Repetitorium Mathematik

Teil 2

Dr. Michael Hellwig

August 2023

Universität Liechtenstein

Bachelorstudiengang Betriebswirtschaftslehre

Inhaltsverzeichnis

Literaturliste

Literaturempfehlung

1. *Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen*
   E. Cramer und J. Neslehova, Springer, 2012
   Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

2. *Brückenkurs Mathematik - für Studieneinsteiger aller Disziplinen*
   Walz, Zeilfelder und Rießinger, Spektrum Akad. Verlag, Springer, 2007.

3. *Wirtschaftsmathematik (Bachelor geeignet)* von Kirsch und Führer, Kiehl, 2014.

4. *Übungsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler* von Wendler und Tippe, Springer, 2013.

5. YouTube Channels (Beispiel: Mathematik auf YouTube, u.v.m.)

Gleichungen und Ungleichungen

Was versteht man untet einer mathematischen Gleichung?

$$2 + 4 = 6$$

Im Folgenden werden aber Gleichungen mit mindestens einer Variablen/Unbekannten betrachtet!

$$\frac{3x}{(\sqrt{x})^4} - 7(3 - x)^2 = \frac{(\sqrt{27x})^2}{5}$$

Gleichung

Eine **Gleichung** besteht aus zwei mathematischen Ausdrücken (Termen), die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

- Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so suchen wir nach der oder den Lösung(en) der Gleichung.
- Einsetzen der Lösung(en) in eine Gleichung liefert eine wahre Aussage.
- Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$.
- $\mathbb{L}$ kann **ein oder mehrere** (sogar unendlich viele) Elemente enthalten bzw. **leer** sein.

Wozu verwendet man Gleichungen?

- Gleichungen formulieren eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme.
  - $\hookrightarrow$ Zwei Terme liefern bei gleicher Variablenbelegung aus einer bestimmten Grundmenge stets denselben Wert.
    Identitätsgleichungen
  - $\hookrightarrow$ Für welche Variablenbelegung ergibt sich eine wahre Aussage? Diese beantwortet eine spezifische Fragestellung.
    Bestimmungsgleichungen
- Gleichungen erlauben also die mathematische Formalisierung wirtschaftlicher oder physikalischer Beobachtungen und ggf. die Berechnung entsprechender Lösungen.
- Je nach Fragestellung treten unterschiedliche Typen von Gleichungen auf.

Um die Lösungen von Gleichungen zu bestimmen, werden nun einige Umformungen und Lösungsmethoden für spezielle Gleichungstypen betrachtet.

Gleichungen

Viele Lösungsverfahren beruhen auf den sog. Äquivalenzumformungen, d.h. auf Umformungen von beiden Gleichungsseiten, welche zwar die Gleichung verändern, **nicht aber** die Lösungsmenge der Gleichung!

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 4 && \mid +2 \\ 2x &= 6 && \mid : 2 \\ x &= 3 && \Rightarrow \mathbb{L} = \{3\} \end{aligned}$$

Umformungen von Gleichungen

Die folgenden Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht und werden **erlaubte Umformungen** oder **Äquivalenzumformungen** genannt:

- ↪ Addition & Subtraktion derselben Zahl (oder Term) auf beiden Seiten der Gleichung
- ↪ Multiplikation & Division mit derselben von Null verschiedenen Zahl (oder Term)

Beachte: Auf beiden Seiten des Gleichungszeichens ist dieselbe Umformung durchzuführen.

Lineare Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$\mathsf{ax} + \mathsf{b} = 0,$$

mit beliebigen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, nennt man lineare Gleichung (in Normalform).

$\hookrightarrow$ Die Variable x kommt **nur als einfache Potenz (Exponent 1)** vor!

$\hookrightarrow$ Die Zahlen a, b heißen **Koeffizienten** der Gleichung!

$\hookrightarrow$ Lineare Gleichungen stellen den **einfachsten Typ von Gleichungen** dar.

$\hookrightarrow$ Aus der **Normalform einer linearen Gleichung** kann die Lösung abgelesen einfach werden:

$$x = \frac{-\,b}{a}$$

Übung: Nachrechnen bzw. Probe.

Beispiele:

(a) Wie lautet die Lösungsmenge der linearen Gleichung?

$$3(4-5x)=-18$$

(b) Das zehnfache einer Zahl verringert um 10 ist gleich dem sechsfachen der Zahl erhöht um 2. Wie heißt die gesuchte Zahl?

(c) Ein Vater ist 38 Jahre alt, sein Sohn 11 Jahre. Nach wie viel Jahren ist der Vater doppelt so alt wie der Sohn?

(d) Lineare Gleichungen können auch verschachtelt sein:

$$2x-3(5-x)=3(2x-5)+9$$

(e) Beurteilen Sie, ob es sich um eine lineare Gleichung handelt:

$$(x-1)^2+(x+1)(x-3)=2(x-2)^2$$

Lineare Gleichungen

! Manchmal vereinfachen sich Gleichungen, die zunächst recht kompliziert (und **nicht-linear**) aussehen, durch Äquivalenzumformungen zu linearen Gleichungen.

- Und machmal auch nicht:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{-2x}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-3)(x+3)}_{x^2-9} = -8x$$

Diese Gleichung ist aufgrund des Terms x^2 also *NICHT* linear!

ACHTUNG:

Bei der Umformung haben wir beide Seiten mit dem Term $x+3$ multipliziert.
Wie können wir sicher sein, dass der Term ungleich Null ist?

Erst einmal wissen wir das tatsächlich nicht!

Nach dem Berechnen der "vorläufigen" Lösung muss überprüft werden, ob man bei den Umformungen mit Null multipliziert oder dividiert hat.

$\hookrightarrow$ War dies nicht der Fall so ist die "vorläufige" Lösung tatsächlich die Lösung der Gleichung!

$\hookrightarrow$ Andernfalls besitzt die Gleichung **keine** Lösung!

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x$$

Enthält eine Gleichung (ggf. zusätzlich zum linearen Teil) die 2-te Potenz einer Variable (Exponent 2), so haldelt es sich um eine **quadratische Gleichung**.

quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$\mathrm{a}\mathrm{x}^2 + \mathrm{b}\mathrm{x} + \mathrm{c} = 0$$

mit beliebigen **Koeffizienten** $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **quadratische Gleichung**. Eine Gleichung der Form

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{p}\mathrm{x} + \mathrm{q} = 0$$

mit **Koeffizienten** $p, q \in \mathbb{R}$ nennt man quadratische Gleichung in Normalform.

$\hookrightarrow$ In Normalform hat der Term x^2 den Koeffizienten 1.

$\hookrightarrow$ Aus der oberen Gleichung erhält man die Normalform durch Division der Gleichung durch a ($a \neq 0$).

Bemerke: **Jede quadratische Gleichung kann durch Äquivalenzumformungen in Normalform gebracht werden.**

Lösung quadratischer Gleichungen (p-q-Formel)

Um die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

zu lösen berechnet man die beiden Zahlen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$\hookrightarrow$ Ist der Term unter der Wurzel negativ, d.h. $\frac{p^2}{4} - q < 0$,
so besitzt die quadratische Gleichung **keine Lösung**. $\mathbb{L} = \{\} = \emptyset$

$\hookrightarrow$ Ist der Term unter der Wurzel gleich Null, d.h. $\frac{p^2}{4} - q = 0$,
so gilt $x_1 = x_2$ und Gleichung hat **genau eine Lösung**. $\mathbb{L} = \{x_1\}$

$\hookrightarrow$ Ist der Term unter der Wurzel positiv, d.h. $\frac{p^2}{4} - q > 0$,
so gilt $x_1 \neq x_2$ und Gleichung hat **genau zwei Lösungen**. $\mathbb{L} = \{x_1, x_2\}$

Beispiele:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Anwenden der p-q-Formel ergibt mit $p = 6$ und $q = 5$ ergibt $\mathbb{L} = \{-5, -1\}$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Anwenden der p-q-Formel ergibt mit $p = -4$ und $q = 4$ liefert: $\mathbb{L} = \{2\}$

Gleichungen mit Exponenten > 2 sind deutlich schwerer zu lösen.

$\hookrightarrow$ Eine Ausnahme sind die sog. **biquadratischen Gleichungen**:

Biquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

mit beliebigen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ nennt man **biquadratische Gleichung**.

$\hookrightarrow$ Sie ist mittels **Substitution** (Ersetzen) des Terms x^2 durch y zu lösen.

$\hookrightarrow$ Für $x^2 = y$ wird die obige Gleichung zu einer **quadratischen** Gleichung in y:

$$ay^2 + by + c = 0$$

$\hookrightarrow$ Diese besitzt die Lösungen y_1 und y_2.

$\hookrightarrow$ Wegen $x^2 = y$ erhält man die Lösungen aus der ursprünglichen Gleichung durch **"Wurzel ziehen"** als:

$$x_1 = \sqrt{y_1} \qquad \text{und} \qquad x_2 = -\sqrt{y_1}$$

und

$$x_3 = \sqrt{y_2} \qquad \text{und} \qquad x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Die Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 sind Lösungen der biquadratischen Gleichung. $\rightarrow$ Probe!

! **BEACHTE:** Die Lösungen y_1 und y_2 der quadratischen Gleichung **dürfen nicht negativ sein**!

Bruchgleichungen

Eine **Bruchgleichung** ist eine Gleichung, in der die Unbekannte im Nenner mindestens eines Bruchs vorkommt.

Beispiel: $$\frac{1}{x-1} = 3$$

Um eine Bruchgleichung zu lösen, muss diese ggf. mit dem Nenner des Bruches multipliziert werden.

- $\hookrightarrow$ Multiplikation mit Term ist nur dann Äquivalenzumformung, wenn der Term ungleich Null ist.
- $\hookrightarrow$ **Überprüfen des Definitionsbreichs des Bruchterms notwendig.**
- $\hookrightarrow$ Lösungsmenge mt Definitionsmenge vergleichen $\longrightarrow$ Probe!

Beispiele:

(a) $\frac{1}{t-1} = 5$

(b) $\frac{t}{t^2-2t+5} = \frac{2}{t-3}$

(c) $\frac{1}{z} + 2 = \frac{z-1}{z+1}$

Wurzelgleichungen

Eine Gleichung, in der mindestens eine Variable unter einer Wurzel steht, nennt man **Wurzelgleichung**.

Beispiel: $\sqrt{x-1} = 3 - x$

Um eine Wurzelgleichung zu lösen, potenziert man sie (ggf. mehrfach) bis alle Wurzeln eleminiert sind.

$\hookrightarrow$ Dann löst man die entstandene Gleichung nach x auf **und**

$\hookrightarrow$ setzt die Lösungen **zur Probe** in die ursprüngliche **Wurzelgleichung** ein!

Eine Probe ist hier unerlässlich, da das Potenzieren keine Äquivalenzumformung darstellt und dabei ggf. die Lösungsmenge verandert wird!

Beispiele:

(a) $\sqrt{x-1} = -1$

(b) $x + 2\sqrt{1-x} = 2$

(c) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x} + \sqrt{6}$

Exponentialgleichungen

In einer **Exponentialgleichung** treten Variablen im Exponenten einer Potenz auf.

Beispiel: $3^x = 27$

Um eine solche Gleichung zu lösen, wird sie

- ↪ durch Anwenden der Potenzrechengesetze umgeformt und
- ↪ mit Hilfe eines passenden Logarithmus nach der Variablen aufgelöst.

Beispiele:

(a) $2 \cdot 5^x = 50$

(b) $3^x + 3^{x+1} - 135 = 0$

(c) $2^{x-1} = 3^{x+1}$

Von Gleichungen zu Ungleichungen

Von einer **Ungleichungen** spricht man, wenn das Gleichheitszeichen ($=$) durch ein **Ungleichheitszeichen ($<, \leq, >, \geq$)** ersetzt wird.

Ungleichungen haben also zum Beispiel die Form

$$\begin{aligned} \mathsf{A} < \mathsf{B} \quad & \text{“Ausdruck } \mathsf{A} \text{ ist kleiner als Ausdruck } \mathsf{B}\text{''}, \text{ oder} \\ \mathsf{A} \geq \mathsf{B} \quad & \text{“Ausdruck } \mathsf{A} \text{ ist größer oder gleich Ausdruck } \mathsf{B}\text{''}. \end{aligned}$$

Ungleichung

Eine Ungleichung besteht aus zwei mathematischen Termen, die durch ein Ungleichheitszeichen verbunden sind.

- Enthält mindestens einer der Ausdrücke eine Variable, so können die **Lösungen der Ungleichung** bestimmt werden.
- Die Menge der Lösungen wird ebenfalls als **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ bezeichnet.
- Beispiel:

$$x + 1 < 2$$

Durch Subtraktion von 1 erhält man: $x < 1$.

Lösungen dieser Ungleichung sind alle Zahlen x, die kleiner als 1 sind. Man schreibt:

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$$

Analog zu Lösung von Gleichungen beruht die Lösung von Ungleichungen ebenfalls auf **Äquivalenzumformungen**, also auf Umformungen, welche die Lösungsmenge der Ungleichung NICHT verändern!

Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

Die folgenden Umformungen ändern die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht und werden **erlaubte Umformungen** genannt:

- ↪ Addition & Subtraktion derselben Zahl (oder desselben Terms) auf beiden Seiten
- ↪ Multiplikation & Division beider Seiten mit derselben **positiven Zahl** (bzw. Term)

BEACHTE: **Die Multiplikation (Division) einer Ungleichung mit einer negativen Zahl stellt keine Äquivalenzumformung dar.**

! Abhilfe

Die Multiplikation (oder Division) einer Ungleichung mit einer negativen Zahl ändert die Lösungsmenge nicht, **wenn man gleichzeitig das Ungleichheitszeichen umkehrt**.

Ungleichungen

Demonstration:

FALSCH:

$$
\begin{aligned}
-3x + 4 &< +1 \qquad && | -4 \\
-3x &< -3 && |: (-3) \\
x &< +1 && \\
& && \text{Probe mit } x = -1! \\
\underbrace{-3 \cdot (-1) + 4}_{4} &< +1 && \text{falsche Aussage}
\end{aligned}
$$

RICHTIG:

$$
\begin{aligned}
-3x + 4 &< +1 \qquad && | -4 \\
3x &< -3 && |: (-3) \\
x &> +1 && \\
& && \text{Probe mit } x = 2! \\
\underbrace{-3 \cdot 2 + 1}_{-5} &< +1 && \text{wahre Aussage}
\end{aligned}
$$

Beispiele:

(a) $4(x-2) \geq (x-8) - 3(x+2)$

(b) $x^2 - 2x + 3 < (x-1)(x+2)$

Bruchungleichungen

Betrachten Sie die Bruchungleichung

$$\frac{x-1}{2x+1} < 1$$

- Um diese Ungleichung zu lösen, muss zuerst
  mit dem Nenner $(2x+1)$ der LINKEN SEITE multipliziert werden.

- Je nach Wahl von x hat der Term $(2x+1)$ allerdings **unterschiedliche Vorzeichen**.
  - $\hookrightarrow$ Für $x > \frac{1}{2}$ ist der Term positiv, also $(2x+1) > 0$ $\rightarrow$ positives Vorzeichen
  - $\hookrightarrow$ Für $x < \frac{1}{2}$ ist der Term negativ, also $(2x+1) < 0$ $\rightarrow$ positives Vorzeichen

$\Rightarrow$ Folglich ist hier eine Fallunterscheidung notwendig!

- $\hookrightarrow$ Falls $(2x+1) > 0$, so bleibt das UNGLEICHHEITSZEICHEN unverändert $<$
- $\hookrightarrow$ Falls $(2x+1) < 0$, so muss das UNGLEICHHEITSZEICHEN zu $>$ verändert werden

Weiteres Beispiel: $\frac{4-x}{x+5} > 1$

Weitere Übungsaufgaben und zugehörige Lösungen finden Sie zum Beispiel hier:

- **Vorkurs Mathematik** von E. Cramer & J. Neslehova, Springer, 2012
  Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

  Kapitel 6.11 – entsprechende Aufgaben
  Kapitel 8.5 – entsprechende Aufgaben

Funktionen

Was sind mathematische Funktionen?

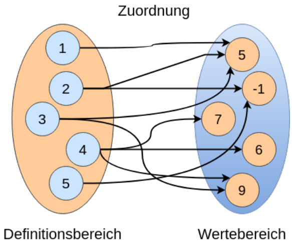
Funktionen sind Zuordnungsvorschriften zwischen den Elementen von Mengen

Eine Zuordnung der Elemente einer Menge $\mathbb{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ auf die Elementen der Menge $\mathbb{W} = \{-1, 4, 6, 7, 9\}$ wird durch die Menge $\mathbb{V}$ von Paaren beschrieben

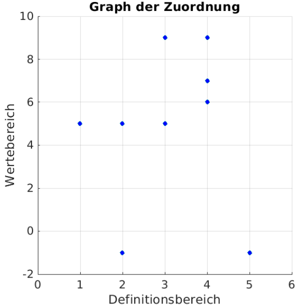
$$V = \{(1, 5), (2, -1), (2, 5), (3, 5), (3, 9), (4, 6), (4, 7), (4, 9), (5, -1)\}$$

Zur Visualisierung dieser Relation kann das folgende Diagramm herangezogen werden

$\hookrightarrow$ ein Pfeil steht dabei für die Zuordnung des Elements $d \in \mathbb{D}$ zu $w \in \mathbb{W}$



- Für $\mathbb{D}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ können die Paare in $\mathbb{V}$ in ein Koordinatensystem eingetragen werden.
- Eine grafische Darstellung einer Zuordnung wird **Graph der Zuordnung** genannt.



Bemerke: Die Zuordnung oben stellt noch keine Funktion dar!

Funktionen

Eine **Funktion (Abbildung)** f ist eine Zuordnung zwischen den Mengen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$, die **jedem Element** aus der Menge $\mathbb{D}$ **genau ein Element** der Menge $\mathbb{W}$ zuordnet.

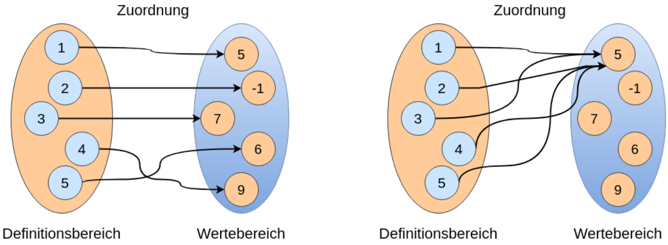
Schreibweise: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$

Für die konkrete Zuordnung zweier Elemente $d \in \mathbb{D}$ und $w \in \mathbb{W}$ schreibt man

$$f(d) = w \qquad \text{bzw.} \qquad d \mapsto f(d) = w$$

- $\mathbb{D}$ heißt **Definitionsbereich**
- $\mathbb{W}$ heißt **Wertebereich**
- $f(d)$ heißt **Funktionswert von f** (an der Stelle d)
- d heißt **Argument von f**
- Als **Bild von f** bezeichnet man die Menge $f(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{W} | w = f(d), d \in \mathbb{D}\}$

Die folgenden Zuordnungen stellen tatsächlich **Funktionen** dar.



Das **Bild einer Funktion** $f(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{W} | w = f(d), d \in \mathbb{D}\}$ darf folglich

$\hookrightarrow$ den ganzen Wertebereich $\mathbb{W}$ umfassen ($f(\mathbb{D}) = \mathbb{W}$) oder auch

$\hookrightarrow$ eine **echte** Teilmenge von $\mathbb{W}$ sein ($f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{W}$).

Beispiel:

Man stelle sich ein Fahrrad vor, dass über sehr lange Zeit konstant mit einer Geschwindigkeit von $20 km/h$ fährt.

Dann können wir den zurückgelegten Weg folgendermaßen berechnen:

$$s = 20 \cdot t$$

Jeder (positiven) Stundenzahl t wird also ein Wert $s(t)$ für den zurückgelegten Weg zugeordnet.

$$s : \mathbb{R}_{+0} \rightarrow \mathbb{R}_{+0} \qquad \textbf{und} \qquad t \mapsto s(t) = 20 \cdot t$$

Für ausgewählte Werte kann die Funktion durch eine **Wertetabelle** veranschaulicht werden:

Zeit [h]	0	1	2	3	4	5	6
Weg [km]	0	20	40	60	80	100	120

Reelle Funktionen

Sind Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Wertebereich $\mathbb{W}$ einer Funktion Teilmengen der reellen Zahlen (d.h. $\mathbb{D}, \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$), so nennt man die Abbildung

$$f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}$$

relle Funktion.

- Reelle Funktionen bilden einen wichtigen Spezialfall von Funktionen.
- Sie können durch ihren Funktionsgraph in einem Koordinatensystem visualisiert werden.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3 \cdot x - 1$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-4	-1	2	5	8

- Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertebereich ist $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- Bildmenge ist $f(\mathbb{D}) = \mathbb{R}$
- Wertebereich und Bildmenge sind gleich

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	1	0	1	4	9	16

- Definitionsbereich ist $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertebereich ist $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- Bildmenge ist $f(\mathbb{D}) = \mathbb{R}_{+0}$
- Wertebereich und Bildmenge sind ungleich

Häufig ist nur ein Teilbereich der reellen Zahlen als Definitionsbereich ($\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$) sinnvoll

- Definitionsbereiche von **Erlösfunktionen** oder **Produktionsfunktionen** ($\nexists$ negative Anzahl von Gütern)
- Die **Intervallschreibweise** erlaubt dann eine kurze Darstellung des Definitionsbereichs.

Beipiele:

(*a*) $f : [0, 3] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{-3}{4}x + 1$

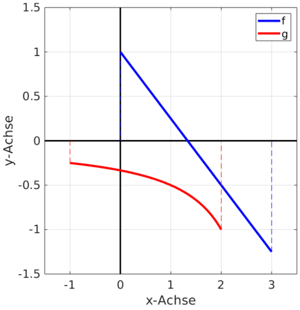
oder

(*b*) $g : [-1, 2] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

Wie lauten die Bildbereiche dieser Funktionen?

- Einsetzen der Intervallgrenzen des Definitionsbereichs liefert:
  $f([0, 3]) = [\frac{-9}{4}, 1] \quad \text{und} \quad g([-1, 2]) = [-1, \frac{-1}{4}]$
- ACHTUNG: **Dieses Vorgehen ist im Allgemeinen nicht korrekt!**

  Hier nur wegen einer speziellen Eigenschaft der Funktionen f und g möglich, der sog. Monotonie



Eigenschaften von Funktionen

Eigenschaften von Funktionen f auf einer Teilmenge $M \subset \mathbb{D}$ des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$

- Beschränktheit
- Monotonie
- Steigung
- Krümmung
- Umkehrfunktion
- Nullstellen & y-Achsenabschnitt
- Lokale Extremstellen
- Stetigkeit

Beschränktheit

Eine Funktion f ist auf der Menge M **beschränkt**

$\hookrightarrow$ **nach oben**, wenn es eine Zahl a gibt, so dass $\quad f(x) \leq a \quad \forall x \in M$,

$\hookrightarrow$ **nach unten**, wenn es eine Zahl b gibt, so dass $\quad f(x) \geq b \quad \forall x \in M$.

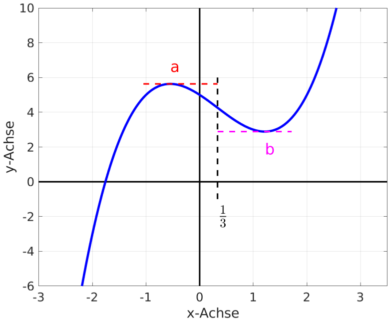
Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 5$$

ist auf dem Intervall

- $(-\infty, \frac{1}{3})$ durch den Wert a **nach oben beschränkt**
- $(\frac{1}{3}, +\infty)$ durch den Wert b **nach unten beschränkt**



Monotonie

Eine Funktion f ist auf der Menge M (streng) **monoton**

$\hookrightarrow$ **steigend**, wenn $\forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt, dass $f(x_1) \leq (<) f(x_2)$,

$\hookrightarrow$ **fallend**, wenn $\forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt, dass $f(x_1) \geq (>) f(x_2)$.

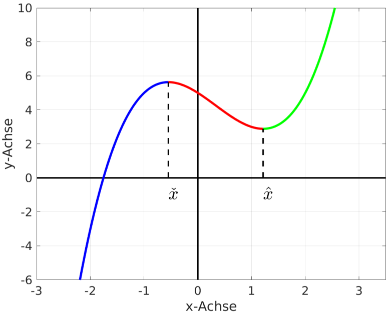
Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 5$$

ist auf dem Intervall

- $(-\infty, \check{x})$ streng monoton steigend
- $(\check{x}, \hat{x})$ streng monoton fallend
- $(\hat{x}, \infty)$ streng monoton steigend



Steigung

Die **Steigung einer Funktion** f an einer Stelle $x \in \mathbb{D}$ beschreibt die Rate des

$\hookrightarrow$ **Anstiegs** der Funktionswerte $f(x)$ für wachsende x Werte (von LINKS nach RECHTS)

$\hookrightarrow$ **Abstiegs** der Funktionswerte $f(x)$ für wachsende x Werte (von LINKS nach RECHTS)

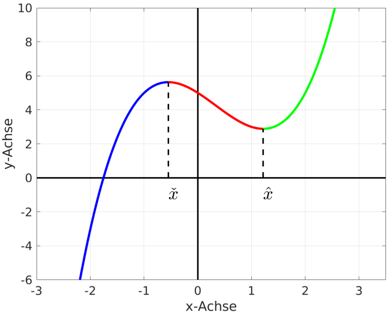
Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 5$$

besitzt auf dem Intervall

- $(-\infty, \check{x})$ positive Steigung
- $(\check{x}, \hat{x})$ negative Steigung
- $(\hat{x}, \infty)$ positive Steigung



Krümmung

Eine Funktion f ist auf der Menge M

$\hookrightarrow$ (streng) **konvex** [oder **links-gekrümmt**], wenn $\forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ und $\lambda > 0$ gilt, dass

$$\lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2) \geq (>)\, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

[Für je zwei Punkte liegt die Verbindungslinie oberhalb des Graphen von f.]

$\hookrightarrow$ (streng) **konkav** [oder **rechts-gekrümmt**], wenn $\forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ und $\lambda > 0$ gilt, dass

$$\lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2) \leq (<)\, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

[Für je zwei Punkte liegt die Verbindungslinie unterhalb des Graphen von f.]

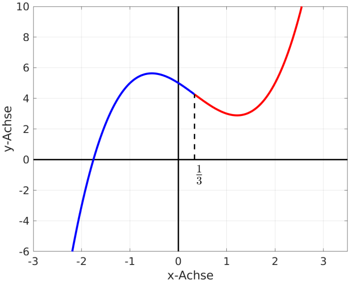
Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 5$$

ist auf dem Intervall

- $(-\infty, \frac{1}{3})$ konvex
- $(\frac{1}{3}, \infty)$ konkav



Umkehrfunktion

Eine Funktion f besitzt auf der Menge M eine Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{W} \to \mathbb{D}$, wenn $\forall x \in M$ gilt: $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

$\hookrightarrow$ Jedem Element $x \in M \subset \mathbb{D}$ wird durch die Funktion **eindeutig** ein Element $y \in M_w$ zugeordnet **und** diesem y **durch die Umkehrfunktion** f^{-1} wiederum das Element $x \in M$

$\hookrightarrow$ In einem solchen Fall, nennt man f eine **bijektive** Funktion von M nach M_w.

$\hookrightarrow$ Notwendige Voraussetzung für die Existenz einer Umkehrfunktion:

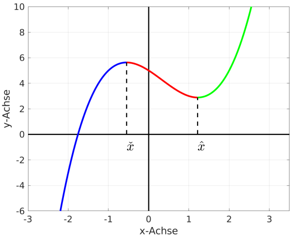
Je zwei unterschiedlichen x-Werten werden auch zwei verschiedene y-Werte zugeordnet.

Diese Eigenschaft wird als **Injektivität** bezeichnet.

Beispiel:

Die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 5$ besitzt auf den drei Teilintervallen $(-\infty, \check{x})$, $(\check{x}, \hat{x})$, und $(\hat{x}, \infty)$ jeweils eine **Umkehrfunktion**.

Nicht aber auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.



Nullstellen & y-Achsenabschnitt

Unter den **Nullstellen** einer Funktion f versteht man jene Stellen $x \in \mathbb{D}$ für die der Funktionswert **Null** ist. $$x \in \mathbb{D} \text{ mit } f(x) = 0$$

Der **y-Achsenabschnitt** beschreibt den Funktionswert $\bar{y}$, den die Funktion f an der Stelle $x = 0$ annimmt. $$\bar{y} = f(0)$$

- $\hookrightarrow$ In den Nullstellen schneidet der Graph von f die x-Achse (Abszisse).
- $\hookrightarrow$ Der y-Achsenabschnitt entspricht dem y Wert bei dem der Graph von f die y-Achse (Ordinate) durchstößt.

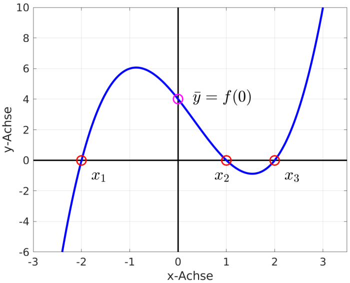
Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

besitzt

- die Nullstellen x_1, x_2 und x_3
- den y-Achsenabschnitt $\bar{y}$



Eigenschaften von Funktionen

Lokale Extremstellen

Die lokalen Extremstellen einer Funktion f sind jene Stellen $x \in \mathbb{D}$ für die der Funktionsgraph innerhalb *einer kleinen Umgebung* Maxima oder Minima (**Hoch- oder Tiefpunkte**) annimmt.

$\hookrightarrow$ **Lokale Extremstellen** kennzeichnen den Wechsel des Monotonieverhaltens einer Funktion f.

$\hookrightarrow$ Die Bestimmung **lokaler Extremstellen** ist eine wichtiger Teil der Differentialrechnung.

$\rightarrow$ Dabei ist die Eigenschaft der Stetigkeit von großer Bedeutung.

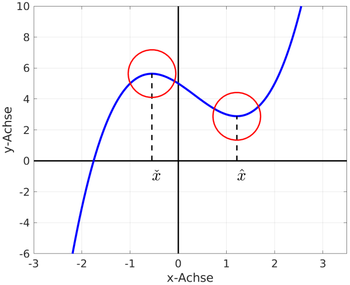
Beispiel:

Die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 5$$

besitzt

- zwei lokale Extremstellen $\check{x}, \hat{x} \in \mathbb{D}$
- Das Minimum des Funktionsgraphen liegt im Punkt $(\check{x}, f(\check{x}))$
- Das Maximum im Punkt $(\check{x}, f(\check{x}))$



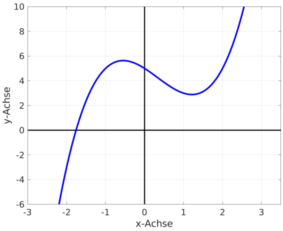
Stetigkeit

Eine **stetige Funktion** f ist eine Funktion, bei der hinreichend kleine Änderungen des Arguments (der x -Werte) nur beliebig kleine Änderungen des Funktionswerts (der $f(x)$ Werte) bedingen.

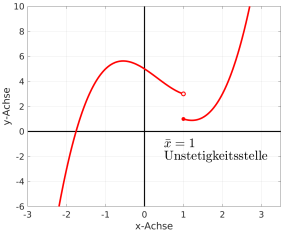
- ↪ Anschaulich ist der Funktionsgraph einer **reellen stetige Funktion** f über dem Definitionsbreich $\mathbb{D}$ eine **zusammenhängende Kurve**.
- ↪ Der Graph macht keine Sprünge und lässt sich **"ohne Absetzen des Stiftes"** zeichnen.

→ Formale Untersuchung mittels ϵ-δ-*Kriterium*, u.a.

Beispiel einer **stetigen** Funktion



Beispiel einer **unstetigen** Funktion



Funktionstypen

Elementare Typen reeller Funktionen $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. **Polynome vom Grade n** $\quad p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad$ z.B.
   (a) Lineare Funktionen $\quad g(x) = kx + d \quad$ Graph: Gerade
   (b) Quadratische Funktionen $\quad q(x) = ax^2 + bx + c \quad$ Graph: Parabel
   (c) Kubische Funktionen $\quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2. Potenzfunktionen $\quad f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$
3. Exponentialfunktionen $\quad f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
4. Logarithmusfunktionen $\quad f(x) = \log_a(x), \quad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
5. Trigonometrische Funktionen $\quad \sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$

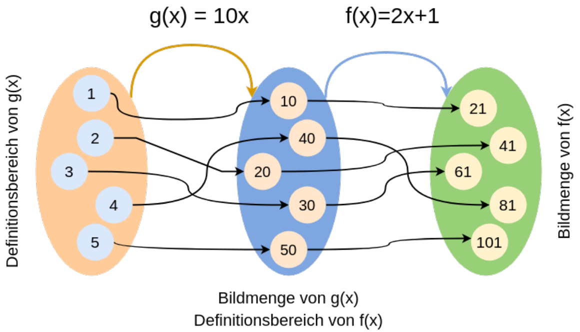
Verknüpft man diese elementaren Funktionstypen mit Hilfe der vier Grundrechenarten oder durch Hintereinanderausführung (Verkettung), **so lassen sich fast alle in der Praxis relevanten Funktionen erzeugen.**

Unter gewissen Bedingungen können zwei Funktionen miteinander zu einer einzelnen Funktion verbunden **verkettet** werden.
Umgekehrt kann sich eine komplizierte Funktion als **Verkettung** einfacher Grundfunktionen herausstellen.

Man betrachte die Funktionen $g(x) = 10x$ und $f(x) = 2x + 1$

$\hookrightarrow$ Diese können nacheinander ausgeführen werden: $5 \xrightarrow{g(5)} 50 \xrightarrow{f(50)} 101$

$\hookrightarrow$ Oder man verknüpft $g(x)$ und $f(x)$ zu einer Funktion $h(x)$: $5 \xrightarrow{h(5)} 101$



Wie sieht eine solche Verkettung aus?

$\hookrightarrow$ Bei der Hintereinanderausführung von $g(x)$ und $f(x)$ werden die Ausgabewerte ("Outputs") von $g(x)$ zu Eingabewerten ("Inputs") von $f(x)$.

$\hookrightarrow$ Man kann das Argument x der Funktion $f(x)$ also durch die Funktionswerte von $g(x)$ ersetzen und erhält

$$\mathrm{h(x)} = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) + 1 = 2 \cdot \underbrace{(10x)}_{g(x)} + 1 = \underbrace{20x + 1}_{\mathrm{h(x)}}$$

$\hookrightarrow$ Diese Verknüpfung der Funktionen nennt man **Verkettung** oder **Komposition**.

ACHTUNG: Es ist zu beachten, dass die nachgelagerte Funktion $f(x)$ etwas mit den Ausgabewerten der zuerst ausgeführten Funktion $g(x)$ anfangen kann!

Verkettung

Es seien $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{W}_f$ und $g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{W}_g$ zwei Funktionen.

Liegt die Bildmenge $g\left(\mathbb{D}_g\right)$ von g **komplett** im Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von f, so heißt die Funktion

$$f \circ g : \mathbb{D}_g \to \mathbb{W}_f, \quad f \circ g\,(x) = f(g(x))\,,$$

die **Verkettung** bzw. **Komposition von f nach g**.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Komposition $f \circ g$ **und** $g \circ f$ der folgenden Funktionen:

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x+9)^2 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} - 8$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (2x-3)^{-1} \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{-1} + x$

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -x^2 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} - 5$

Umkehrfunktion

Verknüpft man nun die Funktionen

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad g(x) = (x+9)^2 \qquad \text{und} \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(y) = \sqrt{y} - 9$$

so erhält man

$$f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f \circ g(x) = \sqrt{(x+9)^2} - 9 = x$$

Jede Zahl $x \in \mathbb{R}_+$ wird durch die Funktion $f \circ g$ also wieder auf **sich selbst** abgebildet

$$x \mapsto f \circ g(x) = x$$

Man bezeichnet eine solche Funktion f, die eine Abbildung g rückgängig macht, als **Umkehrfunktion von** g.

Formal:

Umkehrfunktion

Sei f eine **bijektive** Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und Bildmenge $f(\mathbb{D})$. Eine Funktion f^{-1} mit Definitionsberech $f(\mathbb{D})$ und der Eigenschaft

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{D}$$

nennt man **Umkehrfunktion** von f.

Die Umkehrfunktion einer Funktion $f(x)$ kann wie folgt berechnet werden.

Sei eine bijektive Funktion g gegeben:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 7x^3 - 2$$

$\hookrightarrow$ Für die Funktionswerte der Funktion setze $y = f(x)$

$$y = 7x^3 - 2$$

$\hookrightarrow$ Umstellen nach x liefert

$$x = \sqrt[3]{\frac{y+2}{7}}$$

$\hookrightarrow$ Die rechte Seite beschreibt also eine Funktion $x = f^{-1}(y)$ mit

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{y+2}{7}}$$

Dies ist die zu f gehörige Umkehrfunktion f^{-1}!

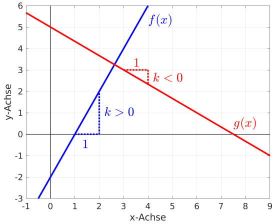
Lineare Funktionen

Für reelle Zahlen k und d heißt eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = k \cdot x + d \qquad \text{mit } k, d \in \mathbb{R}$$

lineare Funktion. Den zugehörigen Funktionsgraph nennt man **Gerade**.

- Die Zahl **k** beschreibt die **Steigung** der Geraden.
  [An-/Abstieg pro Schritt nach RECHTS]
- Die Zahl **d** gibt den **y-Achsenabschnitt** des Funktionsgraphen an.
  [Es gilt also: $d = f(0)$]



Lineare Funktionen f sind/haben

- **unbeschränkt** und **stetig** auf $\mathbb{R}$
- **streng monoton steigend** für $k > 0$ bzw. **fallend** für $k < 0$
- genau eine **Nullstelle** in $x = -d/k$
- eine **Umkehrfunktion** $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{x - d}{k}$

Lineare Funktionen

Für reelle Zahlen k und d hat eine **lineare Funktion** die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = k \cdot x + d \qquad \text{mit } k, d \in \mathbb{R}.$$

- Eine lineare Funktion (Gerade) lässt sich durch **zwei Punkte** $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ des Koordinatensystems eindeutig bestimmen.
  - ↪ $x_i, y_i \quad (i = 1, 2)$ entsprechen den x- bzw. y-Koordinaten der Punkte P_1 und P_2
  - ↪ Die Steigung k der Gerade durch P_1 und P_2 ergibt sich dann zu:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

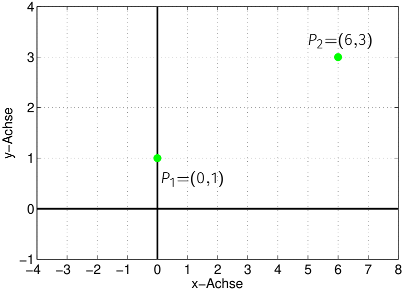
  - ↪ Für den y-Achsenabschnitt d der Gerade gilt:

$$d = y_1 - k \cdot x_1$$

Lineare Funktionen

Für reelle Zahlen k und d hat eine **lineare Funktion** die Form

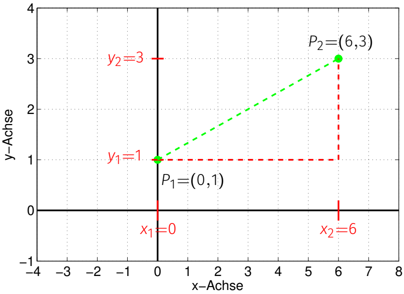
$$f(x) = k \cdot x + d.$$



Lineare Funktionen

Für reelle Zahlen k und d hat eine **lineare Funktion** die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = k \cdot x + d.$$



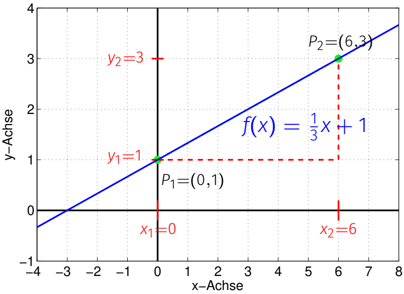
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{6-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$d = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 1$$

Lineare Funktionen

Für reelle Zahlen k und d hat eine **lineare Funktion** die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = k \cdot x + d.$$



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{6-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$d = 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 1$$

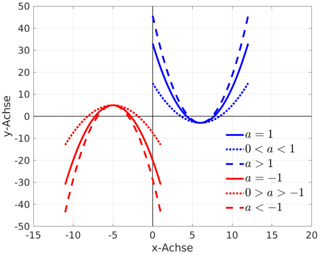
Quadratische Funktionen

Für reelle Zahlen a,b und c heißt eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

quadratische Funktion. Den zugehörigen Funktionsgraph nennt man **Parabel**.

- Die Zahl **a** beschreibt die **"Öffnung"** der Parabel. [Streckung/Stauchung bzw. Öffnung nach OBEN/UNTEN]
- In der obigen Form gibt die Zahl **c** den **y-Achsenabschnitt** an. [Hier gilt also: $c = f(0)$]



Quadratische Funktionen f sind/haben

- einen **Scheitelpunkt** an der Stelle $x_S = \dfrac{-\,b}{2a}$
- auf $\mathbb{R}$ nach oben ($a > 0$) bzw. unten ($a < 0$) **beschränkt** durch $f(x_S)$
- entweder keine, eine oder zwei **Nullstellen**
- keine eindeutige **Umkehrfunktion** auf ganz $\mathbb{R}$
- einen Wechsel des **monotonen Verlaufs** in x_S

Schnittpunktberechnung

Es seien eine Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ und eine Gerade $g(x) = kx + d$ gegeben.

Im **Schnittpunkte** $S(x_S, y_S)$ der beiden Funktionen sind **gemeinsame** Punkte im Koordinatensystem. In jedem dieser Punkte gilt:
Die Funktionswerte von $f(x_S)$ und $g(x_S)$ and der Stelle x_S müssen gleich sein und der y-Koordinate des Schnittpunktes entsprechen, d.h. $y_S = f(x_S) = g(x_S)$.

Berechnungsmethode:

1) **Ansatz:** Bestimme alle x-Werte mit $f(x) = g(x)$
Gleichsetzten der Funktionswerte und lösen der entstandenen Gleichung liefert die **x-Koordinaten** der Schnittpunkte

2) Einsetzen der x-Werte in eine der Funktionen (f oder g) liefert die zugehörigen **y-Koordianten** der Schnittpunkte.

MERKE: Dieser Ansatz zur Schnittpunktbestimmung gilt auch für andere Funktionstypen!

Beispiel:

Bestimme die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = -2x + 1$ und der Parabel $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

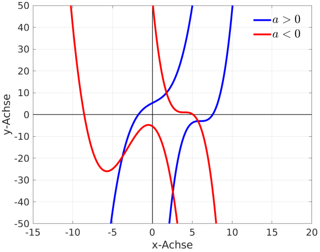
Kubische Funktionen

Für reelle Zahlen *a*,*b*,*c* und *d* heißt eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + cx + d \qquad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

kubische Funktion.

- Die Zahl **a** beschreibt wieder die **“Orientierung”** des Funktionsgraphen. [Streckung/Stauchung bzw. globaler Verlauf nach OBEN/UNTEN]
- In der obigen Form gibt die Zahl **d** den **y-Achsenabschnitt** an. [Hier gilt also: $d = f(0)$]



Kubische Funktionen *f* sind/haben

- einen **Wendepunkt** an der Stelle $x_W = \dfrac{-b}{3a}$
- einen Wechsel der **Krümmung** in x_W
- auf $\mathbb{R}$ **unbeschränkt**
- entweder eine, zwei oder drei **Nullstellen**
- entweder einen **Sattelpunkt** oder zwei **lokale Extremstellen**

Polynom

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen.
Eine Funktion $p(x)$ der Form

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Polynom** vom Grad n.
Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heißen **Koeffizienten** des Polynoms.

Beispiele für Polynome:

Häufig wird auf den Index n für den Grad des Polynoms verzichtet.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 4x^2 + x - 3 \\ g(x) &= 2x^7 - 4x^5 + x^3 \\ p(x) &= (x+3)^2 \end{aligned}$$

Es dürfen also auch Koeffizienten $a_i,\ i \neq n$ **gleich Null** sein.

Keine Polynome hingegen sind

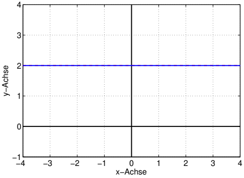
$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3 - 4x^{\frac{2}{3}} + x - 3 \\ f(x) &= 2x^7 - 4x^5 + x^{-1} \end{aligned}$$

Polynome

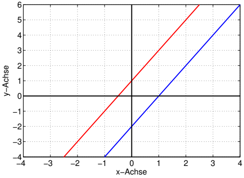
- Für $n = 0$ ergeben sich die **konstanten Funktion**
  $$\rightarrow \qquad p_0(x) = a_0$$
- Für $n = 1$ ergeben sich die **linearen Funktionen**
  $$\rightarrow \qquad p_1(x) = a_1 x + a_0$$
- Für $n = 2$ ergeben sich die **quadratischen Funktionen**
  $$\rightarrow \qquad p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
- usw.

Beispiele:

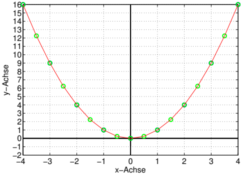
konstant
$p_0(x) = 2$



linear
$p_1(x) = 2x - 2$



quadratisch
$p_2(x) = x^2$



Eigenschaften von Polynomen

Polynome vom Grad n sind/haben

- maximal n Nullstellen
- maximal $n-1$ lokale Extremstellen
- für gerades n

  $\hookrightarrow$ einseitig beschränkt auf $\mathbb{R}$, d.h. entweder **nach oben oder nach unten**
  $\hookrightarrow$ **evtl.** keine Nullstelle
- für ungerades n

  $\hookrightarrow$ unbeschränkt auf $\mathbb{R}$
  $\hookrightarrow$ mindestens eine Nullstelle

Beispiel:
Welche Eigenschaften zeichnen die folgenden Polynome aus?

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 4x$

(b) $g(x) = -x^2 - 8$

Polynom durch vorgegebene Punkt

Ein Polynom vom Grad n

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ist durch Vorgabe von $n+1$ **Punkten** $P(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n+1$ **eindeutig bestimmt**.

↪ Anders ausgedrückt:

Zu einer Auswahl von $n+1$ Punkten im kartesischen Koordinatensystem gibt es genau eine Polynomielle Funktion vom Grad n, die genau durch alle $n+1$ Punkte verläuft.

Vorgehen:

1) Stelle **für jeden Punkt** $P(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, n+1$ **eine Gleichung** mit $n+1$ unbekannten Koeffizienten $a_n, \ldots, a_1, a_0$ auf

$$P(x_i, y_i) \Rightarrow y_i = p_n(x_i)$$

2) und **löse das entstandene Gleichungssystem** mit $n+1$ Gleichungen und $n+1$ Variablen [$\rightarrow$ Gaußsches Eliminationsverfahren, siehe Abschnitt LGS]

Beispiel:

Bestimme das Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$, welches durch die Punkte $P_1(-1, 6)$, $P_2(2, -3)$ und $P_3(4, 1)$ verläuft!

Potenzfunktion

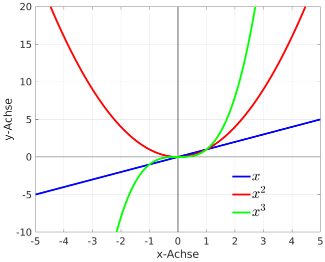
Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennt man die Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^a$$

Potenzfunktion mit dem Exponenten $a \in \mathbb{R}$.
Der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ einer Potenzfunktion ist **vom Exponenten abhängig**.

Bereits bekannt sind die Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten ($\rightarrow$ Monome).

- Winkelhalbierende $f(x) = x$
- Normalparabel $f(x) = x^2$
- kubische Parabel $f(x) = x^3$

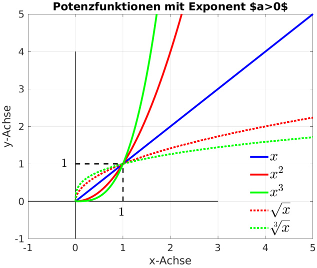


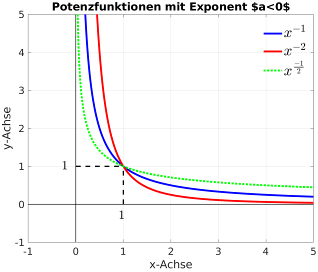
Potenz- und Wurzelfunktionen

Eigenschaften von Potenzfunktionen

Für **Potenzfunktionen** $f(x) = x^a, \; a \in \mathbb{R}$ gilt:

- An der Stelle $x = 1$ ist der Funktionswert $f(1) = 1$
- $\mathbb{D}$ ist abhängig von a, mindestens aber $\mathbb{R}_+$
- Unter **Beschränkung auf $\mathbb{R}_+$** gilt weiter:
  - $\hookrightarrow$ streng monoton steigend, falls $a > 0$
    streng monoton fallend, falls $a < 0$
  - $\hookrightarrow$ streng konvex, falls $a < 0$ oder $a > 1$
    streng konkav, falls $0 < a < 1$
  - $\hookrightarrow$ **keine** lokalen Extrema und **keine** Nullstellen
  - $\hookrightarrow$ **Umkehrfunktion:** $f^{-1}(x) = x^{-a}$





Exponentialfunktion zu allgemeinen Basis

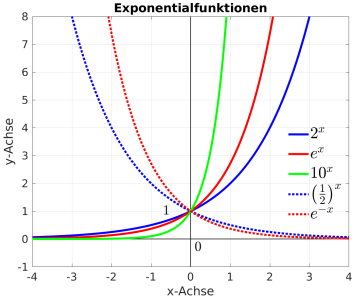
Es sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x$$

die **Exponentialfunktion zur Basis** a.

Für Exponentialfunktionen gilt:

- An der Stelle $x = 0$ gilt stets $f(0) = 1$
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- f ist nach **unten beschränkt** durch Null
- streng monoton steigend, falls $a > 1$
  streng monoton fallend, falls $a < 1$
- streng konvex
- **keine** lokalen Extrem- oder Nullstellen
- **Umkehrfunktion:** $f^{-1}(x) = \log_a(x)$



Die **Exponentialfunktion** zur Basis $\mathrm{e} \approx 2,718281\ldots$ (eulersche Zahl)

- bezeichnet man häufig als **die** Exponentialfunktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ oder **e-Funktion**
- hat gegenüber den anderen Exponentialfunktionen **besondere Eigenschaften**
  [siehe Abschnitt **Differentialrechnung**]

MERKE:

Mit Hilfe des **natürlichen Logarithmus** lassen sich alle Exponentialfunktion auf die **e-Funktion** zurückführen

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}.$$

Beispiel:

Drücken Sie die folgenden Exponentialfunktionen durch die e-Funktion aus.

(a) $f(x) = 5^x$

(b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) $f(x) = 4^{-2x}$

Logarithmusfunktion

Seien a und x positive reelle Zahl und $a \neq 0$.

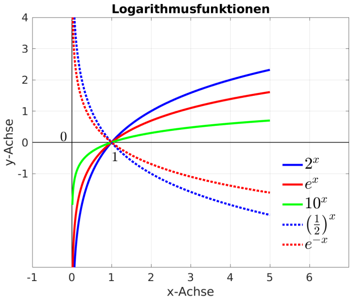
Ein Exponent y, der die Gleichung $a^y = x$ löst, heißt **Logarithmus von x zur Basis a**.

Die Logarithmusfunktion zur Basis a bildet jede positive Zahl x auf den passenden Exponenten (hier y-Wert) zur Basis a ab:

$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = \log_a x, \qquad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

Für Logarithmusfunktionen gilt:

- An der Stelle $x = 1$ gilt stets $f(1) = 0$ (Nullstelle!)
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$
- f ist **unbeschränkt**
- streng monoton steigend, falls $a > 1$
  streng monoton fallend, falls $a < 1$
- **keine** lokalen Extrem- oder weitere Nullstellen
- **Umkehrfunktion:** $\quad f^{-1}(x) = a^x$



Logarithmusfunktion

Seien a und x positive reelle Zahl und $a \neq 0$.

Ein Exponent y, der die Gleichung $a^y = x$ löst, heißt **Logarithmus von x zur Basis a**.

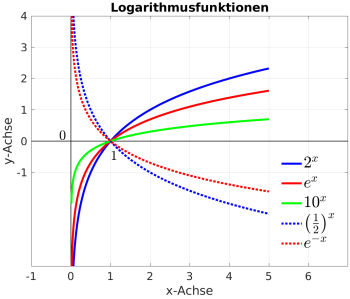
Die Logarithmusfunktion zur Basis a bildet jede positive Zahl x auf den passenden Exponenten (hier y-Wert) zur Basis a ab:

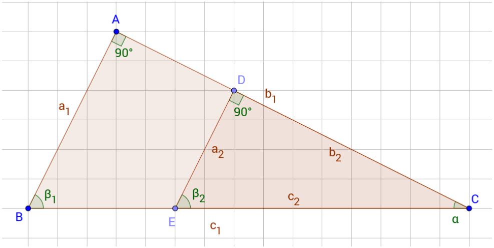
$$\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = \log_a x, \qquad a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$$

Für Logarithmusfunktionen gilt:

- streng konkav, falls $a > 1$
  streng konvex, falls $a < 1$
- $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$ ergibt sich graphisch durch Spiegelung an der x-Achse
- Die **Logarithmusfunktion** zur Basis $e \approx 2,718281\ldots$ (eulersche Zahl) bezeichnet man als natürlichen Logarithmus

$$\log_e(x) = \ln x.$$





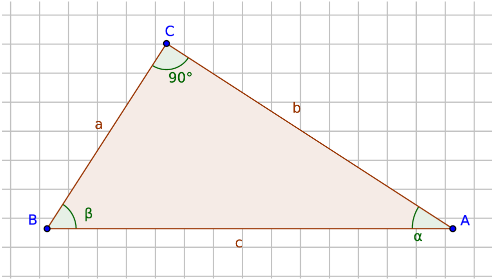
Strahlensatz

In den obigen **ähnlichen** Dreiecken gelten die folgende Verhältnisse:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Nach Umformungen erhält man daraus die Verhältnisse:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}, \qquad \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$



- Ändert man nun die Winkel, so ändern sich die Seitenlängen und damit die Verhältnisse der Seiten.
- Die Verhältnisse hänge also von den spitzen Innenwinkeln ab. Deshalb bezeichnet man diese Verhältnisse als Winkelfunktionen:

$$\text{Sinus } (\sin): \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cosinus } (\cos): \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

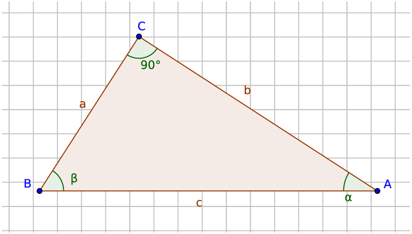
$$\text{Tangens } (\tan): \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Winkelfunktionen

Im rechtwinkligen Dreieck sind die Winkelfunktionen als Verhältnisse der Seiten definiert:

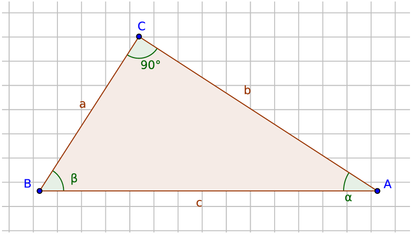
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Aufgrund der Definition sind die Funktionen vorerst auf Werte $\alpha \in (0°, 90°)$ beschränkt.



Für den zweiten spitzen Winkel β gilt analog:

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

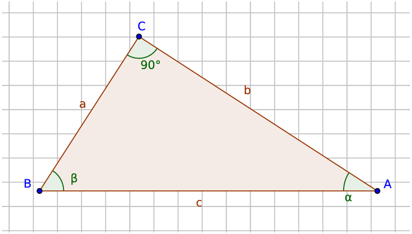


- Der Vergleich zeigt folgende Zusammenhänge:

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta) \qquad \cos(\alpha) = \sin(\beta) \qquad \tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\beta)} = \cot(\beta)$$

- Den Kehrwert der Tangensfunktion bezeichnet man als Kotangensfunktion (cot).
- Berücksichtigt man, dass im rechtwinkligen Dreieck $\beta = 90° - \alpha$ gilt, so folgt ebenfalls:

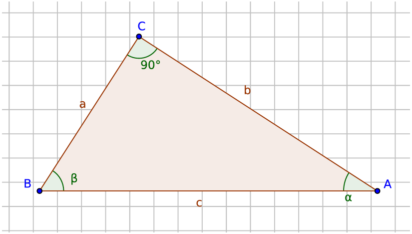
$$\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha) \qquad \cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha) \qquad \tan(\alpha) = \cot(90° - \alpha)$$



- Zusätzlich kann man die Tangensfunktion auch durch die Sinus- und Kosinusfunktion ausdrücken. Es gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

- Entsprechendes gilt für die Kotangensfunktion $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.



- Aus dem Satz des Pythagoras folgt eine weitere **wichtige Beziehung:**

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$
$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

- Anstelle von $(\sin(\alpha))^2$ schreibt man üblicherweise $\sin^2(\alpha)$!

Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen

- ordnen einem Winkel $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ im rechtwinkligen Dreieck ein festes **Seitenverhältnis** zu

  [unabhängig von Seitenlängen]

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b},$$

- können für beliebige Winkel $\alpha > 90^\circ$ **verallgemeinert** werden [Definition am Einheitskreis]

- können unter Verwendung der Bogenlänge auf **reelle Eingabewerte** $x \in \mathbb{R}$ verallgemeinert werden.

  Umrechnung – Grad und Bogenlänge

Grad [DEG]	0°	1°	45°	90°	180°	360°
Bogenlänge [RAD]	0	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

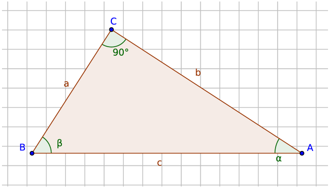
  [Bei Benutzung des Taschenrechner zw. DEG und RAD unterscheiden!]

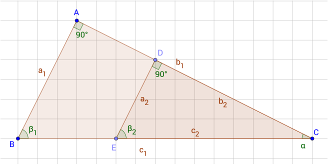
- Die trigonometrischen Funktionen werden so zu reellen Funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

WICHTIGE EIGENSCHAFT: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

[Statt $(\sin(x))^2$ schreibt man meist $\sin^2(x)$, usw.]





Winkel außerhalb $[0^\circ, 90^\circ]$

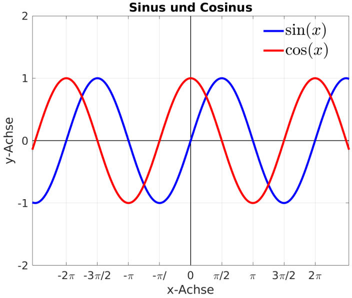
Animation – Einheitskreis

Trigonometrische Funktionen

$$\sin(x) \qquad \text{und} \qquad \cos(x)$$

Für Sinus und Kosinus gilt ($k \in \mathbb{Z}$):

- 2π-periodisch auf $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
  $$\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$$
  $$\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$$
- **beschränkt** durch -1 und $+1$
- **Nullstellen:** $$\sin(k\pi) = 0$$ $$\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$$
- **lokale Maxima:** $$\sin(\pi/2 + 2\pi k) = 1$$ $$\cos(2\pi k) = 1$$
- **lokale Minimum:** $$\sin(3\pi/2 + 2\pi k) = -1$$ $$\cos(\pi + 2\pi k) = -1$$

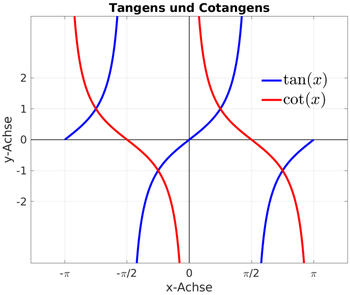


- **Zusammenhang** zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$:
  $$\cos(x) = \sin(x + \pi/2) \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \cos(x - \pi/2)$$
- **Umkehrfunktionen:** existieren nur stückweise
  $$\sin^{-1}(x) : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \qquad \text{und} \qquad \cos^{-1}(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{und} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Für Tangens und Kotangens gilt ($k \in \mathbb{Z}$):

- $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\text{NS von } \cos(x) \text{ bzw. } \sin(x)\}$
- π-periodisch auf $\mathbb{D}$
$$\tan(x + \pi k) = \tan(x)$$
$$\cot(x + \pi k) = \cot(x)$$
- unbeschränkt
- Nullstellen:
$$\tan(k\pi) = 0$$
$$\cot(\pi/2 + k\pi) = 0$$
- keine lokalen Extrema



- Zusammenhang zwischen $\tan(x)$ und $\cot(x)$:
$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \qquad \text{und} \qquad \tan(x) = \frac{1}{\cot(x)}$$
- Umkehrfunktionen: existieren nur stückweise
$$\tan^{-1}(x) : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \qquad \text{und} \qquad \cot^{-1}(x) : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Rationale Funktion

Seien $p(x)$ und $q(x)$ zwei beliebige Polynome. Sei weiter $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen, die keine Nullstelle von $q(x)$ enthält.

Dann bezeichnet man eine Funktion $r(x)$ der folgenden Form als **rationale Funktion**

$$r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \qquad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

- Die Vorgehensweise erinnert an die Konstruktion der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
- Beispiele sind $f(x) = \frac{1}{x}$ oder $f(x) = \frac{1}{x^2}$

  [bereits *bekannt*, vgl. Potenzfunktion $f(x) = x^{-1}$, etc.]
- Oder auch $\frac{5}{x^2}$, $\frac{-1}{x^2}$, $\frac{x^3-8}{x^5}$ und $\frac{x^3-2x^2-8x}{x^2-1}$
- **Bei rationalen Funktionen muss der Definitionsbereich genau betrachtet werden!**

  [im Gegensatz zu Polynomen gilt nicht $\mathbb{D} = \mathbb{R}$]

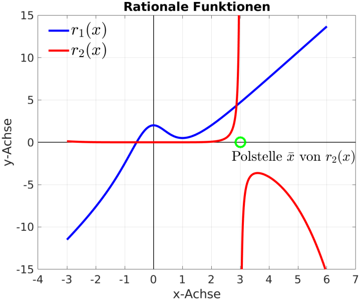
MERKE: Ohne Angabe des Definitionsbereichs ist eine Funktion niemals vollständig!

Betrachten Sie die folgenden rationalen Funktionen

$$r_1(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$r_2(x) = \frac{\frac{1}{100}x^7 - 20x^6 - 3x^3}{20000(x - 3)}$$

$$r_3(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$



Wie lauten die zugehöhrigen Definitionsbereiche?

[Division durch NULL muss vermieden werden.]

- $\hookrightarrow$ $r_1(x)$ hat Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\hookrightarrow$ $r_2(x)$ hat Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $\hookrightarrow$ $r_3(x)$ hat Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$

Polstellen

Als **Polstelle** einer rationalen Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ bezeichnet man eine reelle Zahl $\bar{x} \in \mathbb{R}$, welche Nullstelle des Nenners $q(x)$, nicht aber des Zählers $p(x)$ ist, d.h.

$$q(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad p(\bar{x}) \neq 0.$$

Eine **Polstelle** muss aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von $r(x)$ ausgeschlossen werden.

- Polstellen einer rationalen Funktion sind die **Nullstellen des Nenners**.
- ACHTUNG: Besteht der Nenner aus einem Polynom mit Grad größer gleich 3, so sind die Polstellen nicht immer einfach zu berechnen!

$\hookrightarrow$ **Hilfe: Polynomdivision** [ähnlich zur schriftlichen Division mit Rest.]

Polynomdivision

Die Polynomdivision ist ein Verfahren bei dem ein Polynom durch ein anderes Polynom dividiert wird. Das Ergebnis ist ein “Ganzteil”-Polynom und ggf. ein Restpolynom.

$\hookrightarrow$ Wenn eine Nullstelle x_0 bekannt ist, wird die **Polynomdivision** verwendet, um den Grad der Gleichung sukzessive um Eins zu senken.

$\hookrightarrow$ Andere Anwendungen sind Partialbruchzerlegung oder Kurvendiskussion

Nullstellenbestimmung mit Hilfe der Polynomdivision

1) **Anfangs benötigt man eine erste Nullstelle x_0 des Polynoms $p(x)$ von Grad n**
   - ↪ Diese kann oft durch Probieren (Intervallschchtelung bzw. Raten) herausgefunden werden!
   - ↪ Unter Umständen kann die Suche nach einer ersten Nullstelle sehr kompliziert sein.
2) **Ist x_0 bekannt, so dividiert man das Polynom duch den sog. Linearfaktor $(x - x_0)$**
   - ↪ $(x - x_0)$ ist ebenfalls ein Polynom (Grad 1).
   - ↪ Beim Dividieren wird der Grad des Ausgangspolynoms $p(x)$ um 1 reduziert.
3) **Das Ergebnis der Polynomdivision ist wieder ein Polynom $\tilde{p}(x)$ vom Grad $n - 1$.**
   - ↪ Wiederholung der obigen Schritte reduziert den Grad weiter.
   - ↪ Dadurch vereinfacht sich die Suche sukzessive bis alle Nullstellen gefunden wurden.

[*Sobald ein Polynom von Grad 2 erzeugt wurde, kann man die restlichen nullstellen mit der p-q-Formel berechnen.*]

Beispiel:

Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ **vom Grad** $n = 3$.

- ↪ Wieviele sind es maximal? [Höchstgrad 3 $\Rightarrow$ maximal 3 Nullstellen]
- ↪ RATEN: $x_0 = 1$ ist Nullstelle. [Probe!]

Division von $p(x)$ durch das Polynom $(x - x_0) = (x - 1)$ reduziert den Grad.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad - x^2 - 5x \\
\qquad \underline{-(-x^2 + x)} \\
\qquad\qquad - 6x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Die restlichen Nullstellen von $x^2 - x - 6$ berechnet man mit der p-q-Formel. (maximal 2!)

[$x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{2}}$ und $x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{2}}$]

Man findet also die drei Nullstellen von $p(x)$**:**

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{2}}$$

Übung:

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenen Polynome.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4.$

(b) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12.$ [Eine Nullstelle sei $x_0 = 3$.]

(c) $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ [vgl. oben, Nenner der rationalen Funktion $r_3(x)$]

Weitere Übungsaufgaben und zugehörige Lösungen finden Sie zum Beispiel hier:

- **Vorkurs Mathematik** von E. Cramer & J. Neslehova, Springer, 2012
  Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

  Kapitel 5.6 – Aufgaben zum Abschnitt über Funktionen
  Kapitel 7.4 – Aufgaben zum Thema Polynome

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Einzelne lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Bisher: lineare Gleichungen mit einer Unbekannten: $3x - 4 = 2$

Nun: lineare Gleichungen mit **mehreren Variablen**, **z.B. x und y:** $6x - 3y = 9$

$\hookrightarrow$ Lösung solcher Gleichungen sind alle jene Zahlenpaare $(x; y)$, die beim Einsetzen zu einer wahren Aussage führen

$\hookrightarrow$ Beispielsweise gilt für das Zahlenpaar $(x; y) = (2; 1)$:

$$\begin{aligned} \text{Gleichung:} \quad & 6x - 3y = 9 \\ \text{Einsetzen von } (2; 1): \quad & 6 \cdot \mathbf{2} - 3 \cdot \mathbf{1} = 9 \\ \text{wahre Aussage:} \quad & \underbrace{12 - 3}_{9} = 9 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Weitere Lösungspaare sind:

$(x = 0; y = -3) \quad \rightarrow \quad 6 \cdot \mathbf{0} - 3 \cdot (\mathbf{-3}) = 9$
$(x = 1, y = -1) \quad \rightarrow \quad 6 \cdot \mathbf{1} - 3 \cdot (\mathbf{-1}) = 9$
usw.

Zu gewähltem x findet sich stets ein passendes y, so dass das Paar (x, y) die Gleichung löst.
Es gibt also unendlich viele Lösungspaare einer einzelnen linearen Gleichung mit zwei Unbekannten. z.B. $6x - 3y = 9$

Man betrachte nun **zwei linearen Gleichungen mit je zwei Variablen x und y**.

Lineares Gleichungssystem

Eine Menge von linearen Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen, die **simultan** (gleichzeitig) erfüllt sein sollen, heißt **lineares Gleichungssystem (LGS)**.

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 6x & - & 3y & = & 9 \\ 2x & - & 5y & = & 15 \end{array} \right|$$

↪ LGS aus **zwei Gleichungen** und **zwei Unbekannten**

↪ **Lösung des LGS sind alle Zahlenpaare $(x; y)$**, die beim Einsetzen in beide Gleichungen **gleichzeitig** zu einer wahren Aussage führen

Hier gilt: Das Zahlenpaar $(0; -3)$ ist eine Lösung des LGS **Probe!**

↪ Die **Lösungsmenge** eines LGS bezeichnet man wieder mit $\mathbb{L}$

hier: $\mathbb{L} = \{(x; y) = (0; -3)\}$

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen Gleichungssystems (LGS) kann von folgender Form sein. Das LGS besitzt

(1) **keine** Lösung. $\leftarrow$ Lösungsmethode führt zu allg. falscher Aussage!
$\mathbb{L} = \{\}$ [z.B. $\quad 5 = -3$]

(2) **genau eine** Lösung. $\leftarrow$ Lösungsmethode führt zur eindeutigen Lösung!
$\mathbb{L} = \{(x, y) = (0, -3)\}$
[z.B. $\quad x = 0$ und $y = -3$]

(3) **unendlich viele** Lösungen. $\leftarrow$ Lösungsmethode führt zu allg. wahrer Aussage!
$\mathbb{L} = \{(x, y) = (x, y(x))\}$ [z.B. $\quad 2 = 2$]

Im Fall (3) sind die **unendlich vielen** Lösungen durch die Gleichungen miteinander verbunden. Umstellen einer der Gelichungen nach x oder y liefert dann eine mathematische Beschreibung der Lösungsmenge.

Im folgenden werden zwei Lösungsmethoden für LGS kurz wiederholt:

- Einsetzverfahren
- Additionsverfahren

Einsetzverfahren

Ausgangspunkt ist wieder das LGS:

$$\left|\begin{array}{cccc} 6x & - & 3y & = & 9 \\ 2x & - & 5y & = & 15 \end{array}\right|$$

1) Auflösen einer Gleichungen nach einer der Variablen (hier z.B. nach x):

$$\left|\begin{array}{cccc} & & x & = & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}y \\ 2x & - & 5y & = & 15 \end{array}\right|$$

2) Einsetzen der umgeformten Gleichung in die andere Gleichung:

$$\left|\begin{array}{cccc} & & x & = & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}y \\ 2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{y}\right) & - & 5y & = & 15 \end{array}\right|$$

3) Lösen der entstandenen Gleichung (hier in y):

$$3+y-5y=15$$

$$\Leftrightarrow \quad -4y=12 \qquad \Rightarrow \qquad y=-3$$

4) Einsetzen der Lösung für y in die nach x umgeformten Gleichung:

$$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-3)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L}=\{(x;y)=(0;-3)\}$$

Additionsverfahren

Ausgangspunkt ist wieder das LGS:

$$\begin{vmatrix} 6x- & 3y & = & 9 \\ 2x- & 5y & = & 15 \end{vmatrix}$$

1) Umformen der Koeffizienten vor einer Variablen, so dass dieser Koeffizient einmal **positiv** und einmal **negativ** vor der Variablen auftritt (z.B. vor y):

$$\begin{vmatrix} 6x & -3y & = & 9 \\ 2x & -5y & = & 15 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot(-3) \end{matrix}$$

2) **Addieren** ($\oplus$) der beiden Gleichung (**hier:** zweite zur ersten ↰) liefert:

$$\begin{vmatrix} 30x - 15y & = & 45 \\ -6x + 15y & = & -45 \end{vmatrix} \begin{matrix} ↰ \\ \oplus \end{matrix}$$

3) Die erste Gleichung vereinfacht sich in diesem Fall durch Herausfallen von y. Die andere Gleichung wird unverändert übernommen.

$$\begin{vmatrix} 24x - 0 \cdot y & = & 0 \\ -6x + 15y & = & -45 \end{vmatrix}$$

4) Lösen der entstandenen Gleichung (in x) liefert:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ -6x + 15y &= -45 \end{aligned}$$

5) Einsetzen von $x = 0$ in die zweite Gleichung ergibt dann:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -\frac{6}{15} \cdot \mathbf{0} - \frac{45}{15} = -3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \{(x; y) = (0; -3)\} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- ↪ Einsetzverfahren erscheint im Fall der LGS mit zwei Gelichungen und zwei Variablen noch einfacher
- ↪ Mit wachsender Zahl von Gleichungen und Unbekannten gewinnt jedoch das Additions verfahren an Bedeutung (**Vorteile:** Übersichtlichkeit, Implementation, ...).
- ↪ Eine Verfeinerung des Additionsverfahren stellt das Gaußsche Eliminationsverfahren dar.

Graphische Lösung von LGS

Im Fall eines **LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen** lässt sich die Situation auch graphisch veranschaulichen.

- Ausgehend vom LGS

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \end{array} \quad \left| \begin{array}{rrcr} 4x & +2y & = & 8 \\ 15x & -5y & = & -5 \end{array} \right|$$

  löst man dazu beide Gleichungen nach derselben Variable auf (HIER: y)

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \end{array} \quad \left| \begin{array}{lcr} y & = & -2x+4 \\ y & = & 3x-1 \end{array} \right|$$

- Die y Werte hängen in dieser Darstellung von den eingesetzten x Werten ab. Auffassen der RECHTEN SEITEN als lineare Funktionen von x

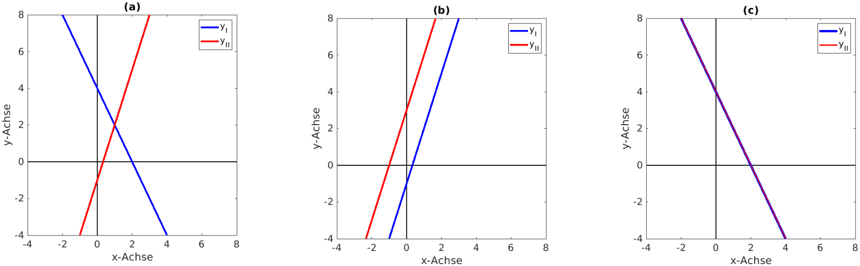
  (I) lineare Funktion $\longrightarrow$ $y_I(x) = -2x + 4$ (Steigung $k = -2$, y-Achsenabs. $d = 4$)
  (II) lineare Funktion $\longrightarrow$ $y_{II}(x) = 3x - 1$ (Steigung $k = 3$, y-Achsenabs. $d = -1$)

- Diese linearen Funktionen lassen sich dann in ein zweidimensionales Koordinatensystem einzeichnen. Die Lager der Funktionsgraphen zueinander liefert dann die Lösung des LGS.

  (a) $y_I(x)$ und $y_{II}(x)$ schneiden sich $\Rightarrow$ $\exists$ eindeutige Lösung (Schnittpunkt)
  (b) $y_I(x)$ und $y_{II}(x)$ sind parallel $\Rightarrow$ $\nexists$ Lösung
  (c) $y_I(x)$ und $y_{II}(x)$ sind identisch $\Rightarrow$ $\exists$ unendl. viele Lösungen

Graphische Lösung von LGS

Drei Situationen:



- $\exists$ eindeutige Lösung
- Schnittpunkt $(x; y) = (1; 2)$
- lineare Fkt.'en haben unterschiedliche Steigung

- $\nexists$ Lösung
- kein Schnittpunkt
- lineare Fkt.'en haben gleiche Steigung
- ABER unterschiedliche y-Achsenabschnitte

- $\exists$ ∞-viele Lösungen
- ∞-viele Schnittpunkte
- lineare Fkt.'en haben gleiche Steigung
- UND gleiche y-Achsenabschnitte

Weitere Beispiele:

$$(a) \quad \left| \begin{array}{rcr} -2x - 5y & = & 10 \\ 3x + 6y & = & 18 \end{array} \right|$$

$$(b) \quad \left| \begin{array}{rcr} 4x - 2y & = & 8 \\ 6x - 3y & = & 14 \end{array} \right|$$

$$(c) \quad \left| \begin{array}{rcr} 4x - y & = & 5 \\ 12x - 3y & = & 15 \end{array} \right|$$

Zusätzliche Übungsaufgaben und zugehörige Lösungen finden Sie zum Beispiel hier:

- **Vorkurs Mathematik** von E. Cramer & J. Neslehova, Springer, 2012
  Über die Bibliothek als eBook verfügbar!

  Kapitel 6.11 – Aufgabe 6.18