

## 习题一 随机事件及其概率和性质

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

### 1.1 选择题

- (1) 设  $A, B$  为任意两个事件, 则下列关系式成立的是 ( )。
- (A)  $(A \cup B) - B = A$ ; (B)  $(A \cap B) - B \supset A$ ; (C)  $(A \cap B) - B \subset A$ ; (D)  $(A - B) \cup B = A$ 。
- (2) 以  $A$  表示“甲种产品畅销, 乙种产品滞销”, 则对立事件  $\bar{A}$  为 ( )。
- (A) 甲种产品滞销, 乙种产品畅销 (B) 甲、乙产品均畅销  
(C) 甲种产品滞销 (D) 甲产品滞销或乙产品畅销

### 1.2 指出下列关系中那些是正确的, 那些是错误的, 并说明理由。

- (1)  $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$ ; (2)  $(A \cup B) - A = B$ ;
- (3)  $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \bar{B}$ ; (4)  $\bar{A} B \cup A \bar{B} \cup \bar{A} \bar{B} = \bar{A}$ ;
- (5)  $(AB)(\bar{A}\bar{B}) = \emptyset$ ; (6) 若  $B \subset A$ , 则  $A \cup B = A$ 。

### 1.3 试把 $A \cup B \cup C$ 表示成三个两两互不相容事件的和。

### 1.4 设 $\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , $A = \{x | 0.5 < x \leq 1\}$ , $B = \{x | 0.25 \leq x < 1.5\}$ , 请具体写出下列各事件:

- (1)  $\bar{A}B$ ; (2)  $\bar{A} \cup B$ ; (3)  $\overline{\bar{A}\bar{B}}$ ; (4)  $\overline{AB}$ 。

### 1.5 一个工人生产了四件产品, 以 $A_i$ 表示他生产的第 $i$ 件产品是正品 ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 试用 $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示下列事件: (1) 没有一件产品是次品; (2) 至少有一件产品是次品; (3) 恰有一件产品是次品; (4) 至少有两件产品不是次品。

1.6 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是三个事件，且  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$ ， $P(AC) = \frac{1}{8}$ ， $P(AB) = P(BC) = 0$ ，求  $A$ 、 $B$ 、 $C$  中至少有一个发生的概率。

1.7 设  $A$ 、 $B$  是两事件，且  $P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.7$ 。问（1）在什么条件下  $P(AB)$  取到最大值，最大值是多少？（2）在什么条件下  $P(AB)$  取到最小值，最小值是多少？

1.8 袋中有白球 5 只，黑球 6 只，依次从袋中不放回取出三只，求顺序为黑白黑的概率。

1.9 （1）用“ $\leq$ ”按由小到大的顺序排列  $P(A)$ ， $P(A \cup B)$ ， $P(AB)$ ， $P(A) + P(B)$  四个数。

（2）已知  $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ， $P(AB) = \frac{1}{6}$ ，求  $P(A \cup B)$ ， $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ， $P(A\bar{B})$ ， $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B)$ 。

1.10 设  $A$ 、 $B$  为随机事件， $P(A) = 0.5$ ， $P(A - B) = 0.2$ ，求  $P(\overline{AB})$ 。

## 习题二 古典概型、条件概率及事件的独立性

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

2.1 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任取 200 个。(1) 求确有 90 个次品的概率；(2) 求至少有 2 个次品的概率。

2.2 盒子中有 10 只球，其中 4 只红球，6 只黑球，今从盒中取三次球，一次取一只，不放回。(1) 求第三次取球取到黑球的概率；(2) 求第三次取球才取到黑球的概率。

2.3 从  $a, b, c, \dots, h$  这 8 个字母中任意选出三个不同的字母，试求下列事件的概率：  
 $A = \{\text{三个字母中不含 } a \text{ 与 } b\}$ ； $B = \{\text{三个字母中不含 } a \text{ 或 } b\}$ ； $C = \{\text{三个字母中不含 } a \text{ 但含有 } b\}$ 。

2.4 从 6 双不同的手套中任取 4 只，问其中至少有一双配对的概率是多少？

2.5 袋中有 10 只球，9 只白球，1 只红球，10 个人依次从袋中各取一球，每人取球后不再放回袋中，问第一人、第二人、…、最后一人取得红球的概率各是多少？

2.6 (1) 已知  $P(\bar{A}) = 0.3$ ， $P(B) = 0.4$ ， $P(\overline{AB}) = 0.4$ 。求  $P(B|A \cup \bar{B})$ ；

(2) 已知  $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A|B) = \frac{1}{2}$ 。求  $P(A \cup B)$ 。

2.7 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求：（1）第一次取到的零件是一等品的概率；（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

2.8 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别是 0.4, 0.5, 0.7，飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

2.9 设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只，各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1。一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，顾客从中随机察看 4 只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则不买。求：（1）顾客买下该箱玻璃杯的概率；（2）在顾客买下该箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率。

2.10 有朋友自远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别是 0.3, 0.2, 0.1, 0.4。如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别是  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}$ ，而乘飞机则不会迟到。结果他迟到了，试问他是乘火车来的概率是多少？

2.11 （1）设四事件  $A, B, C, D$  相互独立，且  $P(A) = 0.1, P(B) = 0.2, P(C) = 0.3$ ，则“这三个事件恰好发生两个”的概率为\_\_\_\_\_；

（2）若事件  $A$  与  $B$ \_\_\_\_\_，则  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ；

（3）若事件  $A$  与  $B$ \_\_\_\_\_，则  $P(AB) = P(A)P(B)$ ；

（4）若事件  $A$  与  $B$ \_\_\_\_\_，则  $P(A) = 1 - P(B)$ 。

### 习题三 离散型随机变量及其分布

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

#### 3.1 填空题

- (1) 进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为  $p$ , 失败的概率为  $q=1-p$  ( $0 < p < 1$ )。
- a. 将试验进行到出现一次成功为止, 以  $X$  表示所需的试验次数, 则  $X$  的分布律为  $P\{X=k\}=\underline{\hspace{2cm}}$ ;
- b. 将试验进行到出现  $r$  次成功为止, 以  $Y$  表示所需的试验次数, 则  $Y$  的分布律为  $P\{Y=k\}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) 某人射击命中率为 0.7, 现独立射击 10 次, 以  $X$  表示命中次数, 则  $X$  的分布律为  $P\{X=k\}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

#### 3.2 试判断下面给出的是否为某个随机变量的分布律?

$$(1) \quad \begin{array}{c|ccc} X & 1 & 2 & 3 \\ \hline p & 0.7 & 0.1 & 0.1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{c|cccccc} X & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \hline p & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & \dots & (\frac{1}{2})^k & \dots \end{array}$$

#### 3.3 计算下列各题

- (1) 已知随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X=k\}=a\frac{\lambda^k}{k!}$ ,  $\lambda > 0$  为常数,  $k=0, 1, 2, \dots$ , 求  $a$ 。
- (2) 已知随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X=k\}=a(\frac{2}{3})^k$ ,  $k=1, 2, 3$ , 求  $a$ 。
- (3) 设随机变量  $X$  服从泊松分布, 且  $P\{X=1\}=P\{X=2\}$ , 求  $P\{X=4\}$ 。

3.4 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯。如果任选 4 杯, 从中能将甲种酒全部辨别出来, 算是试验成功一次。

- (1) 某人随机地去猜, 问他试验一次成功的概率是多少?
- (2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒。他连续试验 10 次, 成功 3 次。试推断他是猜对的, 还是确有区分的能力 (设各次试验是相互独立的)。

3.5 有一大批产品, 其验收方案如下。先作第一次检验: 从中任取 10 件, 经检验无次品接受这批产品, 次品数大于 2 拒收; 否则作第二次检验, 其做法是从中再任取 5 件, 仅当 5 件中无次品时接受这批产品。若产品的次品率为 10%, 求

- (1) 这批产品经第一次检验就被接受的概率。
- (2) 这批产品需要做第二次检验的概率。
- (3) 这批产品按第二次检验的标准被接受的概率。
- (4) 这批产品在第一次检验时未能作出决定且第二次检验时被接受的概率。

3.6 某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次, 每次随机地任取 10 件产品进行检验, 如果发现其中的次品数多于 1, 就去调整设备. 以  $X$  表示一天中调整设备的次数, 求  $X$  的分布律。

3.7 把三个球随机地投入三个盒子中去, 每个球投入各个盒子的可能性是相同的。设随机变量  $X$  及  $Y$  分别表示投入第一个及第二个盒子中的球的个数, 求  $(X, Y)$  的分布律。

3.8 以  $X$  记某医院一天出生的婴儿人数,  $Y$  记其中男婴的人数, 设  $X$  和  $Y$  的联合分布律为:

$$P\{X=n, Y=m\} = \frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}, \quad m=0,1,2,\dots,n; \quad n=0,1,2,\dots$$

求 (1) 边缘分布律; (2) 条件分布律。

3.9 设某班车起点站时车上乘客人数  $X$  服从参数为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ), 且各乘客中途下车与否相互独立。以  $Y$  表示在中途下车的乘客人数。求:

- (1) 在发车时有  $n$  位乘客的条件下, 中途有  $m$  人下车的概率;
- (2) 二维随机向量  $(X, Y)$  的概率分布。

## 习题四 离散型 r.v. 的独立性及其函数的分布

学号\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

### 4.1 填空题

- (1) 设  $(X, Y)$  的联合分布律为 (表 1), 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_,  $\beta =$ \_\_\_\_\_。

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	$\alpha$	$\beta$

表 1

$X$	-2	-1	0	1	2
$p$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

表 2

- (2) 设随机变量  $X$  的分布律为 (表 2), 则  $Y = X^2$  的分布律为\_\_\_\_\_。

- (3) 设相互独立的随机变量  $X, Y$  有相同的分布律,  $X$  的分布律为 

$X$	0	1
$p$	0.5	0.5

, 则  $U = \max\{X, Y\}$

的分布律为\_\_\_\_\_;  $V = \min\{X, Y\}$  的分布律为\_\_\_\_\_。

- 4.2 设随机变量  $X_1, X_2, X_3, X_4$  独立同分布, 且  $P\{X_i=1\}=0.6, P\{X_i=0\}=0.4, (i=1, 2, 3, 4)$ 。试求行列式  $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$  的分布律。

$X$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

- 4.3 设离散型随机变量  $X$  的分布律为 

$X$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$P$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

, 求 (1)  $\sin(X)$  的分布律; (2)  $\frac{X^2}{\pi^2}$  的分布律; (3)  $\cos(X)$  的分布律。

- 4.4 设  $X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$  且相互独立, 求  $Z = X + Y$  的分布律, 并问  $Z$  服从什么分布。

4.5 设随机变量  $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ , 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ 。

4.6 在区间  $[0, 2]$  上任意投掷一个质点, 以  $X$  表示这个质点的坐标, 设这个质点落在  $[0, 2]$  中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比, 试求  $X$  的分布函数。

4.7 确定下列函数中常数  $A$ , 使之成为密度函数。(1)  $f(x) = Ae^{-|x|}$ ; (2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{Ax}{(1+x)^4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 。

4.8 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求 (1)  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (2) 概率  $P\{X < 0.5\}$ ,  $P\{X > 1.3\}$ ,  $P\{0.2 < X < 1.2\}$ 。

4.9 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ 。试求 (1) 系数  $A$ ; (2)  $X$  落在区间  $(0.3, 0.7)$  内的概率; (3)  $X$  的密度函数。



## “随机事件和概率”测验题

### 一、填空题

1. 设  $A, B, C$  为三个事件, 且  $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9, P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 0.97$ , 则  $P(AB - C) =$ \_\_\_\_\_。
2. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 则另一件也是不合格品的概率为\_\_\_\_\_。
3. 设随机事件  $A, B$  及其和事件  $A \cup B$  的概率分别是 0.4, 0.3, 0.6。若  $\overline{B}$  表示  $B$  的对立事件, 则概率  $P(A\overline{B}) =$ \_\_\_\_\_。
4. 某市有 50% 住户订日报, 有 65% 住户订晚报, 有 85% 住户至少订这两种报纸中的一种, 则同时订这两种报纸的住户的百分比是\_\_\_\_\_。
5. 三台机器相互独立运转, 设第一、第二、第三台机器不发生故障的概率依次为 0.9、0.8、0.7, 则这三台机器中至少有一台发生故障的概率为\_\_\_\_\_。
6. 设  $A, B, C$  两两独立的事件, 且  $ABC = \Phi$ 。若  $P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$ , 且  $P(A \cup B \cup C) = 9/16$ , 则  $P(A) =$ \_\_\_\_\_。
7. 在区间  $(0, 1)$  中随机地取两个数, 则两数之和小于  $6/5$  的概率=\_\_\_\_\_。
8. 三人独立破译一密码, 他们能单独译出的概率分别为  $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ , 则此密码被译出的概率\_\_\_\_\_。

### 二、选择题

1. 设  $A, B, C$  是三个事件, 与事件  $A$  互斥的事件是( )。  
(A)  $\overline{AB} \cup \overline{AC}$  (B)  $\overline{A(B \cup C)}$  (C)  $\overline{ABC}$  (D)  $\overline{A \cup B \cup C}$
2. 设  $A, B$  是任意二个事件, 则( )。  
(A)  $P(A \cup B)P(AB) \geq P(A)P(B)$  (B)  $P(A \cup B)P(AB) \leq P(A)P(B)$   
(C)  $P(A - B)P(B - A) \leq P(A)P(B) - P(AB)$  (D)  $P(A - B)P(B - A) \geq \frac{1}{4}$
3. 事件  $A$  与  $B$  相互独立的充要条件为( )。  
(A)  $A \cup B = \Omega$  (B)  $P(AB) = P(A)P(B)$  (C)  $AB = \phi$  (D)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4. 设  $A, B$  为二个事件, 且  $P(AB) = 0$ , 则( )。  
(A)  $A, B$  互斥 (B)  $AB$  是不可能事件  
(C)  $AB$  未必是不可能事件 (D)  $P(A) = 0$  或  $P(B) = 0$
5. 设  $A, B$  为任意二个事件, 且  $A \subset B, P(B) > 0$ , 则下列选项必然成立的是( )。  
(A)  $P(A) < P(A|B)$  (B)  $P(A) \leq P(A|B)$  (C)  $P(A) > P(A|B)$  (D)  $P(A) \geq P(A|B)$

### 三、计算题

1. 某厂生产的产品次品率为 0.05, 每 100 个产品为一批, 抽查产品质量时, 在每批中任取一半来检查, 如果发现次品不多于 1 个, 则这批产品可以认为合格的, 求一批产品被认为是合格的概率。
2. 书架上按任意次序摆着 15 本教科书, 其中有 5 本是数学书, 从中随机地抽取 3 本, 至少有一本是数学书的概率。
3. 某种产品的商标为“MAXAM”, 其中有 2 个字母脱落, 有人捡起随意放回, 求放回后仍为“MAXAM”的概率。
4. 设甲、乙两袋, 甲袋中有  $n$  个白球,  $m$  个红球, 乙袋中有  $N$  个白球,  $M$  个红球, 今从甲袋中任取一只放入乙袋, 再从乙袋中任取一球, 问取到白球的概率。

## “离散型随机变量及其分布” 测验题

### 一、填空题

1. 设随机变量  $X \sim B(2, p)$ ,  $Y \sim B(3, p)$ , 若  $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$ , 则  $P\{Y \geq 1\} =$  \_\_\_\_\_。
2. 已知随机变量  $X$  只能取  $-1, 0, 1, 2$  四个数值, 其相应的概率依次为  $\frac{1}{2c}, \frac{3}{4c}, \frac{5}{8c}, \frac{2}{16c}$ , 则  $c =$  \_\_\_\_\_。
3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品, 在其中取 3 次, 每次任取 1 只, 作不放回抽样, 以  $X$  表示取出的次品数, 则  $X$  的分布律为 \_\_\_\_\_。
4. 已知  $P\{X = k\} = \frac{a}{k}, P\{Y = -k\} = \frac{b}{k^2} (k=1, 2, 3)$ ,  $X$  与  $Y$  独立, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_。

### 二、选择题

1.  $P\{X = k\} = c \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (k = 0, 2, 4, \dots)$  是随机变量  $X$  的概率分布, 则  $\lambda, c$  一定满足 ( )。  
 (A)  $\lambda > 0$       (B)  $c > 0$       (C)  $c \lambda > 0$       (D)  $c > 0$  且  $\lambda > 0$
2. 设每次试验成功的概率为  $p (0 < p < 1)$ , 则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 ( )。  
 (A)  $p^3$       (B)  $1 - p^3$       (C)  $(1 - p)^3$       (D)  $1 - (1 - p)^3$

### 三、计算题

1. 设一批产品中有 10 件正品, 3 件次品, 现一件一件地随机取出, 分别求出在下列各情形中直到取得正品为止所需次数  $X$  的分布律。

(1) 每次取出的产品不返回; (2) 每次取出的产品经检验后放回, 再抽取; (3) 每次取出一件产品后总以一件正品放回, 再抽取。

2. 设  $X, Y$  的联合分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
1/2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1)  $Z = X + Y$  的分布律; (2)  $W = X - Y$  的分布律; (3)  $U = X^2 + Y - 2$  的分布律。

3. 已知  $X$  服从参数  $p = 0.6$  的 (0-1) 分布, 在  $X = 0, X = 1$  下, 关于  $Y$  的条件分布分别如表 1、表 2 所示。

表 1				表 2			
$Y$	1	2	3	$Y$	1	2	3
$P\{Y X=0\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$P\{Y X=1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求  $(X, Y)$  的联合概率分布, 以及在  $Y \neq 1$  时, 关于  $X$  的条件分布。

## 习题五 一维连续型随机变量及其分布

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

5.1 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间  $X$  (以分计) 服从指数分布, 其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 某顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟, 他就离开. 他一个月要到银行 5 次,}$$

以  $Y$  表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数, 写出  $Y$  的分布律, 并求  $P\{Y \geq 1\}$ 。

5.2 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求常数  $a$ , 使  $P\{X > a\} = P\{X < a\}$  成立。

5.3 在  $\triangle ABC$  内取一点  $P$ ,  $P$  到  $AB$  的距离为  $X$ , 求  $X$  的分布函数。

5.4 假设随机变量  $X$  的绝对值不大于 1,  $P\{X = -1\} = \frac{1}{8}$ ,  $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}$ , 在事件  $\{-1 < X < 1\}$  出现的条件下,  $X$  在  $(-1, 1)$  内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比。试求:

(1)  $X$  的分布函数  $F(x) = P\{X \leq x\}$ ; (2)  $X$  取负值的概率  $P$ 。

5.5 某公共汽车站从上午 7 时起每 15 分钟发一班车,即在 7:00, 7:15, 7:30, … 有汽车发出。如果乘客到达此汽车站的时间  $X$  服从 7:00~7:30 上的均匀分布,试求乘客在车站等待:

(1) 不到 5 分钟的概率; (2) 超过 10 分钟的概率。

5.6 设  $X \sim N(108, 9)$ 。(1) 求  $P\{101.1 < X < 117.6\}$ ; (2) 求常数  $a$ , 使  $P\{X < a\} = 0.90$ ;

(3) 求常数  $a$ , 使  $P\{|X - a| > a\} = 0.01$ 。

5.7 从南郊某地到北区火车站有两条路可走,第一条路线穿过市区,路程短,但交通拥挤,所需时间(以分计)服从正态分布  $N(50, 100)$ ; 第二条路线沿环城公路走,路线较长,但阻塞少,所需时间服从正态分布  $N(60, 16)$ 。(1) 假如有 70 分钟可用,问应走哪一条路线? (2) 若只有 65 分钟可用,又应走哪一条路线?

5.8 电源电压在不超过 200 伏、200~240 伏和超过 240 伏这三种情况下,元件损坏的概率分别为 0.1, 0.001, 0.2。设电源电压服从正态分布  $N(220, 25^2)$ , 求 (1) 元件损坏概率  $\alpha$ ; (2) 元件损坏时,电压在 200~240 伏间的概率  $\beta$ 。

## 习题六 二维连续型 r.v. 的联合与边缘分布及独立性

学号\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

6.1 设平面区域  $D$  由曲线  $y=\frac{1}{x}$  及直线  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $x=e^2$  所围成, 二维随机向量  $(X,Y)$  在区域  $D$  上服从均匀分布, 则  $(X,Y)$  关于  $X$  的边缘密度在  $x=2$  处的值为\_\_\_\_\_。

6.2 设  $(X,Y)$  的分布函数为  $F(x,y)=A \cdot \left(B + \arctan \frac{x}{2}\right) \cdot \left(C + \arctan \frac{y}{2}\right)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\infty < y < +\infty$ 。(1) 求系数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ; (2) 求  $(X,Y)$  的密度函数; (3) 求关于  $X$  和  $Y$  的边缘分布函数和边缘密度函数。

6.3 设  $(X,Y)$  的密度函数为  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求  $X$  与  $Y$  中至少有一个小于  $\frac{1}{2}$  的概率。

6.4 设  $(X,Y)$  具有下列密度函数, 分别求边缘密度函数。

$$(1) f(x,y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}; (2) f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

6.5 设  $(X, Y)$  的密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} k(6 - x - y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。(1) 求常数  $k$ ;  
(2) 求  $P\{X < 1, Y < 3\}$ ; (3) 求  $P\{X < 1.5\}$ ; (4) 求  $P\{X + Y \leq 4\}$ 。

6.6 设  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量,  $X$  在  $(0, 0.2)$  上服从均匀分布,  $Y$  的密度函数为  $f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$ 。(1) 求  $X$  和  $Y$  的联合密度函数; (2) 求  $P\{Y \leq X\}$ 。

6.7 已知随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{3}xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 证明:  $X$  和  $Y$  的不相互独立。

6.8 某电子仪器由两个部件构成, 其寿命 (单位: 千小时)  $X$  与  $Y$  的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} - e^{-0.5y} + e^{-0.5(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

问: (1)  $X$  与  $Y$  是否独立? (2) 两部件的寿命都超过 100 小时的概率。

## 习题七 连续型 r.v.函数的分布、r.v.的数学期望(I)

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

7.1 随机变量  $X$  服从  $(1, 2)$  上的均匀分布, 求  $Y = e^{2X}$  的概率密度函数。

7.2 设  $X$ 、 $Y$  是相互独立的随机变量, 密度函数分别为  $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,  $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$ 。

求  $Z = X + Y$  的密度函数。

7.3 设  $(X, Y)$  的密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求  $Z = X + Y$  的密度函数。

### 7.4 填空题

(1) 设  $X$  表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次命中目标的概率为 0.4, 则  $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 已知随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ , 则  $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $E(3X^2 - 2X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 设随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-2	0	2
$P$	0.4	0.3	0.3

则  $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $E(3X^2 + 5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 某新产品在未来市场上的占有率  $X$  是仅在区间  $(0, 1)$  上取值的随机变量, 它的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 4(1-x)^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 则平均市场占有率为 } \underline{\hspace{2cm}}。$$

7.5 有同类型备件 10 个, 其中 7 个正品, 3 个次品。修理机器时, 从中无放回一件接一件地取, 直到取得正品为止。以  $X$  表示停止抽取时已取的备件的个数, 求  $E(X)$ ,  $E(X^2)$ ,  $E\{[X-E(X)]^2\}$ 。

7.6 随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 且已知  $E(X) = \frac{3}{5}$ , 求  $a$ ,  $b$ 。

7.7 设  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1
3	0	0.3	0.1

求 (1)  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ; (2)  $E[(X-Y)^2]$ ; (3)  $E(XY)$ 。

7.8 假设某路公共汽车起点站于每时的 10 分、30 分、50 分发车, 乘客不知发车的时间, 在每小时内任一时刻到达车站是随机的。求乘客到车站等车时间的数学期望。



## “连续型随机变量及其分布” 测验题

### 一、填空题

1. 随机地向半圆  $0 < y < \sqrt{2x-x^2}$  内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与  $x$  轴的夹角小于  $\pi/4$  的概率为\_\_\_\_\_。
2. 设  $k$  在  $(0, 5)$  上服从均匀分布, 则  $4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$  有实根的概率为\_\_\_\_\_。
3. 已知  $(X, Y)$  联合密度为  $f(x, y) = \begin{cases} c \sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 则  $c =$ \_\_\_\_\_,  $Y$  的边缘概率密度  $f_Y(y) =$ \_\_\_\_\_。
4. 随机变量  $X$  分布密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 则  $X$  的分布函数  $F(x) =$ \_\_\_\_\_。

### 二、选择题

1. 如下四个函数哪个可以作为随机变量  $X$  的分布函数( )。

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{2}, & -2 \leq x < 0 \\ 2, & x \geq 0 \end{cases} & \text{(B)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases} \\ \text{(C)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ 1, & x \geq \pi/2 \end{cases} & \text{(D)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x + \frac{1}{3}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

2.  $X \sim N(1, 1)$ , 概率密度为  $f(x)$ , 则( )。  
 (A)  $P\{X \leq 0\} = P\{X \geq 0\} = 0.5$       (B)  $f(x) = f(-x), x \in (-\infty, +\infty)$   
 (C)  $P\{X \leq 1\} = P\{X \geq 1\} = 0.5$       (D)  $F(x) = 1 - F(-x), x \in (-\infty, +\infty)$
3.  $X, Y$  相互独立, 且都服从区间  $[0, 1]$  上的均匀分布, 则服从区间或区域上的均匀分布的随机变量是( )。  
 (A)  $(X, Y)$       (B)  $X+Y$       (C)  $X^2$       (D)  $X-Y$
4. 设函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ , 则( )。  
 (A)  $F(x)$  是随机变量  $X$  的分布函数      (B) 不是分布函数  
 (C) 离散型分布函数      (D) 连续型分布函数
5. 设  $X, Y$  是相互独立的两个随机变量, 它们的分布函数为  $F_X(x), F_Y(y)$ , 则  $Z = \max(X, Y)$  的分布函数是( )。  
 (A)  $F_Z(z) = \max\{F_X(z), F_Y(z)\}$       (B)  $F_Z(z) = \max\{|F_X(z)|, |F_Y(z)|\}$   
 (C)  $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$       (D) 都不是
6. 设  $X, Y$  是相互独立的两个随机变量, 其分布函数分别为  $F_X(x), F_Y(y)$ , 则  $Z = \min(X, Y)$  的分布函数是( )。  
 (A)  $F_Z(z) = F_X(z)$       (B)  $F_Z(z) = F_Y(z)$   
 (C)  $F_Z(z) = \min\{F_X(z), F_Y(z)\}$       (D)  $F_Z(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$

7. 设  $X$  的密度函数为  $f(x)$ , 而  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , 则  $Y=2X$  的概率密度是( )。

- (A)  $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$  (B)  $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$  (C)  $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$  (D)  $\frac{1}{\pi} \arctan y$

8. 设随机变量  $(X, Y)$  的联合分布函数为  $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 则  $Z = \frac{X+Y}{2}$  的分布密度是( )。

- (A)  $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  (B)  $f_Z(z) = \begin{cases} e^{-\frac{x+y}{2}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

- (C)  $f_Z(z) = \begin{cases} 4ze^{-2z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$  (D)  $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$

9. 设两个相互独立的随机变量  $X$  和  $Y$  分别服从正态分布  $N(0, 1)$  和  $N(1, 1)$ , 则下列结论正确的是( )。

- (A)  $P\{X+Y \leq 0\} = 1/2$  (B)  $P\{X+Y \leq 1\} = 1/2$  (C)  $P\{X-Y \leq 0\} = 1/2$  (D)  $P\{X-Y \leq 1\} = 1/2$

### 三、计算题

1. 随机变量  $X$  的密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求 (1) 常数  $c$ ; (2)  $X$  落在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  内的概率。

2. 设测量从某地到某一目标的距离时带有的随机误差  $X$  具有分布密度函数

$$f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-20)^2}{3200}\right), \quad -\infty < x < +\infty$$

试求: (1) 测量误差的绝对值不超过 30 的概率;

(2) 接连独立测量三次, 至少有一次误差的绝对值不超过 30 的概率。

3. 设电子元件的寿命  $X$  具有密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & 100 < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。问在 150 小时内, (1) 三只元件中没有一只损坏的概率是多少? (2) 三只电子元件全损坏的概率是多少? (3) 只有一个电子元件损坏的概率是多少?

4. 对圆片直径进行测量, 其值在  $[5, 6]$  上服从均匀分布, 求圆片面积的概率密度函数。

5. 设  $(X, Y)$  的密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x-y), & x > 0, y > 0, x+y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。求: (1)  $f_X(x)$ ; (2)  $f(y|x)$ ; (3)

$f(y|x = \frac{1}{2})$ 。

## 习题八 r.v.的数学期望(II)、方差、协方差与相关系数

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

- 8.1 设随机变量  $X$  服从参数为 2 的泊松分布，且  $Z=3X-2$ ，则  $E(Z)=$ \_\_\_\_\_。
- 8.2 某公司经销某种原料，根据历史资料表明：这种原料的市场需求量  $X$ （单位：吨）服从  $(300, 500)$  上的均匀分布。每售出 1 吨该原料，公司可获利 1.5（千元）；若积压 1 吨，公司损失 0.5（千元）。问公司应该组织多少货源，可以使平均收益最大？
- 8.3 将  $n$  只球（1~ $n$  号）随机地放进  $n$  只盒子（1~ $n$  号）中去，一只盒子装一只球。若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对。记  $X$  为总的配对数，求  $E(X)$ 。
- 8.4 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}$ ， $(-\infty < x < +\infty)$ ，求  $E(X)$ ， $D(X)$ 。
- 8.5 在长为  $d$  的线段上任选两点，求两点间距离的数学期望与方差。
- 8.6 已知  $E(X)=0$ ， $P\{|X| < 2\} = \frac{1}{2}$ ，且  $D(X)$  存在，证明  $D(X) \geq 2$ 。

### 8.7 填空题

- (1) 设  $X \sim N(1, 2^2)$ ,  $Y = 2X + 1$ , 则  $\rho_{XY} =$ \_\_\_\_\_。
- (2) 已知  $D(X) = 0.54$ ,  $D(Y) = 0.25$ ,  $\text{cov}(X, Y) = -0.03$ , 则  $D(X+Y) =$ \_\_\_\_\_。
- (3) 随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立的充分必要条件为\_\_\_\_\_;
- 随机变量  $X$  与  $Y$  不相关的充分必要条件为\_\_\_\_\_;
- 事件  $A$  与  $B$  互不相容的充分必要条件为\_\_\_\_\_;
- 事件  $A$  与  $B$  互为对立事件的充分必要条件为\_\_\_\_\_;
- 事件  $A$  与  $B$  相互独立的充分必要条件为\_\_\_\_\_。

8.8 设  $(X, Y)$  的密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(XY)$ ,

$\text{cov}(X, Y)$ ,  $\rho_{XY}$ ,  $D(X+Y)$ 。

8.9 已知三个随机变量  $X, Y, Z$  中,  $E(X) = E(Y) = 1$ ,  $E(Z) = -1$ ,  $D(X) = D(Y) = D(Z) = 1$ ,  $\rho_{XY} = 0$ ,  $\rho_{XZ} = \frac{1}{2}$ ,  $\rho_{YZ} = -\frac{1}{2}$ 。求  $E(X+Y+Z)$ ,  $D(X+Y+Z)$ 。

8.10 假设二维随机变量  $(X, Y)$  在矩形  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$  上服从均匀分布, 记

$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y \\ 1, & X > Y \end{cases}$ ,  $V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}$ 。(1) 求  $U$  和  $V$  的联合分布; (2) 求  $U$  和  $V$  的相关系数  $\rho$ 。

## “随机变量的数字特征” 测验题

### 一、填空题

1. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $D(X) = 2$ ,  $D(Y) = 4$ ,  $D(2X - Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知随机变量  $X \sim N(-3, 1)$ ,  $Y \sim N(2, 1)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立,  $Z = X - 2Y + 7$ , 则  $Z \sim \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设离散型随机变量  $X$  的取值是在两次独立试验中事件  $A$  发生的次数, 如果在这些试验中事件发生的概率相同, 并且已知  $E(X) = 0.9$ , 则  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 设随机变量  $X$  在区间  $[-1, 2]$  上服从均匀分布, 随机变量  $Y = \begin{cases} 1, & X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$ , 则  $D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 若随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 且服从相同的两点分布  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ , 则  $X = \sum_{i=1}^3 X_i$  服从  $\underline{\hspace{2cm}}$  分布,  $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 设  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 且  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y$  在  $[-1, 1]$  上服从均匀分布, 则  $\text{cov}(X, Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 设  $X$  和  $Y$  是两个相互独立的随机变量, 其概率密度分别为:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad f(y) = \begin{cases} e^{-(y-5)}, & y > 5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则  $E(XY) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 若随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立, 其中  $X_1$  在  $[0, 6]$  服从均匀分布,  $X_2$  服从正态分布  $N(0, 2^2)$ ,  $X_3$  服从参数  $\lambda = 3$  的泊松分布, 记  $Y = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ , 则  $D(Y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 二、选择题

1. 设随机变量  $X$  和  $Y$  独立同分布, 记  $U = X - Y$ ,  $V = X + Y$ , 则  $U$  和  $V$  必然 ( )。  
(A) 不独立 (B) 独立 (C) 相关系数不为零 (D) 相关系数为零
2. 设离散型随机变量  $X$  可能取值为:  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ , 且  $E(X) = 2.3$ ,  $E(X^2) = 5.9$ , 则  $x_1, x_2, x_3$  所对应的概率为 ( )。  
(A)  $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.7$  (B)  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.3, p_3 = 0.5$   
(C)  $p_1 = 0.3, p_2 = 0.5, p_3 = 0.2$  (D)  $p_1 = 0.2, p_2 = 0.5, p_3 = 0.3$
3. 已知  $X$  和  $Y$  的联合分布如下表所示, 则有 ( )。

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

- (A)  $X$  与  $Y$  不独立 (B)  $X$  与  $Y$  独立  
(C)  $X$  与  $Y$  不相关 (D)  $X$  与  $Y$  彼此独立且相关
4. 现有 10 张奖券, 其中 8 张为 2 元, 2 张为 5 元, 今每人从中随机地无放回地抽取 3 张, 则此人抽得奖券的金额数学期望 ( )。  
(A) 6 (B) 12 (C) 7.8 (D) 9
5. 设随机变量  $X$  和  $Y$  服从正态分布,  $X \sim N(\mu, 4^2)$ ,  $Y \sim N(\mu, 5^2)$ , 记  $P_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$ ,  $P_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$ , 则 ( )。  
(A) 对任何  $\mu$ , 都有  $P_1 = P_2$  (B) 对任何实数  $\mu$ , 都有  $P_1 < P_2$

(C) 只有  $\mu$  的个别值, 才有  $P_1 = P_2$  (D) 对任何实数  $\mu$ , 都有  $P_1 > P_2$

6. 随机变量  $\xi = X + Y$  与  $\eta = X - Y$  不相关的充分必要条件为( )。

- (A)  $E(X) = E(Y)$  (B)  $E(X^2) - E^2(X) = E(Y^2) - E^2(Y)$   
 (C)  $E(X^2) = E(Y^2)$  (D)  $E(X^2) + E^2(X) = E(Y^2) + E^2(Y)$

三、计算题

1. 设  $X$  的分布律为  $P\{X = k\} = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, a > 0$ , 试求  $E(X)$ ,  $D(X)$ 。

2. 设随机变量  $X$  具有概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求  $E(X)$ ,  $D(X)$ 。

3. 设随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率分布为

$(X, Y)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	(2, 0)	(2, 1)
$P\{X=x, Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

求  $E\left[\sin \frac{\pi(X+Y)}{2}\right]$ 。

4. 一汽车沿一街道行驶需要通过三个设有红绿信号灯路口, 每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立, 且红绿两种信号显示的时间相等, 以  $X$  表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数。求(1)

$X$  的概率分布; (2)  $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ 。

5. 设  $(X, Y)$  的分布密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求  $E(\sqrt{X^2 + Y^2})$ 。

6. 设  $(X, Y)$  的联合密度为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 求  $E(X)$ ,  $D(Y)$ ,  $\rho_{xy}$ 。

7. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障时全天停止工作。若一周 5 个工作日里无故障, 可获利润 10 万元, 发生一次故障仍可获利润 5 万元; 发生二次故障所获利润 0 元; 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内期望利润是多少?

## 习题九 大数定律及中心极限定理

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

### 9.1 填空题

(1) 设  $Y_n$  是  $n$  次伯努利试验中事件  $A$  出现的次数,  $p$  为  $A$  在每次试验中出现的概率, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 设随机变量  $X$  和  $Y$  的数学期望是 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 0.5, 则根据切比雪夫不等式  $P\{|X - Y| \geq 6\} \leq \underline{\hspace{2cm}}$ .

9.2 一部件包括 10 部分, 每部分的长度是一个随机变量, 他们相互独立, 且服从同一分布, 其数学期望为 2mm, 均方差为 0.05mm。规定总长度为  $(20 \pm 0.1)$  mm 时产品合格, 试求产品合格的概率。

9.3 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近他的整数。设所有舍入误差是独立的且在  $(-0.5, 0.5)$  上服从均匀分布。(1) 若将 1500 个数相加, 问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少? (2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9?

9.4 设某车间有 200 台车床相互独立地工作着, 若因换料、检修等原因, 每台车床的开工率各为 0.6, 开工时耗电各为 1 千瓦, 问供电所至少要供给这个车间多少瓦电, 才能以 99.9% 的概率保证这个车间不会因供电不足而影响生产?

9.5 现有一批种子，其中良种占 $\frac{1}{6}$ ，今任取 6000 粒，问能以 0.99 的概率保证在这 6000 粒种子中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 的差不超过多少？相应的良种粒数在哪个范围内？

9.6 某单位有 200 台电话分机，每台分机有 5%的时间要使用外线通话。假定每台分机是否使用外线是相互独立的，问该单位总机要安装多少条外线，才能以 90%以上的概率保证分机用外线时不等待？

9.7 在掷硬币实验中，至少掷多少次，才能使正面出现的频率落在 $(0.4, 0.6)$ 内的概率不小于 0.9？

9.8 某厂有 400 台同型机器，各台机器发生故障的概率均为 0.02，假如各台机器相互独立工作，试求机器出现故障的台数不少于 2 台的概率。



## 习题十 样本及抽样分布

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

10.1 从总体中抽得一个容量为 8 的样本, 其观测值如下: 99, 98, 100, 101, 98, 99, 102, 100。试求样本均值  $\bar{X}$ , 样本二阶中心矩  $B_2$  及样本方差  $S^2$  的观测值。

10.2 设  $X_1, \dots, X_5$  是  $X \sim N(12, 4)$  的一个样本, 求 (1)  $P\{|\bar{X} - E(X)| > 1\}$ ; (2)  $P\{\min(X_1, \dots, X_5) < 10\}$ 。

10.3 设总体  $X \sim N(0, 0.3^2)$ 。(1) 若  $X_1, \dots, X_{10}$  为其一个样本, 试求  $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\}$ ;  
(2) 若  $X_1, \dots, X_{10}$  与  $Y_1, \dots, Y_{15}$  为其两个相互独立的样本, 试求  $P\{|\bar{X} - \bar{Y}| > 0.1\}$ 。

10.4 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自正态总体  $N(0, 2^2)$  的简单随机样本,  $Z = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ , 求常数  $a, b$ , 使  $Z$  服从  $\chi^2$  分布, 并求其自由度。

### 10.5 填空题

(1) 设  $X_1, \dots, X_n$  是来自  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本, 则  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 设  $X_1, \dots, X_9$ ;  $Y_1, \dots, Y_9$  分别是来自正态分布  $N(0, 5^2)$  的两个相互独立的样本, 则统计量

$\frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ , 参数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;  $\frac{X_1^2 + \dots + X_9^2}{Y_1^2 + \dots + Y_9^2} \sim \underline{\hspace{2cm}}$ , 参数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

10.6 设在 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本,  $S^2$ 为其样本方差。(1) 求 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.04\}$ ; (2) 求 $D(S^2)$ 。

10.7 已知 $X \sim t(n)$ , 求证 $X^2 \sim F(1, n)$ 。

10.8 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本,  $\mu, \sigma^2$ 已知。(1) 求统计量 $Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ 的分布, 其中 $a_1, \dots, a_n$ 为常数; (2) 求统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{B_2/(n-1)}}$ 的分布, 其中 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。

10.9 若 $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ 是来自 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。

(1) 求统计量 $(\frac{n}{3}-1) \sum_{i=1}^3 X_i^2 / \sum_{i=4}^n X_i^2$ 的分布, 其中 $n \geq 4$ ; (2) 求统计量 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 的分布。

10.10 设总体 $X \sim N(0, 1)$ ,  $X_1, X_2$ 是来自 $X$ 的容量为 2 的样本。

(1) 证明:  $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 相互独立; (2) 试求常数 $C$ , 使 $P\{(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2})^2 > C\} = 0.1$ 。

## 习题十一 参数估计

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

11.1 (1) 设  $X_1, \dots, X_n$  是  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\mu, \sigma^2$  均未知, 则  $\mu$  的矩估计量为\_\_\_\_\_,  $\sigma^2$  的矩估计量为\_\_\_\_\_;

(2) 设  $X_1, \dots, X_n$  是几何分布总体  $X$  的一个样本, 即  $X \sim P\{X=x\} = (1-p)^{x-1}p, x=1, 2, \dots, 0 < p < 1, p$  未知, 则  $p$  的矩估计量为\_\_\_\_\_。

11.2 设总体  $X$  服从二项分布  $B(m, p)$ , 其分布律为  $P\{X=k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, k=0, 1, 2, \dots, m$ , 其中  $p$  为未知参数,  $0 < p < 1, X_1, \dots, X_n$  为  $X$  的简单随机样本, 求  $p$  的矩估计量。

11.3 设  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 其中  $\theta > -1$  未知,  $X_1, \dots, X_n$  为  $X$  的样本, 求  $\theta$  的矩估计量。

11.4 (1) 设  $X_1, \dots, X_n$  是  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本,  $\mu, \sigma^2$  均未知, 则  $\mu$  的极大似然估计量为\_\_\_\_\_,  $\sigma^2$  的极大似然估计量为\_\_\_\_\_;

(2) 设  $X_1, \dots, X_n$  是几何分布总体  $X$  的一个样本, 即  $X \sim P\{X=x\} = (1-p)^{x-1}p, x=1, 2, \dots, 0 < p < 1, p$  未知, 则  $p$  的极大似然估计量为\_\_\_\_\_。

11.5 已知总体  $X$  服从  $P(\theta)$ , 其分布律为  $P\{X=k\} = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \theta > 0, k=0, 1, 2, \dots, X_1, \dots, X_n$  是  $X$  的样本. (1)求  $\theta$  的矩估计量; (2)求  $\theta$  的极大似然估计量; (3)求  $p = P\{X=0\}$  的极大似然估计量.

$X$	0	1	2	3
$P$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$\theta^2$	$1-2\theta$

11.6 设  $X$  的分布律为  $\frac{X}{P}$  如上表, 其中  $\theta (0 < \theta < \frac{1}{2})$  未知,  $X_1, \dots, X_n$  为  $X$  的样本. (1) 求  $\theta$  的矩估计量; (2) 利用样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3 求  $\theta$  的矩估计值和极大似然估计值.

11.7 总体  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$  其中  $\theta > 0$ ,  $\theta, \mu$  均未知,  $X_1, \dots, X_n$  为  $X$  的简单随机样本.

分别求  $\theta, \mu$  的矩估计量  $\hat{\theta}_M, \hat{\mu}_M$  和极大似然估计量  $\hat{\theta}_L, \hat{\mu}_L$ .

11.8 设总体  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^\beta}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$  未知参数  $\beta > 1$ ,  $X_1, \dots, X_n$  为  $X$  的简单随机样本. 分别求  $\beta$  的矩估计量和极大似然估计量.

11.9 设总体  $X$  的对数函数  $\ln X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, \dots, X_n$  是来自该总体的一个简单随机样本, 求  $\mu, \sigma^2$  及  $E(X)$  的极大似然估计量.

## 习题十二 估计量的评选标准

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

12.1 设  $X_1, \dots, X_n$  是总体  $X$  的一个简单随机样本,  $c_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且  $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ , 试证明  $\sum_{i=1}^n c_i X_i$  是  $E(X)$  的无偏估计量。

12.2 设  $X_1, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个简单随机样本, 试确定常数  $C$  使  $C \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计量。

12.3 设简单随机样本  $X_1, \dots, X_n$  来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$ , 试求常数  $k$  使  $\hat{\sigma} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$  为  $\sigma$  的无偏估计量。

12.4 从总体  $X$  中抽取样本  $X_1, X_2, X_3$ , 构造三个统计量如下:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{6}X_3; \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3; \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

(1) 证明  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  都是总体均值  $E(X) = \mu$  的无偏估计量; (2) 判断  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$  哪个更有效?

12.5 设  $X_1, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个简单随机样本，其中  $\mu$  已知，试证明

$S_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计。

12.6 设有两总体  $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ，分别从两总体中抽取容量为  $n_1, n_2$  的两个独立的样本，样本方差分别为  $S_1^2$  和  $S_2^2$ 。试证：对任意常数  $a, b$ ，如果  $a+b=1$ ，则  $Z = aS_1^2 + bS_2^2$  都是  $\sigma^2$  的无偏估计量，并确定使  $D(Z)$  达到最小的  $a, b$ 。

12.7\* 设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ， $X_1, \dots, X_{2n}$  是其容量为  $2n$  的简单随机样本 ( $n \geq 2$ )，其样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$ ，已知  $\hat{\sigma}^2 = C \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$ ，试确定常数  $C$  使其成为  $\sigma^2$  的无偏估计量。

### 习题十三 参数区间估计

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

13.1 设 $X_1, \dots, X_n$ 是总体 $X$ 的一个样本, $X$ 的概率函数为 $f(x; \theta)$ ,  $\theta$ 为未知参数, 已知存在统计量 $\theta_1 = \theta_1(X_1, \dots, X_n)$ ,  $\theta_2 = \theta_2(X_1, \dots, X_n)$ 和正数 $\alpha$ :  $0 < \alpha < 1$ , 使得 $P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$ , 则称区间 $(\theta_1, \theta_2)$ 是 $\theta$ 的\_\_\_\_\_ ;  $1 - \alpha$ 是\_\_\_\_\_ ; 给定 $1 - \alpha$ ,  $(\theta_1, \theta_2)$ 的长度 $L = \theta_2 - \theta_1$ 是\_\_\_\_\_越好。

13.2 设某种清漆的9个样品, 其干燥时间(小时)分别为

6.0, 5.7, 5.8, 6.5, 7.0, 6.3, 5.6, 6.1, 5.0

设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ , 在下列条件下分别求出 $\mu$ 的置信度为95%的置信区间:

(1)  $\sigma = 0.6$  (小时);            (2) 若 $\sigma$ 未知。

13.3 已知一批产品的长度指标 $X \sim N(\mu, 0.5^2)$ , 要使样本均值 $\bar{X}$ 与总体均值 $\mu$ 的误差在置信度为0.95的情况下小于0.1, 问至少应抽取多大容量的样本?

13.4 随机地选取某种炮弹9发做试验, 测得炮口速度的样本标准差 $s = 11$ (m/s), 设炮口速度服从正态分布, 分别求炮口速度的方差 $\sigma^2$ 和标准差 $\sigma$ 的置信度为95%的置信区间。

13.5 就 13.2 题中的两种情况分别求出  $\mu$  的置信度为 95% 的单侧置信上限和单侧置信下限。

13.6 现有两批导线，随机地从 A 批导线中选取 4 根，从 B 批导线中选取 5 根，测得电阻值（欧）分别为

A 批：0.143, 0.142, 0.143, 0.137; B 批：0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140

设两组导线的电阻分别服从正态分布  $N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $N(\mu_2, \sigma^2)$ ，方差相等，两样本相互独立， $\mu_1, \mu_2, \sigma^2$  均为未知，试求  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 95% 的置信区间。

13.7 两化验员 A、B 各自独立地用相同的方法对某种聚合物的含氯量各做 10 次测量，分别求得测定值的样本方差为  $S_A^2 = 0.5419$ ,  $S_B^2 = 0.6965$ 。设测定值总体分别服从正态分布  $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ ,  $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ ，试求方差比  $\sigma_A^2/\sigma_B^2$  的置信度为 95% 的置信区间。

13.8 假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体  $X$  的简单随机样本，已知  $Y = \ln X$  服从正态分布  $N(\mu, 1)$ 。

(1) 试求  $X$  的数学期望  $E(X)$  (记  $E(X) = b$ )；(2) 试求  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间；(3) 利用上述结果求  $b$  的置信水平 0.95 的置信区间。



## 习题十四 单正态总体参数的假设检验

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

14.1 (1) 假设检验的理论依据是\_\_\_\_\_。

(2) 对正态总体的数学期望  $\mu$  进行假设检验, 如果在显著性水平 0.05 下接受假设  $H_0: \mu = \mu_0$ , 那么在显著性水平 0.01 下, 下列结论中正确的是 ( )。

(A) 必接受  $H_0$  (B) 可能接受, 也可能拒绝  $H_0$  (C) 必拒绝  $H_0$  (D) 不接受, 也不拒绝  $H_0$

(3) 在假设检验中, 记  $H_1$  为备择假设, 则称 ( ) 为犯第 I 类错误。

(A)  $H_1$  为真接受  $H_1$  (B)  $H_1$  不真接受  $H_1$  (C)  $H_1$  为真拒绝  $H_1$  (D)  $H_1$  不真拒绝  $H_1$

14.2 设某产品的某项指标服从正态分布, 已知它的标准差  $\sigma = 150$ . 现从一批产品中随机抽取 26 个, 测得该项指标的平均值为 1637. 问能否认为这批产品的该项指标值为 1600 ( $\alpha = 0.05$ )?

14.3 某测距仪在 500 米范围内, 测距精度  $\sigma = 10$  米。今对距离 500 米的目标测量 9 次, 得到平均距离  $\bar{x} = 510$  米。设测量的距离服从正态分布, 问该测距仪是否存在系统误差 ( $\alpha = 0.05$ )?

14.4 某药厂生产一种抗菌素, 已知在正常生产情况下, 每瓶抗菌素的某项指标服从均值为 23.0 的正态分布。某日开工后随机抽取 5 瓶, 测得数据如下: 22.3, 21.5, 22.0, 21.8, 21.4。问该日生产是否正常 ( $\alpha = 0.05$ )?

14.5 某厂生产的某种型号的电池，其寿命（以小时计）长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布。现有一批该型号电池，从它的生产情况看，寿命的波动性有所改变。现随机抽取 26 只电池，测得其寿命的样本方差 $S^2=9200$ ，问根据这一数据能否推断这批电池寿命的波动性较以往有显著的变化（取 $\alpha=0.05$ ）？

14.6 已知维尼纶纤度在正常条件下服从正态分布 $N(1.405, 0.048^2)$ ，某日抽取 5 根纤维，测得其纤度为 1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44。问这一天纤度的总体标准差是否正常（ $\alpha = 0.05$ ）？

14.7 某厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ， $\mu=40\text{cm/s}$ ， $\sigma=2\text{cm/s}$ 。现用新方法生产了一批推进器，从中随机抽取 25 只，测得燃烧率的样本均值为  $\bar{x}=41.25\text{ cm/s}$ 。设在新方法下总体标准差仍为  $2\text{ cm/s}$ ，问这批推进器是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著提高？（ $\alpha=0.05$ ）

14.8\* 某车间有一台包装机包装葡萄糖。包得的袋装糖重是一个随机变量，它服从正态分布。当机器工作正常时，其均值为 0.5 公斤，标准差为 0.015 公斤。某日开工后为检查包装机是否正常，随机抽取它所包装的糖 9 袋，称得净重为（公斤）：0.497, 0.506, 0.518, 0.524, 0.498, 0.511, 0.520, 0.515, 0.512。问这天该机器工作是否正常（ $\alpha = 0.05$ ）？

## 习题十五 双正态总体参数的假设检验与 $\chi^2$ -检验

学号\_\_\_\_\_班级\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

15.1 对两种羊毛织品的强度进行试验所得结果如下（磅 / 平方英寸）：

第一种：138, 127, 134, 125；第二种：134, 137, 135, 140, 130, 134；

设两种羊毛织品的强度服从方差相同的正态分布。问是否可得结论：一种羊毛较另一种羊毛好（ $\alpha = 0.05$ ）？

15.2 有两箱灯泡，从第一箱中取 9 只测试，算得其平均寿命为 1532 小时，标准差为 423 小时；从第二箱中取 18 只测试，算得其平均寿命为 1412 小时，标准差为 380 小时。设两箱灯泡寿命都服从正态分布，且方差相等。试判断是否可以认为这两箱灯泡是同一批生产的？（ $\alpha = 0.05$ ）

15.3 两台机床加工同一种零件，分别取其 6 个和 9 个，量其长度计算得  $s_1^2 = 0.345$ ,  $s_2^2 = 0.357$ 。假定零件长度服从正态分布，问是否可以认为这两台机床加工的零件长度的方差无显著差异（ $\alpha = 0.05$ ）？

15.4 有甲、乙两台机床加工同一种产品，从这两台机床加工的产品中抽取若干产品，测得直径（单位：mm）为：

机床甲：20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9；机床乙：19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2

假定产品直径均服从正态分布，试比较甲、乙两机床加工的精度有无显著差异（ $\alpha = 0.05$ ）？

15.5 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $X_1, \dots, X_{n_1}$ 为来自总体  $X$  的一个样本, 总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ,  $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ 为来自总体  $Y$  的一个样本, 两样本相互独立, 参数均未知。试构造出原假设 $H_0: \mu_1 = C\mu_2$ 的一个水平为 $\alpha$ 的检验, 这里  $C$  为不为零的已知常数。

15.6 从甲、乙两校的高考英语试卷中各抽 27 份和 26 份, 其英语平均成绩分别为甲校 67 分, 乙校 71 分, 样本标准差分别为甲校 8 分, 乙校 6 分。假定学生的英语成绩均服从正态分布, 试问两校英语成绩有无显著差异 ( $\alpha = 0.05$ ) ?

15.7\* 对某汽车零件制造厂所生产的汽缸螺栓口径进行 100 次抽样检查, 得 100 个数据, 分组列表如下:

组 限	频 数	组 限	频 数
10.93~10.95	5	11.01~11.03	17
10.95~10.97	8	11.03~11.05	6
10.97~10.99	20	11.05~11.07	6
10.99~11.01	34	11.07~11.09	4

试检验螺栓口径是否服从正态分布 ( $\alpha = 0.05$ )。

## “数理统计” 测验题

- 一、1. 设总体  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为来自  $X$  的样本, 则统计量  $\frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_3 - X_4)^2}$  的分布为\_\_\_\_\_。
2. 若总体  $X$  的一个样本值为 0,0,1,1,0,1, 则总体均值的矩估计值为\_\_\_\_\_, 总体方差的矩估计值为\_\_\_\_\_。
3. 对正态总体若方差  $\sigma^2$  未知,  $H_0: \mu = \mu_0$ , 应选取统计量\_\_\_\_\_, 在\_\_\_\_\_条件下, 统计量服从自由度为\_\_\_\_\_的\_\_\_\_\_分布。

### 二、选择题

1. 设总体  $X \sim N(0, 1)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$  为来自该总体的一个简单随机样本,  $\bar{X}$ 、 $S^2$  分别是样本均值和样本方差, 则有 ( )。

(A)  $\bar{X} \sim N(0, 1)$  (B)  $n\bar{X} \sim N(0, 1)$  (C)  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$  (D)  $\bar{X}/S \sim t(n-1)$

2.  $\theta$  为总体  $X$  的未知参数,  $\theta$  的估计量为  $\hat{\theta}$ , 则有 ( )。

(A)  $\hat{\theta}$  是一个数, 近似等于  $\theta$  (B)  $\hat{\theta}$  是一个随机变量  
(C)  $\hat{\theta}$  是一个统计量, 且  $E(\hat{\theta}) = \theta$  (D) 当  $n$  越大,  $\hat{\theta}$  的值可任意靠近  $\theta$

3. 对正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma^2$  未知) 的假设检验问题:  $H_0: \mu \leq 1$ ,  $H_1: \mu > 1$ , 若取显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 则其拒绝域为 ( )。

(A)  $|\bar{X} - 1| > z_{0.05}$  (B)  $\bar{X} > 1 + t_{0.05}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$  (C)  $|\bar{X} - 1| > t_{0.05}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$  (D)  $\bar{X} < 1 - t_{0.05}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

- 三、1. 在测量反应时间中, 一名心理学家估计的标准差为 0.05s, 为了以 95% 的置信水平使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01s, 应取多大的样本容量?

2. 设  $\theta$  为总体  $X$  的未知参数, 其密度函数为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。又设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体

$X$  的样本, 试求: (1)  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}$ ; (2)  $\hat{\theta}$  的方差  $D(\hat{\theta})$ 。

3. 从自动机床加工的同类零件中抽取 16 个, 测得长度值为 (单位: mm): 12.15, 12.12, 12.01, 12.28, 12.09, 12.16, 12.03, 12.06, 12.01, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.03, 12.01, 12.13, 若可认为这是来自正态总体的样本观测值。求总体标准差  $\sigma$  的置信水平位 0.99 的置信区间。

4. 某纯净水生产厂用自动灌装纯净水, 该自动灌装机正常灌装量  $X \sim N(18, 0.4^2)$ , 现测量某厂 9 个灌装样品的灌装量 (单位: L) 为: 18.0, 17.6, 17.3, 18.2, 18.1, 18.5, 17.9, 18.1, 18.3。在显著性水平 0.05 下, 试问该天灌装是否合格?

5. 某项考试要求成绩的标准差为 12 分, 现从考试成绩单中任取 15 份, 计算样本标准差为 16 分。设成绩服从正态分布, 问此次考试的标准差是否不合要求 ( $\alpha = 0.05$ )?

6. 设总体  $X$  的数学期望为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  分别是来自  $X$  的两个独立样本。

证明  $S^2 = \frac{1}{m+n-2} [\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2]$  是  $\sigma^2$  的无偏估计。

# 河海大学 2018-2019 学年工科类《概率论与数理统计》试卷

## 一、填空题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

1. 设  $P(A)=\frac{1}{4}$ ,  $P(B)=\frac{1}{3}$ ,  $P(A|B)=\frac{1}{2}$ , 则  $P(AB)=$  \_\_\_\_\_;  $P(A \cup B) =$  \_\_\_\_\_。
2. 设每次试验成功的概率为  $p(0 < p < 1)$ , 则在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 ( )。

(A)  $p^3$  (B)  $1-p^3$  (C)  $(1-p)^3$  (D)  $1-(1-p)^3$

3. 若随机变量  $X \sim N(1, 1)$ , 其概率密度函数为  $f(x)$ , 则下列结论正确的是 ( )。

(A)  $P\{X \leq 0\} = P\{X \geq 0\} = 0.5$  (B)  $f(x) = f(-x), x \in (-\infty, +\infty)$   
(C)  $P\{X \leq 1\} = P\{X \geq 1\} = 0.5$  (D)  $F(x) = 1 - F(-x), x \in (-\infty, +\infty)$

4. 设随机变量  $X \sim U(0, 4)$ , 则  $P\{D(X) < X < E(X)\} =$  \_\_\_\_\_。

5. 设随机变量  $X, Y$  独立同分布且方差都大于 0, 令  $\xi = X + aY$ ,  $\eta = X + bY$ , 其中  $a, b$  为常数且  $ab \neq 0$ , 则当  $\xi, \eta$  不相关时, 有 ( )。

(A)  $ab = 1$  (B)  $ab = -1$  (C)  $a = b$  (D)  $a, b$  为任意非零常数

6. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{2019}$  为来自标准正态总体的简单随机样本, 已知统计量  $Y = \frac{cX_{2019}}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{2018}^2}}$  服从  $t$  分布,

则常数  $c =$  \_\_\_\_\_。

7. 设两独立样本  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  和  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  分别来自总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2, \quad \text{则 } \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim$$

\_\_\_\_\_。(写出分布和参数)

- 二、(本题满分 10 分) 有两个袋子, 甲袋中有 2 只白球, 1 只黑球; 乙袋中有 1 只白球, 2 只黑球。从甲袋中任取一只球放入乙袋, 再从乙袋中任取一只球。(1) 求从乙袋中取出的球为白球的概率; (2) 若发现从乙袋中取出的是白球, 问从甲袋中取出放入乙袋的球, 黑、白哪种颜色可能性大?

- 三、(本题满分 13 分) 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} kx^\alpha, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $k, \alpha$  为常数且  $k > 0$ ,

$\alpha > 0$ , 又已知  $E(X) = 0.75$ 。(1) 求常数  $k$  和  $\alpha$ ; (2) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ ; (3) 求概率  $P\{\frac{1}{2} < X < 1\}$ ; (4) 求  $D(X)$ 。

- 四、(本题满分 13 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。(1) 求  $X$  和  $Y$  的边缘概率密度函数  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ ; (2) 问  $X$  与  $Y$  是否独立? 为什么? (3) 求  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ 。

- 五、(本题满分 8 分) 设  $X, Y$  是相互独立的随机变量, 密度函数分别为  $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$ , 求  $Z = X + Y$  的密度函数。

六、(本题满分 13 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的一个简单随机样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为对应的样本值。

(1) 若总体  $X \sim P(\lambda)$ , 其分布律为  $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ,  $k=0,1,2,\dots$ ,  $\lambda > 0$  为未知参数。求参数  $\lambda$  的极大似然估计量  $\hat{\lambda}_{MLE}$ , 并判断  $\hat{\lambda}_{MLE}$  是否为  $\lambda$  的无偏估计。

(2) 若总体  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta > 0$  未知。求参数  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}_M$ 。

七、(本题满分 14 分) 某高校 2017 级《概率论与数理统计》期末考试成绩服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 为了评估考试成绩, 现从所有考生中抽取了 31 名考生, 算得他们的平均成绩为 73 分, 标准差为 8 分。(1) 求总体方差  $\sigma^2$  的置信度为 95% 的双侧置信区间。(2) 某位老师说这次考试的年级平均成绩为 75 分, 你赞同这位老师的观点吗? ( $\alpha = 0.05$ )

八、(本题满分 8 分) 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 令  $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$ 。求 (1)  $Y$  的分布函数; (2)  $P\{X \leq Y\}$ 。

### 参考答案

#### 一、填空题

(1)  $1/6, 5/12$ ; (2) D; (3) C; (4)  $1/6$ ; (5) B; (6)  $\sqrt{2018}$ ; (7)  $F(n_1-1, n_2-1)$

二、设  $B_1$  = “从甲袋中取出的是白球”,  $B_2$  = “从甲袋中取出的是黑球”,  $A$  = “从乙袋中取出白球”。则  $B_1, B_2$  构成一个完备事件组, 则由全概率公式

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{4/12}{5/12} = \frac{4}{5}, \quad P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{3/12}{5/12} = \frac{3}{5}$$

所以白球可能性大。

三、(1) 由  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 kx^a dx = \frac{k}{a+1}$ ,  $0.75 = EX = \int_0^1 xkx^a dx = \frac{k}{a+2}$ 。

$$\therefore k=3, a=2, \text{ 故 } f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3) P\{\frac{1}{2} < X < 1\} = 1 - F(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$$

$$(4) E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{5}, \text{ 故 } DX = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

$$\text{四、(1) } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_x^1 6xdy = 6x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^y 6xdx = 3y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由于  $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$ , 所以  $X$  与  $Y$  不相互独立

$$(3) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 6x^2(1-x)dx = 1/2, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 6x^3(1-x)dx = 3/10$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 3y^3 dy = 3/4, \quad E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^1 3y^4 dy = 3/5,$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 1/20, \quad D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 3/80$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 6x^2 y dy = 2/5, \quad \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/40$$

$$\text{所以 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{五、联合密度为 } f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = z - 1 + e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ \int_0^1 dx \int_{z-x}^{z-x} e^{-y} dy = 1 - e^{-(z-1)} + e^{-z}, & z \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} (e-1)e^{-z}, & z \geq 1 \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

或者利用公式  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$  直接计算也可。

$$\text{六、(1) } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \Rightarrow \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^n [x_i \ln \lambda - \lambda - \ln(x_i!)], \text{ 由}$$

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i}{\lambda} - 1 \right] = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{MLE} = \bar{x}. \text{ 又因为 } X \sim P(\lambda), \text{ 所以 } E(\bar{X}) = E(X) = \lambda, \text{ 即 } \hat{\lambda}_{MLE} \text{ 为 } \lambda \text{ 的无偏估计。}$$

$$(2) \text{ 令 } E(X) = \bar{X}, \text{ 又 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3} (\theta - x) dx = \frac{\theta}{2}, \text{ 于是 } \hat{\theta}_M = 2\bar{X}$$

$$\text{七、(1) 总体 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 且 } \mu \text{ 未知, 所以 } \sigma^2 \text{ 的置信度为 } 1-\alpha \text{ 的置信区间为 } \left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right),$$

$$\text{又 } n=31, S^2=64, \alpha=0.05, \text{ 所以 } \chi_{0.025}^2(30)=46.979, \chi_{0.975}^2(30)=16.791,$$

$$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right) = (40.869, 114.347)$$

$$(3) \text{ 根据题意须检验假设 } H_0: \mu = 75, H_1: \mu \neq 75, \text{ 由于 } X \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ 且 } \sigma^2 \text{ 未知, 令检验统计量}$$

$$t = \frac{\bar{X} - 75}{S/\sqrt{n}} \stackrel{H_0}{\sim} t(n-1), \text{ 由 } P(H_1 | H_0) = \alpha \text{ 得拒绝域为 } |t| > t_{\alpha/2}(n-1), \text{ 又 } \bar{X} = 73, \alpha = 0.05,$$

$$t_{0.025}(30) = 2.0423, \text{ 所以 } |t| = 1.392 < 2.0423, \text{ 接受 } H_0, \text{ 即赞同这位老师的说法。}$$

$$\text{八、(本题满分 8 分) (1) } F_Y(y) = P(Y \leq y). \text{ 当 } y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) = 0; \text{ 当 } y \geq 2 \text{ 时, } F_Y(y) = 1.$$

$$\text{当 } 1 \leq y < 2 \text{ 时, } F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(Y \leq y, X \leq 1) + P(Y \leq y, 1 < X < 2) + P(Y \leq y, X \geq 1)$$

$$= P(Y \leq y, 1 < X \leq 2) + P(X \geq 2) = \int_1^y \frac{1}{9} x^2 dx + \frac{19}{27} = \frac{y^3}{27} + \frac{18}{27}.$$

$$(2) P(X \leq Y) = P(X < Y) + P(X = Y) = P(X \leq 1) + P(1 < X < 2) = P(0 < X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{8}{27}.$$



一、填空题（每题 3 分，共 21 分）

1. 设  $P(A)=\frac{1}{4}$ ,  $P(B)=\frac{1}{3}$ ,  $P(A|B)=\frac{1}{2}$ , 则  $P(AB)=$  \_\_\_\_\_;  $P(A \cup B) =$  \_\_\_\_\_。
2. 某人向同一个目标进行射击, 每次射中目标的概率为 0.2, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 \_\_\_\_\_。
3. 设随机变量  $X$  服从参数为 1 的泊松分布, 则  $P\{X = E(X^2)\} =$  \_\_\_\_\_。
4. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个简单随机样本, 则  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim$  \_\_\_\_\_;  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim$  \_\_\_\_\_。(写出具体分布和参数)
5. 设  $X, Y$  相互独立, 且  $P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = 0.7$ , 则  $P\{\max\{X, Y\} < 0\} =$  \_\_\_\_\_。
6. 设随机变量  $X, Y$  不相关, 且  $E(X)=2, E(Y)=1, D(X)=3$ , 则  $E[X(X-Y)] =$  \_\_\_\_\_。
7. 从总体  $X$  中抽取样本  $X_1, X_2$ , 若  $\hat{\mu} = a_1 X_1 + a_2 X_2$  是总体期望的无偏估计, 则  $a_1, a_2$  满足的关系是 \_\_\_\_\_。

二、(本题满分 12 分) 从数集  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  中每次取一个数, 不放回地取两次, 设第一次取出的数字为  $X_1$ , 第二次取出的数字为  $X_2$ 。

- (1) 利用全概率公式计算概率  $P\{X_2 > X_1\}$ 。
- (2) 利用贝叶斯公式计算: 在已知  $X_2 > X_1$  条件下, 第一次取出的数为 4 的概率。

三、(本题满分 12 分) 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $Y = X^2$ 。求: (1)  $Y$  的分布函数  $F(y)$ ; (2)  $E(Y)$ ; (3)  $E(XY)$ 。

四、(本题满分 12 分) 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

求: (1) 关于  $X$  和  $Y$  的边缘密度函数  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ ; (2) 概率  $P\{X > 2Y\}$ 。

五、(本题满分 10 分) 设二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为:

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

- (1) 求  $P\{X=2Y\}$ ; (2) 求  $X, Y$  的边缘分布律; (3) 求  $Z=XY$  的分布律; (4) 求  $\text{Cov}(X, Y)$ 。

六、(本题满分 10 分) 设  $X, Y$  是相互独立的随机变量, 密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}.$$

令  $Z = X + Y$ 。求 (1)  $Z$  的分布函数; (2)  $Z$  的密度函数。

七、(本题满分 13 分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $X$  的一个简单随机样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为对应的样本值。

(1) 若总体  $X$  的分布律为  $P(X = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1} (k = 1, 2, 3, \dots)$ , 其中  $0 < \theta < 1$  为未知参数。求  $\theta$  的极大似然估计, 并判定此估计是否为  $\theta$  的无偏估计。

(2) 若总体  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,  $\theta > 0$  为未知参数, 求  $\theta$  的矩估计。

八、(本题满分 10 分) 某学校 2017 级学生《概率论与数理统计》考试成绩服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 今从中抽取 31 名同学的成绩, 算得平均值为 73 分, 标准差为 8 分。

(1) 若  $\sigma = 9$  已知, 求  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间。

(2) 若  $\sigma$  未知, 求  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间。

(3) 若  $\sigma = 9$  已知, 问需抽取容量  $n$  多大时, 才能使得总体均值  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间的长度不大于 8?

### 参考答案

#### 一、填空题

(1)  $1/6, 5/12$ ; (2)  $0.0768$ ; (3)  $0.5e^{-1}$ ; (4)  $\chi^2(n), \chi^2(n-1)$ ; (5)  $0.09$ ; (6)  $5$ ; (7)  $a_1 + a_2 = 1$

二、(1)  $P(X_2 > X_1) = \sum_{k=1}^5 P(X_2 > X_1 | X_1 = k)P(X_1 = k)$

$$P(X_1 = k) = \frac{1}{5}, P(X_2 > X_1 | X_1 = k) = \frac{5-k}{4} \Rightarrow$$

$$P(X_2 > X_1) = \sum_{k=1}^5 \frac{5-k}{5} \frac{1}{5} = \frac{1}{5(5-1)} \sum_{k=1}^5 (5-k) = \frac{1}{2}$$

$$(2) P(X_1 = 3 | X_2 > X_1) = \frac{P(X_1=3, X_2>X_1)}{P(X_2>X_1)} = \frac{P(X_2>X_1 | X_1=4)P(X_1=4)}{P(X_2>X_1)} \Rightarrow P(X_1 = 3 | X_2 > X_1) = \frac{1}{10}$$

三、(1)  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$

当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = 1$ ; 当  $0 < y < 1$  时,  $F_Y(y) = P\{0 < X \leq \sqrt{y}\} = \sqrt{y}$

当  $y < 0$  时,  $F_Y(y) = 0 \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 1 \\ \sqrt{y} & 0 < y < 1 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$

(2) 求导得到  $f_Y(y) = \begin{cases} 0.5y^{-0.5} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ ,  $E(Y) = \int_0^1 y \cdot 0.5y^{-0.5} dy = 1/3$

(3)  $E(XY) = E(X^3) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

四、(1)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x \frac{9y^2}{x} dy = 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx = -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) P\{X > 2Y\} = \iint_{x>2y} f(x, y) dx dy; \quad P\{X > 2Y\} = \int_0^1 dx \int_0^{x/2} \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{1}{8}$$

$$\text{五、(1)} \quad P\{X=2Y\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} = 1/4$$

(2)

$X$	0	1	2
$P$	1/2	1/3	1/6

$Y$	0	1	2
$P$	1/3	1/3	1/3

$XY$	0	1	4
$P$	7/12	1/3	1/12

$$(3) \quad E(XY) = 2/3;$$

$$(4) \quad E(X) = 2/3, E(Y) = 1; \quad \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$\text{六、(1)} \quad \text{联合密度为 } f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$$

$$= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \int_0^z dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = z - 1 + e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ \int_0^1 dx \int_0^{z-x} e^{-y} dy = 1 - e^{-(z-1)} + e^{-z}, & z \geq 1, \end{cases}$$

$$2) \quad f_Z(z) = \begin{cases} (e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{七、(1)} \quad \text{似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n P\{X = x_i\} = \prod_{i=1}^n \theta(1-\theta)^{x_i-1} = \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i - n}$$

$$\ln L(\theta) = \prod_{i=1}^n P\{X = x_i\} = \prod_{i=1}^n \theta(1-\theta)^{x_i-1} = n \ln(\theta) + (\sum x_i - n) \ln(1-\theta), \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_L = \frac{1}{\bar{X}}.$$

因  $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\theta(1-\theta)^{k-1} = \theta$ , 且  $E(\frac{1}{\bar{X}}) \neq E(X)$ , 所以  $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$ , 而  $E(\hat{\theta}_L) = E(\frac{1}{\bar{X}}) \neq \theta$ , 故为有偏估计。

$$(2) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}, \quad \text{令 } E(X) = \bar{X} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_M = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

八、(1)  $\sigma^2$  已知, 置信区间为

$$(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (73 - 1.96 \frac{9}{\sqrt{31}}, 73 + 1.96 \frac{9}{\sqrt{31}}) = (69.832, 76.168)$$

(2)  $\sigma^2$  未知, 置信区间为

$$(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}) = (73 - 2.0423 \frac{8}{\sqrt{31}}, 73 + 2.0423 \frac{8}{\sqrt{31}}) = (70.066, 75.934)$$

(3)  $\sigma^2$  已知, 置信区间为  $(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ,  $2Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \Rightarrow n \geq \frac{4\sigma^2}{64} Z_{\alpha/2}^2 = 19.4481$  得到  $n = 20$ 。

一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

1. 在三次独立重复射击中，若至少有一次击中目标的概率为  $\frac{37}{64}$ ，则每次射击击中目标的概率为 \_\_\_\_\_。

2. 设 r.v.  $X$  与  $Y$  相互独立，且  $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline p & 0.5 & 0.5 \end{array}$ ， $\begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline p & 0.5 & 0.5 \end{array}$ ，则  $P\{X=Y\} = ( \quad )$ 。

- (A) 0.25      (B) 0.75      (C) 0.5      (D) 1

3. 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ kx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$  则  $k =$  \_\_\_\_\_。

4. 设随机变量  $X \sim B(n, p)$ ，且  $E(X) = 2.4$ ， $D(X) = 1.44$ ，则  $n =$  \_\_\_\_\_， $p =$  \_\_\_\_\_。

5. 下列结论中，**不是**随机变量  $X$  与  $Y$  不相关的充要条件的是 ( )。

- (A)  $E(XY) = E(X)E(Y)$       (B)  $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$   
(C)  $Cov(X, Y) = 0$       (D)  $X$  与  $Y$  相互独立

6. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{12}$  来自正态总体  $N(0, 1)$ ， $Y = \left( \sum_{i=1}^4 X_i \right)^2 + \left( \sum_{i=5}^8 X_i \right)^2 + \left( \sum_{i=9}^{12} X_i \right)^2$ ，当常数  $k =$  \_\_\_\_\_

时， $kY$  服从  $\chi^2$  分布。

7. 设两独立样本  $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$  和  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$  分别来自总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，其中  $\mu_1, \mu_2$  未知，

$\sigma_1^2, \sigma_2^2$  已知， $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ ， $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} Y_j$ ，则  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为  $1-\alpha$  的双侧置信区间为 \_\_\_\_\_。

二、(本题满分 10 分) 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ A-x, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  (1) 求常数  $A$ ; (2) 求  $P\{0.2 <$

$X < 1.2\}$ ; (3) 求  $X$  的分布函数。

三、(本题满分 9 分) 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$  求随机变量  $Y = X^2$  的概率密

度函数  $f_Y(y)$ 。

四、(本题满分 14 分) 设  $(X, Y)$  的概率密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中  $A$  为常

数。(1) 求  $A$ ; (2) 求  $D(X+Y)$ ; (3) 求  $Z = X+Y$  的概率密度函数。

五、(本题满分 10 分) 设随机变量  $X$  与  $Y$  满足： $D(X) = 2$ ， $D(Y) = 4$ ， $Cov(X, Y) = 1$ 。令  $U = 2X - 3Y$ ， $V = 3X - 2Y$ 。求  $U$  与  $V$  的相关系数  $\rho_{UV}$ 。

## 六、试解下列各题（本题满分 28 分，每小题 7 分）

(1) 若总体  $X \sim P(\lambda)$ ，其分布律为  $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ ， $k=0,1,2,\dots$ ， $\lambda > 0$  为未知参数， $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的一个简单随机样本。求参数  $\lambda$  的矩估计量  $\hat{\lambda}_M$ ，并判断  $\hat{\lambda}_M$  是否为  $\lambda$  的无偏估计。

(2) 设总体  $X$  的概率分布为

$X$	0	1	2	3
$p$	$\theta^2$	$2\theta(1-\theta)$	$\theta^2$	$1-2\theta$

( $0 < \theta < \frac{1}{2}$ )

是未知参数，利用总体  $X$  的样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 3, 2，求  $\theta$  的极大似然估计值  $\hat{\theta}_{MLE}$ 。

(3) 随机地选取某种炮弹 9 发做试验，测得炮口速度的样本标准差  $s = 11$  (m/s)。设炮口速度服从正态分布，求炮口速度的方差  $\sigma^2$  的置信度为 95% 的置信区间。

(4) 设某种产品的某项指标服从正态分布，已知它的标准差  $\sigma = 150$ 。现从一批产品中随机抽取 26 个，测得该项指标的平均值为 1637，问能否认为这批产品的该项指标值为 1600 ( $\alpha = 0.05$ )。【参考数值： $z_{0.025} = 1.96$ ， $z_{0.05} = 1.645$ ， $t_{0.025}(25) = 2.060$ ， $t_{0.05}(25) = 1.708$ ， $t_{0.025}(26) = 2.056$ ， $t_{0.05}(26) = 1.706$ ， $\sqrt{26} = 5.1$ 】

七、(本题满分 8 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  服从区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$  上的均匀分布。

令  $U = \begin{cases} 0, & X \leq Y \\ 1, & X > Y \end{cases}$ ,  $V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y \\ 1, & X > 2Y \end{cases}$ ，问  $U$  与  $V$  是否独立？为什么？

### 参考答案

#### 一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 21 分）

(1) 1/4; (2) C; (3) 1; (4) 6, 0.4 【只对 1 个给 2 分】; (5) D; (6) 1/4; (7)  $(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

二、(本题满分 10 分) (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 x dx + \int_1^2 (A-x) dx = 1 \Rightarrow A=2$

(2)  $P\{0.2 < X < 1.2\} = \int_{0.2}^{1.2} f(x) dx = \int_{0.2}^1 x dx + \int_1^{1.2} (2-x) dx = 0.66$

(3)  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 x dx + \int_1^x (2-x) dx = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$

三、(本题满分 9 分)  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$ 。当  $y \leq 0$  时， $F_Y(y) = 0 \Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = 0$ ;

当  $y > 0$  时， $F_Y(y) = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx$

$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}$

综上有  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$ 。

四、(本题满分 14 分) (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow A = 1/8$

(2)  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{x}{8} (x+y) dy = \frac{7}{6}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 \frac{x^2}{8} (x+y) dy = \frac{5}{3}$ ，同理  $E(Y) = \frac{7}{6}$ ， $E(Y^2) = \frac{5}{3}$

$$\Rightarrow D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{11}{36}, \text{ 同理 } D(Y) = \frac{11}{36}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{36} \Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{5}{9}$$

$$(3) f(z-y, y) = \begin{cases} \frac{z}{8}, & y < z < 2+y, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \begin{cases} \int_0^z \frac{z}{8} dy = \frac{z^2}{8}, & 0 < z \leq 2, \\ \int_{z-2}^2 \frac{z}{8} dy = \frac{(4-z)z}{8}, & 2 < z \leq 4, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{五、(本题满分 10 分)} D(U) = D(2X-3Y) = 4D(X) + 9D(Y) - 12\text{Cov}(X, Y) = 32$$

$$D(V) = D(3X-2Y) = 9D(X) + 4D(Y) - 12\text{Cov}(X, Y) = 22$$

$$\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(2X-3Y, 3X-2Y) = 6\text{Cov}(X, X) - 4\text{Cov}(X, Y) - 9\text{Cov}(Y, X) + 6\text{Cov}(Y, Y)$$

$$= 6D(X) - 4\text{Cov}(X, Y) - 9\text{Cov}(X, Y) + 6D(Y) = 23 \Rightarrow \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}} = \frac{23}{88}\sqrt{11} = 0.87$$

六、(本题满分 14 分) (1) 由矩估计法有  $E(X) = \bar{X}$ , 又因为  $X \sim P(\lambda)$ , 所以  $E(X) = \lambda$ , 于是有  $\hat{\lambda}_M = \bar{X}$ 。  
因为  $E(\hat{\lambda}_M) = E(\bar{X}) = E(X) = \lambda$ , 所以  $\hat{\lambda}_M = \bar{X}$  为  $\lambda$  的无偏估计。

(2) 似然函数为

$$L(\theta) = P\{X_1=3\}P\{X_2=1\}P\{X_3=3\}P\{X_4=0\}P\{X_5=3\}P\{X_6=1\}P\{X_7=3\}P\{X_8=2\} = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$$

$$\Rightarrow \ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln \theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta) \Rightarrow \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = 0 \Rightarrow \theta_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12},$$

$$\text{又因为 } 0 < \theta < \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \hat{\theta}_{MLE} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$$

七、(本题满分 14 分) (1) 由题意总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  未知, 于是  $\sigma^2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)})$ , 又  $n=9, s=11, \alpha=0.05, \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(8) = 17.534$ ,

$$\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(8) = 2.180, \text{ 代入得 } \sigma^2 \text{ 的 } 95\% \text{ 的置信区间为 } (\frac{968}{17.534}, \frac{968}{2.180}) = (55.21, 444.04)$$

(2) 由题意总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 提出假设  $H_0: \mu=1600, H_1: \mu \neq 1600$ 。 $\sigma=150$  已知, 于是构造检验统计量为  $U = \frac{\bar{x}-1600}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{H_0 \text{ 为真}}{=} \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), P\{H_1|H_0\} = \alpha$  可得拒绝域为  $|U| > z_{\alpha/2}$ 。又  $n=26, \bar{x} = 1637, \sigma=150, \alpha=0.05, z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ , 代入公式计算得  $|U| = 1.256 < 1.96$ , 所以接受  $H_0$ , 即在置信度 95% 下可以认为这批产品该项指标值为 1600。

八、(本题满分 8 分) 由题意可知  $(X, Y)$  的联合密度函数为  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ , 于是

$$P\{U=0, V=0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \iint_{x \leq y} f(x, y) dx dy = \frac{1}{4}, \quad P\{U=0, V=1\} = P\{X \leq Y, X > 2Y\} = 0$$

$$P\{U=1, V=0\} = P\{X > Y, X \leq 2Y\} = P\{Y < X \leq 2Y\} = \iint_{y < x \leq 2y} f(x, y) dx dy = \frac{1}{4}, \quad P\{U=1, V=1\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

由上可得  $(U, V)$  的联合分布律为

$\begin{matrix} \diagdown \\ U \quad V \end{matrix}$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/2	3/4
$p_{\cdot j}$	1/2	1/2	1

, 进一步可得  $U$  和  $V$  的边缘

分布律如表, 由于  $P\{U=0, V=1\} = 0 \neq P\{U=0\}P\{V=1\} = 1/8$ , 所以  $U$  与  $V$  不相互独立。

一、填空与选择题（每小题 3 分，本题满分 18 分）

1. 设随机事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$ , 则  $P(B-A)=$ \_\_\_\_\_。
2. 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ kx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $k=$ \_\_\_\_\_。
3. 已知  $D(X)=4, D(Y)=25, \rho_{XY}=0.4$ , 则  $D(2X-Y)=$ \_\_\_\_\_。
4. 设  $X_1, \dots, X_9; Y_1, \dots, Y_9$  分别是来自正态分布  $N(0, 5^2)$  的两个相互独立的样本, 则统计量  $\frac{X_1^2 + \dots + X_9^2}{Y_1^2 + \dots + Y_9^2} \sim$ \_\_\_\_\_, 参数为\_\_\_\_\_。
5. 设总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1, \dots, X_4$  是来自  $X$  的样本,  $\bar{X}$  是样本均值, 则  $\frac{4(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim$ \_\_\_\_\_。(写出具体分布及参数)
6. 设总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布,  $X_1, \dots, X_n$  为总体  $X$  的一个样本,  $\bar{X}, S^2$  分别为样本均值与样本方差, 则对任意  $0 \leq \alpha \leq 1, E[\alpha \bar{X} + (1-\alpha)S^2] =$ \_\_\_\_\_。

二、(本题满分 10 分) 已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 2 件次品, 乙箱中仅装有 2 件合格品。从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后。(1) 求乙箱中次品数  $X$  的分布律和  $E(X)$ ; (2) 求从乙箱中任取一件产品是次品的概率。

三、(本题满分 10 分) 设随机变量  $X \sim U(0, 2)$ , 又设  $Y = e^{-2X}$ 。(1) 求  $Y$  的概率密度函数; (2) 求  $E(Y)$ 。

四、(本题满分 12 分) 设随机变量  $X, Y$  相互独立且同分布,  $P\{X = -1\} = q, P\{X = 1\} = p$ , ( $p+q=1, 0 < p < 1$ ), 设  $Z = \begin{cases} 0, & XY = 1 \\ 1, & XY = -1 \end{cases}$ 。(1) 求  $Z$  的分布; (2) 求  $(X, Z)$  的联合分布; (3) 问  $p$  为何值时,  $X$  与  $Z$  相互独立。

五、(本题满分 16 分) 设二维连续型随机变量  $(X, Y)$  在区域  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$  上服从均匀分布。(1) 求关于  $X$  和  $Y$  的联合密度函数  $f(x, y)$ ; (2) 求  $Y$  的边缘密度函数  $f_Y(y)$ ; (3) 求  $X$  与  $Y$  的协方差  $\text{Cov}(X, Y)$ ; (4) 求  $Z = X+Y$  的概率密度函数。

六、(本题满分 14 分) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 其中  $\theta > 0$  为未知参数,  $X_1, \dots, X_n$

为来自总体  $X$  的一个简单随机样本。

(1) 试求未知参数  $\theta$  的矩估计量  $\hat{\theta}_M$ , 并讨论此估计是否为  $\theta$  无偏估计;

(2) 试求未知参数  $\theta$  的极大似然估计量  $\hat{\theta}_{MLE}$ 。

七、(本题满分 12 分)

(1) 用传统工艺加工某种水果罐头, 每瓶中维生素 C 的含量为随机变量  $X$  (单位: mg). 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu, \sigma^2$  均未知。现抽查 16 瓶罐头进行测试, 测得维生素 C 的平均含量  $\bar{x} = 20.80 \text{mg}$ , 样本标准差  $s = 1.60 \text{mg}$ , 试求  $\mu$  的置信度为 95% 的置信区间。

(2) 设总体  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 抽取样本  $X_1, \dots, X_n$ , 且  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  为样本均值。已知  $\sigma = 10$ , 问: 要使  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间长度不超过 5, 样本容量  $n$  至少应取多大?

(参考数据:  $\Phi(1.25)=0.8944$ ,  $\Phi(1.283)=0.9$ ,  $\Phi(1.645)=0.95$ ,  $\Phi(1.96)=0.975$ ;  $t_{0.05}(15)=1.7531$ ,  $t_{0.05}(16)=1.7459$ ,  $t_{0.025}(15)=2.1315$ ,  $t_{0.025}(16)=2.1199$ )

八、(本题满分 8 分) 若  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  是来自  $N(0, \sigma^2)$  的样本, 其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , 求统计量  $\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$  所服从的分布, 并给出分布的参数。

### 参考解答

一. 1. 0.2; 2. 1; 3. 25; 4.  $F(9,9)$ ; 5.  $\chi^2(1)$ ; 6.  $\lambda$ 。

二. (1) 乙箱中次品数  $X$  的可能取值为 0, 1, 2.  $X$  的概率分布为  $P\{X=k\} = \frac{C_2^k C_3^{3-k}}{C_5^3}$ ,  $k=0, 1, 2$ , 即

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

因此  $EX = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

(3) 设 A 表示“从乙箱中任取一件产品是次品”, 由全概率公式有

$$P(A) = \sum_{k=0}^2 P\{X=k\}P\{A|X=k\} = \frac{1}{10} \times 0 + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

三、 $\because X \sim U(0, 2), \therefore f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$\because F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^{-2X} \leq y\} = P\{X \leq -\frac{1}{2} \ln y\} = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2} \ln y} f_X(x) dx$$

$$\therefore f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = -\frac{1}{2y} f_X(-\frac{1}{2} \ln y) = \begin{cases} \frac{1}{4y} & e^{-4} < y < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{e^{-4}}^1 y \left(-\frac{1}{4y}\right) dy \text{ 或 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-2x} dx = \frac{1}{4} (1 - e^{-4})$$

四. (1)  $P\{Z=0\} = P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=-1, Y=-1\} = p^2 + q^2$ ,

$$P\{Z=1\} = P\{XY=-1\} = P\{X=-1, Y=1\} + P\{X=1, Y=-1\} = 2pq,$$

$$\text{因此, } Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p^2 + q^2 & 2pq \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} Z \\ X \end{matrix}$	0	1	$p_i$
-1	$q^2$	$pq$	$q^2 + pq$
1	$p^2$	$pq$	$p^2 + pq$
$p_j$	$p^2 + q^2$	$2pq$	1

(2)

$$(3) \text{ 若要求 } X \text{ 与 } Z \text{ 相互独立, 则要求 } \begin{cases} q^2 = (q^2 + pq) \cdot (p^2 + q^2) \\ pq = (q^2 + pq) \cdot 2pq \\ p^2 = (p^2 + q^2) \cdot (p^2 + pq) \\ pq = (p^2 + pq) \cdot 2pq \end{cases} \Rightarrow p = q = \frac{1}{2}$$

五. (1)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_G} = 1, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,



$$(2) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{y/2}^1 1 dy = 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} xy dy = \frac{1}{2}, \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = \frac{2}{3},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^2 y (1 - \frac{y}{2}) dy = \frac{2}{3}, \quad \therefore Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

$$(3) \therefore F_Z(z) = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z^2/3, & 0 \leq z < 1, \\ 1 - \frac{1}{6}(3-z)^2 \text{ 或 } -\frac{1}{6}z^2 + z - \frac{1}{2}, & 1 \leq z < 3, \\ 1, & z \geq 3, \end{cases}$$

$$\therefore f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}z, & 0 < z < 1, \\ 1 - \frac{z}{3}, & 1 \leq z < 3, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{或者 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_{z/3}^z 1 dx = \frac{2z}{3}, & 0 < z < 1 \\ \int_{z/3}^1 1 dx = 1 - \frac{z}{3}, & 1 \leq z < 3. \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

六. (1) 由于  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta$ , 又由矩估计法有  $E(X) = \bar{X}$ ; 所以  $\hat{\theta}_M = \bar{X}$ ;

$$E(\hat{\theta}_{MLE}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \theta = \theta, \text{ 故 } \hat{\theta}_M \text{ 为 } \theta \text{ 无偏估计量。【7 分】}$$

$$(2) \text{ 似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{x_i^3} e^{-\frac{\theta}{x_i}} = \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_i > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$  时,  $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$ , 令  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$ , 得

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

所以  $\theta$  的极大似然估计量  $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$ 。

七. (1) 因为  $\sigma^2$  未知, 所以总体均值  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}})$ ,

又  $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315$ , 故  $(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}) =$   
 $(20.80 - 2.1315 \times \frac{1.60}{\sqrt{16}}, 20.80 + 2.1315 \times \frac{1.60}{\sqrt{16}}) = (19.9474, 21.6526)$ 。

(2) 因为  $\sigma = 10$  已知, 所以总体均值  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

所以由题意有  $2z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 5$ , 将  $\sigma = 10$ ,  $z_{0.025} = 1.96$  代入得  $n \geq 61.4656$ , 故  $n=62$ 。【5 分】

八.  $\therefore X_{n+1} - \bar{X} \sim N(0, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n})$ ,  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 且二者独立,

$$\therefore \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{\sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}} / \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)} \sim t(n-1).$$