习题二十五 级数的概念与基本性质

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、设$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots$，则一般项$u_n=$_____________________________；

2、设$\frac{2}{3}-(\frac{3}{7})^2+(\frac{4}{11})^3-(\frac{5}{15})^4+\cdots$，则一般项$u_n=$_______________________；

3、设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{2}{7})^n$，则其和 S=___________________________；

4、设$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，$(|x|<1)$，则其和 S=______________________；

5、已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$收敛，则$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=$__________________。

二、是非题：

1、若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$。 （　　）

2、若$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。 （　　）

3、若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ （　　）

4、若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$也发散。 （　　）

5、若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散。 （　　）

6、若加括号所得级数发散，则原级数也发散。 （　　）

三、按定义判断下列级数的敛散性：

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

四、判断下列级数的敛散性：

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{n}$　　2、$\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{\ln 3}{3})^{n}+\frac{1}{2^{n}}]$　　3、$\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{3}{2})^{n}+\frac{1}{n(n+1)}]$

五、分别就$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n}$收敛和发散两种情况讨论下列级数的敛散性：

1、$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$　　2、$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n}+0.0001)$

习题二十六 数项级数审敛法

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、判断下列陈述是否正确：

1、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则其部分和数列$\{S_n\}$必有界。（ ）

2、若数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$满足$u_v \le v_n (n=1,2,\cdots)$，且$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛。（ ）

3、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n u_n$也收敛。（ ）

4、若数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。（ ）

二、判断下列级数的敛散性：

1、$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$

2、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3-3n+4}}$

3、$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n^2})$

4、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin^2(n\pi/3)}{2^n}$

5、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

6、$\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$

三、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda^{n}},\lambda\geq 0$的敛散性：

四、证明级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}\ln n}$发散。

五、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n}$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n}^{2}$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_{n}}{n}$都收敛。

习题二十七 数项级数审敛法（续）

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、判断下列级数的敛散性：

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

2、$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n-1})^{2n-1}$

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$

4、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

二、判断下列级数的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛？

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$

2、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

3、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2+(-1)^{n}}{n^{5/4}}$

4、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{na^{n}}\ (a>0)$

三、设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$绝对收敛。

习题二十八 幂级数收敛半径与收敛区域

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-b)^n \ (b>0)$当$x=0$时收敛，当$x=2b$时发散，则该级数的收敛半径是______________。

2、若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径是$R$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} x^n$的收敛半径是 ______ ，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$的收敛半径是_____________。

3、级数$1+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^n}{n^2}$的收敛半径是_________，收敛区域是_________ 。

4、级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!!}$的收敛区域是________________。

二、求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$的收敛区域。

三、求下列幂级数的收敛半径：

1、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^n}{n! e^n} x^n$

2、$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

四、求下列幂级数的收敛区域：

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}x^{2n-1}$

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n2^n}$

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$

4、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n^3+1}x^{3n}$

习题二十九 幂级数的逐项微分，逐项积分与求和

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、设级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}$,则当$x\in$_____________时，其和函数为__________。

2、设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$,的收敛半径为 R，和函数 $s(x)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$的收敛半径为__________，和函数为___________，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}x^n$的收敛半径为__________，和函数为_________________。

二、求下列幂级数的收敛区域及和函数：

1、$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

3、 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

4、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$ 的和。

三、求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和。

习题三十 函数的幂级数展开及其应用

专业班级________________姓名________________学号___________________

一、填空题：

1、$\sin\frac{x}{2}$关于x的幂级数展开式是______________________________________，

收敛区域为_________________________。

2、e^x关于$x-1$的幂级数展开式是____________________________________，

收敛区域为_________________________。

3、$\ln(10+x)$关x于的幂级数展开式是___________________________________，

收敛区域为_________________________。

二、将下列函数展开成$(x-x_0)$的幂级数，并求收敛区域：

1、 $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$，$x_0=0$

2、 $f(x)=\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$，$x_0=0$

3、 $f(x)=\ln x$，$x_0=1$

4、 $f(x)=\arctan x$，$x_0=0$

5、 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$x_0=0$（提示：$\dfrac{1}{(1-x)^2}=(\dfrac{1}{1-x})'$）

习题三十一　周期为 2π 函数的傅里叶级数

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在一个周期上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\pi<x\le 0 \\ -x+1, & 0<x\le \pi \end{cases}$，则其傅里叶级数收敛到函数自身的点的集合是________________________。

2、将 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x\le 0 \\ -x^2+1, & 0<x\le \pi \end{cases}$ 以 2π 为周期延拓到整个数轴上，则其傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于___________________________，在 $x=0$ 处收敛于________________________，在 $x=-\pi/2$ 收敛于__________________________。

3、若把 $f(x)=x$ 在 $[-\pi,\pi)$ 在上展成以 2π 为周期的傅里叶级数，则 $b_n=$________________，若把 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上展成以 2π 为周期的傅里叶级数，则 $b_n=$__________________。

二、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $(-\pi,\pi]$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi<x\le 0 \\ 0, & 0<x\le \pi \end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并作出和函数的图形。

三、将函数 $f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{2x}{\pi}, & -\pi\le x<0\\ 1-\dfrac{2x}{\pi}, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数，并利用它求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

习题三十二 正弦级数和余弦级数

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x\le \pi \end{cases}$ 的余弦级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，则等式 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 成立的区间是__________________________。

2、设当 $0<x<\pi$ 时，$1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，则 $b_n=$__________________________。

3、已知 $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 在 $[0,\pi)$ 上的正弦级数为 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$，则 $f(x)=\dfrac{x}{2}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数为__________________________________。

二、将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展成正弦级数和余弦级数。

三、将 $f(x)=\sin x(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并利用它求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ 的和。

习题三十三 周期为$2l$的函数的傅里叶级数

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、设 $f(x)$ 是以 8 为周期的函数，则 $f(x)$ 傅里叶级数为__________________，

其中 $a_0=$_______________，$a_n=$________________，$b_n=$____________________。

2、设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，且在一个周期内的表达式为 $f(x)=x,-1\le x\le 1$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\frac{11}{2})=$________。

3、已知 $f(x)=x$ 在（0，2）上的余弦级数为 $f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{2n+1}{2}\pi x$，则 $f(x)=|x|$ 在 $(-2,2)$ 上的傅里叶级数为_________________________，由此可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=$____。

二、设 $f(x)$ 为周期函数，它在一个周期上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<-1\\ x, & -1\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并作出和函数的图形。

三、将 $f(x)=x^2$ 在 $[0,\pi/2]$ 上展成余弦级数，并利用它求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 的和。

习题三十四 微分方程的基本概念及一阶方程

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、判断题：

1、 $y = e^{-x}$ 是否为微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的解？ （　　）

2、 $y = 2\sin x - \cos x$ 是否为微分方程 $y'' + y = 0$ 的解？ （　　）

3、y=0 是否为微分方程 $y'' + xy' - y = 0$ 的解？ （　　）

4、由方程 $y - x + e^{y} = 0$ 确定的函数是否为微分方程 $(x - y + 1)y' = 1$ 的解？（　）

二、设热水瓶中水冷却的速度与水温和室温之差成正比，室温为 20℃，若 100℃的水 24 小时的降到 50℃，求 12 小时后的水温。

三、曲线 $y = f(x) \geq 0 (x \geq 0)$ 围成一以 $[0, x]$ 为底的曲边梯形，其面积与 $f(x)$ 的 4 次幂成正比，已知 $f(0) = 0, f(1) = 1$，求该曲线的方程。

四、设为 y_1, y_2 是线性微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的两个解，试证：当 $\alpha + \beta = 1$ 时，$\alpha\, y_1 + \beta\, y_2$ 也是该方程的解。

五、求下列微分方程的通解（变量可分离方程）

1、 $(x+2)y'-x^2y=0$

2、 $\cos x\cdot\sin ydx+\sin x\cdot\cos ydy=0$

3、 $yy'+e^{y^2+3x}=0$

二、求 Cauchy 问题 $\begin{cases}(1+y^2)dx-xydy=0\\ y(2)=-\sqrt{3}\end{cases}$ 的解。

习题三十五 一阶微分方程（续）

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、求下列微方程的通解（齐次方程）：

1、$(x+y\cos\frac{y}{x})dx-x\cos\frac{y}{x}dy=0$；

2、$ydx-(ye^{\frac{x}{y}}+x)dy=0$。

二、求 Cauchy 问题$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x} \\ y(1)=1 \end{cases}$的解。

三、求下列各微分方程的通解或特解：

1、 $xy' - y = x^2 - 1$；

2、 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$；

3、 $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5\cos x,\ y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$。

四、求下列微分方程的通解或特解：

1、 $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{x}y^{4}$， $y\big|_{x=0}=1$；

2、 $y^{3}dx+2(x^{2}-xy^{2})dy=0$ 。

五、求满足 $f(x)=x^{2}+\int_{0}^{x}f(t)dt$ 的连续函数。

六、验证下列方程是全微分方程，并求通解：

（1） $(3x^2e^y + 3y^2)dx + (x^3e^y + 6xy)dy = 0$；

（2） $(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x})dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x)dy = 0$。

七、利用积分因子，求方程 $2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$ 的通解：

八、已知方程 $f(x)y' + x^2 + y = 0$ 有一个积分因子 $u(x) = x,$ 求 $f(x)$。

习题三十六 可降阶的二阶微分方程

专业班级________________姓名________________学号__________________

一、求下列各微分方程的通解或特解：

1、 $y'' = x + \sin x$；

2、 $y'' = y' + x$；

3、 $y^3 y'' + 1 = 0,\ y|_{x=1} = 1,\ y'|_{x=1} = 0$；

4、 $(1-x^2)y''-xy'=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1$。

二、若可微函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$，试证 $f(x)\equiv 0$。

习题三十七 线性微分方程解的结构

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、判断下列函数组是否线性无关：

1、$\sin 2x$与$\cos x \cdot \sin x$ ________________________________；

2、e^{ax}与$e^{bx}(a \neq b)$ ___________________________________；

3、x与$\tan x$ ____；

4、$e^{2x}\cos\beta x$与$e^{2x}\sin\beta x(\beta \neq 0)$ ___________________________________。

二、写出下列方程的通解：

1、$y_1=\cos\omega x$及$y_2=\sin\omega x\ (\omega \neq 0)$都是方程$y''+\omega^2 y=0$的解，则方程的通解为_______________________________________。

2、$y_1=e^{x^2}$及$y_2=xe^{x^2}$都是方程$y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$的解，则方程的通解为____。

3、$y_1=3,\quad y_2=3+x^2,\quad y_3=3+x^2+e^x$都是方程

$(x^2-2x)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=6(x-1)$的解，则方程的通解为__________

__________________________________。

三、证明$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\dfrac{1}{32}(4x\cos x+\sin x)$是方程$y''+9y=x\cos x$的通解（$c_1,c_2$是任意常数）。

四、已知 $y_1 = e^{2x}$ 是方程 $(x+2)y'' - (2x+5)y' + 2y = 0$ 的特解，试求另一线性无关的特解及方程的通解。（提示：令 $y_2 = y_1 \cdot u(x)$）

五、设 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的三个特解：x, e^x, e^{3x}，求此方程满足初始条件 $y(0) = 4$， $y'(0) = 3$ 的特解。

习题三十八 常系数线性齐次微分方程

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、已知常系数线性齐次微分方程的特征根，试写出相应的阶数最低的方程。

1、$r_1 = r_2 = -2$，则微分方程为_______________________________；

2、$r_{1,2} = 2 \pm i$，则微分方程为______________________________；

3、$r_1 = 0, r_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i$，则微分方程为______________________________；

4、$r_1 = r_2 = i$，则微分方程为_______________________________。

二、求下列微分方程的通解：

1、$y'' - 4y' = 0$

2、$y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$

3、$f''(x) + \frac{1}{\lambda} f(x) = 0(\lambda \neq 0,\text{常数})$

4、$y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$

三、求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

1、 $y''-4y'+3y=0,\quad y|_{x=0}=6,\quad y'|_{x=0}=10$

2、 $y''+4y'+29y=0,\quad y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=15$

3、 $y'''+4y''+5y'+2y=0,\quad y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=1,\quad y''|_{x=0}=0$

四、弹簧的上端固定，下端悬挂两个相同的质量为m的物体时，弹簧的伸长为$2a$，拿去下面一个物体，重物开始振动，求其运动规律。

习题三十九 常系数线性非齐次微分方程

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、写出下列各微分方程的特解形式：

1、 $y''+y=(x-2)e^{3x}$， 则$y*=$__________________________ 。

2、 $y''-2y'+y=(x^2+x)e^x$， 则$y*=$______________________________。

3、 $y''-3y'+2y=\sin x+x^3$， 则$y*=$______________________________。

4、 $y''+4y=x\cdot\sin x$， 则$y*=$_________________________________。

二、求下列各微分方程的通解：

1、 $2y''+y'-y=2e^x$

2、 $y''+y=\sin x\cdot\sin 2x$

三、求微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}+9$满足初始条件 $y|_{x=0}=0$， $y'|_{x=0}=1$的解。

四、设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且满足方程 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = xe^x - f(x)$，求 $f(x)$。

五、一匀质链条悬挂在钉子上，起动时一端离开钉子 8 米，另一端离开钉子 12 米，分别在以下两种情况下求链条滑下所需要的时间：

（1）若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

（2）若摩擦力为链条的 1 米长的重量。

习题四十 欧拉方程、常系数线性微分方程组

专业班级________________姓名________________学号___________________

一、求下列欧拉方程的通解：

1、 $x^2y''+3xy'+5y=0$

2、 $x^2y'''+xy''-4y'=3x$

二、求微分方程组$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-x=0 \\ \dfrac{dx}{dt}+y=0 \end{cases}$满足初始条件$\begin{cases} x|_{t=0}=1 \\ y|_{t=0}=0 \end{cases}$的特解。