Repetitorium Mathematik

Teil 4

Dr. Michael Hellwig

August 2023

Universität Liechtenstein

Bachelorstudiengang Betriebswirtschaftslehre

Inhaltsverzeichnis

Literaturliste

Literaturempfehlung

1. *Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen*
   E. Cramer und J. Neslehova, Springer, 2012
   Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

2. *Brückenkurs Mathematik - für Studieneinsteiger aller Disziplinen*
   Walz, Zeilfelder und Rießinger, Spektrum Akad. Verlag, Springer, 2007.

3. *Wirtschaftsmathematik (Bachelor geeignet)* von Kirsch und Führer, Kiehl, 2014.

4. *Übungsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* von Wendler und Tippe, Springer, 2013.

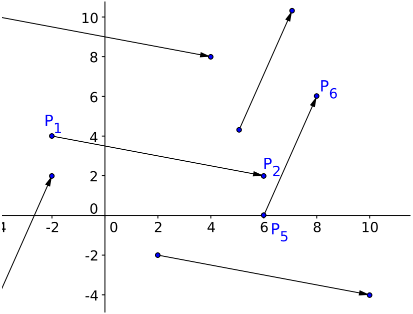
5. YouTube Channels (Beispiel: Mathematik auf YouTube, u.v.m.)

Einführung in die Vektorrechnung

Vektoren

Im Koordinatensystem

- ist die Verschiebung eines Punkt P_1 in eine andere Lage P_2 **eindeutig** durch Anfangs- und Endpunkt beschrieben.
- kann das zur Verschiebung gehörende (gerichtete) Streckenstück **durch einen Pfeil** $\overrightarrow{P_1P_2}$ **dargestellt** werden.
- sind Pfeile, welche die gleiche Verschiebung beschreiben gleichlang, zueinander parallel und gleich orientiert.



Vektoren

Eine Klasse gleich langer, paralleler und gleich orientierter Pfeile eines Raumes $\mathbb{R}^n \quad (n = 2, 3, \ldots)$ heißt Vektor des Raumes.

Ein **Vektor** wird durch alle zu einem gegebenen Pfeil PARALLELGLEICHEN Pfeile beschrieben.

Vektoren werden meist durch Kleinbuchstaben mit Pfeilsymbol dargestellt, z.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \ldots$

Im Folgenden: **Beschränkung auf 2- bzw. 3-dimensionale reelle Vektorräume**

Vektoren

Wählt man im Raum einen **festen Referenzpunkt** $\vec{O}$ (meist den Ursprung), so

- ist jeder Punkt P des Raumes eindeutig durch den Vektor $\overrightarrow{OQ}$ festgelegt.

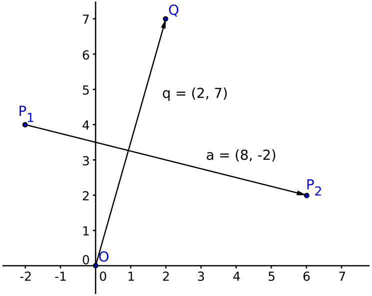
- heißt ein solcher Vektor $\overrightarrow{OQ}$ vom Ursprung zu einem Punkt Q der **Ortsvektor von** Q.

- lässt sich die Verschiebung von $P_1 = (x_1|y_1)$ zu $P_2 = (x_2|y_2)$ als Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ darstellen.

  Die Koordinaten von $\vec{a}$ entsprechen der **Differenz der Punktkoordinaten**

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

<u>Merkregel:</u> **"Spitze minus Schaft"**

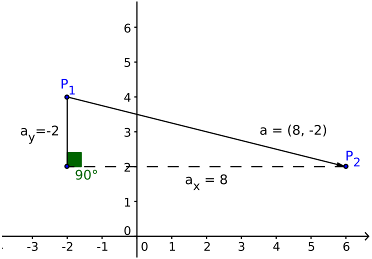


BEACHTE: Die Koordinaten eines Ortsektors sind folglich die Koordinaten seiner Spitze.

Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ (bzw. den Abstand des Anfangspunkts P_1 und des Endpunkts P_2) bezeichnet man auch als Betrag des Vektors $|\vec{a}|$. Es gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



Ergänzt man eine weitere Koordinate a_z, so lässt sich die obigen Definition auf den **dreidimensionalen Raum** übertragen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Allgemein gilt sogar:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Rechenregeln für Vektoren

Addition von Vektoren

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die jeweiligen Koordinaten addiert oder subtrahiert.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$$

[Gilt analog im 3- bzw. n-dimensionalen Räumen.]

Grafisch entspricht dies einer hintereinander ausgeführten Verschiebung um $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $-\vec{b}$!

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird mit einer Zahl $t \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem man die jeweiligen Koordinaten mit $t \in \mathbb{R}$ multipliziert.

$$t \cdot \vec{a} = t \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a_x \\ t \cdot a_y \end{pmatrix}$$

[Gilt analog im 3- bzw. n-dimensionalen Räumen.]

Grafisch entspricht dies einer t-mal wiederholten Verschiebung.

Beispiel:

Gegeben seien die drei Vektoren des $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

(b) Berechnen Sie Summe und Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(c) Berechnen Sie die Vektoren $-5\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{b}$ und $\sqrt{2}\vec{c}$.

(d) Welcher Verschiebung entspricht $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$?

spezielle Vektoren

Nullvektor

Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor**.

Er ist das neutrale Element bezüglich der Addition von Vektoren.

[Bewirkt keine Veränderung.]

Einheitsvektor

Ein Vektor $\vec{e}$ mit Betrag $|\vec{e}| = 1$ heißt **Einheitsvektor**.

Zu einem beliebigen Vektor $\vec{a}$ erhält man den zugehörigen Einheitsvektor $\vec{a}_e$, indem man $\vec{a}$ (komponentenweise) durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{a}_e = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Übung: Berechnen Sie den zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gehörenden Einheitsvektoren.

Basisvektoren

Die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{2-dimensionalen Raum}$$

bzw.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{3-dimensionalen Raum}$$

heißen Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems.

Linearkombination

Ein Vektor $\vec{b}$ der Form

$$\vec{b} = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots t_k\vec{a}_k \qquad \text{mit } t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$$

heißt Linearkombination der k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

MERKE:

Jeder Vektor des $\mathbb{R}^n$ lässt sich als Linearkombination der zugehörigen Basisvektoren darstellen.

Übung: Stellen Sie den Vektor der Verschiebung von $P_1(2|1|-1)$ zu $P_2(6|-3|2)$ als Linearkombination der Basisvektoren dar.

Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ heit **linear abhängig**, wenn sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Zum Beispiel: $\vec{a}_1 = \sum_{j=2}^{k} t_j \vec{a}_j \qquad t_j \in \mathbb{R}$

Alternativ: Lässt sich dagegen der Nullvektor als nichttriviale (mit Koeffizienten $t_j \neq 0$) Linearkombination der Vektoren erzeugen, dann sind diese Vektoren **linear abhängig**.

Sind Vektoren **nicht linear abhängig**, so heißen sie **linear unabhängig**.

Übung:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$(a) \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Vektoren

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt (auch: **inneres Produkt**) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist im 2-dimensionalen Raum definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

bzw. im 3-dimensionalen Raum als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten die folgende Zusammenhänge:

- Das Skalarprodukt liefert eine reelle Zahl als Ergebnis (einen sog. **Skalar**).
- Für das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \qquad [\text{Übung}]$$

- Mit den vektoriellen Projektionen $\vec{s}_a$ und $\vec{s}_b$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{s}_b = \vec{s}_a \cdot \vec{b}.$$

- **Was versteht man unter den vektoriellen Projektionen $\vec{s}_a$ und $\vec{s}_b$?**

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$

- **Was versteht man unter der vektoriellen Projektion $\vec{s}_b$?**

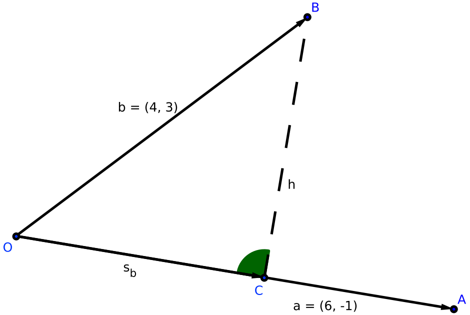
  Die **vektorielle Projektion** eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ ist der Vektor $\vec{s}_b$, der parallel zu $\vec{a}$ ist und dessen Länge durch die senkrechte (orthogonale) Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ gegeben ist.

- Es gilt folgernder Zusammenhang:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{s}_b| = |\vec{s}_a| \cdot |\vec{b}|$$

bzw.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{b}\cdot| \cos(\alpha)}_{|\vec{s}_b|}$$



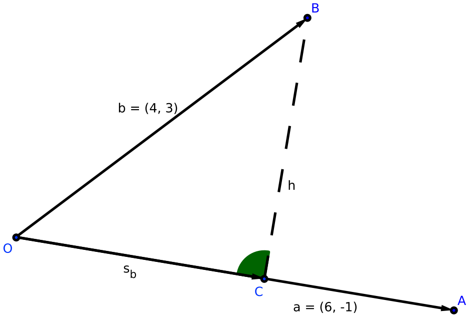
[Hier entspricht α dem Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.]

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$

Das Skalarprodukt ist genau dann Null, wenn

- einer der Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ der Nullvektor ist, oder
- die Länge der **vektoriellen Projektion** gleich Null ist!

  Letzteres ist aber nur der Fall, **wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen!**



Orthogonalitätsbedingung

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann gleich Null, wenn die beiden Vektoren aufeinander senkrecht (normal) stehen!

Das Kreuzprodukt

Das **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist im 3-dimensionalen Raum definiert als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten folgende Zusammenhänge:

- Das Kreuzprodukt liefert als Ergebnis wieder einen Vektor (hier: $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$).
- Für das **Kreuzprodukt paralleler Vektoren** ist der Nullvektor.
- Der **Ergebnisvektor** $\vec{c}$ steht senkrecht (normal) auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. PROBE!
- Der Flächeninhalt A des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **aufgespannten Parallelogramms** ist gleich dem Betrag des ihres Kreuzproduktes.

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Normalenvektor

Ein Vektor $\vec{n}\neg\vec{o}$, der senkrecht auf einem gegebnen Vektor $\vec{a}\neg\vec{o}$ steht, heißt **Normalenvektor zu** $\vec{a}$. Es gilt also:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0.$$

Im **2-dimensionalen Raum** existieren zu jedem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ genau zwei Normalenvektoren unterschiedlicher Orientierung, nämlich

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \qquad \textbf{und} \qquad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}.$$

Im **3-dimensionalen Raum** existieren zu jedem Vektor $\vec{a}$ unendlich viele Normalenvektoren unterschiedlicher Orientierung. Diese faßt man zur sog. **Normalebene** zusammen. Zu jedem Vektorpaar $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lassen sich aber wiederum zwei Normalenvektoren zuordnen, nämlich

$$\vec{n}_1 = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \textbf{und} \qquad \vec{n}_2 = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Rechnen mit Matrizen

Zahlen und Vektoren

Erinnerung: Vektoren sind mathematische Objekte mit geometrischer Bedeutung. Sie dienen zum Beispiel zur Beschreibung von

- Parallelverschiebungen in Ebene und Raum,
- geometischen Objekten und deren Schnitten, oder
- pysikalischen Größen (aus Richtung und Betrag).

Unabhängig davon können wir Vektoren auch als abstrakte Anordnungen von Zahlen ansehen, für die eine Reihe von Rechenoperationen wohldefiniert sind.

Betrachten wir z.B. die Addition (oder Subtraktion) von zwei Vektoren $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, sowie die Multiplikation eines Vektors $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ mit einer Zahl $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}.$$

Vereinfacht: Die Vektorschreibweise bildet also eine ökonomische Darstellungsweise von gleichen Rechenoperationen.

Motivation

Genauso können wir eine Matrix als eine **spezielle Anordnung von Zahlen** auffassen, für die gewisse Eigenschaften und Rechenoperationen definiert sind.

Die mathematische Bedeutung und der Nutzen von Matrizen werden erst in weiterführenden Abschnitten des Studiums deutlicher. Diese umfassen u.a.

- die Beschreibung von Linearen Funktionen in mehrdimensionalen Räumen,
- die Lösung von Gleichungssystemen,
- die Lösung von Ausgleichsproblmen (z.B. optimale Bestimmung ökonom. Modellparameter) oder
- die Herleitung von tirgonometischen Additionstheoremen.

Eine Matrix $\boldsymbol{M}$ ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen aus m Zeilen und n Spalten.

$$\boldsymbol{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{pmatrix}}\right\} m \text{ Zeilen}$$

- Eine solche Matrix $\boldsymbol{M}$ ist **vom Typ $m \times n$** bzw. $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- Gilt $m = n$, so heißt die Matrix $\boldsymbol{M}$ **quadratisch**.
- Die Einträge c_{ij} einer Matrix nennt man **Elemente**. Der erste Index i mit $1 \leq i \leq m$ steht für die Zeile und j mit $1 \leq j \leq n$ für die Spalte eines Elementes von $\boldsymbol{M}$.

Beispiele:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine 2×3 Matrix und $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine 3×1 Matrix (Spaltenvektor).

Nullmatrix

Eine Matrix, bei der alle Elemente 0 sind, heißt **Nullmatrix**. Nullmatrizen werden unabhängig von Zeilen- und Spaltenzahl mit $\mathbf{0}$ bezeichnet.

Bsp.: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Einheitsmatrix

Eine quadratische Matrix, bei der alle Diagonalelemente von links oben nach rechts unten gleich 1 und alle anderen Elemente 0 sind, heißt **Einheitsmatrix**. Eine solche Matrix wird ebenfalls unabhängig vom Typ mit $\boldsymbol{I}$ bezeichnet.

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für Einheitsmatrizen gilt $m = n$, $c_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $c_{ij} = 1$ für $i = j$.

Rechenoperationen

Analog zur Addition und Subtraktion von Vektoren sowie der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar sind auch Addition und Subtraktion zweier Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ sowie Multiplikation einer Matrix $\boldsymbol{A}$ mit einer Zahl $r \in \mathbb{R}$ komponentenweise definiert.

Es gelten

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$r\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} r\cdot a_{11} & r\cdot a_{12} & \dots & r\cdot a_{1n} \\ r\cdot a_{21} & r\cdot a_{22} & \dots & r\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\cdot a_{m1} & r\cdot a_{m2} & \dots & r\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beachte:
Die Subtraktion $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ist analog definiert, kann aber auch als $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\cdot\boldsymbol{B}$ aufgefasst werden. **Damit zwei Matrizen addiert oder subtrahiert werden können, müssen sie vom gleichen Typ sein!**

Matrixmultiplikation

Für eine $(m \times k)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ und eine $(k \times n)$-Matrix $\boldsymbol{B}$ ist eine weitere Operation definiert, **die Matrixmultiplikation.**

Ähnlich zum Skalarprodukt in der Vektorrechnung beschreibt die Matrixmultiplikation das Produkt zweier Matrizen. Sie ist nur durchführbar, wenn die Anzahl Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl Zeilen des zweiten Faktors ist.

In diesem Fall für$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ gilt:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \boxed{c_{21}} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Beachte:
Das Element c_{ij} der Produktmatrix $\boldsymbol{C}$ entsteht durch skalare Multiplikation der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ und der j-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$.

Matrixmultiplikation

Wichtig:
Die Matrixmultiplikation

- ist assoziativ, d.h. es gilt
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
- ist distributiv, also gelten
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{und} \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
- ist im Allgemeinen **NICHT** kommutativ, d.h.
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Beispiel:
Bilden Sie die Produkte AB und BA der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und vergleichen Sie diese!

Transponierte Matrix

Die Spiegelung aller Elemente einer $(m \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ an der Diagonalen (von links oben nach rechts unten) bezeichnet man als Transponieren. Die so entstandene Matrix vom Typ $(n \times m)$ heißt **transponierte Matrix** und wird mit $\boldsymbol{A}^\top$ bezeichnet.

Beispiele

- Die (3×2)-Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ wird zur (2×3)-Matrix $\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Aus der (3×1) Spaltenvektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird der (1×3) Zeilenvektor $\boldsymbol{b}^\top = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Merke:

- Die Spaltenvektoren einer Matrix werden somit durch das Transponieren zu Zeilenvektoren.
- Es gibt aber auch quadratische Matrizen die durch Transponieren in sich selber übergehen. Für diese symmetrischen Matrizen gilt: $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$. (z.B. die Einheitsmatrizen $\boldsymbol{E}$)

Inverse Matrix

Die zu einer quadratischen Matrix A **inverse Matrix** bezeichnet man mit A^{-1}. Für das Matrixprodukt einer Matrix und ihrer inversen Matrix gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Beachte:

- Nur quadratische Matrizen A (d.h. vom Typ $(n \times n)$) besitzen ggf. eine inverse Matrix A^{-1} gleichen Typs.
- Schema zur Berechnung der inversen Matrix:

A	E	Ausgangspunkt
$\vdots$	$\vdots$	elementare Zeilenumformungen (siehe LGS)
E	A^{-1}	Ergebnis ✓

Es gibt eine einfache Möglichkeit, um festzustellen, ob die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix A existiert: Die Berechnung der Determinante einer Matrix

Determinante

Die **Determinante** einer quadatischen Matrix A bezeichnet man mit $|A| \in \mathbb{R}$.

- Die Determinante liefert einen Zahlenwert dessen Betrag das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Spates angibt.
- Die Determinante ist für **allgemeine quadratische Matrizen** vom Typ $(n \times n)$ definiert.
- **An dieser Stelle** beschränken wir uns auf
  die Bestimmung der Determinante von (2×2)-Matrizen.
  Es gilt:
  $$\det(A) = |A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
- Zur Bestimmung der Determinante von (3×3)-Matrizen kann die Regel von Sarrus herangezogen werden.

WICHTIG:

Die inverse Matrix A^{-1} einer quadratischen Matrix A existiert genau dann, wenn die Determinante von A ungleich Null ist: $\exists A^{-1} \text{ mit } AA^{-1} = E \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Mit Hilfe der Determinante lässt sich die Inverse einer (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ schnell bestimmen. Es gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Übung:

Entscheiden Sie, ob die (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und verifizieren Sie ggf. die obige Formel für die inverse Matrix A^{-1},
indem sie dem Invertierungsschema folgen.

Anwendungsgebiete von Matrizen sind zum Beispiel

- die Lösung von Gleichungssystemen.
  Betrachte zum Beispiel das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{llcr} 4x & +3y & = & 10 \\ -x & +2y & = & 3 \end{array} \right| .$$

- die Darstellung von linearen Abbildungen in N-dimensionalen Vektorräumen.
  Ein Beispiel ist die Beschreibung von Drehungen entgegen dem Uhrzeigersinn.