

Motivação

Nesta primeira seção, discutimos por que o cálculo numérico é fundamental para compreender técnicas modernas de inteligência artificial.

- O cérebro humano interpreta imagens e sons de forma probabilística, por exemplo: uma imagem pode ter 40% de chance de ser um cachorro, 15% de ser um gato e 45% de ser um saco de lixo.
 - Redes neurais imitam esse comportamento, ajustando funções de probabilidade para estimar saídas a partir de entradas.
 - Um conceito essencial do cálculo é o da área sob uma curva. Isso pode ser aproximado por retângulos cada vez menores e mais numerosos, o que leva à ideia de integral.
 - Em otimização, usada em IA e engenharia, o objetivo é encontrar mínimos ou máximos de funções complexas. O método do gradiente descendente realiza pequenos passos na direção de maior inclinação da função, lidando com números com muitas casas decimais.
 - Redes neurais precisam dessa otimização: busca-se a melhor combinação de pesos que minimize o erro entre valor previsto e valor esperado. Porém, em problemas de alta dimensionalidade, o gradiente descendente pode ser ineficiente.
 - Word embeddings também dependem de operações numéricas. São usados no Processamento de Linguagem Natural para representar palavras como vetores entre 0 e 1, capturando significado semântico.
 - Por exemplo, os vetores de "homem" e "mulher" são semelhantes, diferenciando-se apenas pela operação de flexão de gênero. Isso também ocorre com pares como "rei" e "rainha".
-

A origem de tudo: álgebra linear

Esta seção introduz conceitos básicos de vetores e matrizes, essenciais para entender transformações em modelos de IA.

- Vetores são representados como setas que partem da origem $(0,0)$ e apontam para um ponto no plano, como $(1,2)$.
- Operações com vetores incluem:
 - **Soma:** somar componente a componente.
 - **Multiplicação por escalar:** estica ou encolhe o vetor.

- Transformações lineares usam matrizes para transformar vetores:
 - Exemplo: aplicar uma matriz 2x2 a um vetor (5,7) gera um novo vetor, calculado com multiplicações e somas das linhas da matriz com os valores do vetor original.
 - Essa ideia é usada em word embeddings: a matriz representa uma transformação semântica (como flexão de gênero ou tempo verbal).
 - O produto escalar mede o alinhamento entre dois vetores:
 - Resultado positivo → vetores apontam na mesma direção.
 - Resultado zero → vetores perpendiculares.
 - Resultado negativo → vetores opostos.
-

IA e matemática: alguns exemplos

Esta seção mostra como os conceitos matemáticos discutidos se aplicam em diversas áreas da IA.

Redes neurais

- Modelos de IA aprendem a mapear entradas em saídas significativas.
- Exemplo: classificar imagens ou gerar textos palavra por palavra.
- Cada neurônio realiza:
 - Uma transformação linear (produto escalar dos dados com os pesos).
 - Soma com um bias.
 - Aplicação de uma função de ativação não linear.
- O treinamento ajusta pesos e bias usando gradiente descendente.
- Regressão linear é um exemplo simples desse princípio, ajustando uma reta para minimizar o erro dos dados.

Aprendizado por reforço

- Um agente interage com o ambiente e aprende com recompensas e punições.
- Exemplo: em um jogo de labirinto, o agente aprende quais movimentos levam à saída.
- Usado em robótica, jogos, sistemas de recomendação, veículos autônomos etc.
- Conceitos envolvidos: otimização, probabilidade, expectativa matemática.

- Outros usos incluem:
 - Jogos como xadrez e shogi.
 - Controle de plasma em tokamaks.
 - Ajuste de turbinas e circuitos.

Otimização

- O algoritmo PSO (Particle Swarm Optimization) representa soluções como partículas que se movem em um espaço de busca.
- Cada partícula leva em conta:
 1. Sua melhor posição individual.
 2. A melhor posição do grupo.
 3. Sua velocidade anterior (inércia).
- Esses três vetores orientam sua próxima posição.
- É um exemplo claro do uso de vetores, álgebra linear e otimização.

Transformers

- Base dos modelos como GPT.
- Utilizam mecanismos de atenção para processar relações entre palavras em uma sequência.
- Capturam o contexto e a semântica, por exemplo, diferentes sentidos da palavra "modelo".
- Fundamentados em:
 - Produtos escalares entre vetores de embeddings.
 - Normalização com softmax.
 - Operações de álgebra linear e cálculo.

Ciência de dados

- A análise de dados segue processos sistemáticos como:
 - **KDD**: seleção, pré-processamento, transformação, mineração, avaliação.
 - **CRISP-DM**: modelo padronizado em diferentes setores.
 - A matemática computacional é essencial nas etapas de transformação e avaliação.
-

Ementa da disciplina

A disciplina abordará os seguintes tópicos principais:

1. **Erros numéricos:** arredondamento, truncamento e sua influência nos resultados computacionais.
 2. **Zeros de funções reais:** métodos numéricos para encontrar raízes de equações, como Newton-Raphson.
 3. **Sistemas lineares:** resolução de $Ax = b$ com métodos como Gauss e Jacobi.
 4. **Otimização:** busca de mínimos ou máximos de funções com e sem restrições.
-

Ferramentas utilizadas na disciplina

Serão usadas as seguintes ferramentas durante o curso:

- **Jupyter Notebook:** ambiente interativo que integra código e texto.
- **Python:** linguagem de programação com forte suporte para análise numérica.
- **Git:** controle de versão para organização e colaboração em projetos.