5.3 电通量
高斯定理

5.3 电通量 高斯定理

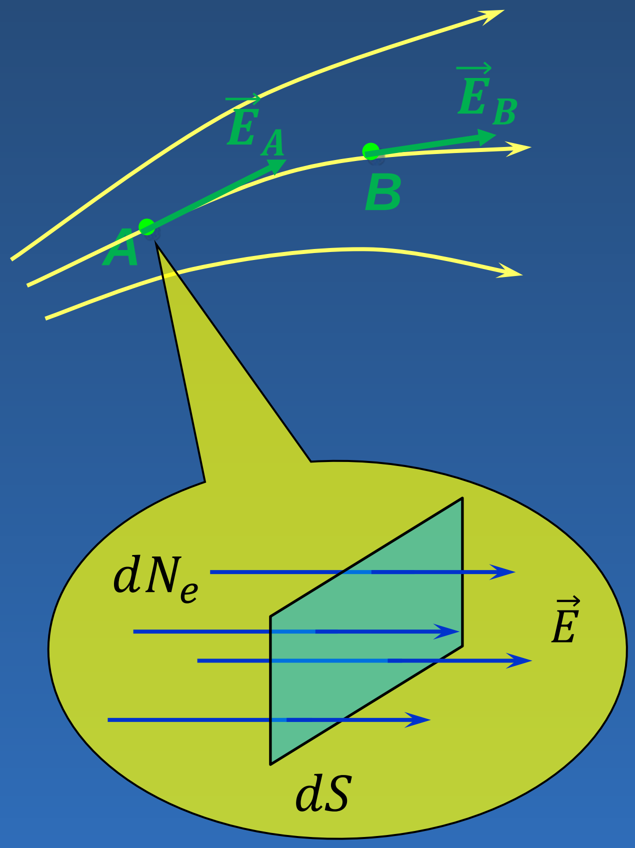
- 电通量
  - 电场线模型
  - 电通量的定义
- 高斯定理
  - 定义
  - 应用：求对称性电场的场强

5.3 电通量 高斯定理

一、电场线模型

方向： 电场线上任一点的切线方向为该点的 $\vec{E}$ 方向。

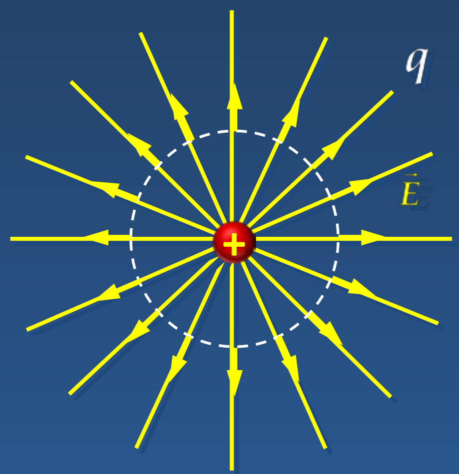
大小： 在电场中任一点，取垂直于该点场强方向的面积元dS，通过面积元dS的电场线数dN_e与面积元dS的比值，为电场线密度也就是该点的 $\vec{E}$ 大小。



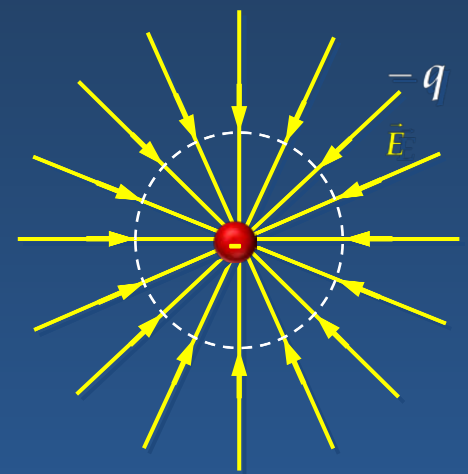
$$E = \frac{dN_e}{dS}$$

电场线越密的地方，E 越大。

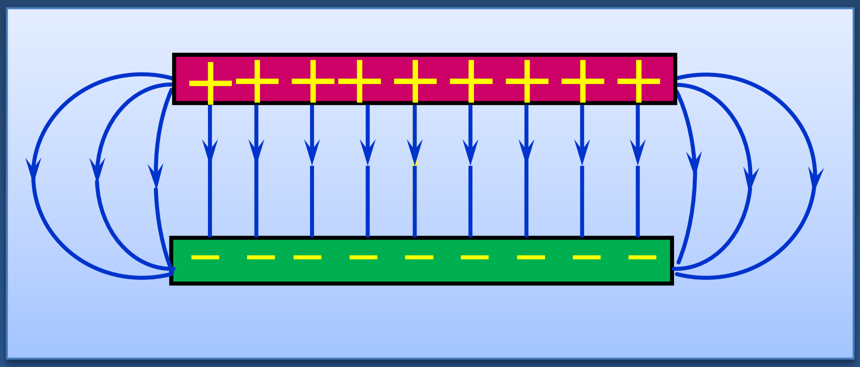
5.3 电通量 高斯定理



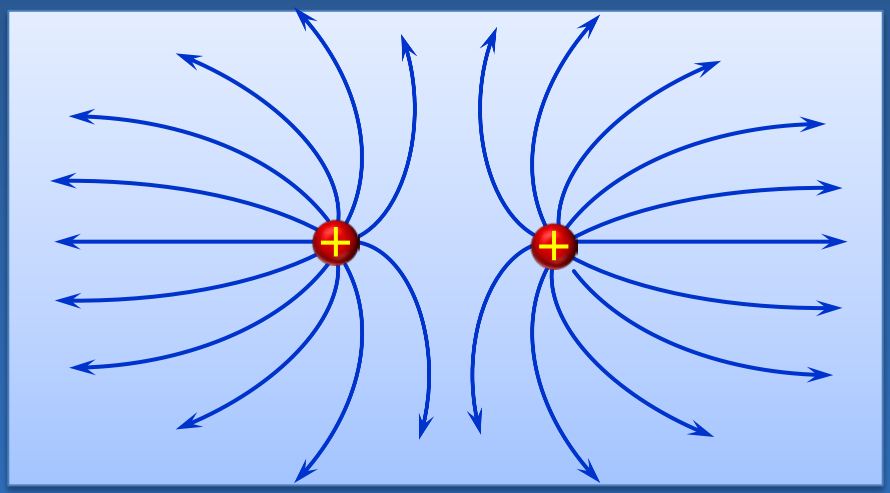
正电荷



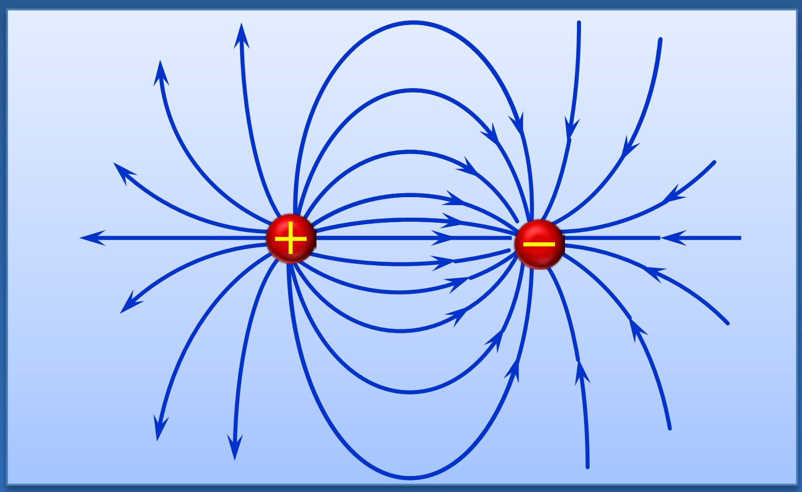
负电荷



平行板电容器内部的电场线



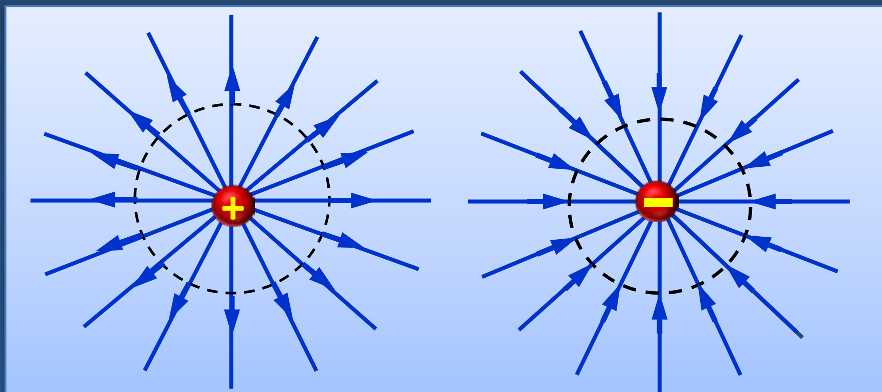
等量同号电荷

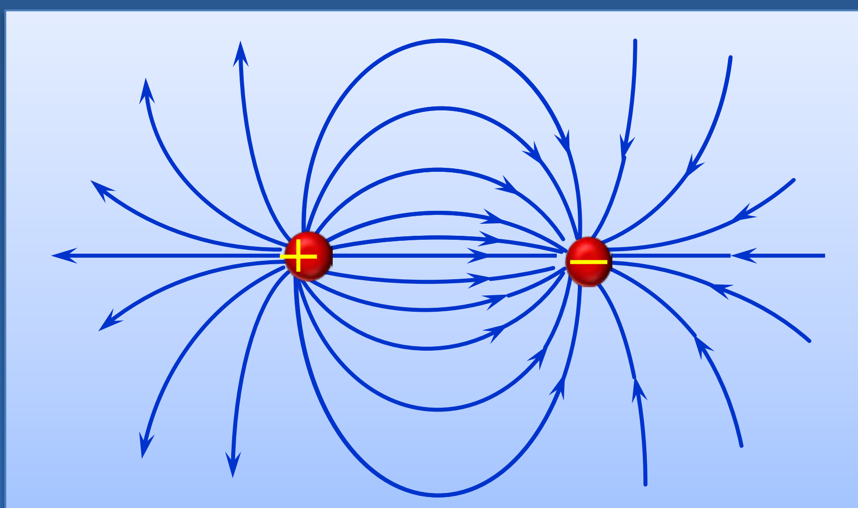


等量异号电荷

5.3 电通量 高斯定理

静电场电场线的性质





三大性质：

- ✓ 电场线起于正电荷（或无限远处）

  终止于负电荷（或延伸向无限远处）；
- ✓ 电场线不能形成闭合曲线；
- ✓ 任何两条电场线不相交；

5.3 电通量　高斯定理

二、电通量

定义：通过某个面电场线的条数就是通过该面的电通量Ψ_e

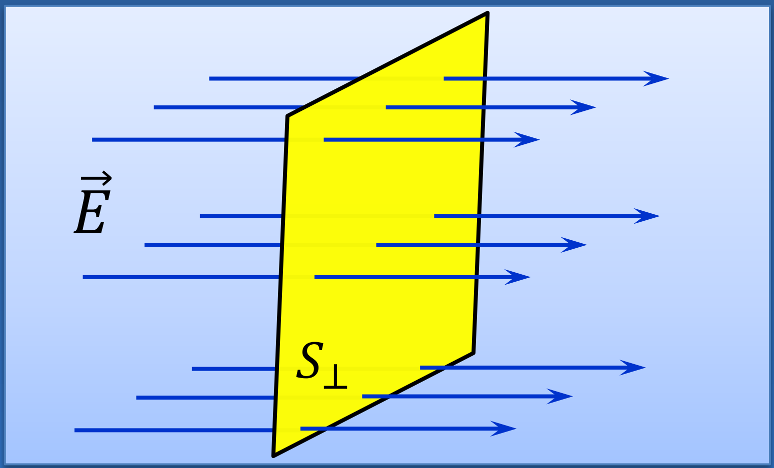
匀强电场:若平面$S_\perp$与电场方向垂直，则 $\Psi_e = ES_\perp$

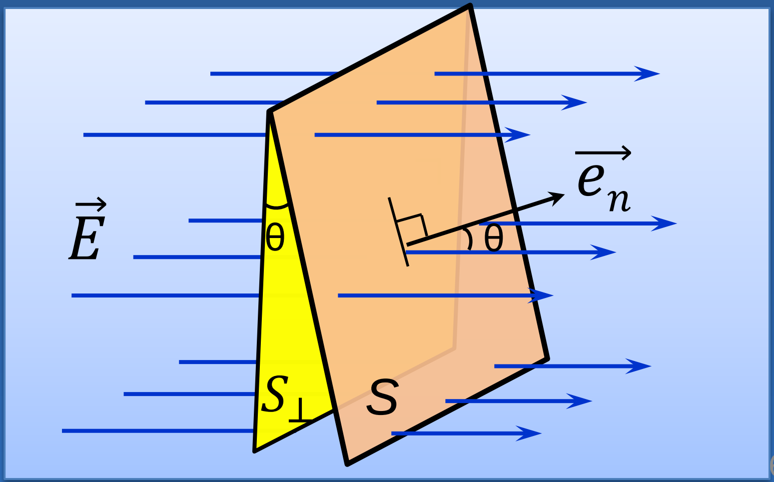
若平面S 与电场方向不垂直，引入面积矢量$\vec{S}$, $\vec{S} = S \cdot \vec{e_n}$

由图可知：通过$S_\perp$和S面的电场线的条数相同，

$$\Psi_e = ES_\perp \quad = EScos\theta$$

$$\Psi_e = \vec{E} \cdot \vec{S}$$





5.3 电通量 高斯定理

通过任意曲面的电通量？

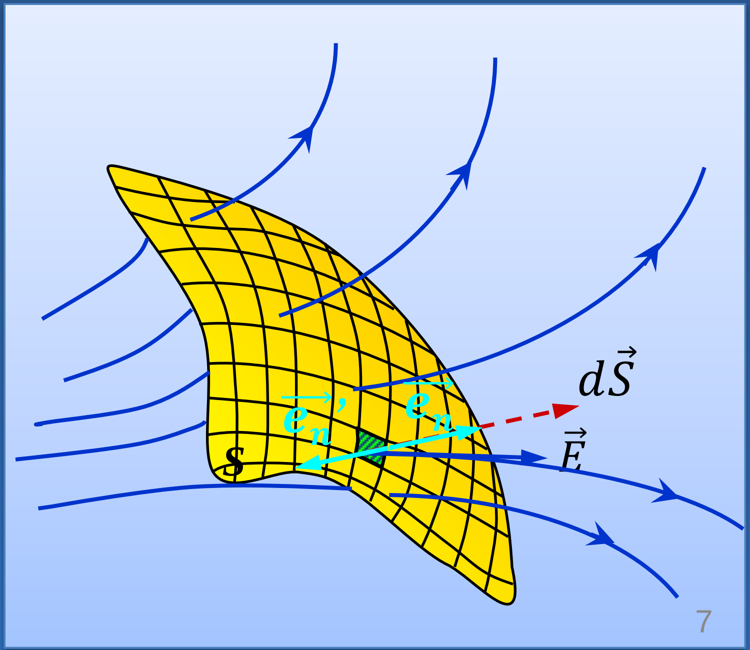
把曲面S 分成无限多个面积元$\mathrm{d}\vec{S}$，每个无限小的面积元$\mathrm{d}\vec{S}$上的电场可以视为匀强电场，则通过该面元的电通量为：

$$d\Psi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

对整个曲面积分可求得通过任意曲面S的电通量：

$$\Psi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

若S为非闭合曲面，则面法线的正方向可以取曲面的任一侧



正与负：取决于面元的正法线方向的选取

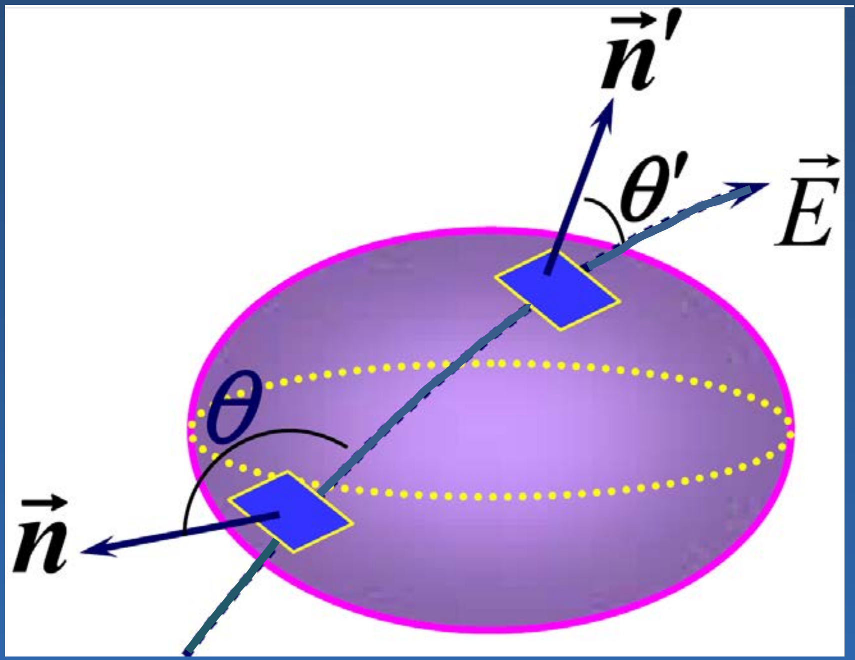
5.3 电通量 高斯定理

若S为闭合曲面，则 $\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

规定：自闭合面内指向面外的方向为面元的正法线方向

若电场线穿出，θ'为锐角，$\vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$

若电场线穿入，θ为钝角，$\vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$



※ 若Ψ_e>0，穿出的电场线条数 > 穿入的电场线条数

※ 若Ψ_e =0，穿出的电场线条数 = 穿入的电场线条数

※ 若Ψ_e <0，穿出的电场线条数 < 穿入的电场线条数

5.3 电通量 高斯定理

三、高斯定理

1. 表述

在真空静电场中，通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭面所包围的电量的代数和的$1/\varepsilon_0$倍。

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

高斯(1777-1855)
德国数学家、物理学家、天文学家

2. 高斯定理的证明

库仑定律+场强叠加原理

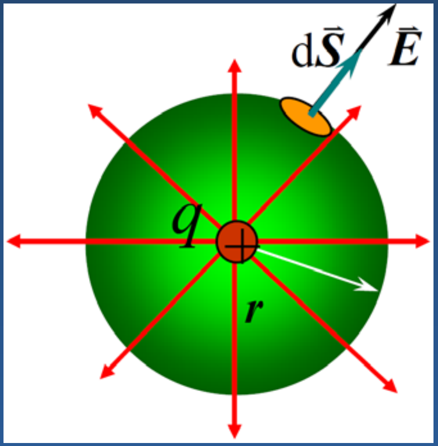
思路：先证明单一点电荷的场，然后推广至一般电荷分布的场

5.3 电通量 高斯定理

高斯定理的证明

通过以点电荷$+q$为球心，半径为r的球面的电通量：

电场具有球对称性，球面上E 处处相等，$d\vec{S}$与$\vec{E}$的夹角θ=0



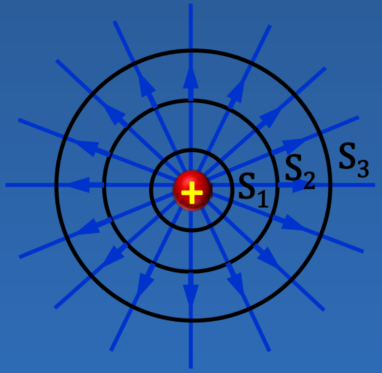
则：$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$$= \oiint_S E\cdot dS\cdot\cos 0^{\circ}$$

$$= \oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oiint_S dS$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}}\cdot 4\pi \cancel{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$\Psi_e \alpha\ q$，与球面半径无关！

5.3 电通量 高斯定理

高斯定理的证明

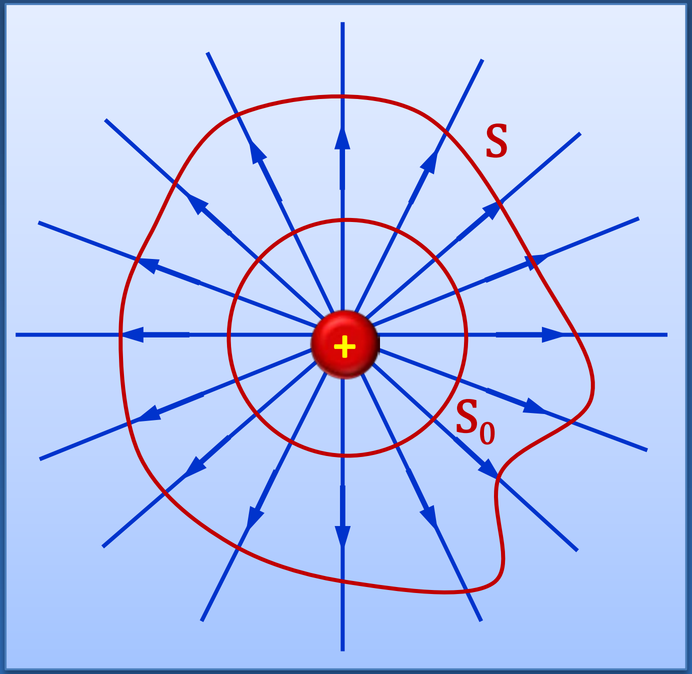
任一包含点电荷$+q$的闭合曲面，$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} =$?

根据电场线模型：

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \oiint_{S_0} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$



$\Psi_e \alpha\ q$，与曲面形状无关！

5.3 电通量 高斯定理

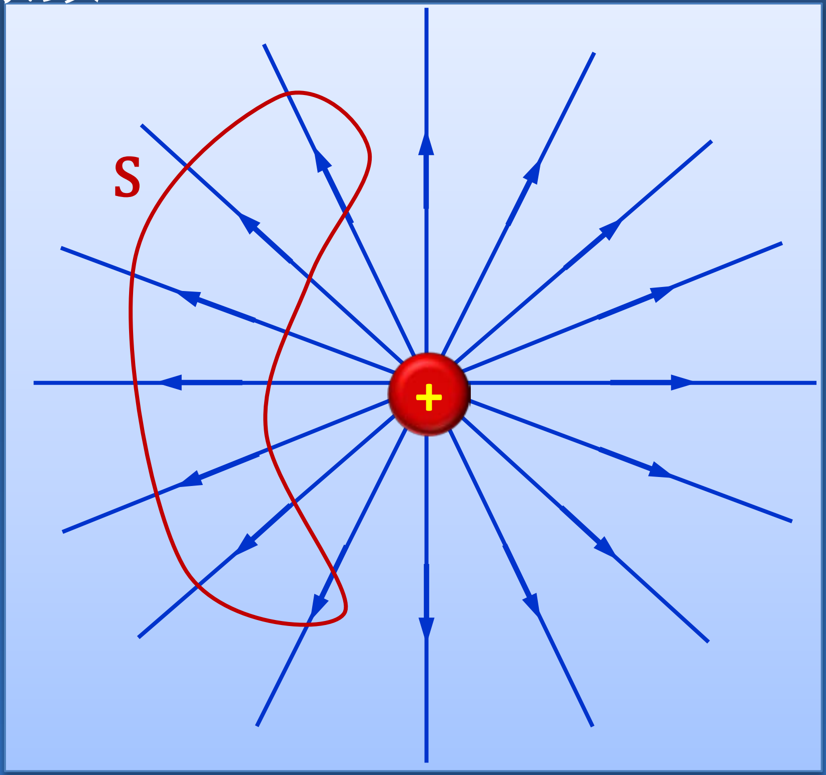
高斯定理的证明

若任意曲面S不包围q， $\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$ ？

根据电场线模型：

穿入的电场线条数=穿出的电场线条数

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$



结论：

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & (S\text{面包围}q) \\ 0 & (S\text{面不包围}q) \end{cases}$$

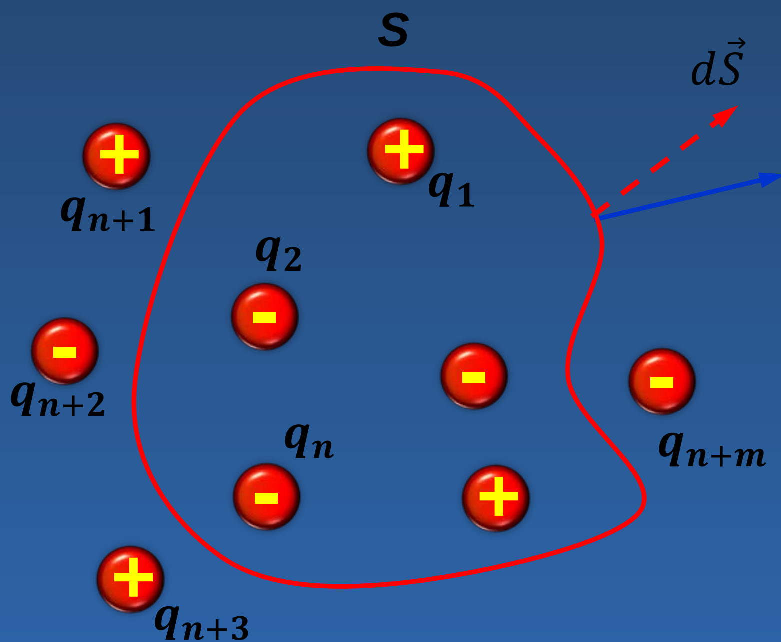
$\Psi_e \alpha\, q_{in}$， 与曲面形状无关！

5.3 电通量　高斯定理

高斯定理的证明

在有多个电荷的情况下，$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = ?$

设 $\begin{cases} S\text{ 面内：} q_1, q_2 \cdots\cdots q_n \\ S\text{ 面外：} q_{n+1}, q_{n+2} \cdots\cdots q_{n+m} \end{cases}$



根据场强叠加原理，

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n + \vec{E}_{n+1} + \vec{E}_{n+2} + \cdots + \vec{E}_{n+m}$$

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \oiint_S \vec{E_1}\cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E_2}\cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_S \vec{E_n}\cdot d\vec{S}$$

$$+ \oiint_S \vec{E}_{n+1}\cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E}_{n+2}\cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_S \vec{E}_{n+m}\cdot d\vec{S}$$

5.3 电通量 高斯定理

高斯定理的证明

在有多个电荷的情况下，$\boldsymbol{\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = ?}$

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

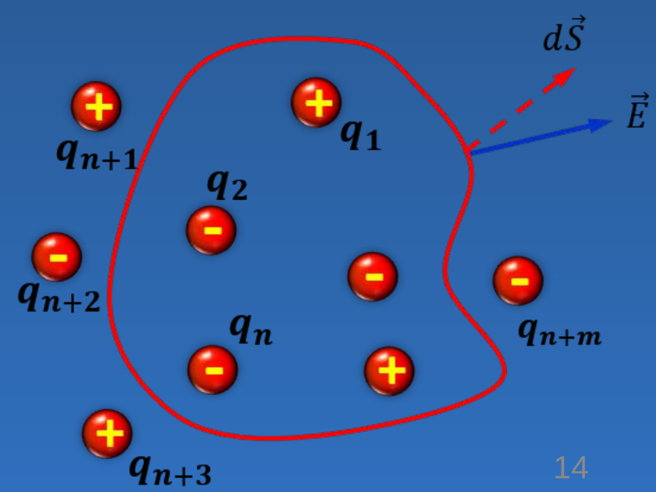
$$= \oiint_S \vec{E_1}\cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E_2}\cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_S \vec{E_n}\cdot d\vec{S}$$

$$+ \oiint_S \vec{E}_{n+1}\cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E}_{n+2}\cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_S \vec{E}_{n+m}\cdot d\vec{S}$$

$$=0$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} + 0$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$



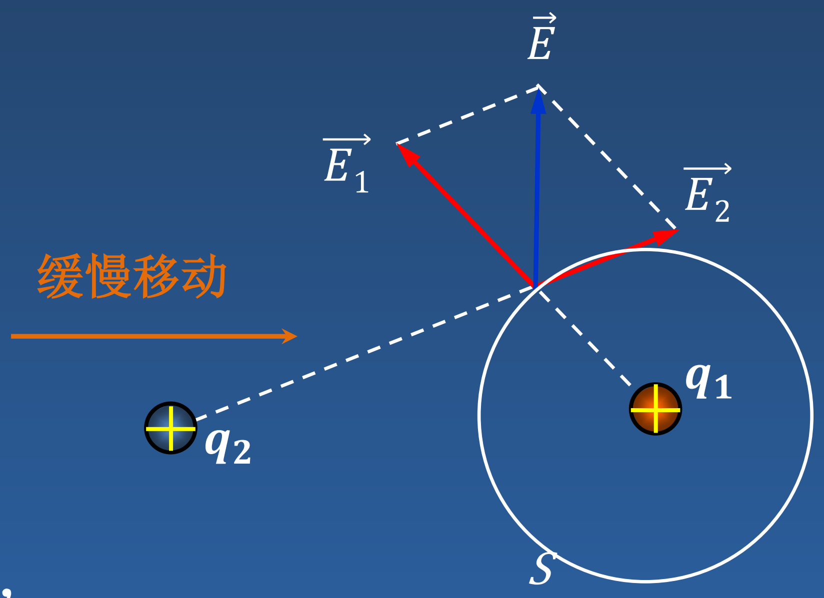
只有S面内的电量对电通量有贡献！

5.3 电通量 高斯定理

在真空静电场中，通过任意封闭曲面S的电通量等于该曲面内电量的代数和的$1/\varepsilon_0$倍，一般写为

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

S面被称为高斯面



注意点：

1.闭合面内、外电荷都对$\vec{E}$有贡献，

但只有闭合面内的电荷对$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$有贡献

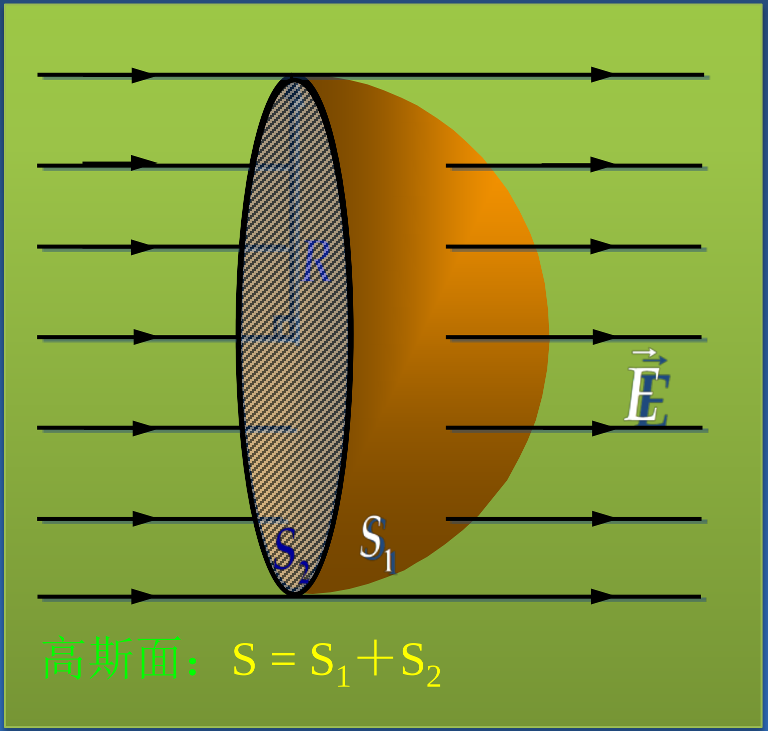
2.静电场性质的基本方程 **有源场**

3.源于库仑定律，高于库仑定律

例1 如图，均匀电场(电场强度为) $\vec{E}$ 垂直与半径为 R 的半球面的底面，求通过该半球面的电通量。

解 作一辅助平面 S_2，则通过 $S_1+S_2=S$ 面的电通量：

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0$$



例1 如图，均匀电场(电场强度为) $\vec{E}$ 垂直与半径为 R 的半球面的底面，求通过该半球面的电通量。

解 作一辅助平面 S_2，则通过 $S_1+S_2=S$ 面的电通量：

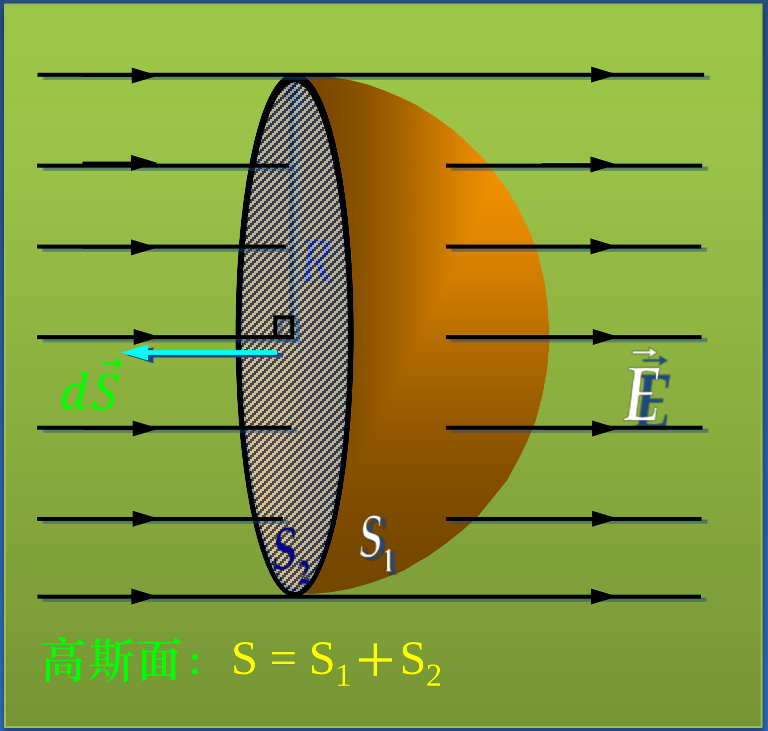
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

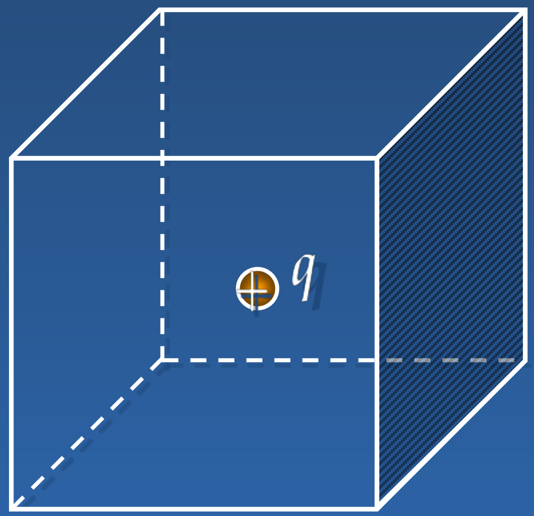
$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_{S_2} E\cdot dS\cdot \cos 180^\circ$$

$$= E\int_{S_2} dS$$

$$= \pi E R^2$$



课堂练习 如图，点电荷 q 位于立方体中心，求通过该立方体某一面的电通量。



提示： 以立方体表面作为高斯面，则

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

通过每个面的电通量相等！

答案： $\phi_e = \dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

5.3 电通量　高斯定理

高斯定理的应用--求对称场$\vec{E}$

在实际求解的过程中，高斯定理往往用于计算具有高度对称性的静电场的场强

常见的高对称性的电荷分布

	球对称	轴对称	面对称
均匀带电的	球体 球面 点电荷	无限长柱体 无限长柱面 无限长带电线	无限大平板 无限大平面

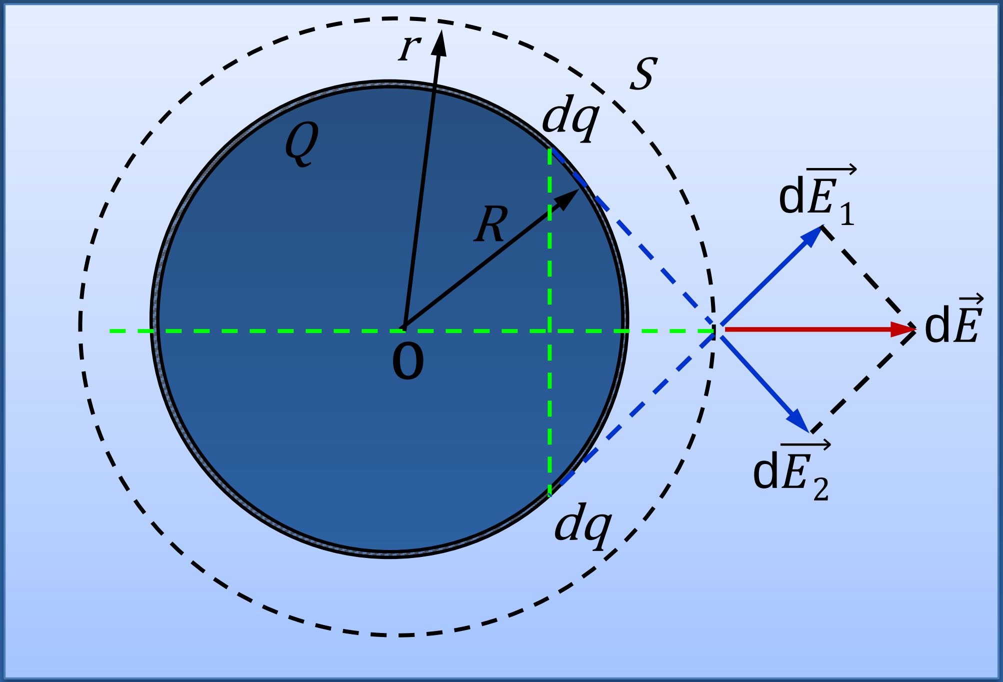
基本思路：对于球/柱/面对称性电场，选择适当的高斯面 S，使得高斯面上各点的$\vec{E}$大小相等，方向与高斯面法线有固定夹角

5.3 电通量　高斯定理

例2. 求总电量为Q、半径为R的均匀带电球面的电场强度分布

分析: 在半径为 r 的同心球面上 $\vec{E}$ 大小相等，方向垂直于球面

球对称 ！



球面剖面图

5.3 电通量 高斯定理

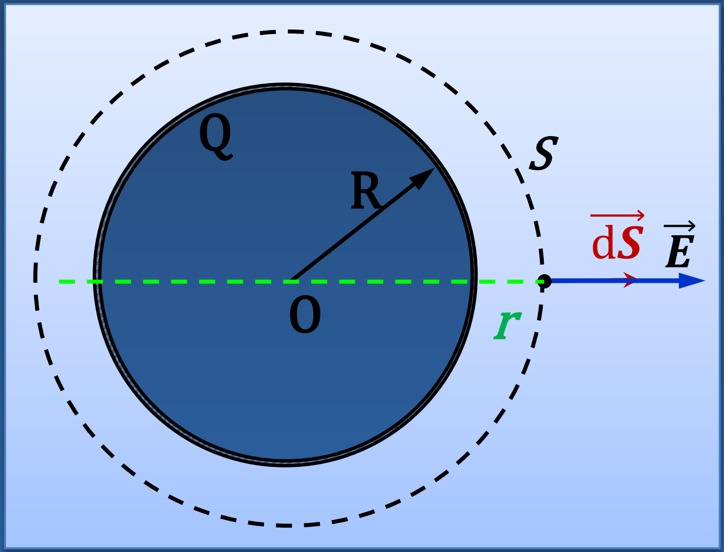
例2. 求总电量为Q、半径为R的均匀带电球面的电场强度分布

解：由于 $\vec{E}$ 具有球对称分布，取以O为球心，r为半径的球面为高斯面 S

$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= \oiint_S E\mathrm{d}S \cdot cos0^o$$

$$= E \oiint_S dS = E\, 4\pi r^2$$



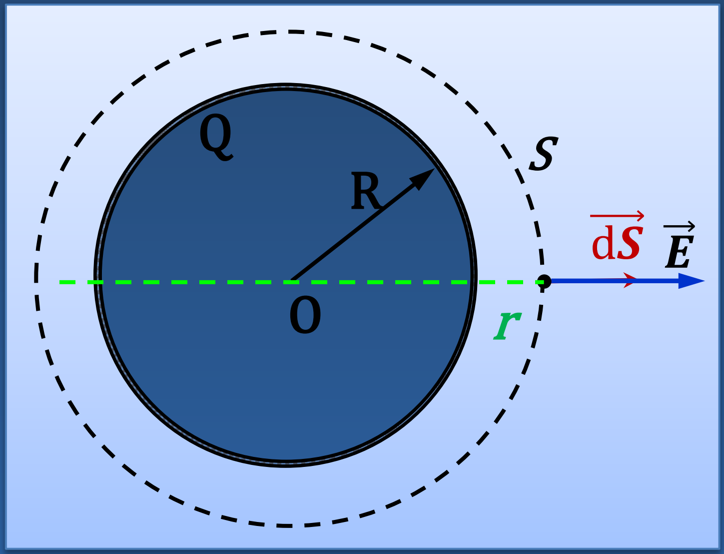
根据高斯定理：

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_i q_i$$

5.3 电通量 高斯定理

例2. 求总电量为Q、半径为R的均匀带电球面的电场强度分布

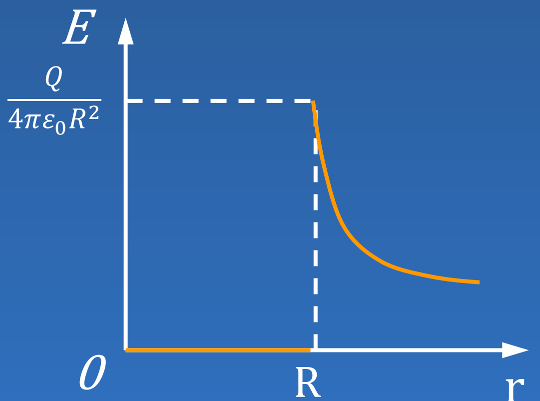
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_i q_i$$



高斯面内电量代数和：

$$\begin{cases} r<R\text{时，} & \sum q_i = 0 \\ r>R\text{时，} & \sum q_i = Q \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0 \ (r<R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ (r>R) \end{cases}$$



5.3 电通量 高斯定理

高斯定理的应用-求对称场$\vec{E}$

步骤

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

1. 电场的对称分析
2. 选取适当高斯面
3. 计算电通量
4. 让它等于面内电荷代数和的$1/\varepsilon_0$

关键在于：高斯面的选取

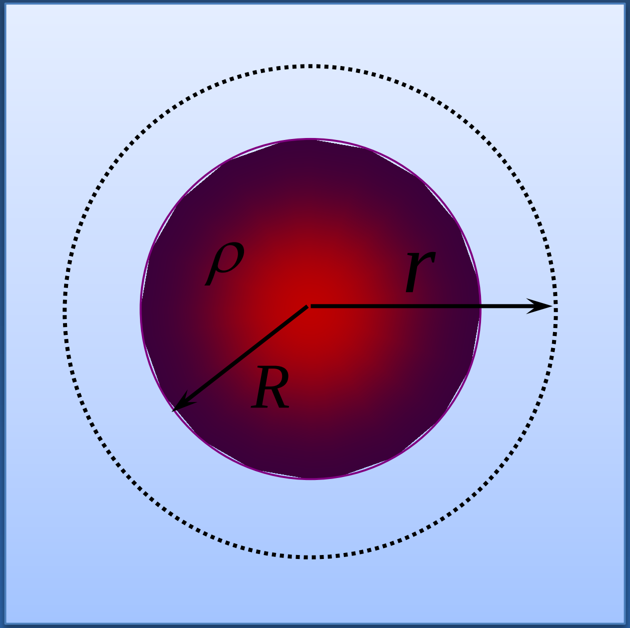
（1）选规则闭合曲面

（2）所有面必须满足以下条件之一：

- ✓ $\vec{E}$为常量,且 $\vec{E}$和$d\vec{S}$ 间有固定夹角
- ✓ 电场强度垂直于闭合面，大小可以不相等
- ✓ $\vec{E}=0$或 $\vec{E}\cdot d\vec{S}=0$

例3. 求均匀带电球体的场强分布。（已知球体半径为R，带电量为q，电荷密度为ρ）

解：由于 $\vec{E}$ 具有球对称分布，取以O为球心，r为半径的球面为高斯面 S



$$\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= E \oiint_S dS = E\ 4\pi r^2$$

根据高斯定理：

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

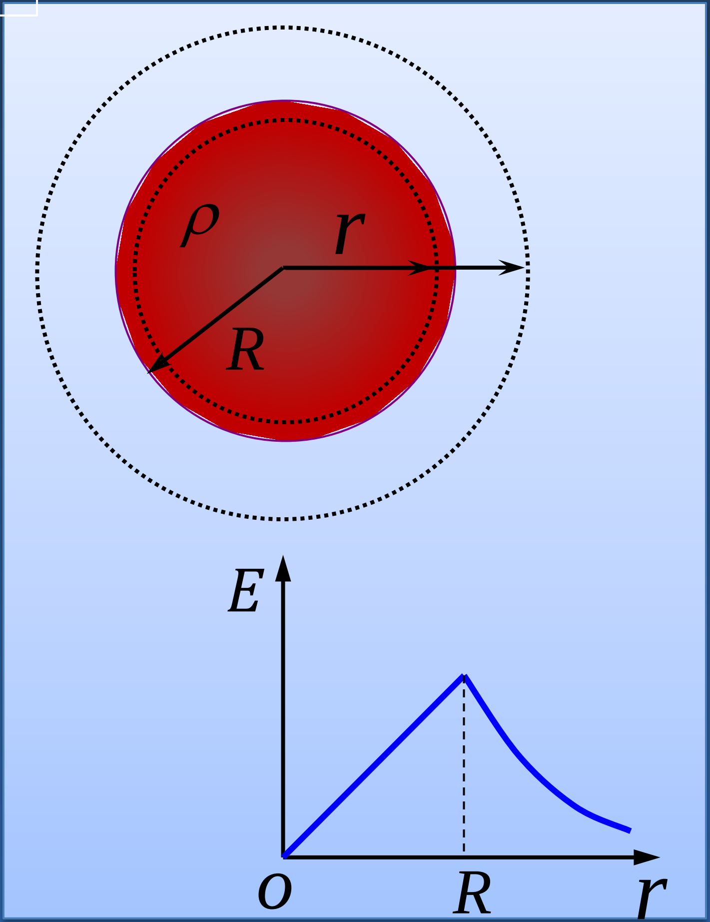
$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum_i q_i$$

（1）球外某点的场强

$$\boxed{q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_i q_i$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$



（2）球体内某点的场强

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_i q_i$$

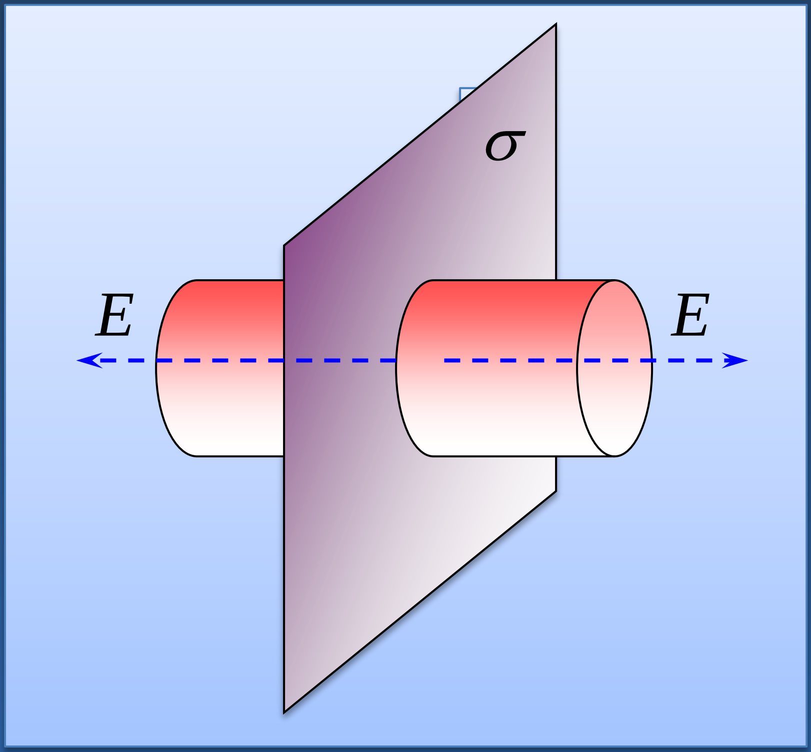
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{q}{4\pi \frac{R^3}{3}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_o R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} \quad (r < R)$$

例4. 计算无限大均匀带电平面的场强分布。

（电荷密度为σ）



解： 取相对于平面呈对称分布的圆柱体闭合面为高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathbf{d}\vec{S} = 2\Phi_{底} + \Phi_{侧}$$

$$2\Phi_{底} = 2ES$$

$$\Phi_{侧} = 0$$

由高斯定理：$\boldsymbol{2ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_o}}$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

方向：**σ>0**，垂直于平面并指向平面外

σ<0，垂直指向平面

例5. 计算两无限大均匀带异号电荷平面的场强分布。

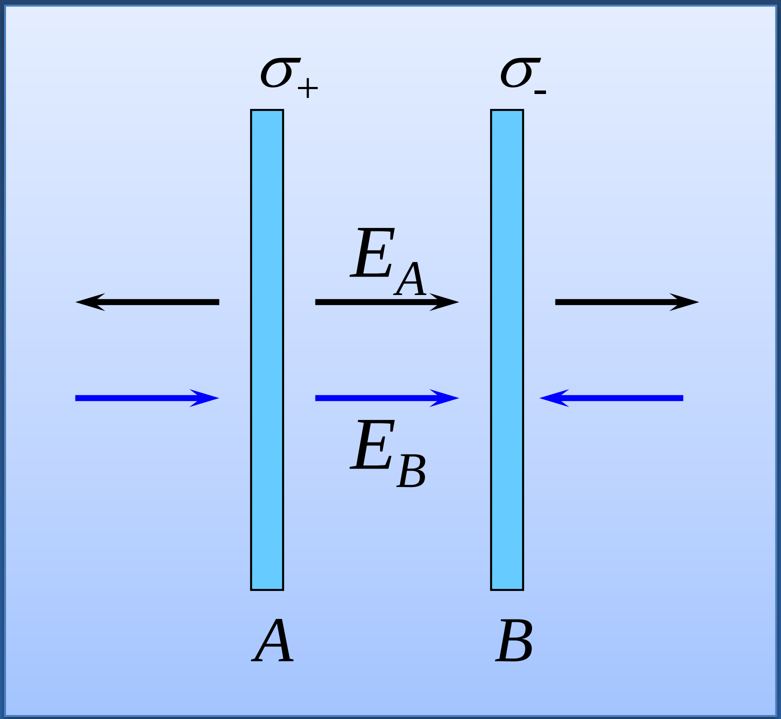
解： $E_A = E_B = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$

平面之间：

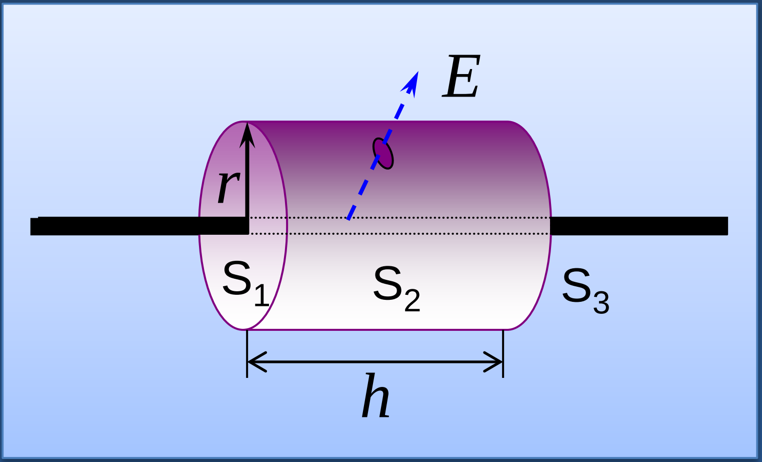
$$E_{内} = E_A + E_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

两平面外侧：

$$E_{外} = E_A - E_B = 0$$



例6. 求无限长带电直线的场强分布。（已知线电荷密度为λ）



解： 取以带电直线为对称轴的圆柱体面为高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathbf{d}\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_o}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathbf{d}\vec{S} = \Phi_1 + \int_{S_2} E\mathbf{d}S + \Phi_3$$

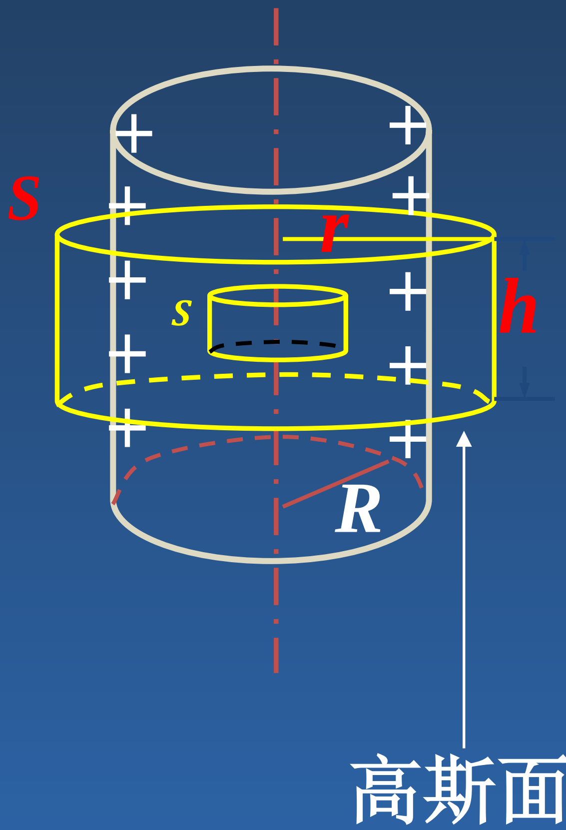
$$\Phi_1 = \Phi_3 = 0$$

$$\int_{S_2} E\cdot \mathbf{d}S = E\cdot 2\pi rh$$

$$E\cdot 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_o} \longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

例7. 求无限长均匀带电圆柱面的电场分布

单位长度圆柱面的带电量为 λ



解: 取与带电圆柱面同轴的圆柱体面为高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{侧面}} E\, dS$$

$$= E \cdot 2\pi rh,$$

（1）柱面外，r > R

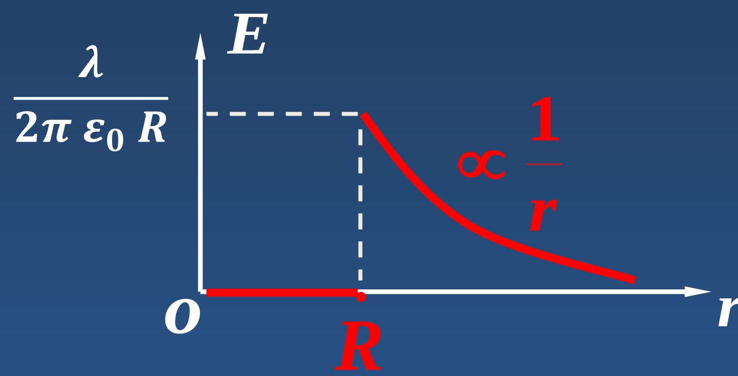
$$\sum q_i = \lambda h\ , \qquad E_{\text{外}} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

（2）柱面内, r < R

$$\sum q_i = 0\ , \qquad E_{\text{内}} = 0$$

★ 结论：无限长均匀带电圆柱面的场强

$$E = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r > R) \\ 0 & (r < R) \end{cases}$$



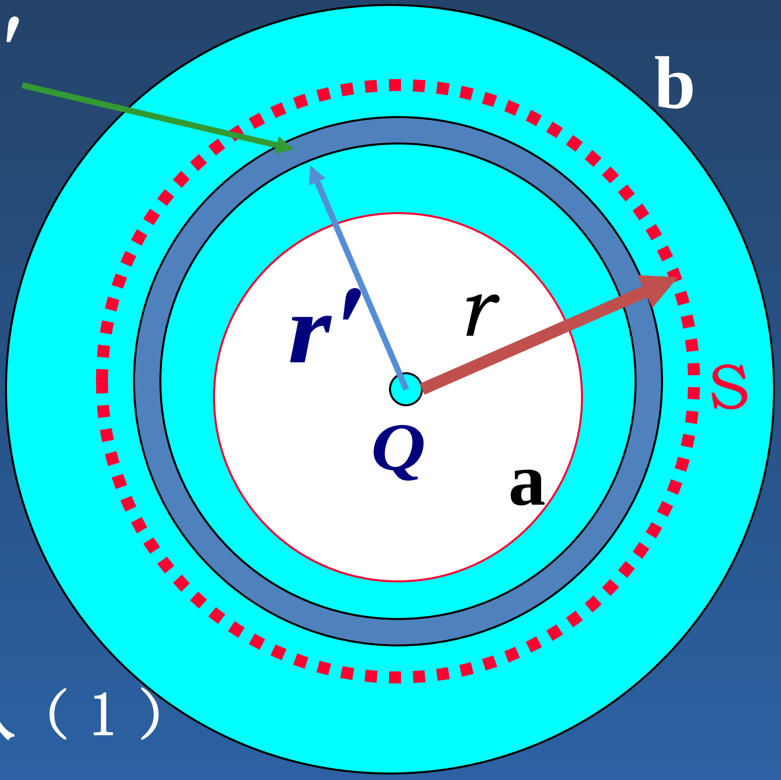
（1）圆柱面外的场强

= 把电量集中于轴线上的无限长均匀带电直线的场强；

（2）圆柱面内的场强处处 = 0 。

均匀带电圆柱体：$\begin{cases} \text{柱内一点 } E = ? \\ \text{柱外一点 } E = ? \end{cases}$

例8 有一带球壳，内外半径分别为**a**和**b**,电荷密度**ρ=A/r**,在球心处有一 点电荷 Q，证明当 A=Q/2πa² 时，球壳区域内的场强 E 的大小与**r**无关。



证明：

以 Q 为圆心，半径 r作一球面为高斯面，则利用高斯定理与场分 布具有球对称性的特点可得

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{Q+\int \rho\, dV}{\varepsilon_0} \quad \cdots\cdots(1)$$

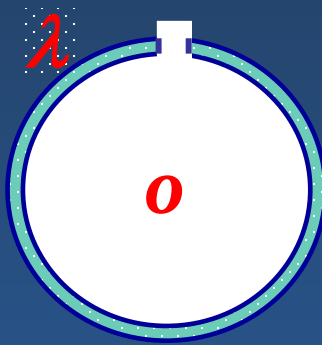
$$\int \rho\, dV = \int_a^r \frac{A}{r'} 4\pi\, r'^2 dr' = 2\pi A(r^2 - a^2)$$ 代入（1）

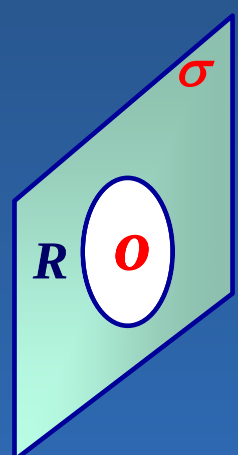
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2} = \frac{A}{2\varepsilon_0} + \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r^2}$$

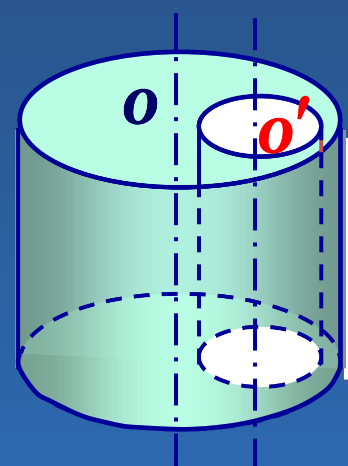
当 $A = \dfrac{Q}{2\pi a^2}$ $\Longrightarrow$ $E = \dfrac{A}{2\varepsilon_0}$

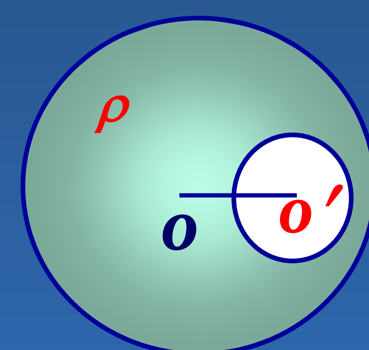
利用场强叠加原理，求如下带电体的电场分布：

1. 带小缺口的细圆环 O 处的场强；
2. 带圆孔的无限大平板 O 处的场强；
3. 带有空腔的圆柱体 O' 处的场强；
4. 带有空腔的球体 O' 处的场强。









总结

1. **电场线模型：** 电场线上任一点的切线方向为该点的电场方向，电场线密度为电场强度。

2. **电通量：** $\Psi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

3. **高斯定理：** 通过闭合曲面S的电通量和作为场源的电荷量q之间的关系。

证明：$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$

应用：求解对称场中的$\vec{E}$