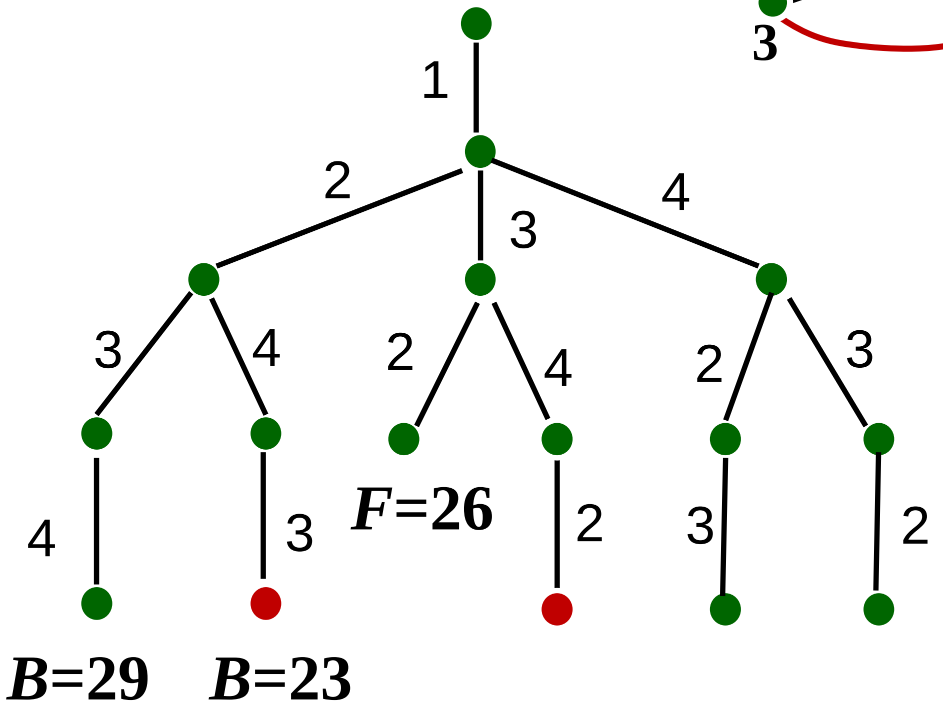
L=9+13+2+2=26

9+13为走过的路径长度

后两项分别为从结点2及4出发的最短边长

搜索树





实例运行

深度优先遍历搜索树

- 第一个界: <1,2,3,4>，长度为 29
- 第二个界: <1,2,4,3>，长度为 23
- 结点 <1,3,2>: 代价函数值 26>23，不再搜索, 返回<1,3>,右子树向下
- 结点<1,3,4>，代价函数值 9+7+2+2=20，继续，得到可行解 <1,3,4,2>，长度 23.
- 回溯到结点<1>，沿<1,4>向下...

最优解<1,2,4,3>或<1,3,4,2>，长度23

算法分析

- 搜索树的树叶个数：$O((n-1)!)$，每片树叶对应 1 条路径，每条路径有 n 个结点.
- 每个结点代价函数计算时间$O(1)$，每条路径的计算时间为 $O(n)$
- 最坏情况下算法的时间 $O(n!)$

小结

- 货郎问题的分支限界算法：

  约束条件：只能选没有走过的结点

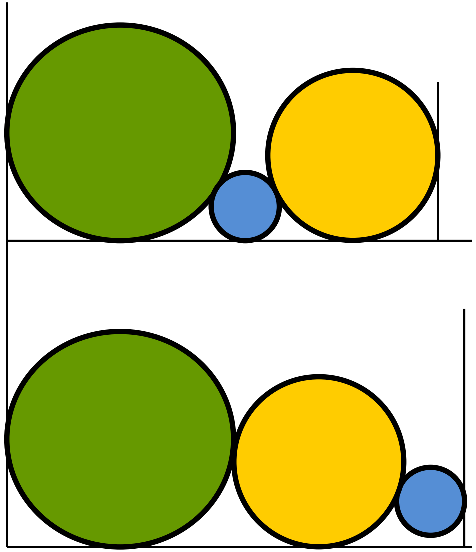
  代价函数：走过长度+后续长度的下界

- 时间复杂度：$O(n!)$

园排列问题

圆排列问题

给定n个圆的半径序列, 各圆与底线相切排列, 假定每个圆占大于1的长度, 求具有最小长度 l_n 的圆的排列顺序.



三个圆,半径给定

两种排列具有不同排列长度，第一种方式具有更小的排列长度

算法设计：分支限界

解：$<i_1,i_2,\ldots,i_n>$ 为 $1,2,\ldots,n$ 的排列

搜索空间为排列树

部分解向量 $<i_1,i_2,\ldots,i_k>$：表示前 k 个圆已排好. 令

$$B=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$$

下一个园选择 i_{k+1}

约束条件：$i_{k+1}\in\{1, 2, \ldots, n\}-B$

界：当前得到的最小园排列长度

符号说明

k：算法已经选择了第1— k 个圆

r_k：第 k 个圆的半径

d_k：第 k–1个圆到第 k个圆的圆心水平距离，$k>1$

x_k：第 k 个圆的圆心坐标，规定 $x_1=0$,

l_k：第 1— k 个圆的排列长度

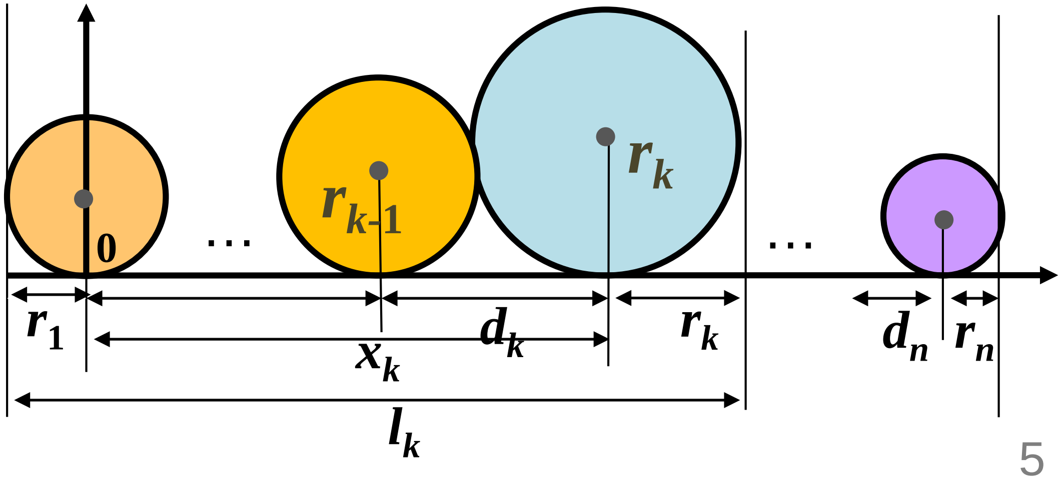
L_k：放好 1—k 个圆以后，对应结点的代价函数值 $L_k \leq l_n$

圆排列长度估计

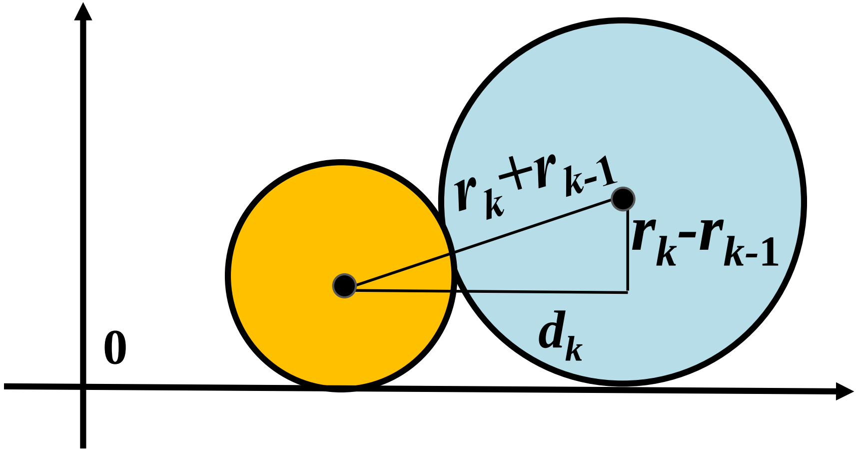
$x_k = x_{k-1} + d_k$

部分排列长度 $l_k = x_k + r_k + r_1$

排列长度 $\underline{l_n = x_k + d_{k+1} + d_{k+2} + \ldots + d_n + r_n} + r_1$



有关量的计算



$$d_k = \sqrt{(r_k + r_{k-1})^2 - (r_k - r_{k-1})^2}$$
$$= 2\sqrt{r_{k-1} r_k}$$

代价函数

$$d_k = 2\sqrt{r_{k-1} r_k}$$

排列长度

$$l_n = x_k + 2\sqrt{r_k r_{k+1}} + 2\sqrt{r_{k+1} r_{k+2}} + \ldots + 2\sqrt{r_{n-1} r_n} + r_n + r_1$$

$$\geq x_k + 2(n-k)r + r + r_1$$

下界

$$L_k = x_k + (2n - 2k + 1)r + r_1$$

$$r = \min(r_{i_j}, r_k)$$

$$i_j \in \{1, 2, \ldots, n\} - B$$

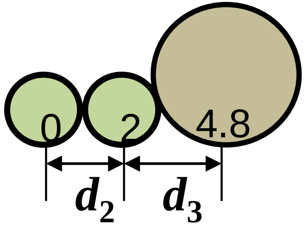
时间复杂度

- 搜索树树叶数为 $O(n!)$
- 每条路径代价函数的计算为 $O(n)$
- 最坏情况下算法时间复杂度为

$$O(n\ n!) = O((n+1)!)$$

实例

输入： R={1,1,2,2,3,5}
排列 <1,2,3,4,5,6>
半径排列：1,1,2,2,3,5



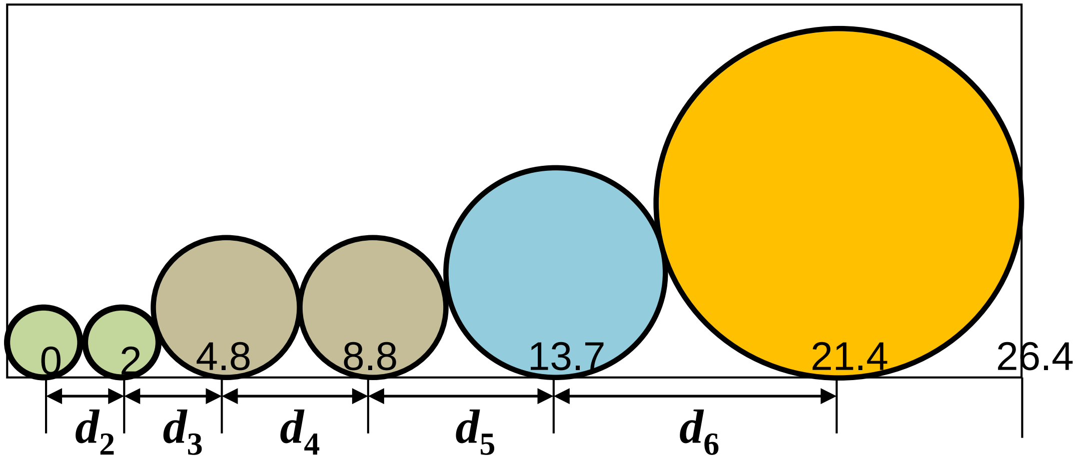
L_3=7.8+12=19.8

k	r_k	d_k	x_k	l_k	L_k
1	1	0	0	2	12
2	1	2	2	4	12
3	2	2.8	4.8	7.8	19.8
4	2	4	8.8	11.8	19.8
5	3	4.9	13.7	17.7	23.7
6	5	7.7	21.4	27.4	27.4

实例计算

半径排列：1,1,2,2,3,5，可行解l_6 =27.4

最优解：<1,3,5,6,4,2>, 最短长度26.5



小结

- 园排列问题的定义
- 如何设计代价函数？
  已有的排列长度+后续的圆排列
  长度的下界
- 时间复杂度估计：$O((n+1)!)$

连续邮资问题

连续邮资问题

问题：给定 n 种不同面值的邮票,每个信封至多贴 m 张，试给出邮票的最佳设计，使得从 1 开始，增量为 1 的连续邮资区间达到最大？

实例：$n = 5$，$m = 4$.

设计1：面值 $X_1 = <1,3,11,15,32>$，
邮资连续区间 $\{1,2, \ldots ,70\}$

设计2：面值 $X_2 = <1,6,10,20,30>$，
邮资连续区间 $\{1,2,3,4\}$

算法设计

可行解： $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$， $x_1 = 1$,

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

搜索策略：深度优先

约束条件：在结点 $< x_1, x_2, \ldots, x_i >$ 处，邮资最大连续区间为$\{1, \ldots, r_i\}$， x_{i+1} 的取值范围是

$$\{ x_i +1, \ldots, r_i +1 \}$$

若$x_{i+1} > r_i+1$，r_i+1的邮资将没法支付.

r_i 的计算

$y_i(j)$：用至多 m 张面值 x_i 的邮票加上 $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ 面值的邮票贴 j 邮资时的最少邮票数，则

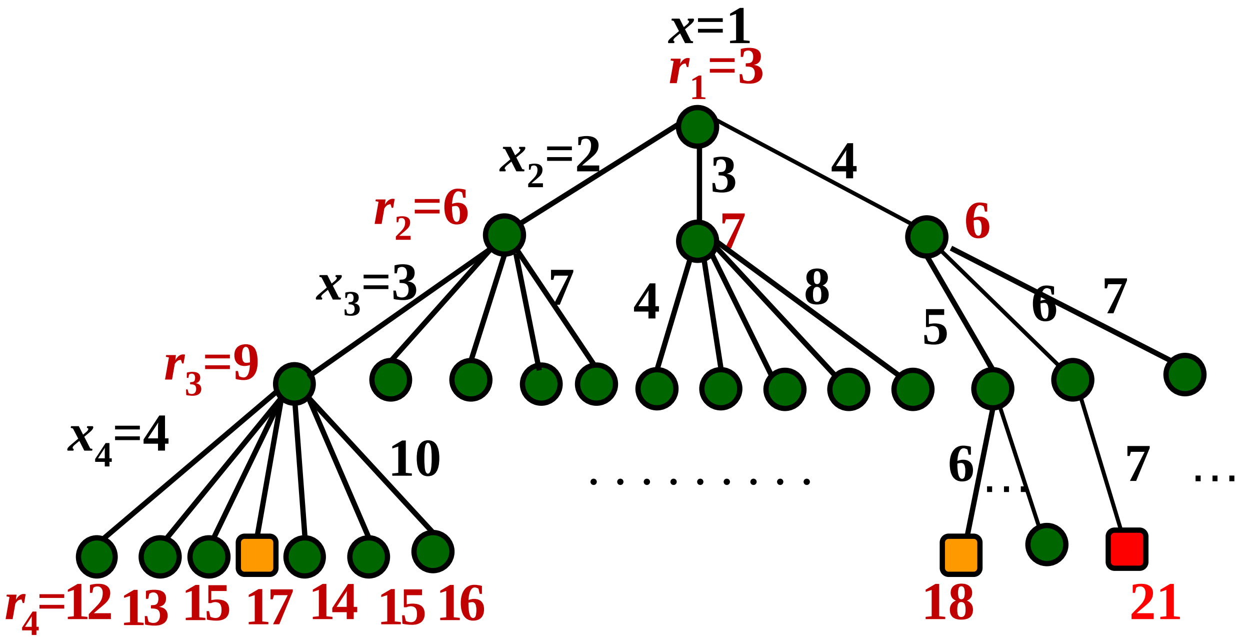
$$y_i(j) = \min_{1 \le t \le m}\{t + y_{i-1}(j - t\,x_i)\}$$

$$y_1(j) = j$$

$$r_i = \min\{j \mid y_i(j) \le m, y_i(j+1) > m\}$$

界：*max*，*m*张邮票连续付的最大邮资

部分搜索树 $n=4,m=3$



解：X=<1,4,6,7>，最大连续区间 {1,…,21}

回溯算法小结

(1) 适于求解组合搜索问题及优化问题

(2) 求解条件：满足多米诺性质

(3) 解的表示：解向量，求解是不断扩充解向量的过程

(4) 回溯条件：

搜索问题——约束条件

优化问题——约束条件 + 代价函数

(5) 分支策略：深度优先、宽度优先、宽深结合、函数优先

小结（续）

(6) 结点状态：白结点,黑结点,灰结点

(7) 算法时间复杂度：

$$W(n) = (\ p(n)\ f(n)\ )$$

其中 $p(n)$ 为每个结点的工作量

$f(n)$为结点个数

最坏情况下时间通常为指数级

平均情况下比蛮力算法好

空间代价小

小结（续）

(8) 降低时间复杂性的主要途径：

- 根据树的分支设计优先策略
  结点少分支优先，解多分支优先
- 利用搜索树的对称性裁减子树
- 分解为子问题，若求解时间$f(n)=c2^n$，组合时间$O(2^{n/k})$，分解为k个n/k规模子问题，则该算法时间为

$$T(n)=kc2^{n/k}+O(2^{n/k})=O(2^{n/k})=o(2^n)$$

算法设计与分析
课程总结

算法课程的知识框架

分治策略

动态规划

贪心法

回溯与分支限界

使用条件
主要步骤
分析方法
改进途径
典型例子

算法的数学基础：
序列求和、递推方程求解

算法的基本概念：
算法的伪码表示
算法的两种时间复杂度
复杂度函数阶的表示

函数的阶

- 阶的符号：$O, \Omega, \Theta, o, \omega$
- 阶的高低

  至少指数级：2^n, 3^n, $n!$, …

  多项式级：n, n^2, $n\log n$, $n^{1/2}$,…

  $\log n$的多项式级：$\log n$, $\log^2 n$,…

- 注意

  阶反映的是大的n（$n>n_0$）的情况
  可以忽略前面的有限项

序列求和

- 基本求和公式

  等比数列

  等差数列

  调和数级数

- 估计和式的阶

  放大，然后估计上界

  用积分估计上下界

递推方程求解

- 主要的求解方法

  迭代 + 进行序列求和

  递归树 + 求和

  主定理：注意条件验证

- 一些常见的递推方程的解

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

算法设计技术

- 设计技术

  分治策略

  动态规划

  贪心法

  回溯和分支限界

- 关注问题

  使用条件

  主要设计步骤

  时间复杂度分析方法

  改进途径

  典型例子

分治策略

- 适用条件：归约为独立求解子问题
- 设计步骤：归约方法, 初始子问题的计算, 子问题解的综合方法. 注意子问题划分均衡，类型相同
- 递归算法分析：求解递推方程
- 改进途径：减少子问题数, 预处理
- 典型问题：二分检索,归并排序,芯片测试,幂乘,矩阵乘法,最临近点对,多项式求值

动态规划

- 适用条件：优化问题, 多步判断求解, 满足优化原则,子问题重叠
- 设计步骤：确定子问题边界, 列关于目标函数的递推方程及初值；自底向上,备忘录存储；标记函数及解的追踪方法
- 复杂度分析：备忘录, 递推方程
- 典型问题：矩阵链相乘,投资,背包,最长公共子序列,图像压缩,最大子段和,最优二分检索树,生物信息学应用

贪心法

- 适用条件：组合优化问题, 多步判断求解, 有贪心选择性质
- 设计步骤：局部优化策略的确定及算法正确性证明 (直接证明, 数学归纳法,交换论证)
- 复杂度分析
- 典型问题：活动选择,装载问题, 最小延迟调度, 最优前缀码,最小生成树, 单源最短路

回溯和分支限界

- 适用条件：搜索或优化问题, 多步判断求解, 满足多米诺性质
- 设计步骤：确定解向量, 搜索树结构, 搜索顺序,结点分支搜索的约束条件与代价函数, 路径存储
- 搜索树结点数估计
- 复杂度分析
- 典型问题: n后问题, 背包问题,货郎问题,装载问题, 最大团问题, 圆排列问题, 连续邮资问题

算法设计

- 设计思想：尽量选复杂度低的算法
- 算法实现依赖于数据结构，选择合适的数据结构
- 实际问题中的综合考虑：时空权衡，实现成本的权衡, ...