6.3 电容

电容器

本节内容

- ☻ 电容的定义 （储电能力的物理量）
  - 孤立导体的电容
  - 电容器的电容
- ☻ 典型电容器的电容求解
  - 平行板/球/柱形电容器

一、孤立导体的电容

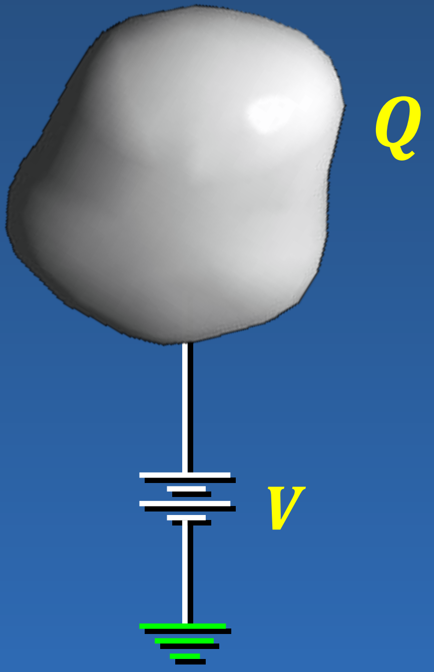
不同的导体容纳电荷的能力亦不同。

孤立导体容纳的电荷： $Q \propto V \longrightarrow Q = C \cdot V$

定义　导体的**电容**：

$$C = \frac{Q}{V}$$

单位：**法拉**（ F ）



$$1\mathrm{F} = 10^6\,\mu\mathrm{F} = 10^{12}\,\mathrm{pF}$$

物理意义： 使导体升高单位电势所需电荷量

一、孤立导体的电容

1F是很大的，例如将地球作为一孤立导体球

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

地球R =6.4*10^6 m，C =7.11*10^{-4} F

问题：欲得到1F的电容，孤立导体球的半径R

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9*10^9\ \text{m} \approx 10^3\ R_E$$

孤立导体的电容 C 只与导体的形状、尺寸及周围的介质有关，与导体的电量无关，固有的容电本领

二、电容器

一种储存电能的元件。由电介质隔开的两块任意形状导体组合而成。两导体称为电容器的极板。两极板所带电量等量异号。

电容器的电容： $C = \dfrac{Q}{U_{AB}}$ 　　符号：

Q ：导体间的感应电荷电量；

U_{AB}：导体间的电势差。 $U_{AB} = V_A - V_B$

二、电容器

1、电容器的 C 只与两导体的形状、大小、相对位置及周围介质有关;

2、电容器的 C 与 Q 、U_{AB}无关;

3、物理意义：使导体升高单位电势所需电荷量

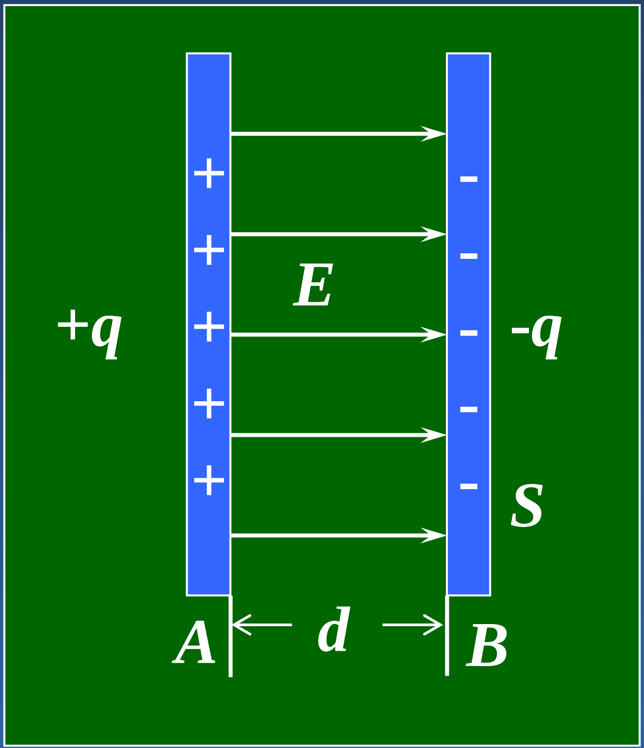
三、典型电容器的电容

1、平板电容器

$$E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$U_{AB}=E\mathrm{d}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d=\frac{qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$C=\frac{q}{U_{\mathrm{AB}}}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=\varepsilon_{\mathrm{r}}C_0$$



平行板电容器之间的介质为真空：

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$C\propto S$； $C\propto 1/d$

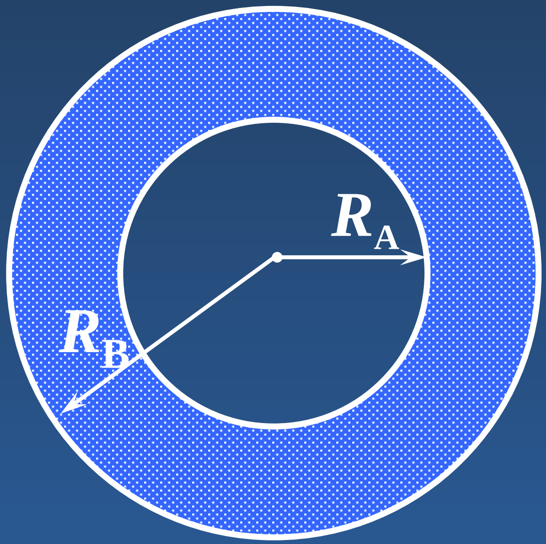
C 只与 d、S、ε_r 有关，而与 Q、U 无关！

极板间插入电介质可以有效提高电容大小

三、典型电容器的电容

2. 同心球形电容器

$$D=\frac{Q}{4\pi r^2} \longrightarrow E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}$$



$$U_{AB}=\int_{R_A}^{R_B}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

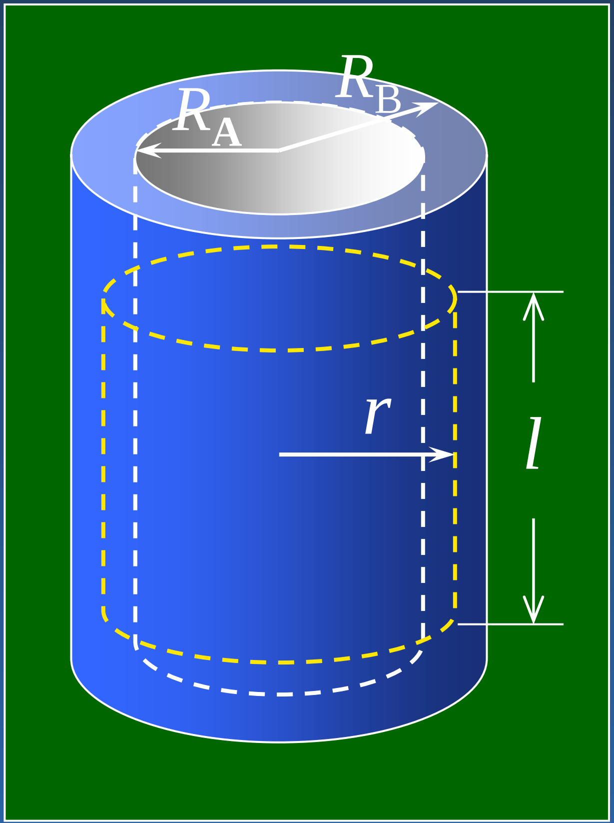
$$\boxed{C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R_A R_B}{R_B-R_A}}$$

当 $R_B >> R_A$ $C=4\pi\varepsilon R_A$（孤立导体球的电容）

当R_B-R_A=d<< R_A时，$C=\frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R_A{}^2}{d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$

三、典型电容器的电容

3、圆柱形电容器



内金属圆柱带电量Q, 电荷密度λ, l, R_A, R_B $(l >> R_A - R_B)$

则电容器 l 长度带电荷：$\pm Q = \pm \lambda l$

$$D = \frac{Q}{2\pi rl} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\longrightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r}$$

$$U = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}$$

单位长度电容：

$$C = \frac{C_l}{l} = \frac{2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0}{\ln(R_B/R_A)}$$

三、典型电容器的电容

3、圆柱形电容器

圆柱形电容器电容：$C=\dfrac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln(R_B/R_A)}$

设极板间距为d， $R_{\mathrm{B}}=R_{\mathrm{A}}+d$

当$d<<R_{\mathrm{A}}$时， $\ln\dfrac{R_B}{R_A}=\ln\dfrac{R_A+d}{R_A}=\ln\left(1+\dfrac{d}{R_A}\right)\approx\dfrac{d}{R_A}$

$$C\approx\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r lR_A}{d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}\qquad S=2\pi lR_{\mathrm{A}}$$

三、典型电容器的电容

真空中

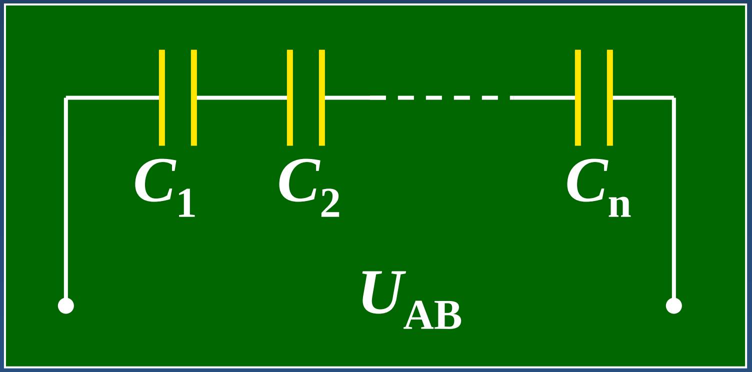
1. 平行板电容器电容: $$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

2. 球形电容器电容: $$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

3. 圆柱形电容器电容: $$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$$

四、电容器的联接

1. 电容器的串联



设各电荷带电量为q

$U_1 = q/C_1 \quad U_2 = q/C_2 \quad \cdots$

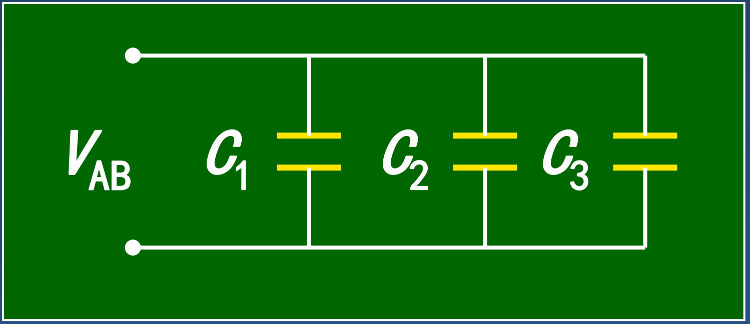
$$U_{AB} = U_1 + U_2 + \cdots U_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) q = \frac{q}{C}$$

等效电容：$\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{C_n}$

结论： 串联电容器的等效电容的倒数等于各电容的倒数之和。

四、电容器的联接

2. 电容器的并联



$$q_1 = C_1 U_{AB} \quad q_2 = C_2 U_{AB} \quad \cdots$$

总电量 $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = \left(C_1 + C_2 + \cdots C_n\right) U_{AB}$

等效电容：$\boxed{C = \dfrac{q}{U_{AB}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$

结论：并联电容器的等效电容等于各电容器电容之和。

五、典型电容器的电容计算

法一：定义法

1、计算极板间的场强 E

2、计算极板间的电势差 $U=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

3、由电容器电容定义计算C $C=\dfrac{q}{U}$

法二：利用电容器的串联和并联公式

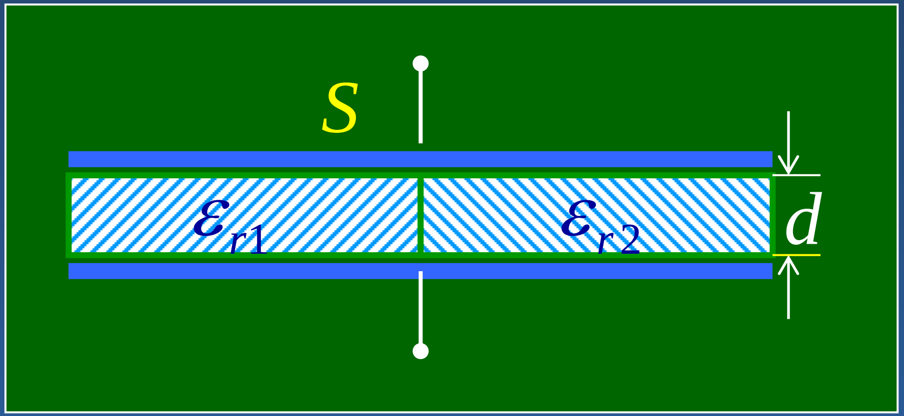
电容器的
- 串联：$\dfrac{1}{C}=\sum_i \dfrac{1}{C_i}$
- 并联：$C=\sum_i C_i$

分析结果：C只与电容本身的性质，与带电性质无关

例1 一平行板电容器充以两种不同的介质，每种介质各占一半体积。求其电容量。

解：

$$C_1=\frac{\varepsilon_o\varepsilon_{r1}S}{2d}$$



$$C_2=\frac{\varepsilon_o\varepsilon_{r2}S}{2d}$$

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_o S}{2d}(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})$$

例2 半径分别为a和b的两个金属球，它们的间距比本身线度大得多。今用一细线将两者相连接，并给系统带上电荷Q，求：

（1）每个球上分配到的电荷是多少？

（2）按电容定义式，计算此系统的电容。

解：（1）

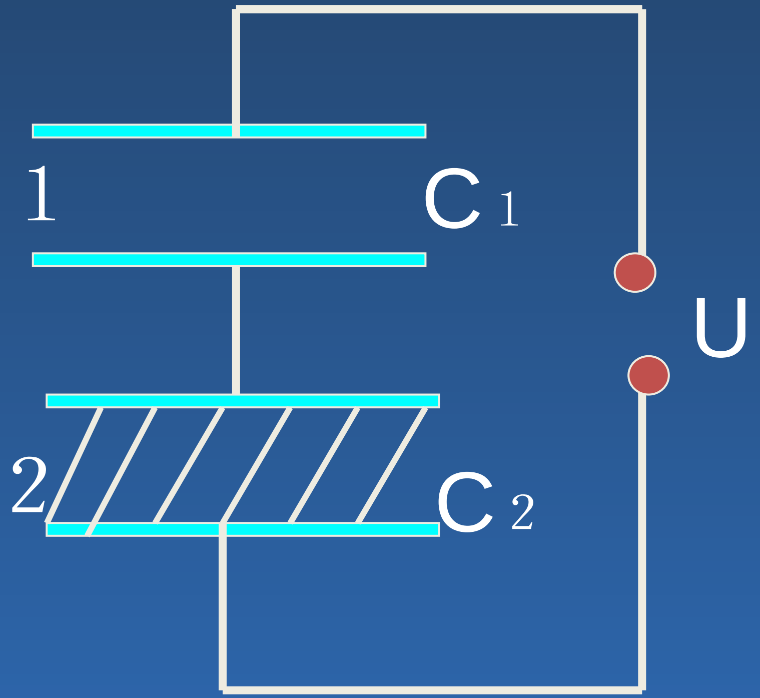
$$\begin{cases} Q_a + Q_b = Q \\ Q_a = 4\pi\varepsilon_0 a\varphi \\ Q_b = 4\pi\varepsilon_0 b\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{Q_a}{Q_b} = \frac{a}{b}$$

$$Q_a = \frac{aQ}{a+b} \qquad Q_b = \frac{bQ}{a+b}$$

（2） $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_a}$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0 aQ}{Q_a} = 4\pi\varepsilon_0 (a+b) = C_a + C_b$$

例3 两个电容器 1 和2 串联以后接上电源充电，在电源保持接的情况下，若把介质充入电容器2中，则电容器1的电势差如何变化？电容器1上的电量又如何变化？（填增大，减小，不变）



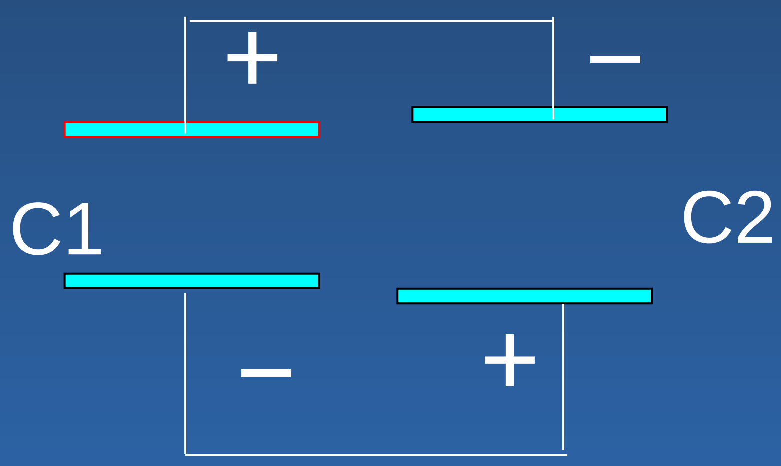
$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}\uparrow$$

$$q=UC=U\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}\uparrow$$

$$U_1=\frac{q}{C_1}\uparrow$$

例4 两只电容器，$C_1=8\mu F$，$C_2=2\mu F$，分别把它们充电到1000V，然后将它们反接此时两极板间的电势差为：

A．0 V；B．2 0 0 V；C．6 0 0 V；D．1 0 0 0 V



$$q_1=C_1U_0 \qquad q_2=-C_2U_0$$

$$q_1'=C_1U' \qquad q_2'=C_2U'$$

$$q_1'+q_2'=q_1+q_2$$

$$(C_1+C_2)U'=(C_1-C_2)U_0$$

$$U'=600V$$

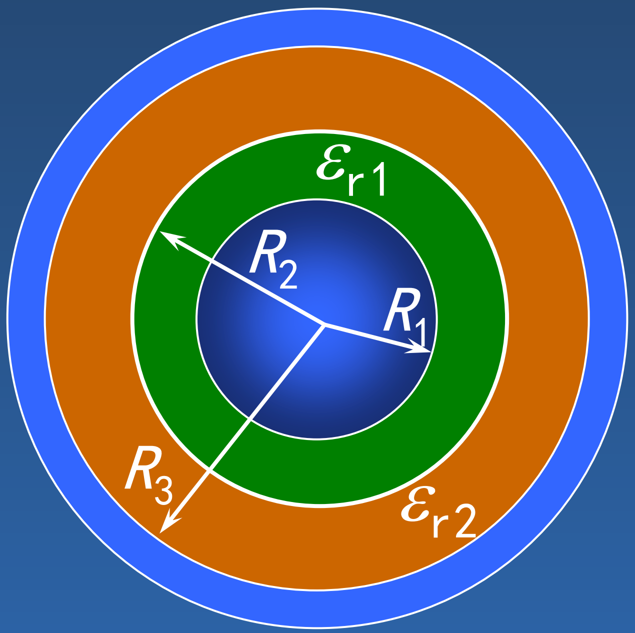
例5 球形电容器由半径为R_1的导体球和内半径为R_3的导体球壳构成，其间有两层均匀电介质，分界面的半径为R_2，相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2} 。求：电容。

解： $$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot D = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}r^2}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2}r^2}$$



$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q\mathbf{d}r}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}r^2}+\int_{R_2}^{R_3}\frac{q\mathbf{d}r}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2}r^2}$$

$$=\frac{q\left[\varepsilon_{r2}R_3\left(R_2-R_1\right)+\varepsilon_{r1}R_1\left(R_3-R_2\right)\right]}{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}R_1R_2R_3}$$

$$C=\frac{q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}R_1R_2R_3}{\varepsilon_{r2}R_3\left(R_2-R_1\right)+\varepsilon_{r1}R_1\left(R_3-R_2\right)}$$

归纳：

1. 孤立导体的电容： $C = \dfrac{Q}{V}$

2. 电容器的电容： $C = \dfrac{Q}{U_{AB}}$

3. 电容器的

串联： $\dfrac{1}{C} = \sum_i \dfrac{1}{C_i}$

并联： $C = \sum_i C_i$