Repetitorium Mathematik

Teil 3

Dr. Michael Hellwig

August 2023

Universität Liechtenstein

Bachelorstudiengang Betriebswirtschaftslehre

Inhaltsverzeichnis

Literaturliste

Literaturempfehlung

1. *Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen*
   E. Cramer und J. Neslehova, Springer, 2012
   Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

2. *Brückenkurs Mathematik - für Studieneinsteiger aller Disziplinen*
   Walz, Zeilfelder und Rießinger, Spektrum Akad. Verlag, Springer, 2007.

3. *Wirtschaftsmathematik (Bachelor geeignet)* von Kirsch und Führer, Kiehl, 2014.

4. *Übungsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* von Wendler und Tippe, Springer, 2013.

5. YouTube Channels (Beispiel: Mathematik auf YouTube, u.v.m.)

Differentialrechnung

Anwendungsgebiete der Differentialrechnung sind:

- Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen ✓
- Lösung von Extremalwertaufgaben ✓
- “Klassische” Optimierung
- Differentialgleichungen

Die Ableitung

Die **Ableitung** einer Funktion $f(x)$ bezeichnet man durch $f'(x)$.

Die Ableitung $f'(x)$ entspricht der **Änderungsrate** [ANSCHAULICH: **Steigung**] der ursprünglichen Funktion $f(x)$.[1]

Die folgenden Schreibweisen für die Ableitung einer Funktion $f(x)$ sind gleichwertig:

$$f'(x) \quad \equiv \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \quad \equiv \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \equiv \quad \dot{f}(x)$$

[1] An einer Stelle x beschreibt die Änderungsrate die Veränderung der Funktionswerte für (sehr) kleine Änderungen in den x-Werten.

Betrachten wir die Änderungsrate genauer:

i) Es sei $f(x)$ eine stetige und reellwertige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ii) Für eine beliebige Stelle x ist der zugehöhrige Funktionswert $f(x)$

iii) Eine (kleine) Änderung Δx des x-Wertes bedingt $x + \Delta x$

iv) Der Funktionswert ändert sich entsprechend zu $f(x + \Delta x)$

v) Die Rate, mit der sich $f(x)$ mit der Änderung Δx verändert, ist

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

vi) Man betrachtet nun den Grenzübergang zu "sehr" infinitisimal kleinen Änderungen $\Delta x \to 0$, so ergibt sich die Änderungsrate an der Stelle x zu

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differentialquotient

Der **Differentialquotient** (oder die **Ableitung**) von $f(x)$ nach der Variablen x lautet

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

(In der Praxis existieren Ableitungsregeln, die das Rechen erleichtern.)

Die Tangente an den Graphen von f

Diejenige Gerade $g(x) = kx + d$, die durch den Punkt $(x|f(x))$ verläuft und die Steigung $k = f'(x)$ besitzt, ist die **Tangente** an den Funktionsgraphen von f an der Stelle x.

Die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen von f ist also an der Stelle x durch die **Ableitung von** f bestimmt. Man nennt $f'(x)$ auch **den Anstieg** der Funktion f an der Stelle x.

Veranschaulichung:
Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ mit Hilfe des Differentialquotienten und bestimme die Steigung von $f(x)$ an der Stelle $x = 2$.

Die zweite Ableitung

Die **zweite** Ableitung einer Funktion $f(x)$, ist ganz einfach die Ableitung von $f'(x)$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x)$$

Man schreibt ebenfalls $f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Diese Vorgehen lässt sich auf die weiteren Ableitungen der Funktion $f(x)$ übertragen.

Ableitungen n-ter Ordung

Ist eine Funktion $f(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ tatsächlich n-mal differenzierbar, so heißt ihre n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$$

die **Ableitung** n-ter Ordnung.

Die erste Ableitung $f'(x)$

Die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ entspricht an jeder Stelle x des Definitionsbereichs der Änderungsrate bzw. Steigung des Funktionsgraphen von $f(x)$. Es gilt:

- $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ hat an der Stelle x **positive Steigung**
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ hat an der Stelle x **die Steigung Null**
- $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ hat an der Stelle x **negative Steigung**

Die zweite Ableitung $f''(x)$

Die zweite Ableitung $f''(x)$ einer Funktion $f(x)$ entspricht an jeder Stelle x des Definitionsbereichs der Krümmung des Funktionsgraphen von $f(x)$. Es gilt:

- $f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ hat an der Stelle x **links gekrümmt**
- $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ ist an der Stelle x **nicht gekrümmt**
- $f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)$ hat an der Stelle x **rechts gekrümmt**

Aus dem Beispiel der Berechnung des Differentialquotienten von $f(x) = x^3$, lässt sich eine einfache Regel für die Berechnung der Ableitung von Potenzfunktionen herleiten:

Ableitung von Potenzfunktionen

Die Ableitung $f'(x)$ der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$ ist

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

[Definitionsbereich entsprechen Exponent.]

Man beachte:
Für die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'(x) = 0$$

Ableitungsregeln

- Zur Berechnung der Ableitung von komplizierteren Funktionen gelten für zusammengesetzte Funktionen u.a. die Regeln:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

- Damit können nun Summen und Vielfache von Potenzfunktionen leicht abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 15x - 32 \\ \Rightarrow \quad f'(x) &= 4 \cdot 4 \cdot x^3 - 2 \cdot 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2 \cdot x^1 + 15 \cdot 1 \cdot x^0 \\ &= 16x^3 - 6x^2 - 6x + 15 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Ableitung von Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen existieren weitere Regeln!

Produktregel

Sind die Funktionen f und g an einer Stelle x differenzierbar, so ist auch $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Beispiele:
Differenzieren Sie die Funktion $h(x) = (x^2 + 2x)(x^3 - 1)$

(Bei Polynomfunktionen ist das Ausmultiplizieren oftmals schneller.)

ABER zum Beispiel hilfreich beim Differenzieren von $h(x) = (3x + \sin x)\sqrt{x}$.

! Übung: Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = (2x - 2)(5x^3 - 1)(3x^{-1} - x)$$

und von

$$f(x) = \left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)\left(-x^2 + \frac{5}{x}\right).$$

Ableitungsregeln

Quotientenregel

Sind die Funktionen f und g an einer Stelle x differenzierbar, so ist auch $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Beispiele:

Differenzieren Sie die Funktion $\quad h(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2+3}.$

! Übung: Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x}{x^4 + 3x^2 + x + 15}.$$

Ableitungsregeln

Kettenregel

Sind die Funktionen f an einer Stelle $g(x)$ und die Funktion g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch $f(g)$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$$

Beispiele:

Differenzieren Sie die Funktion $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ oder $f(x) = (-2)(-x^2 - 1)^3$.

! Übung: Bestimmen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \ln(3x^3)$$

und von

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} \cos(5x).$$

spezielle Ableitungen

Ableitung der Exponentialfunktion

- Die Funktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:
$$\exp(x)' = \exp(x) \quad \text{bzw.} \quad \left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$$

Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion

- Die Funktion $\ln(x) = \log_e(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}_+$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:
$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$

Komplexere Funktionen wie
$$e^{x^2-1} \quad \text{oder} \quad \ln(\sqrt{2x})$$
können durch Anwenden der Ableitungsregeln differenziert werden. (Übung!)

Ableitungen der Winkelfunktionen

- Die Funktion $\sin(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:

$$\sin(x)' = \cos(x)$$

- Die Funktion $\cos(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:

$$\cos(x)' = -\sin(x)$$

- Die Funktion $\tan(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi\}$ differenzierbar; ihre Ableitung lautet:

$$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Übung:
Finden Sie eine andere Darstellung der Ableitung das Tangens $\tan(x)$ und bestimmen Sie die Ableitung des Cotangens $\cot(x)$.

Bestimmung der Eigenschaften von reellen Funktionen

I. **Charakterisierung** der **lokalen Extremstellen** (Minimal-, Maximalstellen)

Wozu ist das hilfreich?

Beispiel 1: Berechne den maximalen Umsatz für eine Erlösfunktion

$$E(x) = -x^2 + 4x - 5$$

$\hookrightarrow$ Für welche Stückzahl x ist $E(x)$ maximal?

Beispiel 2: Berechne das Betriebsoptimium für die Stückkostenfunktion

$$k(x) = x^2 - 6x + 13 + \frac{100}{x}$$

$\hookrightarrow$ Für welche Stückzahl x ist die Funktion $k(x)$ minimal?

II. **Charakterisierung** der **Wendestellen**

Wozu ist das hilfreich?

Beispiel 3: Berechne die “Kostenkehre” einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

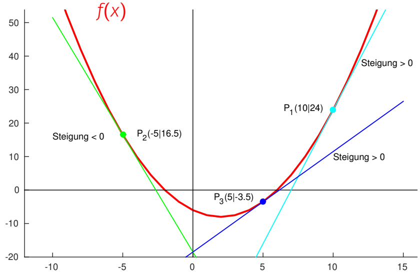
$$K : [0, 9] \to \mathbb{R}, \qquad K(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 100$$

$\hookrightarrow$ An welcher Stelle x liegt der Wendepunkt von degressivem zu progressivem Wachstum?

Lokalen Extremstellen:

Man betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$.

Dieses $f(x)$ hat offensichtlich eine Minimalstelle $\hat{x}$.



Wie ist dieses $\hat{x}$ zu berechnen?

- Betrachte die Tangenten an den Funktionsgraphen $f(x)$ an verschiedenen Stellen x.
- Die Tangente an der Stelle $x = 10$ hat positive Steigung.
- Die Tangente an der Stelle $x = -5$ hat **negative Steigung**.
- Die Tangente an der Stelle $x = +5$ hat wieder positive Steigung.
- Die **Minimalstelle** liegt genau an der Stelle des **Wechsels von negativer zu positiver Steigung**!

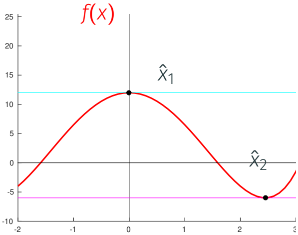
FOLGLICH: In der Minimalstelle hat die Tangente die Steigung NULL!

Schlußfolgerung

Ist die Steigung der Tangente von $f(x)$ an einer Stelle $\hat{x}$ gleich NULL, ist diese Stelle $\hat{x}$ **ein Kandidat** für eine **lokale Extremstelle**, d.h. eine lokale Minimal- oder Maximalstelle, der Funktion $f(x)$.

Die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen von f stimmt an jeder Stelle x mit dem Wert der Änderungsrate $f'(x)$ überein. Lokale Extremstellen müssen also **notwendigerweise** folgende **Bedingung** erfüllen:

$$\hat{x} \text{ ist lokale Extremstelle von } f(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(\hat{x}) = 0$$



Eine Funktion $f(x)$ kann gleichzeitig mehrere Extremstellen besitzen.

Maximalstelle $\hat{x}_1$ im Punkt

$$P_{\max}\left(\hat{x}_1 | f(\hat{x}_1)\right)$$

Minimalstelle $\hat{x}_2$ im Punkt

$$P_{\min}\left(\hat{x}_2 | f(\hat{x}_2)\right)$$

Wie lassen sich die Extremstellen nun eindeutig identifizieren?

Charakterisierung von lokalen Extremstellen

Kandidaten für lokale Extremstellen von $f(x)$ liegen an jenen Stellen x, an denen die erste Ableitung (also der Anstieg der Funktion) gleich **NULL** ist.

Notwendige Bedingung

Kandidaten $\hat{x}$ für lokale Extremstellen einer Funktion $f(x)$ erfüllen die notwendige Bedingung:

$$f'(\hat{x}) = 0$$

↪ Dazu berechnet man die Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$!

↪ **Ob es sich bei den Kandidaten $\hat{x}$ tatsächlich um Extremstellen handelt, muss mittels der zweiten Ableitung überprüft werden!**

Hinreichende Bedingung

Eine Stelle $\hat{x}$ mit $f'(\hat{x}) = 0$ ist eine **Extremstelle** von $f(x)$, falls für die **zweite Ableitung** $f''(x)$ gilt:

$$f''(\hat{x}) \neq 0$$

Der Graph von $f(x)$ muss in einer lokalen Extremstelle also LINKS oder RECHTS gekrümmt sein.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f'(\hat{x}) = 0 \quad \text{und} \quad f''(\hat{x}) > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \hat{x} \text{ ist Minimalstelle von f(x)} \\ f'(\hat{x}) = 0 \quad \text{und} \quad f''(\hat{x}) < 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \hat{x} \text{ ist Maximalstelle von f(x)} \end{aligned}$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen nach der Variablen x:
Berechnen Sie für (a) bis (c) ebenfalls die zweite Ableitung!

(a) $f(x) = -4x^{-5}$

(b) $f(x) = (a+5)x^4, \quad a \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = -x^{3c+1}, \quad c \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 15}{x^3 + x^2 + x + 1}$

(e) $f(x) = \tan(3x^3)$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x^2)$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Wendestellen der Funktionen und berechnen Sie zugehörigen Hoch- und Tiefpunkte des Funktionsgraphen von $f(x)$.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

(b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

Differentialrechnung – Übungsaufgaben

Weitere Übungsaufgaben und zugehörige Lösungen finden Sie zum Beispiel hier:

- **Vorkurs Mathematik** von E. Cramer & J. Neslehova, Springer, 2012
  Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

  Kapitel 10.5 – Aufgaben 10.3 bis 10.5, Aufgabe 10.8
  Kapitel 12.6 – Aufgabe 12.1

Anwendung – Kurvendiskussion

Eine **Kurvendiskussion** dient der Beschreibung der Eigenschaften einer in analytischer Form bekannten Funktion $f(x)$. Dazu werden die folgenden Schritte durchgeführt:

1) Definitionsmenge
2) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
3) Symmetrieverhalten

   $f(-x) = f(x)$ Achsensymmetrie bzgl. y-Achse
   $f(-x) = -f(x)$ Punktsymmetrie bzgl. Ursprung

4) Monotonie und Extremwerte
5) Krümmung und Wendepunkte
6) Verhalten im Unendlichen

   Wie verläuft die Funtion für **sehr kleine/große** Input-Werte?
   MATHEMATISCH: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = ?$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$

7) Wertebereich und Graph skizzieren

Demonstration anhand des Beispiels: (separates Video)

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}$$

Eine weitere Anwendung der Differentialrechnung sind Extremalwertaufgaben:

Beispiel

Ein Bauer bestzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

Schritt 1 Identifikation der Hauptbedingung (HB)

- Die HB wird wurch die Größe festgelegt, welche ein Minimum oder Maximum annehmen soll.
  in unserem Bsp.: der Flächeninhalt $A = a \cdot b$
- Die HB enthält meist mehrere Variablen, zwischen denen ein Zusammenhang (Nebenbedingung) besteht.

! Enthält die HB nur eine Variable, so wird keine Nebenbedingung benötigt.

Schritt 2 Aufstellen der Nebenbedingung (NB)

- Die NB beschreibt einen Zusammenhang der Variablen.
  in unserem Bsp.: der Umfang der Fläche ist 100m $100 = 2a + 2b$
- Durch Einsetzten der NB in die HB wird die Variablenanzahl reduziert.

Beispiel

Ein Bauer bestzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

Schritt 1 Hauptbedingung (HB)

$$A = a \cdot b$$

Schritt 2 Aufstellen der Nebenbedingung (NB)

$$100 = 2a + 2b$$

Schritt 3 explizite Nebenbedingung — Umstellen nach einer Variable [hier: a]

$$a = 50 - b$$

Schritt 4 Einsetzen der NB in die HB

$$A = (50 - b) \cdot b = 50b - b^2$$

Die Hauptbedingung wird dadurch zu einer Funktion in nur einer Variable b , deren Extremwerte mittels Differentialrechnung bestimmt werden können.

$$A(b) = 50b - b^2$$

Anwendung – Extremalwertaufgaben

Beispiel

Ein Bauer bestzt 100m Draht und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz umzäunen. Wie groß müssen die Seitenlängen gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

Schritt 5 Ableitungen bestimmen und notwendige & hinreichende Bedingung für Extremstellen nutzen

$$A'(b) = 50 - 2b$$

$$A''(b) - 2(\text{konstant kleiner Null})$$

notwendige Bedingung: $A'(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 25$

hinreichende Bedingung: $A''(25) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximalstelle}$

Schritt 6 Um als Lösung in frage zu kommen, muss der Wert der Variable **zulässig** sein. (z.B. nicht negativ, im Fall von Längen, etc.)

$$b = 25$$

Schritt 7 Die andere Variable folgt dann durch Einsetzen von b in die explizite NB.

$$a = 50 - \underbrace{25}_{=b} = 25$$

Übungen – Extremalwertaufgaben

A1 An einer Mauer soll ein rechteckiger Garten abgegrenzt werden, dessen Flächeninhalt möglichst groß sein soll. Zur Abgrenzung sind insgesamt 48m Zaun verfügbar. Berechne die Abmessungen und den maximalen Flächeninhalt.

A2 Bestimmen sie zwei nicht negative Zahlen a und b, deren Summe gleich 50 ist, so dass ab^2 maximal ist!

A3 Ein Zeitungsverlag will seinen Gewinn dadurch erhöhen, dass er seine Abonenntenzahl steigert. Der Kundenstamm besteht aus 2000 Abonennten. Der Verlag verdient mit jedem Kunden €50 pro Jahr. Marktuntersuchungen besagen, dass bei jeder Preissenkung um €1 pro Abonnement jeweils 100 Kunden dazu gewonnen werden.
Wie lautet der mathematische Ausdruck für den Gewinn $G(x)$ in Abhängigkeit von der Preissenkung x?
Für welche Preissenkung wird der Gewinn des Verlags extremal? Wie hoch ist der Gewinn in der Extremstelle? Handelt es sich um ein Minimum oder Maximum?

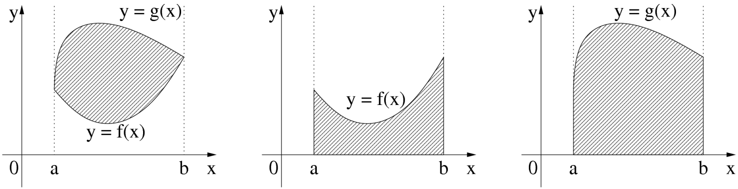
A4 Ein Fenster soll die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetzem Halbkreis erhalten. Der Gesamtumfang des Fensters ist $U = 500cm$. Ermitteln Sie Breite und Höhe des Fensters so, dass der Flächeninhalt maximal ist!

Integralrechnung

Integralrechnung

- Ein Ziel der Integralrechnung ist die **Berechnung von Flächeninhalten** krummlinig begrenzter Bereiche der Ebene.

  $\hookrightarrow$ Bestimmtes Integral



- Andererseits stellt die Integralrechnung die **Gegenoperation zur Differentialrechung** dar.

  $\hookrightarrow$ Unbestimmtes Integral, Stammfunktionen

Stammfunktion

Ist f eine reelle Funktion, dann heißt eine reelle Funktion F Stammfunktion von f, wenn gilt:

$$F' = f$$

Dazu müssen die Funktionen F und f die gleich Definitionsmenge besitzen.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

Addition einer Konstanten

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f.

und

Addition von Stammfunktionen und Multiplikation mit einer Zahl

Sind F und G Stammfunktionen von f und g, dann ist sowohl $F + G$ Stammfunktion von $f + g$ als auch $k \cdot F$ Stammfunktion von $k \cdot f$ ($k \in \mathbb{R}$).

Ist für die Stammfunktion ein Wertepaar $(x|F(x))$ gegeben, so kann sie eindeutig bestimmt werden.

Beispiel: Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = x^2 - 5$, für die $F(1) = 2$ ist!

Die allgemeine Stammfunktion von f(x) lautet:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + c \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Denn die Ableitung von $F(x)$ ergibt für alle $c \in \mathbb{R}$ wieder die Funktion $f(x)$.

Da $F(1) = 2$ gelten soll, lässt sich c berechnen:

$$F(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 5 \cdot 1 + c$$

$$2 = \frac{1}{3} - 5 + c$$

$$c = \frac{20}{3}$$

Somit lautet die gesuchte Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + \frac{20}{3}$.

Unter- und Obersummen

Die Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren hat die Wissenschaft seit dem Altertum beschäftigt.

$\hookrightarrow$ Für krummlinige Figuren wurden oft nur Näherungsformeln gefunden.

Veranschaulichung der Idee zur allgemeinen Flächenberechnungen:

- Versucht man den Flächeninhalt zu berechnen, den eine Funktion f in einem Intervall $[a; b]$ mit der x-Achse einschließt,

  $\hookrightarrow$ so kann das Intervall in Teilintervalle zerlegt werden.
  $\hookrightarrow$ Über diesen Teilintervallen werden dann Rechtecke errichtet.
  $\hookrightarrow$ Die Flächeninhalte der Rechtecke lassen sich leicht berechnen.
  $\hookrightarrow$ Die Summe der Flächeninhalte ist Annäherung für den gesuchten Flächeninhalt.

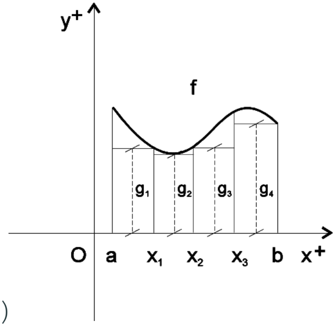
- Es gibt mehrere Möglichkeiten für Rechtecke über den Teilintervallen:

  i) Errichten von Rechtecken kleinster Höhe, sodass das Rechteck unter der Funktion im Intervall I_k eingeschrieben ist.
  Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei g_k.

  ii) Errichten von Rechtecken größter Höhe, sodass das Rechteck die Funktion im Intervall I_k umfasst.
  Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei G_k.

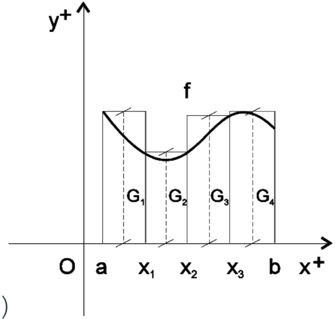
Unter- und Obersummen

Untersumme



(i)

Obersumme



(ii)

i) Errichten von Rechtecken kleinster Höhe, sodass das Rechteck unter der Funktion im Intervall I_k eingeschrieben ist.

Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei g_k.

ii) Errichten von Rechtecken größter Höhe, sodass das Rechteck die Funktion im Intervall I_k umfasst.

Die Höhe eines solchen Rechtecks im Intervall I_k sei G_k.

Durch Summation der einzelnen Rechtecksflächeninhalte erhält man die zur Zerlegung gehörige Untersumme und die Obersumme des Flächeninhalts der Funktion f im Gesamtinterval.

Integraldefinition

Für eine “unendlich” feine Zerlegung des Gesamtintervalls **stimmt die Untersumme des Flächeninhalts genau mit der Obersumme** des Flächeninhalts überein.

Den zugehöhrigen Zahlenwert nennt man das Integral der Funktion f über dem Interval $[a, b]$.

Schreibweise:

$$\int_a^b f \qquad \text{bzw.} \qquad \int_a^b f(x)dx$$

Man liest

- $\int_a^b f$: “Integral von a bis b über f”
- $\int_a^b f(x)dx$: ”Integral von a bis b über $f(x)$ nach dx“

Das **Integral von a bis b über $f(x)$ nach dx**

$$\int_a^b f(x)dx$$

Symbol	Bezeichnung
dx	Schreibweise, kennzeichnet die Integrationsvariable x
a und b	Integrationsgrenzen
$f(x)$	Integrand

Eigenschaften des Integrals

Über dem Interval $[a, b]$ mit $a < b$ gilt:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

RECHTS: Vertauschen der integrationsgrenzen dreht das Vorzeichen um.

Es gelten die folgenden

Rechenregeln für Integrale

Sind f und g über $[a, b]$ mit $a < b$ integrierbar, so ist:

I.) $$\int_a^b \lambda \cdot f = \lambda \cdot \int_a^b f, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

II.) $$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \text{und}$$

III.) $$\int_a^b \lambda \cdot f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ mit } a < c < b$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist die Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig, so ist ihre Integralfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy$$

an jeder Stelle $x \in [a, b]$ differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Die Ableitungsfunktion von F ist also: $F' = f$.

Folgerung

Ist F eine Stammfunktion von f im Intervall $[a, b]$, so kann das Integral von a nach b über f aus der Differenz der Stammfunktionswerte berechnet werden:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Hier gilt: $"F(\text{'oberere Grenze'})$ minus $F(\text{'untere Grenze'})$“

Schreibweisen:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel: Ermitteln Sie das Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ im Intervall $[0, 1]$.

Ermitteln einer Stammfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 + x \qquad \text{hier: } c = 0 \in \mathbb{R} \qquad [\text{bestimmtes Integral!}]$$

Denn die Ableitung von $F(x)$ ergibt $F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^0 = f(x)$.

Anwendung des Hauptsatzes ergibt schließlich:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= [F(x)]_0^1 \\ &= [\frac{1}{6}x^3 + x]_0^1 \\ &= (\frac{1}{6}1^3 + 1) - (\frac{1}{6}0^3 + 0) = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral

Ist f eine stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f, so heißt ein Element der Menge $\{F - c\}$ ein **unbestimmtes Integral** von f:

$$\int f = \int f(x)dx = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

- Die Stammfunktion einer Funktion f lässt sich nur **bis auf eine additive Konstante** c bestimmen
- Ist F Stammfunktion von f, so auch jede andere Funktion $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$
- Ein Element aus dieser Menge von Stammfunktionen $\{F - c\}$ bezeichnet man als **unbestimmtes Integral** Schreibweise: OHNE Integrationsgrenzen

→ Das Ermitteln der Stammfunktion einer Funktion f bezeichnet man daher als **unbestimmte Integration**

→ Entsprechend nennt man das Integral $\int_a^b f$ auch das **bestimmte** Integral von f Schreibweise: MIT Integrationsgrenzen a und b

- Man kann die Berechnung der Stammfunktion als Umkehrung des Differenzierens auffassen.
- Für einfache Potenzfunktionen lässt sich so schnell das unbestimmte Integral finden:

Integration von Potenzfunktionen

Eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$ ist die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

für $n \in \mathbb{Q} \setminus -1$. [Definitionsbereich entsprechen Exponent.]

Mit dieser Formel und den obigen Regeln lassen sich Polynome und Potenzfunktionen integrieren.

Beispiele:

a) $f(x) = 3x^4$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x^5}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$

d) $p(x) = \dfrac{2}{5}x^3 + 3x^2 - 6x + 12$

Wichtige Stammfunktionen

spezielle Stammfunktionen

Die Funktion

$$f(x) = x^n \quad \text{hat die Stammfunktion} \quad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (\text{für } n \neq -1)$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{hat die Stammfunktion} \quad F(x) = -\cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \text{hat die Stammfunktion} \quad F(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{hat die Stammfunktion} \quad F(x) = \mathrm{e}^x$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{hat die Stammfunktion} \quad F(x) = \ln(x)$$

Zur Probe zeige man: $F'(x) = f(x)$

Wie bei der Differentialrechnung existieren auch zur Ermittlung der Stammfunktion von komplizierteren (zusammengesetzten) Funktionen entsprechende Methoden.

Zwei dieser Verfahren werden wir im Folgenden kennenlernen:

partielle Integration und Substitutionsmethode

Aus der Produktregel für Ableitungen $(f+g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ lässt sich durch Integration folgende Formel herleiten:

partielle Integration

Sind die Funktionen f, g differenzierbar und sind f', g' stetig, so gilt:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

- ermöglicht es das Integral $f \cdot g'$ zu berechnen, falls $\int f' \cdot g$ bekannt ist
- bietet sich an, wenn der Integrand das Produkt zweier "einfacherer" Funktionen ist
- BEACHTE: Die Wahl der Faktoren des Integranden, welche mit f bzw. mit g' angesetzt werden, ist essentiell für die Berechnung.

Beispiel: Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

(a) $\int x \cdot e^x dx$
(b) $\int \ln(x) dx$
(c) $\int \sin^2(x) dx$

Aus der Kettenregel für Ableitungen $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ lässt sich durch Integration folgendes Gesetz herleiten:

Substitutionsmethode

Sind die Funktionen f über $[a, b]$, g über $[\alpha, \beta]$ stetig und differenzierbar mit $a = g(\alpha)$ und $b = g(\beta)$, so gilt:

$$\int_a^b f(y)dy = \int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

- ermöglicht es einen komplizierten Integranden durch **Ersetzen (Substitution)** eines inneren Teils zu vereinfachen.
- bietet sich an, wenn ein **Faktor im Integranden der inneren Ableitung des anderen Faktors** entspricht
- BEACHTE: Die Berechnung eines unbestimmten Integrals mittels Substitution erfordert ggf. als letzten Schritt eine sog. Resubstitution (Rücksubstitution)

Beispiel: Berechne die Integrale

(a) $\int \sqrt{x+1}dx$
(b) $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)dx$
(c) $\int_2^3 \frac{1}{3x-5}dx$

Die Berechnung von Flächen- und Volumeninhalten stellt einen wesentlichen Anwendungsbereich der Integralrechnung dar.

Flächenberechnung

Es sei f eine über $[a, b]$ $(a < b)$ integrierbare Funktion und **G** das Flächenstück, das vom Funktionsgraphen und der x-Achse zwischen a und b begrenzt wird.

- Gilt $f(x) \geq 0$ **für alle** $x \in [a, b]$,
  so ist der Flächeninhalt $A(\mathrm{G})$ der Fläche **G** gegeben durch:

$$A(\mathrm{G}) = \int_a^b f$$

- Gilt $f(x) \leq 0$ **für alle** $x \in [a, b]$,
  so ist der Flächeninhalt $A(\mathrm{G})$ der Fläche **G** gegeben durch:

$$A(\mathrm{G}) = \left| \int_a^b f \right|$$

Folgerung:

- Flächen, die **komplett oberhalb der x-Achse** liegen, wird ein **positiver** Zahlenwert (Flächeninhalt) zugeordnet
- Flächen, die **komplett unterhalb der x-Achse** liegen, wird ein **negativer** Zahlenwert (Flächeninhalt) zugeordnet

$\Rightarrow$ Flächen, die **sowohl ober- als auch unterhalb** der x-Achse liegen, können **NICHT** direkt durch Integration von linker Intervallseite zur rechten Intervallgrenze berechnet werden!

Abhilfe bietet eine **Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle** über denen die Funktion $f(x)$ jeweils komplett unter- bzw. oberhalb der x-Achse liegt.

Flächenberechnung

Die Teilintervallgrenzen ergeben sich durch die Nullstellen von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

Damit gilt für den Gesamtflächeninhalt im Intervall $[a, b]$:

$$A(\mathrm{G}) = \left|\int_a^{x_1} f\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| + \cdots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f\right| + \left|\int_{x_n}^{b} f\right|$$

mit $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0.$ $[x_i \in [a, b] \; \forall i = 1, \ldots, n]$

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion $f(x) = x^2 - 4$ und der x-Achse über dem Interval $[-1, 3]$.

Das obige Verfahren lässt sich leicht zur Berechnung des Flächeninhalts eines von zwei Funktionen begrenzten Flächenstücks G erweitern.

Flächenberechnung

Es seien f und g zwei über $[a, b]$ $(a < b)$ integrierbare Funktion mit $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ und G das Flächenstück, das von beiden Funktionsgraphen begrenzt wird. Dann gilt:

$$A(\mathrm{G}) = \int_a^b (f - g)$$

- Die Formel ergibt sich aus der Berechnung der einzelnen Flächeninhalte $A_1 = \int_a^b f$ und $A_2 = \int_a^b g$ zwischen den Funktionsgraphen von f bzw. g und der x-Achse im Intervall $[a, b]$.
- Wegen $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ gilt:

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f - g)$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ und $g(x) = x + 1$ über dem Interval $[-4, 6]$.

Man beachte auch folgende Aufgabenstellung:

- Bei Flächenberechnungen ist man oft nur an jenem Flächenstück interessiert, welches von einer Funktion und der x-Achse bzw. zwischen zwei Funktionen begrenzt wird.
- Das Flächenstück muss dann nicht zusätzlich durch ein Intervall begrenzt werden!
- Die **Integrationsgrenzen** erhält man als
  - Schnittstellen der Funktion mit der x-Achse (Nullstellen der Funktion) bzw.
  - Schnittstellen der zwei Funktionen (Nullstellen der Differenzfunktion)

Übungsaufgaben

Berechnen Sie

A1) die Stammfunktionen zu $f(x) = 4x^3 + 2x - 1$. (Probe durch Ableiten!)

A2) die Stammfunktionen zu $f(x) = \dfrac{2 - x - x^2}{\sqrt{x}}$.

A3) das bestimmte Integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x} \mathrm{d}x$.

A4) das unbestimmte Integral $\int x^2 \sin(x) \mathrm{d}x$.

A5) das unbestimmte Integral $\int \mathrm{e}^x \sin(x) \mathrm{d}x$.

A6) das unbestimmte Integral $\int (5x - 3)^7 \, \mathrm{d}x$.

A7) das unbestimmte Integral $\int \sin(3x) \mathrm{d}x$.

Übungsaufgaben

Berechnen Sie

A8) den Flächeninhalt der von der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ und der x-Achse im Intervall $[-2; 4]$ eingeschlossen wird.

A9) den Flächeninhalt der von den Funktionen $f(x) = x + 5$ und $g(x) = x^2 - 1$ und dem Intervall $[-2; 3]$ begrenzt wird.

A10) den Flächeninhalt der von den Funktionen $f(x) = \sqrt{6x}$ und $g(x) = x + 1$ eingeschlossen wird.

Weitere Übungsaufgaben und zugehörige Lösungen finden Sie zum Beispiel hier:

- **Vorkurs Mathematik** von E. Cramer & J. Neslehova, Springer, 2012
  Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

  Kapitel 11.5 – Aufgaben 11.1 bis 11.7, Aufgabe 11.15