Рассчетка по теории функций комплексного переменного

Крылов Савелий Игоревич ИБ-21

May 18, 2024

Содержание

1 Комплексные числа и действия с ними **3**

2 Изображение комплексных чисел **7**

3 Функции $e^z, \sin z, \cos z, \cosh z, \sinh z, \sqrt[n]{z}, Ln(z), \ln z$ **8**

4 Дробно-линейная функция **9**

5 Дифференцирование функций комплексного переменного **10**

6 Интегрирование функций комплексного переменного **12**

7 Области сходимости рядов **15**

8 Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана **16**

9 Изолированные особые точки. Вычеты **18**

10 Вычисление с помощью вычетов комплексныъ интегралов **20**

11 Вычисление с помощью вычетов комплексныъ интегралов **21**

Введение

Я делал задание на бумаге – бумага потерялась, решил избавиться от проблемы(бумаги).

1 Комплексные числа и действия с ними

1.10

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{2-i}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{2+i}{1+3i}\right)$$

Решение

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{2-i}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{2+i}{1+3i}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{(1-i)(2+i)}{5}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{(2+i)(1-3i)}{10}\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\left(\frac{2-i+1}{5}\right)-\operatorname{Im}\left(\frac{2-2i+3)}{10}\right)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

1.20

$$z^2+\overline{z}=2\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

Решение

$$z^2+\overline{z}=2\operatorname{Re}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$z=x+iy$$

$$x^2+2xyi+iy^2-y^2+x-yi=2\operatorname{Re}\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)$$

$$x^2-y^2+x+i(2x-1)y=0$$

$$\begin{cases} x^2-y^2+x=0,\\ (2x-1)y=0. \end{cases}$$

Находим решения для $y=0$:

$$\begin{aligned} x^2+x&=0\\ (x+1)x&=0\\ x&=0 \quad \text{or} \quad x=-1. \end{aligned}$$

Для случая $(2x-1)=0$ (считая $y\neq 0$):

$$\begin{aligned} 2x-1&=0,\\ x&=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Подставляем $x = \frac{1}{2}$ в первое равенство:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} &= 0, \\ \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} &= 0, \\ y^2 &= \frac{3}{4}, \\ y &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Решения:

- $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,
- $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$,
- $(0, 0)$,
- $(-1, 0)$.

1.30

$$\sqrt{-3-4i}$$

Решение

$$\sqrt{-3-4i}$$
$$w = -3 - 4i$$
$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$
$$w = 5(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$\cos\phi = -\frac{3}{5}, \quad \sin\phi = -\frac{4}{5}$$
$$z = \sqrt{w} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1$$
$$z_1 = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$$
$$z_2 = -z_1$$
$$2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - 1 = \cos\phi = -\frac{3}{5}$$
$$2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{2}{5}$$
$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = -\sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$z_1 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 1 - 2i$$
$$z_2 = -\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -1 + 2i$$

1.40

$$z^2 + (-1 + 6i)z - 6i = 0$$

Решение

$$z = 1 + 0i \text{ -- решение(очевидно понимается подстановкой)}$$

$$\begin{array}{r|l}
z^2 + (1+6i)^2 - 6i & z-1 \\ \cline{2-2}
z^2 - z & z + 6i \\ \hline
6iz - 6i & \\
6iz - 6i & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$$(z-1)(z+6i) = 0$$

$$z = 1 \text{ или } z = -6i$$

1.50

Представить комплексное число $\sqrt{3} + i$ в тригонометрической и показательных формах

Решение

$$z = \sqrt{3} + i$$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{Re} > 0, \quad \text{Im} > 0$$

$$\arg(z) = \phi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z = |z| \cdot e^{i\phi} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$$

1.60

Доказать неравенство, используя свойства модуля комплексного числа

Решение

$$|\frac{1 - 3z^2\overline{z}}{2+i}| < 12 \quad (\text{если } |z| \leq 2)$$

$$|1 - 3z^2\overline{z}| < 12\sqrt{5} \quad (\text{домножили на } |2+i| = \sqrt{5})$$

$$|1 - 3z^2\overline{z}| \leq |1| + |3z^2\overline{z}| = 1 + 3|z|^3 \leq 1 + 3 * 8 = 25 < 12\sqrt{5}$$

$$25 < 12\sqrt{5}$$

$$6.25 < 14.5$$

$$625 < 144 * 5$$

$$625 < 720$$

1.70

Вычислить $(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i})^{20}$ применяя тригонометрическую форму комплексного числа

Решение

$$z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2, \quad \arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\left|\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right) = -\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{12}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$z^{20} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}\left(\cos\left(20\cdot-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(20\cdot-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2^{10}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1024}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2048}$$

1.80

Вычислить $\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}^{\frac{1}{7}}$ применяя тригонометрическую форму комплексного числа

Решение

$$z = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$|-2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4, \quad \arg(-2\sqrt{3}-2i) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\left|\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{-2\sqrt{3}-2i}{1-i}\right) = -\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = -\frac{5\pi}{12}$$

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$z^{1/7} = \left(2\sqrt{2}\right)^{1/7}\left(\cos\left(\frac{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{7}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 6$$

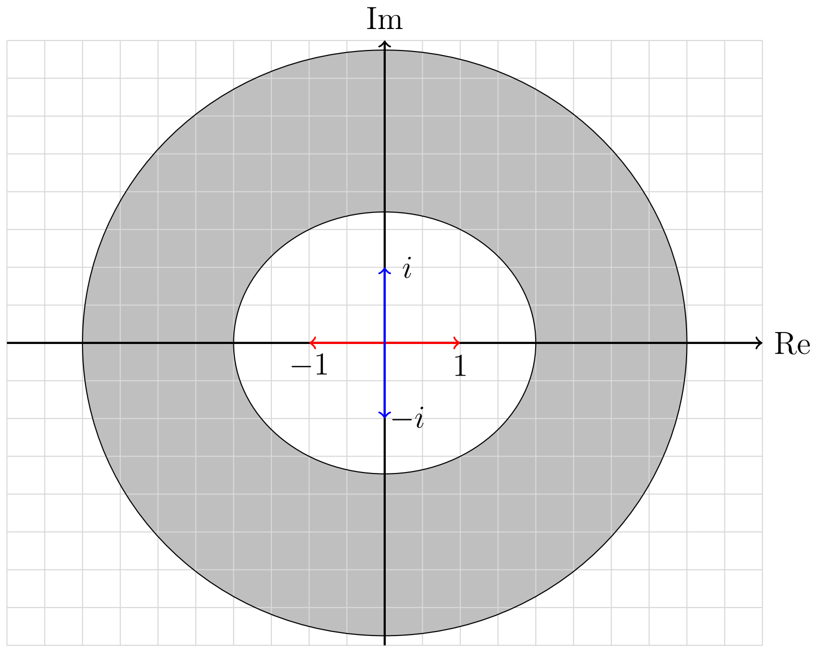
2 Изображение комплексных чисел

2.10

Изобразить на комлексной плоскости множество точек $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяюзих системе соотножений $4 \leq |z-1| + |z+1| \leq 8$

Решение

- Внутренний эллипс (минимальное расстояние 4) представляет собой множество точек, каждая из которых имеет суммарное расстояние до двух фокусов равное 4. Это минимальный эллипс.
- Внешний эллипс (максимальное расстояние 8) аналогично описывает множество точек, суммарное расстояние до фокусов которых равно 8.



2.20

Изобразить линию, заданную уравнением $2z\overline{z} + (2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$

Решение

Уравнение в комплексной форме:

$$2z\overline{z} + (2+i)z + (2-i)\overline{z} = 2$$

Преобразуется в:

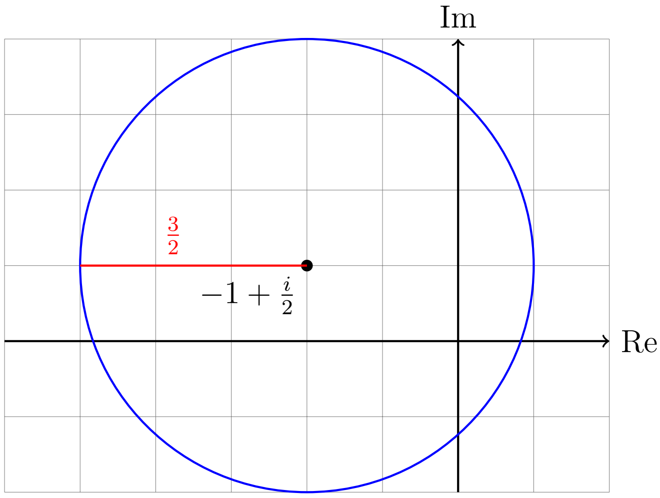
$$2(x^2+y^2) + (2x+y) + (2y+x)i + (2x-y) - (2y+x)i = 2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - y = 1$$

Получаем уравнение окружности:

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Центр окружности: $-1 + \frac{1}{2}i$, радиус: $\frac{3}{2}$.



3 Функции $e^z, \sin z, \cos z, \cosh z, \sinh z, \sqrt[n]{z}, Ln(z), \ln z$

3.10

Вычислить $\operatorname{Im} \exp 2 - 5i$

Решение

$$e^{2-5i} = e^2(\cos(-5) + i\sin(-5))$$
$$\operatorname{Im}\ e^{2-5i} = e^2\sin(-5)$$

3.20

Найти действительную,мнимую части и модуль функции $f(z) = \sin(z)$

Решение

$$\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$
$$\operatorname{Re}(\sin(z)) = \sin(x)\cosh(y)$$
$$\operatorname{Im}(\sin(z)) = \cos(x)\sinh(y)$$
$$|\sin(z)| = \sqrt{(\sin(x)\cosh(y))^2 + (\cos(x)\sinh(y))^2} =$$
$$= \sqrt{(\sin(x)\cosh(y))^2 + (1-\sin^2(x))(\sinh(y))^2} = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 x}$$

3.30

Вычислить значения логарифмов $Ln10, \ln(10)$

Решение

$$Ln(10) = \ln 10 + i\arg(10) + i * 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$
$$\arg(10) = 0$$
$$Ln(10) = \ln 10 + i * 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$$
$$\ln(10 + 0i) = \ln 10$$

3.40

Найти все значения выражения $(-4)^{-4}$

Решение

$$\arg -4 = \pi$$

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4} * (\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi + 2k\pi}{4})), k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = \sqrt{2} * (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} * (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = i + 1$$

$$z_0 = i + 1, z_1 = i - 1, z_2 = -i - 1, z_3 = -i + 1$$

4 Дробно-линейная функция

4.10

Найти дробно-линейнойное отображение $w = f(z)$, которое переводит точки $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ в точки $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ соответственно

Решение

$$\frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} = 1, \quad \frac{b}{d} = i, \quad \frac{a + b}{c + d} = -1$$

$$\frac{-a + b}{-c + d} = 1 \Rightarrow -a + b = -c + d$$

$$\frac{b}{d} = i \Rightarrow b = id$$

$$\text{Подставим } b = id$$

$$\frac{a + id}{c + d} = -1 \Rightarrow a + id = -c - d$$

$$-a + id = -c + d \Rightarrow a + c = i(d - b)$$

$$\text{Из уравнения } a + id = -c - d$$

$$a = -c - d - id$$

$$\text{Пусть } c = 1, d = 1$$

$$b = i, \quad a = -2 - i$$

$$f(z) = \frac{(-2 - i)z + i}{z + 1}$$

4.20

Найти дробно-линейнойную функцию $w = f(z)$, отображающую G - круг $|z - 1| \leq 1$ на H - полуплоскость $\text{Im}(z) \leq 2$

Решение

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 1+i \text{ в точки } w_1 = 2i-2, w_2 = 2i+2, w_3 = 2i$$

$$\frac{b}{d} = 2i-2, \quad \frac{a(1+i)+b}{c(1+i)+d} = 2i, \quad \frac{2a+b}{2c+d} = 2+2i$$

$$b = (2i-2)d, \quad a(1+i)+b = 2i(c(1+i)+d), \quad 2a+b = 2(2c+d)+2i(2c+d)$$

$$\text{Пусть } d = 1, \text{ тогда } b = 2i-2$$

$$a(1+i)+(2i-2) = 2i(c(1+i)+1), \quad 2a+(2i-2) = 2+2i+4c+2i$$

$$a(1+i)-2 = 2ic-2c+2i, \quad 2a = 4+4c$$

$$c = -1, a = 2i$$

$$f(z) = \frac{(2i)z+(2i-2)}{-z+1}$$

5 Дифференцирование функций комплексного переменного

5.10

Проверить выполнение условий Коши-Римана для функции $f(z) = ze^z$

Решение

$$f(z) = ze^z = (x+iy)e^{x+iy}$$

Действительная и мнимая части:

$$u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y, \quad v(x,y) = xe^x \sin y + ye^x \cos y$$

Частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + xe^x \cos y - ye^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + xe^x \sin y + ye^x \cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = xe^x \cos y - ye^x \sin y + e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Условия Коши-Римана выполнены.

5.20

Определить точки дифференцируемости и область аналитичности функции $f(z) = f(x + iy) = 2xy + iy^2$. Найти производную в точках существования.

Решение

$$u(x, y) = 2xy$$
$$v(x, y) = y^2$$

Условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(всегда) и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(выполняется только если } x = 0\text{)}$$

Функция дифференцируема и аналитична вдоль мнимой оси:

$$f'(iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + i * 0 = 2y$$

5.30

Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее указанным свойствам $v(x, y) = 4\sinh x \sin y + 2xy$, $f(0) = 3$

Решение

Для функции $v(x, y) = 4\sinh x \sin y + 2xy$, используя условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4\cosh x \sin y + 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4\sinh x \cos y + 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

При интегрировании по x для $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$u(x, y) = \int (4\sinh x \cos y + 2x)\, dx = 4\cos y \cosh x + x^2 + \lambda(y)$$

Дифференцируем по y:

$$(4\cos y \cosh x + x^2 + \lambda(y))'_y = -4 * \sin y \cosh x + \lambda(y)'_y$$

Вспоминаем условия Коши-Римана:

$$-4 * \sin y \cosh x + \lambda(y)'_y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4 * \sin y \cosh x - 2y$$

$$\lambda(y)'_y = -2y$$
$$\lambda(y) = -y^2 + C$$

Получаем, что:
$$u(x,y) = 4\cosh x \sin y + x^2 - y^2 + C$$
Из начального условия $f(0) = 3$:
$$u(0,0) = 3 - v(0,0)$$
$$v(0,0) = 4\sinh 0 \sin 0 + 2 * 0 * 0 = 0$$
$$3 = u(0,0) = 4\cosh 0 \sin 0 + 0^2 - 0^2 + C$$
$$3 = C$$
Таким образом, аналитическая функция:
$$f(z) = (4\cosh x \sin y + x^2 - y^2 + 3) + i(4\sinh x \sin y + 2xy)$$

6 Интегрирование функций комплексного переменного

6.10

Вычислить интеграл
$$\int_\Gamma f(z)\,dz,$$
Γ — отрезок с концами в точках z_1 и z_2, проходимый от z_1 к z_2.
$$f(z) = z\overline{z} + 4z + 1, z1 = -1 - i, z2 = 1 + i$$

Решение

Параметризуем отрезок Γ как
$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (-1 - i) + t(2 + 2i), \quad t \in [0,1]$$
Тогда
$$z(t) = -1 - i + 2t + 2ti = (2t - 1) + i(2t - 1)$$
и
$$\frac{dz}{dt} = 2 + 2i$$
Теперь вычислим $\overline{z(t)}$:
$$\overline{z(t)} = \overline{(2t-1) + i(2t-1)} = (2t - 1) - i(2t - 1)$$
Тогда
$$f(z(t)) = z(t)\overline{z(t)} + 4z(t) + 1$$
Вычислим $z(t)\overline{z(t)}$:
$$z(t)\overline{z(t)} = [(2t-1) + i(2t-1)][(2t-1) - i(2t-1)] = (2t-1)^2 + (2t-1)^2 = 2(2t-1)^2$$
Тогда,
$$f(z(t)) = 2(2t-1)^2 + 4[(2t-1) + i(2t-1)] + 1$$
$$f(z(t)) = 2(2t-1)^2 + 4(2t-1) + 4i(2t-1) + 1$$

Интеграл преобразуется в

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(z(t))\frac{dz}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^1 [2(2t-1)^2 + 4(2t-1) + 4i(2t-1) + 1](2+2i)\,dt$$

$$= \int_0^1 [2(2t-1)^2(2+2i) + 4(2t-1)(2+2i) + 4i(2t-1)(2+2i) + (2+2i)]\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[4(2t-1)^2 + 4i(2t-1)^2 + 8(2t-1) + 8i(2t-1) + 8i(2t-1) - 8(2t-1) + 2 + 2i\right]\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[4(2t-1)^2 + 4i(2t-1)^2 + 8i(2t-1) + 2 + 2i\right]\,dt$$

Вычислим каждый член отдельно:

$$\int_0^1 4(2t-1)^2\,dt + \int_0^1 4i(2t-1)^2\,dt + \int_0^1 8i(2t-1)\,dt + \int_0^1 2\,dt + \int_0^1 2i\,dt$$

Вычислим каждый интеграл:

$$\int_0^1 4(2t-1)^2\,dt = 4\int_0^1 (4t^2-4t+1)\,dt = 4\left(\left[\frac{4t^3}{3} - 2t^2 + t\right]_0^1\right) = 4\left(\frac{4}{3} - 2 + 1\right) = 4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^1 4i(2t-1)^2\,dt = 4i\int_0^1 (4t^2-4t+1)\,dt = 4i\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4i}{3}$$

$$\int_0^1 8i(2t-1)\,dt = 8i\left[\frac{(2t-1)^2}{2}\right]_0^1 = 8i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\int_0^1 2\,dt = 2\,[t]_0^1 = 2$$

$$\int_0^1 2i\,dt = 2i\,[t]_0^1 = 2i$$

Сложим всё вместе:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{4}{3} + \frac{4i}{3} + 2 + 2i = \left(\frac{4}{3} + 2\right) + \left(\frac{4i}{3} + 2i\right) = \frac{10}{3} + \frac{10i}{3} = \frac{10}{3}(1+i)$$

Итак, ответ:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \frac{10}{3}(1+i)$$

6.20

Вычислить интеграл

$$\int_0^i \cosh z\,dz$$

Решение

$$\frac{d\sinh z}{dz} = \cosh z$$

Таким образом,

$$\int \cosh z\, dz = \sinh z + C$$

Теперь вычислим определенный интеграл:

$$\int_0^i \cosh z\, dz = \sinh z|_0^i = \sinh(i) - \sinh(0)$$

$\sinh(0) = 0$,

$$\int_0^i \cosh z\, dz = \sinh(i)$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Для $z = i$:

$$\sinh(i) = \frac{e^i - e^{-i}}{2}$$

$$e^i = \cos(1) + i\sin(1)$$
$$e^{-i} = \cos(1) - i\sin(1)$$

$$\sinh(i) = \frac{(\cos(1) + i\sin(1)) - (\cos(1) - i\sin(1))}{2} = \frac{2i\sin(1)}{2} = i\sin(1)$$

$$\int_0^i \cosh z\, dz = i\sin(1)$$

6.30

Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши

$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz$,

a) Γ — окружность $|z-1-i| = 8$; b) Γ — окружность $|z-1-i| = 4$.

Решение

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz$$

и вычислим его с помощью интегральной формулы Коши.

a) Γ — окружность $|z-1-i| = 8$

Простые нули $\frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}$ находятся в точках $z = -1$ и $z = -i$. Оба простых нуля находятся внутри окружности $|z-1-i| = 8$.

Интеграл вокруг $z = -1$

Используем интегральную формулу Коши для функции $f(z) = \frac{\cos z}{z+i}$ с $z_0 = -1$:

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{\cos(-1)}{-1+i} = 2\pi i \cdot \frac{\cos(1)}{i-1}$$

Интеграл вокруг $z = -i$

Используем интегральную формулу Коши для функции $f(z) = \frac{\cos z}{z+1}$ с $z_0 = -i$:

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{\cos(-i)}{-i+1} = 2\pi i \cdot \frac{\cos(i)}{1-i}$$

Суммируем результаты

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz = 2\pi i \left(\frac{\cos(1)}{i-1} + \frac{\cos(i)}{1-i} \right)$$

b) Γ — окружность $|z-1-i| = 4$

Оба простых нуля $z=-1$ и $z=-i$ также находятся внутри этой окружности. Вычисления аналогичны случаю а:

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz = 2\pi i \left(\frac{\cos(1)}{i-1} + \frac{\cos(i)}{1-i} \right)$$

Значит как и в пункте а ответ:

$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{(z+1)(z+i)}\, dz = 2\pi i \left(\frac{\cos(1)}{i-1} + \frac{\cos(i)}{1-i} \right)$$

7 Области сходимости рядов

7.10

Определить облась сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{(z-1+i)^n}$$

Решение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

где $a_n = 2^n + 5$ и $z_0 = 1 - i$.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Найдём $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

$$a_n = 2^n + 5.$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \approx \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2.$$

$$R = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, область сходимости ряда — круг с центром $1-i$ и радиусом $\frac{1}{2}$:

$$|z-(1-i)| < \frac{1}{2}.$$

8 Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

8.10

Разложить функцию $f(z) = \frac{3z}{z^2-1}$ в ряд Тейлора в окрестности токи $z_0 = 0$. Найти радиус сходимости ряда.

Решение

$$f(z) = \frac{3z}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$$

$$3z = A(z+1) + B(z-1)$$

$$3z = Az + A + Bz - B \implies 3z = (A+B)z + (A-B)$$

$$A + B = 3 \quad \text{и} \quad A - B = 0$$

$$A = B \quad \text{и} \quad 2A = 3 \implies A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3z}{(z-1)(z+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{z-1} + \frac{\frac{3}{2}}{z+1}$$

Разложим каждую из этих дробей в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$:

$$\frac{3/2}{z-1} = -\frac{3/2}{1-z} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{для } |z| < 1$$

$$\frac{3/2}{z+1} = \frac{3/2}{1+z} = \frac{3/2^{\infty}}{\sum}_{n=0}(-1)^n z^n \quad \text{для } |z| < 1$$

$$f(z) = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

$$f(z) = \frac{3}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$

Этот ряд Тейлора сходится в области $|z| < 1$. Таким образом, радиус сходимости $R = 1$.

$$f(z) = \frac{3}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right), \quad R = 1$$

8.20

Разложить функцию $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^6}$ в ряд Лорана с центром в точке $z_0 = 0$.

Решение

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$$

$$1 - e^{-z} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = 1 - \left(1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$1 - e^{-z} = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^6} = \frac{z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots}{z^6}$$

$$f(z) = \frac{z}{z^6} - \frac{\frac{z^2}{2!}}{z^6} + \frac{\frac{z^3}{3!}}{z^6} - \frac{\frac{z^4}{4!}}{z^6} + \frac{\frac{z^5}{5!}}{z^6} - \cdots$$

$$f(z) = z^{-5} - \frac{z^{-4}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} - \frac{z^{-2}}{4!} + \frac{z^{-1}}{5!} - \cdots$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} z^{-(6-n)}$$

8.30

Разложить функцию $f(z) = \frac{2z}{z^2-4z+3}$ в ряд Лорана в кольце $3 < |z| < \infty$

Решение

$$z^2 - 4z + 3 = (z-1)(z-3)$$

$$f(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$$

$$\frac{2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}$$

$$2z = A(z-3) + B(z-1)$$

$$2z = Az - 3A + Bz - B$$

$$2z = (A+B)z - 3A - B$$

$$A + B = 2$$

$$-3A - B = 0$$

$$B = 2 - A$$

$$-3A - (2 - A) = 0 \implies -3A - 2 + A = 0 \implies -2A - 2 = 0 \implies A = -1, \quad B = 3$$

$$\frac{2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{3}{z-3}$$

Для $\frac{1}{z-1}$, так как $|z| > 3$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

Для $\frac{1}{z-3}$, так как $|z| > 3$:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{n+1}-1\right)\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{n+1}-1\right)\frac{1}{z^{n+1}}$$

9 Изолированные особые точки. Вычеты

9.10

Найти все конечные изолированные особые точки функции $f(z) = z\cos\frac{1}{z^2}$ и определить характер(нордический) каждой из них

Решение

Характер особой точки в $z = 0$

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{4n}}$$

$$f(z) = z\cos\frac{1}{z^2} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{4n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{1-4n}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{1-4n}$$

Из этого разложения видно, что $z = 0$ является существенной особой точкой, так как ряд содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями z.

9.20

Указать характер изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z) = z\cos\frac{1}{2z^3+z}$

Решение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Посмотрев что в косинусе стоит $\frac{1}{2z^3+z}$ становится очевидно, что будет бесконечно много членов отрицательной степени, значит $z_0 = \infty$ существенная особая точка

9.30

Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\cosh z}{(z-i)(z-1)^2}$ в конечных изолированных особых точках

Решение

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \iff e^{2z} = -1$$

$$2z = i\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$z = 0 + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i, k \in \mathbb{Z}$$

В точке $z = i$ функция имеет простой полюс, а В точке $z = 1$ полюс второго порядка.

Вычет в точке $z = i$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z)$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{\cosh z}{(z-i)(z-1)^2} = \lim_{z \to i} \frac{\cosh z}{(z-1)^2} = \frac{\cosh i}{(i-1)^2}$$

Вычет в точке $z = 1$

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 f(z)\right]$$

$$(z-1)^2 f(z) = \frac{\cosh z}{z - i}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\cosh z}{z-i}\right] = \frac{(z-i)\sinh z - \cosh z}{(z-i)^2}$$

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{(1-i)\sinh 1 - \cosh 1}{(1-i)^2}$$

9.40

Найти вычет функции $f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$ в точке $z_0 = \infty$

Решение

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 (1 - \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{x^{-4}}{4!} - \cdots)$$

Очевидно, что в разложении нашей функции будет присутствовать бесконечно много отрицательных степеней, значит вычет равен нулю

$$\text{Res}(f, \infty) = 0$$

10 Вычисление с помощью вычетов комплексныъ интегралов

10.10

Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1+i|=2} \frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)}\,dz$$

с помощью теоремы о вычетах.

Решение

$$(z=1-i) : |1-i-(1-i)| = 0 < 2$$
$$(z=2-i) : |2-i-(1-i)| = |1| = 1 < 2$$

Оба полюса находятся внутри контура.
Для полюса в $z = 1 - i$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)}, z=1-i\right) = \frac{1}{(1-i-2+i)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Для полюса в $z = 2 - i$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)}, z=2-i\right) = \frac{1}{(2-i-1+i)} = \frac{1}{1} = 1$$

По теореме о вычетах, интеграл по замкнутому контуру равен $2\pi i$ умноженному на сумму вычетов функции внутри контура:

$$\int_{|z-1+i|=2} \frac{1}{(z-1+i)(z-2+i)}\,dz = 2\pi i\,(-1+1) = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

10.20

Вычислить интеграл

$$\int_{|z-1-i|=10} \frac{e^z}{z^2(z+i)}\,dz$$

с помощью теоремы о вычетах.

Решение

Функция $\frac{e^z}{z^2(z+i)}$ имеет полюсы в точках $z = 0$ (полюс второго порядка) и $z = -i$ (простой полюс), которые находятся внутри контура

Для полюса в $z = 0$ (полюс второго порядка):

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z+i)}, z=0\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{e^z}{z^2(z+i)}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z+i}\right]$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z+i}\right] = \frac{(z+i)e^z - e^z}{(z+i)^2} = \frac{ze^z}{(z+i)^2}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z+i)}, z=0\right) = \frac{0\cdot e^0}{(0+i)^2} = 0$$

Для полюса в $z = -i$ (простой полюс):

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z+i)}, z=-i\right) = \frac{e^{-i}}{-1} = -e^{-i}$$

По теореме о вычетах, интеграл по замкнутому контуру равен $2\pi i$ умноженному на сумму вычетов функции внутри контура:

$$\int_{|z-1-i|=10} \frac{e^z}{z^2(z+i)}\, dz = 2\pi i \left(0 - e^{-i}\right) = -2\pi i e^{-i}$$

11 Вычисление с помощью вычетов комплексныъ интегралов

11.10

Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 25}\, dx$$

методами теории функций комплексного переменного

Решение

Мы можем использовать, тк при $\epsilon = 1.1, M = 1$ выполняется (11.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z); z_k\right].$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$x^2 - 8x + 25 = (x-4)^2 + 9 = (x-4)^2 + 3^2.$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^2 + 9}.$$

Эта функция имеет полюсы в точках:

$$z = 4 \pm 3i.$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-4)^2+9}, z = 4+3i\right] = \lim_{z\to 4+3i} (z - (4+3i)) \frac{1}{(z-(4+3i))(z-(4-3i))} =$$

$$= \frac{1}{(4+3i)-(4-3i)} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 8x + 25}\, dx = \frac{\pi}{3}.$$