Рассчетка по теории функций комплексного переменного

Крылов Савелий Игоревич ИБ-21

May 14, 2024

Оглавление

Введение

Я делал задание на бумаге – бумага потерялась, решил избавиться от проблемы(бумаги).

1 Комплексные числа и действия с ними

1.10

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{2-i}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{2+i}{1+3i}\right)$$

Решение

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{2-i}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{2+i}{1+3i}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{(1-i)(2+i)}{5}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{(2+i)(1-3i)}{10}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{2-i+1}{5}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{2-2i+3)}{10}\right)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

1.20

$$z^2+\overline{z}=2\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

Решение

$$z^2+\overline{z}=2\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$z=x+iy$$

$$x^2+2xyi+iy^2-y^2+x-yi=2\operatorname{Re}\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)$$

$$x^2-y^2+x+i(2x-1)y=0$$

$$\begin{cases}x^2-y^2+x=0,\\ \quad(2x-1)y=0.\end{cases}$$

Находим решения для $y=0$:

$$\begin{aligned}x^2+x&=0\\(x+1)x&=0\\x&=0\quad\text{or}\quad x=-1.\end{aligned}$$

Для случая $(2x-1)=0$ (считая $y\neq 0$):

$$\begin{aligned}2x-1&=0,\\x&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Подставляем $x = \frac{1}{2}$ в первое равенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} = 0,$$
$$\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0,$$
$$y^2 = \frac{3}{4},$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решения:

- $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,
- $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,
- $(0, 0)$,
- $(-1, 0)$.

1.30

$$\sqrt{-3-4i}$$

Решение

$$\sqrt{-3-4i}$$
$$w = -3 - 4i$$
$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$
$$w = 5(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$\cos\phi = -\frac{3}{5}, \quad \sin\phi = -\frac{4}{5}$$
$$z = \sqrt{w} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1$$
$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$$
$$z_2 = -z_1$$
$$2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1 = \cos\phi = -\frac{3}{5}$$
$$2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{2}{5}$$
$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = -\sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$z_1 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 1 - 2i$$
$$z_2 = -\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -1 + 2i$$

1.40

$$z^2 + (-1 + 6i)z - 6i = 0$$

Решение

$$z = 1 + 0i \text{ -- решение(очевидно понимается подстановкой)}$$

$$\begin{array}{r|l} z^2 + (1+6i)^2 - 6i & z - 1 \\ \cline{2-2} z^2 - z & z + 6i \\ \cline{1-1} 6iz - 6i & \\ 6iz - 6i & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$(z - 1)(z + 6i) = 0$$

$$z = 1 \text{ или } z = -6i$$

1.50

Представить комплексное число $\sqrt{3} + i$ в тригонометрической и показательных формах

Решение

$$z = \sqrt{3} + i$$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$

$$\mathrm{Re} > 0, \quad \mathrm{Im} > 0$$

$$\arg(z) = \phi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z = |z| \cdot e^{i\phi} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

1.60

Доказать неравенство, используя свойства модуля комплексного числа

Решение

$$|\frac{1 - 3z^2\overline{z}}{2 + i}| < 12 \quad (\text{если } |z| \leq 2)$$

$$|1 - 3z^2\overline{z}| < 12\sqrt{5} \quad (\text{домножили на } |2 + i| = \sqrt{5})$$

$$|1 - 3z^2\overline{z}| \leq |1| + |3z^2\overline{z}| = 1 + 3|z|^3 \leq 1 + 3 * 8 = 25 < 12\sqrt{5}$$

$$25 < 12\sqrt{5}$$

$$6.25 < 14.5$$

$$625 < 144 * 5$$

$$625 < 720$$

1.70

Вычислить $(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i})^{20}$ применяя тригонометрическую форму комплексного числа

Решение

$$z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2, \quad \arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\left|\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right) = -\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{12}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$z^{20} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\cdot-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(20\cdot-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{10}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2048}$$

1.80

Вычислить $\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}^{\frac{1}{7}}$ применяя тригонометрическую форму комплексного числа

Решение

$$z = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|-2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4, \quad \arg(-2\sqrt{3}-2i) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\left|\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}\right) = -\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = -\frac{5\pi}{12}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$z^{1/7} = \left(2\sqrt{2}\right)^{1/7}\left(\cos\left(\frac{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{7}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 6$$

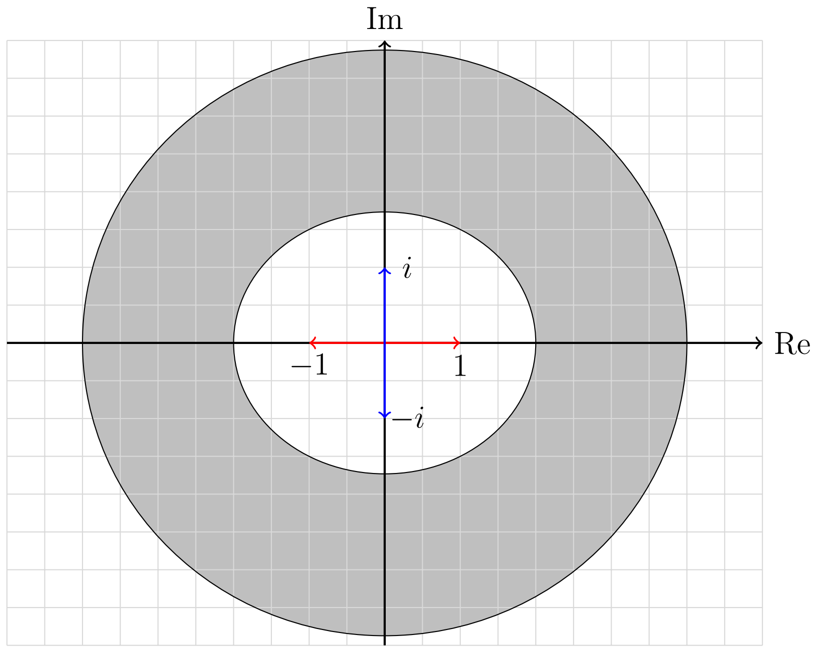
2 Изображение комплексных чисел

2.10

Изобразить на комлексной плоскости множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяюзих системе соотножений $4 \le |z-1| + |z+1| \le 8$

Решение

- Внутренний эллипс (минимальное расстояние 4) представляет собой множество точек, каждая из которых имеет суммарное расстояние до двух фокусов равное 4. Это минимальный эллипс.
- Внешний эллипс (максимальное расстояние 8) аналогично описывает множество точек, суммарное расстояние до фокусов которых равно 8.



2.20

Изобразить линию, заданную уравнением $2z\overline{z} + (2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$

Решение

Уравнение в комплексной форме:

$$2z\overline{z} + (2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$$

Преобразуется в:

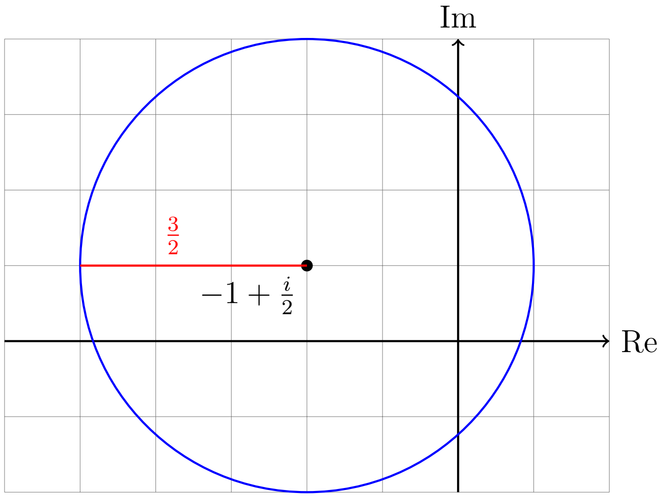
$$2(x^2+y^2) + (2x+y) + (2y+x)i + (2x-y) - (2y+x)i = 2$$

$$x^2+y^2+2x-y = 1$$

Получаем уравнение окружности:

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Центр окружности: $-1 + \frac{1}{2}i$, радиус: $\frac{3}{2}$.



3 Функции $e^z, \sin z, \cos z, \cosh z, \sinh z, \sqrt[n]{z}, Ln(z), \ln z$

3.10

Вычислить $\operatorname{Im} \exp 2 - 5i$

Решение

$$e^{2-5i} = e^2(\cos(-5) + i\sin(-5))$$
$$\operatorname{Im}\ e^{2-5i} = e^2 \sin(-5)$$

3.20

Найти действительную,мнимую части и модуль функции $f(z) = \sin(z)$

Решение

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\operatorname{Re}(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y)$$
$$\operatorname{Im}(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y)$$
$$|\sin(z)| = \sqrt{(\sin(x)\cosh(y))^2 + (\cos(x)\sinh(y))^2} =$$
$$= \sqrt{(\sin(x)\cosh(y))^2 + (1 - \sin^2(x))(\sinh(y))^2} = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 x}$$

3.30

Вычислить значения логарифмов $Ln10, \ln(10)$

Решение

$$Ln(10) = \ln 10 + i\arg(10) + i * 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$
$$\arg(10) = 0$$
$$Ln(10) = \ln 10 + i * 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$
$$\ln(10 + 0i) = \ln 10$$

3.40

Найти все значения выражения $(-4)^{-4}$

Решение

$$\arg -4 = \pi$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} * (\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi + 2k\pi}{4})), k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt{2} * (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} * (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = i + 1$$

$$z_0 = i + 1, z_1 = i - 1, z_2 = -i - 1, z_3 = -i + 1$$

4 Дробно-линейная функция

4.10

Найти дробно-линейнойное отображение $w = f(z)$, которое переводит точки $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ в точки $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ соответственно

Решение

$$\frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} = 1, \quad \frac{b}{d} = i, \quad \frac{a + b}{c + d} = -1$$

$$\frac{-a + b}{-c + d} = 1 \Rightarrow -a + b = -c + d$$

$$\frac{b}{d} = i \Rightarrow b = id$$

$$\text{Подставим } b = id$$

$$\frac{a + id}{c + d} = -1 \Rightarrow a + id = -c - d$$

$$-a + id = -c + d \Rightarrow a + c = i(d - b)$$

$$\text{Из уравнения } a + id = -c - d$$

$$a = -c - d - id$$

$$\text{Пусть } c = 1, d = 1$$

$$b = i, \quad a = -2 - i$$

$$f(z) = \frac{(-2 - i)z + i}{z + 1}$$

4.20

Найти дробно-линейнойную функцию $w = f(z)$, отображающую G - круг $|z - 1| \leq 1$ на H - полуплоскость $\operatorname{Im}(z) \leq 2$

Решение

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 1+i \text{ в точки } w_1 = 2i-2, w_2 = 2i+2, w_3 = 2i$$

$$\frac{b}{d} = 2i-2, \quad \frac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d} = 2i, \quad \frac{2a+b}{2c+d} = 2+2i$$

$$b = (2i-2)d, \quad a(1+i)+b = 2i(c(1+i)+d), \quad 2a+b = 2(2c+d)+2i(2c+d)$$

$$\text{Пусть } d = 1, \text{ тогда } b = 2i-2$$

$$a(1+i)+(2i-2) = 2i(c(1+i)+1), \quad 2a+(2i-2) = 2+2i+4c+2i$$

$$a(1+i)-2 = 2ic-2c+2i, \quad 2a = 4+4c$$

$$c = -1, a = 2i$$

$$f(z) = \frac{(2i)z+(2i-2)}{-z+1}$$

5 Дифференцирование функций комплексного переменного

5.10

Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $f(z) = ze^z$

Решение

$$f(z) = ze^z = (x+iy)e^{x+iy}$$

Действительная и мнимая части:

$$u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y, \quad v(x,y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y$$

Частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + xe^x \cos y - ye^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + xe^x \sin y + ye^x \cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xe^x \cos y - ye^x \sin y + e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполнены.

5.20

Определить точки дифференцируемости и область аналитичности функции $f(z) = f(x + iy) = 2xy + iy^2$. Найти производную в точках существования.

Решение

$$u(x, y) = 2xy$$
$$v(x, y) = y^2$$

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(всегда) и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(выполняется только если } x = 0)$$

Функция дифференцируема и аналитична вдоль мнимой оси:

$$f'(iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + i * 0 = 2y$$

5.30

Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее указанным свойствам $v(x, y) = 4\sinh x \sin y + 2xy$, $f(0) = 3$

Решение

Для функции $v(x, y) = 4\sinh x \sin y + 2xy$, используя условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4\cosh x \sin y + 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4\sinh x \cos y + 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

При интегрировании по x для $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$u(x, y) = \int (4\sinh x \cos y + 2x)\, dx = 4\cos y \cosh x + x^2 + \lambda(y)$$

Дифференцируем по y:

$$(4\cos y \cosh x + x^2 + \lambda(y))'_y = -4 * \sin y \cosh x + \lambda(y)'_y$$

Вспоминаем условия Коши-Римана:

$$-4 * \sin y \cosh x + \lambda(y)'_y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4 * \sin y \cosh x - 2y$$

$$\lambda(y)'_y = -2y$$
$$\lambda(y) = -y^2 + C$$

Получаем, что:

$$u(x,y) = 4\cosh x \sin y + x^2 - y^2 + C$$

Из начального условия $f(0) = 3$:

$$u(0,0) = 3 - v(0,0)$$

$$v(0,0) = 4\sinh 0 \sin 0 + 2 * 0 * 0 = 0$$

$$3 = u(0,0) = 4\cosh 0 \sin 0 + 0^2 - 0^2 + C$$

$$3 = C$$

Таким образом, аналитическая функция:

$$f(z) = (4\cosh x \sin y + x^2 - y^2 + 3) + i(4\sinh x \sin y + 2xy)$$