关于参考答案的说明

1、　本答案仅仅具有参考作用，因为不少题目或许有多种解法，此处不过是给了其中一种。况且偶尔也会出现错误。
2、　有时应该相信自己。如果你能清楚说明为什么自己是正确的，则你已成功。
3、　对自己的答案不太确定时，想办法证明自己对或不对，这种能力更为重要。不可能每件事情都有现成的答案在那里等你参考、核对。
4、　当你思考题目该怎么做？这样想、那样想对不对等诸如此类的问题时，不知不觉中，你已在进步。所以重要的是想，是思考。

习题一　几何向量及其运算

一、填空题

1. 1）$\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$；　2）$\langle\alpha,\beta\rangle=0$；　3）$\langle\alpha,\beta\rangle=\pi$，且$\|\alpha\|\geq\|\beta\|$；　4）$\langle\alpha，\beta\rangle=0$；

5）$0\leq\langle\alpha,\beta\rangle<\dfrac{\pi}{2}$且$\alpha$，$\beta$为非零向量。　*或* $\alpha\cdot\beta>0$，

---------以上题目还可以把长度用内积表示，然后得到内积满足的条件. 如.

$$\|\alpha+\beta\|=\sqrt{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)}>\|\alpha-\beta\|=\sqrt{(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)}$$

从而得到:

$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)>(\alpha-\beta,\alpha-\beta)\text{，即}\quad \alpha\cdot\beta>0$$

---------注意零向量的方向任意，所以许多情况已包括零向量的情形了；注意是否有等号和一些特殊情况. .

2. 1）线性相关；2）线性无关；3）线性相关；4）线性无关。

3. $(-2,-3,5)$；$(-2,3,-5)$；$(-2,3,5)$；$(-2,3,0)$；$(0,3,0)$；2；$\sqrt{38}$；$\sqrt{34}$。

二、证明：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$，$\because\ \overrightarrow{AP}$与$\overrightarrow{BA}$平行，

$\therefore$ 可设$\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{BA}$，所以，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

$$=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1-\lambda)\alpha+\lambda\beta.$$

---------注意证明时，条件，因果的先后次序，注意条理性和逻辑性；证明过程要完整.

三、解：因为 $(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=\theta,$

由于上式中$(\alpha-\beta),(\beta-\gamma),(\gamma-\alpha)$的系数都是 1，

所以根据共面的充要条件得$\alpha-\beta,\beta-\gamma,\gamma-\alpha$共面。

---------想清楚共面与上面等式的关系

四、判断题

1. （ 错 ） ---------化简成$\alpha\cdot(\beta-\gamma)=0$就明显了，

2. （ 对 ） ---------注意一些命题的不同说法

3. （ 错 ） ---------外积是一个向量

4. （ 对 ）

五、填空题

1. 1）-6；2) 13；3) -61。 ----------充分利用内积的运算性质：和数的加法、乘法没啥不同，交换律、结合律、分配律

2. $\frac{15}{4}$。 ---------- 外积可以用来求面积，是平行四边形的，注意计算准确。

六、解 1）$\omega\times\gamma=(\lambda\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)=-(\lambda+1)\alpha\times\beta$，

当ω与γ平行时，ω与γ平行时，

$\omega\times\gamma=0,\because\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{2\pi}{3},\therefore\alpha\times\beta\neq\theta$，$\lambda=-1$。

2）$\omega\cdot\gamma=(\lambda\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\lambda\|\alpha\|^2-\lambda\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\|\beta\|^2=2\lambda-5$，

因为ω与γ垂直，所以$\omega\cdot\gamma=0,\lambda=-\frac{5}{2}$。

---------- 内积和外积可以用来证明两向量是否垂直、平行。

七、解：1）$\|\alpha\times\beta\|=\|\alpha\|\|\beta\|=3\times4=12$；

2）因为$\alpha\times\beta$与α垂直，所以

$\|(\alpha\times\beta)\times\alpha\|=\|\alpha\times\beta\|\|\alpha\|=12\times3=36$；

3）因为$\alpha\times\beta$与α,β都垂直，所以与$\alpha-\beta$也垂直，因此，

$\|(\alpha\times\beta)\times(\alpha-\beta)\|=\|\alpha\times\beta\|\|\alpha-\beta\|=\|\alpha\|\|\beta\|\|\alpha-\beta\|=3\times4\times5=60$。

4）$\|(3\alpha-\beta)\times(\alpha-2\beta)\|=\|-6\alpha\times\beta-\beta\times\alpha\|=\|5\beta\times\alpha\|=5\|\beta\|\|\alpha\|=60$。

----------说明：因为α与β垂直，所以$\|\alpha-\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2=25$。

----------外积的运算和数的运算不同之处在于$\beta\times\gamma=-\gamma\times\beta$，就这一点

小结：注意向量的运算和普通数的加法乘法的相同与不同之处，特别注意不同之处。掌握内积、外积、混合积在几何上的应用。

习题二 向量及其运算的坐标表示与运算

一、填空题

1. $(0,y,0)$。 ----------知不知道坐标轴的方向、坐标平面的法向量呢

2． $\arccos\frac{9}{2\sqrt{39}}$。 3． -1；4。 4． 0。 5． $\sqrt{2}$。 6． $\pm(\frac{-2}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}})$。

7． $(-\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9})$； -------*计算投影向量的公式最好记住，这样以后做题时会省却不少力气。*

二、解：设 M 的坐标为 (x,y,z)，

则有 $\overrightarrow{AM}=(x-1,y-2,z-3),\quad \overrightarrow{MB}=(-1-x,2-y,3-z),$

由条件， $\frac{x-1}{-1-x}=\frac{y-2}{2-y}=\frac{z-3}{3-z}=-\frac{3}{2},$

$\therefore x=-5,y=2,z=3,\therefore M(-5,2,3)$

三、解：设 α 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{35}},\ \cos\beta=\frac{5}{\sqrt{35}},\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{35}}。$$

所以与 α 平行的单位向量为 $\pm(\frac{5}{\sqrt{35}},\frac{5}{\sqrt{35}},-\frac{1}{\sqrt{35}})$。

------*有两个；单位向量实际上代表了向量的方向*

四、证明：向量 α 在 β 上的投影向量为

$$\|\alpha\|\cos\theta\frac{\beta}{\|\beta\|}=\frac{\alpha\cdot\beta}{\|\beta\|^2}\beta=\frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\beta}\beta。$$

----------*注意：投影向量可以用于计算向量的分解。在后面计算反射光线的方向。*

五、解：因为 $(\alpha\times\beta)\cdot\gamma=\begin{vmatrix}8 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=63\neq 0,$

所以 α,β,γ 不共面，

以这三个向量为棱所作的平行六面体体积 $V=|(\alpha\times\beta)\cdot\gamma|=63$。

六、解：由于 α,β 不共线，向量 α,β,γ 共面，则可设 $\gamma=x\alpha+y\beta,$ 而

$$\mathrm{Proj}_{\beta}\gamma=\mathrm{Proj}_{\beta}(x\alpha+y\beta)=(x\alpha+y\beta)\cdot\frac{\beta}{\|\beta\|}=\frac{2}{3}x+3y=3$$
$$\mathrm{Proj}_{\alpha}\gamma=\mathrm{Proj}_{\alpha}(x\alpha+y\beta)=(x\alpha+y\beta)\cdot\frac{\alpha}{\|\alpha\|}=x+2y=3$$
，

解得 $x=\frac{9}{5}, y=\frac{3}{5}$. 所以 $\gamma=\frac{9}{5}\alpha+\frac{3}{5}\beta=(3,\frac{6}{5},\frac{3}{5})$.

---------- *共面即说是线性组合。*

小结：内积、外积、混合积何时为 0 最为重要，也经常使用。应用它们之前首先得清楚；它们的几何意义。当然如果不会计算一切都是空谈。计算分两种，一是用定义；一是用坐标。特别要记住用坐标如何计算。

习题三　平面及其方程

一、填空题

1． $5x-14y+2z+81=0$ 或 $5x-14y+2z-9=0$。　2． 2；-10。

3． $x-1=0$　4． $3y+z=0$。 5． $\frac{5}{\sqrt{3}}$。

二、1．解：平面的法向量 $\vec{n}=(1,2,1)$，故由平面的点法式方程知平面方程为：

$$(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0,$$

即 $x+2y+z-6=0$。

2．解：平面的法向量可取为 $\vec{n}=\alpha\times\beta=(5,4,3)$，由点法式知平面方程为：

$$5(x-2)+4(y+1)+3(z-3)=0,$$

即 $5x+4y+3z-15=0$。

---------- *一般把方程化为最简单形式。*

3．解：$\overrightarrow{AB}=(2,7,-13)$，由题设可取平面的法向量 $\vec{n}=(2,7,-13)\times(0,1,0)=(13,0,2)$，

所以所求平面方程为

$$13(x-1)+0(y+5)+2(z-1)=0,$$

即 $13x+2z-15=0$。

三、解：设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上任一点，则 M 到两平面的距离相等，因此，

$$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7x+24z-5|}{\sqrt{7^2+24^2}},$$

即 $$\frac{x-2y+2z+21}{5}=\pm\frac{7x+24z-5}{25},$$

化简可得： $23x-25y+61z+255=0,$ 或 $2x-25y-11z+270=0$。

习题四 空间直线及其方程

一、填空题

1． $-\frac{x-2}{3}=-\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{4}$。 2． $2x+3y-3z+12=0$。3． $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=z-3$；

$(-3,1,2)$； $(-6,3,1)$。4． $\frac{15}{\sqrt{89}}$． 5．（1） 平行；（2） 垂直；（3） 直线在平面上。

二、解：在直线上取一点 $(2,0,0)$, 直线的方向向量 $\vec{s}$ 可取为：

$$\vec{s}=(1,-1,1)\times(2,1,1)=(-2,1,3),$$

所以，直线的对称式方程为 $-\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{3}$;

直线的参数式方程为 $\begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t \\ z=3t \end{cases}$, t 为参数。

三、解：设所给点为 $A(3,1,-2)$, 在直线上取一点 $B(4,-3,0)$, 直线的方向向量为 $\vec{s}=(5,2,1)$,

所求平面的法向量可取为 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\vec{s}=(1,-4,2)\times(5,2,1)=(-8,9,22)$,

由点法式，所求平面方程为：

$$-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0,$$

即 $$-8x+9y+22z+59=0。$$

四、解：设所给点为 $A(3,-1,2)$, 在直线上取一点 $B(1,-2,0)$, 直线的方向向量 $\vec{s}$ 可取为

$$\vec{s}=(1,1,-1)\times(2,-1,1)=(0,-3,-3),$$

$\overrightarrow{BA}=(2,1,2)$ 与 $\vec{s}$ 的夹角 $\varphi=\arccos\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{s}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\vec{s}\|}=\arccos\frac{-9}{9\sqrt{2}}=\frac{3\pi}{4}$,

所以点 A 到所给直线的距离为

$$d=\|\overrightarrow{BA}\|\sin\varphi=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}。$$

五、解：在直线 L_1 上取一点 $A(0,-3,0)$, 在直线 L_2 上取一点 $B(1,-2,2)$，

直线 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1=(2,3,4)$, 直线 L_2 的方向向量 $\vec{s}_2=(1,1,2)$, $\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$，

由于

$$(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0，$$

所以 L_1 与 L_2 共面。由于 $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \neq \theta$，故 L_1 与 L_2 不平行，因此相交。

设其交点为 $C(x_0, y_0, z_0)$，则

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{2} = \dfrac{y_0 + 3}{3} = \dfrac{z_0}{4} \\ x_0 - 1 = y_0 + 2 = \dfrac{z_0 - 2}{2} \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3, \\ z_0 = 0 \end{cases}$ 故所求交点为 $C(0,-3,0)$。

小结：用向量可以解决平面直线中的问题。解决的关键是几何上的垂直、平行、共面等概念如何用向量的运算表示；表示完之后又如何计算出来。