习题一　多元函数的基本概念

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、选择题：

1、平面集合$\{(x,y)|x>0,y>0\}\cup\{(x,y)|x<0,y<0\}$是（　）。

（A）开区域；　（B）闭区域；　（C）开集。

2、平面集合$\{(x,y)|y\geq 1\text{或}y\leq -1\}$是（　）。

（A）闭区域；　（B）既非闭区域又非开闭域；　（C）开区域。

3、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^3+y^2}=$（　）。

（A）等于 0；　（B）不存在；　（C）等于 1。

4、定义在R^2上的$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}, & (x,y)\neq(1,-1)\\ 0, & (x,y)=(1,-1)\end{cases}$的不连续点集合是（　）。

（A）直线$x=1$；　（B）直线$y=-1$；　（C）单点集$\{(1,-1)\}$。

二、填空题：

1、设$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，则$f(x+y,x-y)=$________________________；

2、若$f(x+y,y/x)=x^2-y^2$, 则$f(x,y)=$___________________________；

3、$u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$的定义域是________________________________。

三、求下列函数的定义域，并作出定义域的图形：

1、$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

2、$z=\ln(1-(|x|+|y|))$。

四、计算下列极限：

1、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$；

2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

五、证明：极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$不存在。

六、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？。

习题二　偏导数

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、选择题：

1、 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处（　）

（A）一定连续；　（B）一定不连续；　（C）不一定连续。

2、曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向间夹角为（　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$；　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$；　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$。

3、 $z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$，其中 f 可微，则 $\sec x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）

（A）1；　　（B）$2f'$；　　（C）0。

二、填空题：

1、设 $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$，及 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 分别为______和__________。

2、设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}+xe^{-xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$____。

3、设 $u=x^{\frac{z}{y}}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$____，

二、计算题：

1、设 $z=(1+xy)^y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}$。

2、设 $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$，求 z_x, z_y。

3、设$u=\arctan(x-y)^z$，求u_x, u_y, u_z。

4、设$z=x\ln(x\sin y)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$

五、设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1、计算$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；　　2、证明f在$(0,0)$点不连续。

习题三　全微分及其应用

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、是非题：

1、 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微的充分必要条件。　　（　　）

2、若函数 $z=f(x,y)$ ）在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则偏导数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处必连续。　　（　　）

二、填空题：

1、设 $z=e^{xy}$，则 $dz|_{(1,1)}=$________，当 $\Delta x=0.01,\Delta y=0.02$ 时，$dz|_{(1,1)}=$_____。

2、设 $z=\ln\sin\dfrac{x}{y}$，则 $dz=$____。

3、设 $z=\ln(1+\dfrac{x}{y^2})$，则 $dz|_{(1,1)}=$____。

三、计算题：

1、 $z=\arcsin\dfrac{y^2}{x}$，求 dz。

2、 $u=\ln(x^x y^y z^z)$，求 du。

3、 $z = x2^{xy}$，求 dz 及 $dz|_{(1,0)}$。

四、研究函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点的可微性。

五、证明 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点可微。

习题四　多元复合函数的求导法则

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、求下列复合函数的导数或偏导数：

1、$u = x^y$，$x = \sin t$，$y = \cos t$，则 $u'(t) =$________________________________

2、$z = u^2 + vw,\ u = x + y,\ v = x^2, w = xy$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)} =$______；　$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)} =$______

3、设 $u = f(x+y, xy)$，其中 f 可微，则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$____________________________；

$\frac{\partial u}{\partial y} =$_______________________。

4、设 $w = \frac{1}{u}$，$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，则 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} =$__________________。

5、设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$，其中 f 可微，则 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} =$________________。

二、求下列函数的二阶偏导数，其中 f 有连续的二阶导数或偏导数：

1、$z = f(x^2 + y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

2、$z = f(x, y, \frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

三、函数$u(x,t)$有二阶连续偏导数，引入$\xi = x - at,\ \eta = x + at$ ($a \neq 0$为常数)后变为$u(\xi,\eta)$，问方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$变为什么形式？你能写出一个满足此方程的函数$u(\xi,\eta)$吗？

习题五　隐函数微分法

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、设 $\cos(x^2+yz)=xz+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

二、设 $e^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

三、证明方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$（其中 $F(u)$ 有连续导数）所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $(cy-bz)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$

四、设$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$，求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{dz}{dx}$。

五、设$x = e^u \cos v,\ \ y = e^u \sin v,\ \ z = uv,$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$。

六、设$u = f(x, y, z) = xy^2 z^3$，而$x, y, z$满足方程$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$，设$z = z(x, y)$是由上述方程所确定的隐函数，$z(1,1) = 1,$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}|_{(1,1)}$。

习题六　方向导数与梯度

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、是非题：

1、若 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处沿任一方向的方向导数均存在，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处必可微。　　　　　　　　　　　　（　　　）

2、若 $u=F(x,y,z)$ 可微，则方向 $\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ 是 u 在点 (x,y,z) 处变化率最大的方向。　　　　　　　　　　　　（　　　）

二、填空题：

1、设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\mathrm{grad}f(0,0,0)=$____________________，$\mathrm{grad}f(1,1,1)=$_____________________。

2、求函数 $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $(1,2)$ 沿 ox 轴成 135° 方向上的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}\big|_{(1,2)}=$______________________________。

三、计算题：

1、求函数 $u=3x^2+z^2-2yz+2xz$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿点 $(-1,1,-2)$ 至 $(5,4,0)$ 方向上的方向导数。

2、求函数 $u=x^2+y+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿该点外法线方向的方向导数。

3、已知$\vec{\alpha}=y^2\vec{i}+2xy\vec{j}-xz^2\vec{k}, u=z^2-x^2y$，试在$M(-1,-1,1)$处计算

（1）$(\vec{\alpha}\cdot \mathrm{grad}u)|_M$，，　　　　（2）$(\vec{\alpha}\times \mathrm{grad}u)|_M$

4、设 $f(x,y,z)=\ln(x+y+z+\sqrt{1+(x+y+z)^2})$，它在点(1,1,1)处沿哪个方向的变化率最大？求出这个方向的方向余弦及 f 在点(1,1,1)处的最大变化率。

5、求函数 $f(x,y)=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $M(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点内法线方向上的方向导数。

习题七　多元函数微分法的几何应用

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程是______________。

法线方程是________________________。

2、曲线 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ z=4\sin\dfrac{t}{2}$, 在点 $(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$ 处的切线方程是

__________________________；法平面方程是___________________________。

3、设曲面 S 的方程是 $F(cx-az,cy-bz)=0$，其中 F 可微，a,b,c 是非零常数，

则点 $M(x_0,y_0,z_0)\in S$ 处的法向量是___________________________。

二、计算题：

1、求曲线 $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ 上的点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

2、求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程。

3、求曲线$\begin{cases} xyz=1 \\ y^2=x \end{cases}$在点$(1,1,1)$处的切线的方向余弦。

4、求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2 \\ y^2+x^2=2ax \end{cases}$ $(a>0)$在点$M(a,a,\sqrt{2}a)$处的切线及法平面方程。

三、证明：曲面$xyz=a^3(a>0)$的切平面与坐标平面围成的四面体的体积为常数。

习题八　多元函数的极值

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、是非题：

1、若点$P(x_0,y_0)$为$z=f(x,y)$的极值点，则必有$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$。（　　）

2、设$f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$的某邻域内有连续的二阶偏导数，令$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$，若$A>0,B^2-AC<0$，则$f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$处取极小值。（　　）

二、计算题：

1、求函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的极值。

2、求曲面$z=xy$被平面$x+y=1$所截的曲线的最高点的坐标。

三、从斜边长为 L 的一切直角三角形中，求有最大周界的直角三角形。

四、求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一封限内的点，使得椭球面过该点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，最小体积是多少？

五、抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

习题九　二元函数的泰勒公式

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、利用泰勒公式将二元多项式 $2x^2-2xy-y^2-3x-4y+1$ 写成 $x-1$ 和 $y-2$ 方幂的形式。

二、求函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 的二阶麦克劳林公式。

习题十　空间曲面与空间曲线

一、填空题：

1、方程 $x^2+y^2+z^2-x+2y-2z=0$ 表示的空间曲面是________________。

2、xoy 平面上的曲线 $\begin{cases}3x^2-2y^2=6\\ z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周的旋转曲面是______

________________，该曲面的方程是___________________。绕 y 轴旋转一周的旋转曲面是___________________，该曲面的方程是_________________。

3、 yoz 平面上的曲线 $\begin{cases} 2y^2+1=z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面是____________________________，该曲面的方程是__________________。

4、 zox 平面上的曲线 $\begin{cases} 4x^2+9z^2=36 \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周的旋转曲面是_________________________，该曲面的方程是__________________。

5、方程 $4x+y^2=0$ 在平面直角坐标系中表示的是___________________，在空间直角坐标系中表示的是____________________。

6、方程组 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1 \\ x=-2 \end{cases}$ 在平面直角坐标系中表示的是___________________，在空间直角坐标系中表示的是____________________。

7、曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10 \\ x-2y=0 \end{cases}$ 的参数方程为_____________________。

8、曲线 $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4 \\ z=-1 \end{cases}$ 的参数方程为_____________________。

9、母线平行于 y 轴，且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程是_____________________。

10、球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $y+z=1$ 的交线在 xoy 平面上的投影曲线方程是_____________________。

11、曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ z=x+1 \end{cases}$ 在 $y=0$ 坐标面上的投影曲线方程是_____________。

习题十一　二次曲面

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、写出下列方程所表示的曲面的名称，并作出图形：

（1）$x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$　　（2）$16x^2+4y^2-z^2=64$　　（3）$2y^2+2z^2-x=0$

二、画出曲面$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{4}=1$的图形以及被下列各平面截得的曲线方程，并指出它们是什么曲线？

（1）$x=2$；　　（2）$y=0$；　　（3）$z=2$。

三、指出下列方程组所表示的曲线：

（1）$\begin{cases} y^2+3z^2-4x+8=0 \\ y=4 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1 \\ z=-2 \end{cases}$

四、画出下列各组曲面所围成的立体的图形：

（1）$z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$，在第一卦限内；

（2）$x=0, y=0, z=0, x+y=1, z=x^2+y^2$；

（3）$x=0, y=0, z=0, y=1, z=4-2x^2-y^2$，在第一卦限内。

习题十二　二重积分的概念与性质

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、比较下列各对积分值的大小，并说明理由。

（1）$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$_____ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，其中区域$D$由$x$轴，$y$轴与直线$x+y=1$围成。

（2）$\iint\limits_D (x+y)d\sigma$____ $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，其中区域$D$由圆$(x-2)^2+(y-1)^2=2$围成。

（3）$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$____ $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中区域$D$是顶点为(1,0), (1,1)和(2,0)的三角形区域。

（4）$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$____ $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid 3\le x\le 6, 0\le y\le 1\}$。

二、利用二重积分的性质估计下列积分值：

（1）设$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$，则___$\le \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma \le$_______。

（2）设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$，则_______$\le \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)d\sigma \le$______。

（3）设$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 10\}$，则_______$\le \iint\limits_D \dfrac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \le$_____。

三、由二重积分的几何意义，指出$\iint\limits_D (1-x-y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$中$f(\xi,\eta)$的值，其中$D$是顶点为$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$的三角形，σ是D的面积。

四、若 $f(x,y)$ 在闭区域 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 上连续，证明：

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\frac{1}{\pi\alpha\beta}\iint_{D_{\alpha\beta}} f(x,y)\,d\sigma = f\,(\,($$

其中 $0<\alpha<a,\ 0<\beta<b,\quad D_{\alpha\beta}=\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}\le 1\}$ 。

。

习题十三　二重积分的计算

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、交换下列累次积分的积分次序：

（1）$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy =$____；

（2）$\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y)dx =$________________________。

二、画出积分区域，并计算下列二重积分：

1、$\iint\limits_D \frac{x}{1+y^2} d\sigma$，其中$D$为矩形为区域$0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$。

2、$\iint\limits_D (x^2+y^2-x)d\sigma$，其中$D$为由直线$y=2, \quad y=x, \quad 及 y=2x$围成的闭区域。

3、$\iint\limits_D e^{x+y} d\sigma$，其中$D$由$|x|+|y| \le 1$所确定的闭区域。

4、$\iint\limits_{D}\frac{d\sigma}{\sqrt{2a-x}}$，其中$D$是由$(x-a)^2+(y-a)^2\ge a^2, 0\le x\le a, 0\le y\le a$所确定的闭区域。

5、$\iint\limits_{D}e^{y^2}d\sigma$，其中$D$是第一象限内由直线$y=x$和曲线$y=\sqrt[3]{x}$围成的闭区域。

三、计算下列累次积分：

1、$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^1 ye^{xy}dy$

2、$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$

习题十四　二重积分的计算（续）

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、利用极坐标计算下列二重积分：

1、$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$，$D=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$；

2、$I=\iint\limits_D |x|dxdy$，其中 D 是以原点为圆心，以 a 为半径的上半圆域；

3、$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$， D 为圆 $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$ 及直线 $y=x, y=0$ 所包围的在第一象限内的区域；

4、$\iint\limits_D xydxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid y\geq 0,\ x^2+y^2\geq 1,\ x^2+y^2\leq 2x\}$。

二、将下列直角坐标系下的二次积分化为极坐标系下的二次积分：

1、$\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy=$______________________________________。

2、$\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy=$___________________________。

三、把下列积分化为极坐标形式的累次积分并计算积分值：

1、$\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx$；

2、$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$。

四、设 $F(t)=\iint\limits_{D(t)} e^{\sin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 $D(t)=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2, t>0\right\}$，求 $F'(t)$。

五、作适当的坐标变换，求 $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$,其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$。

习题十五　三重积分的概念及计算

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、　填空题：

1、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 是由曲面 $cz=xy,(c>0),\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,z=0$ 围成的第一卦限的区域，则在直角坐标系下化为先对 z 再对 y 最后对 x 的累次积分 $I=$____。

2、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 是由曲面 $2z=x^2+y^2$，平面 $z=1,z=2$ 围成的区域，则在直角坐标系下化为先对 x 再对 y 最后对 z 的累次积分

$I=$____。

3、设 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z^3\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}dv$，其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，则积分值 $I=$___

4、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} e^{x+y+z}dv$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\}$，则积分值 $I=$______________________________。

二、计算题：

1、$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dv}{(1+x+y+z)^3}$，$\Omega$ 为平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 及 $x+y+z=1$ 围成的四面体。

2、$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$，$\Omega$为抛物柱面$y=\sqrt{x}$及平面$y=0,\ z=0,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}$围成的区域。

3、 $I=\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dv$， 其中$\Omega$是由曲面$z=xy$与平面$y=x,x=1$和$z=0$围成的区域。

4、$\iiint\limits_{\Omega} xzdxdydz$，其中$\Omega$是平面$z=0,z=y,y=1$及抛物柱面$y=x^2$围成的区域。

5、 $\iiint\limits_{\Omega} e^y dv$， 其中$\Omega$由$x^2-y^2+z^2=1,y=0,y=2$围成。

习题十六　三重积分的计算（续）

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的区域，则在直角坐标、柱面坐标系下的累次积分分别为

$I_{直}=$____;

$I_{柱}=$____。

2、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=1,\ z=0$ 围成的区域，则在直角坐标、柱面坐标系下的累次积分分别为

$I_{直}=$____;

$I_{柱}=$____。

3、设 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\}$，则在球面坐标下的累次积分为 $I=$____。

4、$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $x^2+y^2+z^2=1$ 围成的区域（含在锥内），则在三种坐标下的累次积分分别为

$I_{直}=$____;

$I_{柱}=$____;

$I_{球}=$____;

二、计算题：

1、$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dv,\ \Omega$ 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0, z=2, y=0$ 围成的区域。

2、$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}dv,\ \Omega$是由$z=x^2+y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成的区域。

3、$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv,\ \Omega$为两个半球面$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}, z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$(A>a>0)$及平面$z=0$围成的区域。

4、$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv,\ \Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=z$围成的区域。

三、设函数f有连续导数且$f(0)=0$，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2, t>0\}$,

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$，求(1) $F(t)$在球坐标系下的表示式；(2) $F'(t)$；

(3) $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{\pi t^4}$。

习题十七　重积分的应用

专业班级________________姓名________________学号__________________

一、求曲线 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积。

二、求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下部分的曲面面积。

三、求锥面 $z^2=x^2+y^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截部分的曲面面积。

四、设平面薄片所占的区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=x$ 围成，它在点 (x,y) 处的面密度 $\rho(x,y)=x^2y$，求该薄片的重心。

五、求由抛物线$y=x^2$及直线$y=1$围成的均匀薄片（面密度为常数ρ）对于直线$y=-1$转动惯量。

六、一个物体是由两个半径各为A和$a(0<a<A)$的同心球面围成，已知其内部任一点处的密度与该点到球心的距离成反比，且在距离等于 1 处等于 2，求物体的质量。

七、一均匀物体（密度ρ为常数）占有的区域Ω由曲面$z=x^2+y^2$和平面$z=0,|x|=a,|y|=a$围成。

1、求其体积；　2、求物体的重心；　3、求物体关于z轴的转动惯量。

习题十八　第一型曲线积分

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、设曲线 L 是由 $L_1: x=0\ (0\le y\le 1)$，$L_2: y=0\ (0\le x\le 1)$，$L_3: x+y=1\ (0\le x\le 1)$ 所围成的平面图形的边界，函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则将 $\int_L f(x,y)ds$ 化为定积分计算时，$\int_{L_1} f(x,y)ds=$________________________，$\int_{L_2} f(x,y)ds=$__________________，$\int_{L_3} f(x,y)ds=$_______________________。

2、设曲线 L 的方程为 $y=\sqrt{1-x^2}$，函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续，将曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 化为定积分进行计算，则

当取 x 为参数时，$\int_L f(x,y)ds=$________________________________；

而当取 y 为参数时，$\int_L f(x,y)ds=$______________________________。

3、设曲线 L 的方程为 $y=\sqrt{4-x^2}\,(0\le x\le 2)$，用极坐标计算第一型曲线积分时，$\int_L f(x,y)ds=$___________________________，（其中 $f(x,y)$ 在 L 上连续）。

4、设曲线 Γ 的直角坐标方程是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ z=1 \end{cases}$，用柱面坐标中的 θ 为参数计算曲线积分 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds=$_______________________，（其中 f 在 Γ 上连续）。

二、计算曲线积分 $\int_L xds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的边界。

三、计算曲线积分$\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限内所围成的扇形的边界。

四、计算曲线积分$\int\limits_L y^2 ds$，其中L为摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$。

五、计算曲线积分$\int\limits_\Gamma x^2 yzds$，其中$\Gamma$为折线$ABCD$，这里$A, B, C, D$依次为点（0，0，0），（0，0，2），（1，0，2），（1，3，2）。

习题十九　第二型曲线积分

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、设Γ的参数方程为$x=3t,\ y=2t,\ x=t$，取从点$A(3,2,1)$到$B(0,0,0)$一段，将对坐标的曲线积分化为定积分计算，则$\int_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$______________________________。

2、把对坐标的曲线积分化为对弧长的曲线积分。若L为xoy面内沿直线从点$(0,0)$到$(1,2)$，则$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$__________________; 若$L$为沿抛物线$y=2x^2$从点$(0,0)$到$(1,2)$，则$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$_________________。

3、把对坐标的曲线积分化为定积分。若Γ为曲线$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$上相应于t从 0 变到 1 的曲线弧，则$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$

____。

二、计算曲线积分$\oint_L xydx$，其中L为x轴与上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$在第一象限内所围成区域的边界（按逆时针方向绕行）。

三、计算曲线积分$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$（按逆时针方向绕行）。

四、设计曲线积分 $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段。

五、计算曲线积分 $\oint_\Gamma dx-dy+ydz$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里 A, B, C 依次为 $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$。

六、在椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 上每一点 P 有作用力 $\overline{F}$，其大小等于从点 P 到椭圆中心距离，而方向朝着椭圆中心。

（1）试求质点 P 沿椭圆位于第一象限中的弧从点 $A(a,0)$ 移动到 $B(0,b)$ 时力 $\overrightarrow{F}$ 所作的功。（2）求点 P 按正向走遍全部椭圆时力 $\overrightarrow{F}$ 所作的功。

习题二十　格林公式及应用

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、利用格林公式计算下列各曲线积分：

1、$\int_L x^2 y dx + xy^2 dy$，$L: |x| + |y| = 1$的正向。

2、$\int_L (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x) dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy$，

$L: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ 的正向。

3、$\int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$，其中 L 为从点 $A(a, a)$ 沿曲线 $x^2 + y^2 = 2ax$ 的上半段到点 $O(0, 0)$ 的一段弧。

4、$\int_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}dx+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}dy$，其中 L 为由曲线：$x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$，$y=x, y=\sqrt{3}x\ (y>0)$ 所围成的区域 D 的正向边界。

二、计算曲线积分 $\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中 L 为逆时针方向的圆周 $(x-1)^2+y^2=a^2(a>0,且a\neq 1)$。

三、设简单闭曲线 L 不过 y 轴，证明 L 所围面积 $S=\frac{1}{2}\oint_L x^2 d(\frac{y}{x})$。

习题二十一　格林公式及其应用（续）

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、证明下列曲线积分在整个 xoy 平面内与路径无关，并计算积分值：

（1）$\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy$；　　（2）$\int_{(1,2)}^{(6,8)}(2xe^{y}+1)dx+(x^2e^{y}+y)dy$；

（3）$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(\sin x-y)dx-(x+\sin y)dy$。

二、求 $\int_L e^{-x}\sin ydx-e^{-x}\cos ydy$，$L$：沿 $y=x^2-2x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(4,8)$。

三、设 $I=\int_L[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy$ 与积分路径 L 无关，且 $f(1)=1$，求：

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[e^x+2f(x)]ydx-f(x)dy$ 之值。

四、确定 λ 的值，使曲线积分 $I=\int_L(x^4+4xy^3)dx+(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4)dy$ 与积分路线无关，并求 $\int_{(0,0)}^{(1,2)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^{\lambda-1}y^2-5y^4)dy$ 之值。

五、验证 $(\ln\frac{y}{x}-1)dx+\frac{x}{y}dy$（在第 I 象限内）是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

习题二十二　第一型曲面积分

专业班级________________姓名_______________学号__________________

一、填空题：

1、设有一分布着质量的曲面Σ，在点(x,y,z)处它的面密度为$\rho(x,y,z)$，则曲面Σ的质量$M=$_______________，曲面Σ的重心坐标$\bar{x}=$___________________

$\bar{y}=$__________________________，$\bar{z}=$________________________。

2、设曲面$\sum_1: x^2+y^2+z^2=R^2, \sum_2: x=y^2+z^2, 1\le x\le 2, \sum_3: y^2+z^2=R^2, 0\le x\le 1$。试用重积分表示下列第一类曲面积分：

$\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS=$____；

$\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS=$____；

$\iint\limits_{\Sigma_3} f(x,y,z)dS=$____。

二、计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(z+4x+2y)dS$，其中$\Sigma$为平面$x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限内的部分。

三、计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+4z}dS$，$\Sigma$为$z=x^2+y^2$上$z\le 1$的部分。

四、计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}dS$，其中$\Sigma$为双曲抛物面$z=xy$被柱面$x^2+y^2=R^2$所截得的第一卦限部分。

五、知圆柱面$x^2+y^2=1$上每一点的密度为$\mu(x,y,z)=\dfrac{1}{r^2}$，$r$为该点到原点的距离，求介于平面$z=0$及$z=1$之间的圆柱面的质量。

习题二十三　第二型面积分

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、设Σ为平面$z=z_0$内的一个区域的上侧，Σ在xoy面上的投影区域记为D，则$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=$________________；$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx=$_______________；$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=$____。

2、设Σ_1是平面$3x+2y+z=6$在第一卦限部分的上侧，Σ_2是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，Σ_3是抛物面$x=1-y^2-z^2$在yoz平面前方的前侧，试用第一类曲面积分表示下列第二类曲面积分：

$\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz=$_________________；$\iint\limits_{\Sigma_2} Q(x,y,z)dzdx=$_________________；

$\iint\limits_{\Sigma_3} R(x,y,z)dxdy=$____。

二、计算下列第二类曲面积分：

1、$\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2)zdxdy$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$下半部的下侧。

2、$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2$被平面$z=0,z=1$所截部分的外侧。

3、$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\,(z\le 1)$在第一卦限部分的下侧。

4、$\iint\limits_{\Sigma}2(1+x)dydz$，其中$\Sigma$是由平面曲线$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ z=0 \end{cases}\ (0\le x\le 1)$绕$x$轴旋转一周所得曲面的外侧。

三*、$\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的内侧。（提示：化为第一型曲面积分计算）

习题二十四　高斯公式与斯托克斯公式

专业班级________________姓名_______________学号___________________

一、填空题：

1、$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy=$____________________，其中$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$所围立体表面之外侧。

2、设Σ为光滑闭曲面，V为Σ所包围的立体体积，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为$\Sigma$外法线向量$\vec{n}$的方向余弦，则$\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS=$_______________。

3、设Σ为光滑闭曲面的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma}y^2dydz+z^2dzdx+x^2dxdy=$___________。

4、设$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=$______________________。

二、利用高斯公式计算下列曲面积分：

1、$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧。

2、$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中$\Sigma$为介于平面$z=1$与$z=5$之间的那部分圆柱面$x^2+y^2=1$的外侧。

3、$\iint\limits_{\Sigma} yzdydz+(x^2+z^2)ydzdx+xydxdy$，其中$\Sigma$为曲面$4-y=x^2+z^2$在$xoz$平面右方部分的外部。

4、$\iint\limits_{\Sigma} 4zxdydz-2yzdzdx+(1-z^2)dxdy$，其中$\Sigma$为$z=e^y \quad (0\le y\le 2)$绕$z$轴旋转一周所围成曲面的内侧。

三、求矢径$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$通过锥面$z=4-\sqrt{x^2+y^2}\,(z\ge 1)$上侧的通量。

四、利用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

1、$\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$，其中$\Gamma$为圆周$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，从$x$轴正向看去圆周是逆时针方向。

2、$\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2dz$，其中$\Gamma$为圆周$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = 2 \end{cases}$，从 z 轴正向看去圆周是逆时针方向。

五、求向量扬$\vec{A}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$（$c$ 为常数）沿闭曲线$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=0\end{cases}$（从 z 轴正向看取逆时针方向）的环量。