几何代数

几何部分：几何问题代数化。联系：通过向量的线性无关、线性相关构建起几何与代数的桥梁。代数部分：通过将方程组转换为系数矩阵、增广矩阵的形式进一步研究与讨论方程组解的性质、结构等等。

- 几何
  - 空间直角坐标系
    - 方向角、方向余弦

      可联系高数一同学习
    - 投影问题

      a在b上的投影，表示为(a)b,也可以是Proj b a.(Proj为投影project简称）也可以表示为a点乘b的单位向量
    - 点、线、面问题
      - 空间中两点距离
      - ⭐平面方程

        点坐标加上一个法向量/点坐标加上两个方向向量（两个方向向量叉乘可以得到法向量），三点式/截距式不常用。通过两个平面的交线便可以得到空间直线方程
        - 平面方程表示方法
          - 一般式
          - 对称式

            根据小明的说法，注意分母不能为0。可以转换为参数方程求解
          - 点法式
        - 一些关系
          - 平面间的位置关系

            平面夹角为两法向量点积的绝对值，除以各自法向量范数的乘积
            - 相交
            - 平行
            - 重合
          - 平面与点的位置关系

            书P20，由于点M0在法向量上，所以原问题转化为求平面上点M1，与M0组成的向量在法方向上的投影
      - 空间直线方程
        - 空间直线表示法
          - 对称式
          - 参数式
          - 一般式

- 直线与平面的位置关系

  通过直线的方向向量与平面的法向量比较得到。若直线方向向量s平行于平面法向量n则直线与平面垂直。若他们点积为0，则直线与平面平行。不为0，两者相交。

  - 相交

    通过将坐标转换为参数形式，带入平面方程中，通过解出参数t，从而解出对应的x,y,z坐标，最终求解得到相交点坐标

  - 平行
  - 直线在平面上

- 直线与直线的关系

  直线与直线的距离，可以将两直线的方向向量s1,s2,以及两直线过的点M1，M2组成的向量M1M2看做平行六面体的三边，而所求的距离为平行六面体体积除以所求的平行四边形面积。根据外积、混合积物理意义，便可知其实就是混合积除以外积。

  - 平行/重合
  - 相交
  - 异面

- 点到直线距离

  相当于平行四边形已知底边和面积求高，所以

- 向量
  - 向量运算法则
  - 内积
    - 物理意义：做功
  - 外积

    注意：反交换律。可以把右手手掌拿出来，伸平，假设四指拇指方向为a，大拇指方向为b，此时手掌方向朝上，而如果想要互换a b顺序且保持方向不变，会发现此时手掌方向朝下，因此外积交换交换后要添加负号。

    - 物理意义：平行四边形
  - 混合积
    - 物理意义：平行六面体
  - 单位向量

    注意正负

- 几何空间（桥梁）
  - 向量空间
    - 基本性质
      - 线性组合与线性表示
        - 应用

          通过线性表示去研究方程组解的情况

- 与非齐次方程组的联系
  - 书P112定理4.1.7
- 线性相关
  - 应用
    - 与齐次方程组的联系
      非零解
      - 书P116定理4.2.2
- 线性无关
  - 应用
    - 与齐次方程组的联系
      零解
      - 书P116定理4.2.3
- 向量组
  - 等价向量组
    两个向量组互相线性表示
  - 极大无关组
    - 向量组的秩
- 向量空间判定
  - 加法/数乘封闭
    注意证明过程
- 基和维数
  - 向量坐标
  - 过渡矩阵
    旧基新基的变换矩阵，方法：引入e1 e2 e3,求A逆*B
- 欧式空间
  - 基本规则
    在向量空间基础上定义了内积
    - 向量内积
      - 性质
        - 可加
        - 齐次
        - 对称
        - 非负

- 正交概念

  两向量内积为0

- 向量长度

- 相关应用
  - 正交
    - 正交投影
    - （标准）正交基
    - 正交矩阵

      A*A‘=A’*A=E

      - |A|=1或-1

        由于A转置的行列式等于A的行列式，所以可以通过A行列式的平方，从而可得到|A|平方等于1，从而得到A|=1或-1

      - A转置等于A逆

        逆矩阵加上正交阵定义

      - A‘也为正交矩阵
  - 对称
- 线性空间
  - 线性变换
  - 线性映射
- 代数（主线）
  - 线性方程组
    - 解的判定

      怎样解方程

      - 齐次方程组

        系数矩阵做初等变换

        - 非零解
          - 拐角元个数小于未知数个数
            - R(A)<n
              - |A|=0
        - 零解
          - 拐角元个数等于未知数个数
            - R(A)=n
              - |A|≠0

- 非齐次方程组

  增广矩阵初等变换

  - 唯一解
    - 方程组化为简化阶梯型矩阵拐角元不出现在最后一列且拐角元个数等于未知数个数
      - R(A)=R(Atao)=n
  - 无穷多解
    - 方程组化为简化阶梯型矩阵拐角元不出现在最后一列且拐角元个数小于未知数个数
      - R(A)=R(Atao)<n
  - 无解
    - 方程组化为简化阶梯型矩阵拐角元出现在最后一列
      - R(A)≠R(Atao)

- 解的结构

  解释了为什么这么解方程的原因

  - 齐次方程组
  - 非齐次方程组
- 判定工具
  - 行列式
    - 拉普拉斯展开定理
    - 基本性质
      - 行列互换，行/列换一次添一个负号
      - 两行行相同，行列式为0
      - 行列式内部元素行与行/列与列线性相加减（简化行列式计算）
      - |AB|=|A|*|B|
      - |kA|=k^n*|A|
      - |A|=|A'|
    - 应用
      - 克莱姆法则
  - 矩阵

    由于Guass消元，较为麻烦，因此引入了矩阵这个概念，通过一定的矩阵变化，求解方程

    - 基本性质

      左乘与右乘未必相等

    - 矩阵的转置

- 基本性质
  - A''=A
  - (A+B)'=A'+B'
  - (λA)'=λA'
  - ★ (AB)'=B'A'
- 对称矩阵
  - A=A'
- 反对称矩阵
  - A=-A'

- 分块矩阵

  作用：高阶矩阵分块，简化矩阵运算
- ★ 逆矩阵

  Ax=b，通过在同时左乘A逆，便能得到x的值
  - 求解方法
    - 结合伴随矩阵
    - 合并同阶单位阵做初等变换
    - 将逆矩阵元素设出，通过矩阵运算方法求得

      主要结合分块矩阵，将复杂矩阵简单化
  - 基本性质
    - (A逆)的逆是其本身
    - （AB）逆=B逆*A逆
    - A'可逆，A'的逆=A逆的转置
    - ★ k不等于0.（kA)逆=1/k(A逆)

      该性质多用于求已知|A|当系数k求解如A伴随阵的行列式
    - |A逆|=|A|的逆
- 伴随矩阵

  为了求解逆矩阵引入的矩阵
- 矩阵的秩
  - 有一个r阶子式不为0，（r+1)阶子式都为0，则r称为矩阵的秩
  - 初等变换不改变矩阵的秩
- 特征向量与特征值
- 相似矩阵与对角化
- 初等变换

- 二次齐次多项式