どの知識を選んで認識する？

誰？

どの知識を選んで認識する？

誰？

Extended Yale Face Database B

大量の知識の中から,
　　質問に対して<u>簡潔な説明</u>が作れる知識を選ぶ.

- 簡潔な説明＝厳選した少数の知識の組合せ

どの原料を選んで合成する？

質問画像
$\boldsymbol{b}$

- 質問画像の合成

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}^{(1)} + x_2\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + x_n\boldsymbol{a}^{(n)}$$

- 簡潔な説明＝使う画像の係数 x_j だけが非ゼロ
（疎, スパース(**sparse**)）

連立一次方程式 ＝ 配合量を求める問題

混合物 $\boldsymbol{b}$ は,

- どの材料（＝ベクトル $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$）が使われているか？
- それぞれの配合量（＝ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ）はいくらか？

$$x_1 \boldsymbol{a}^{(1)} + x_2 \boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + x_n \boldsymbol{a}^{(n)} = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{a}^{(1)} \cdots \boldsymbol{a}^{(n)}\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

例：

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

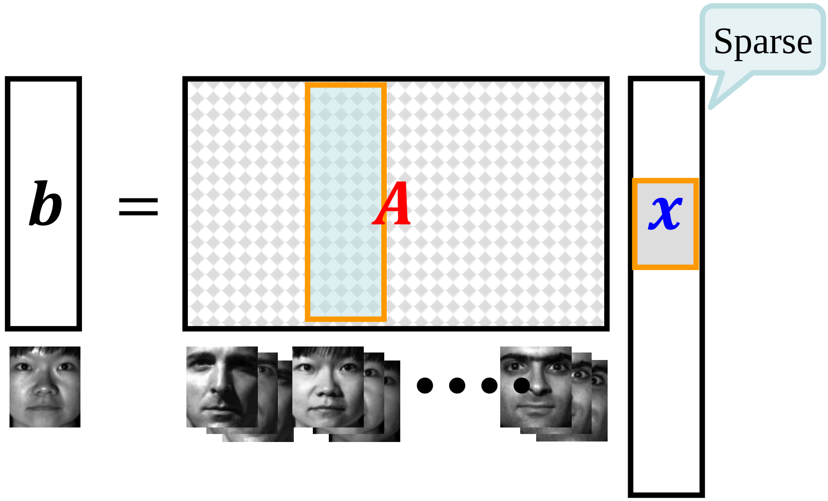
スパース表現に基づくパターン認識

[Wright+, 09]

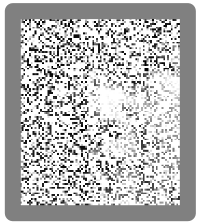
データ $\boldsymbol{b}$ を簡潔に合成できる少数の原料を特定する.

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}^{(1)} + x_2\boldsymbol{a}^{(2)} + \cdots + x_n\boldsymbol{a}^{(n)}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)} & \boldsymbol{a}^{(2)} & \cdots & \boldsymbol{a}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

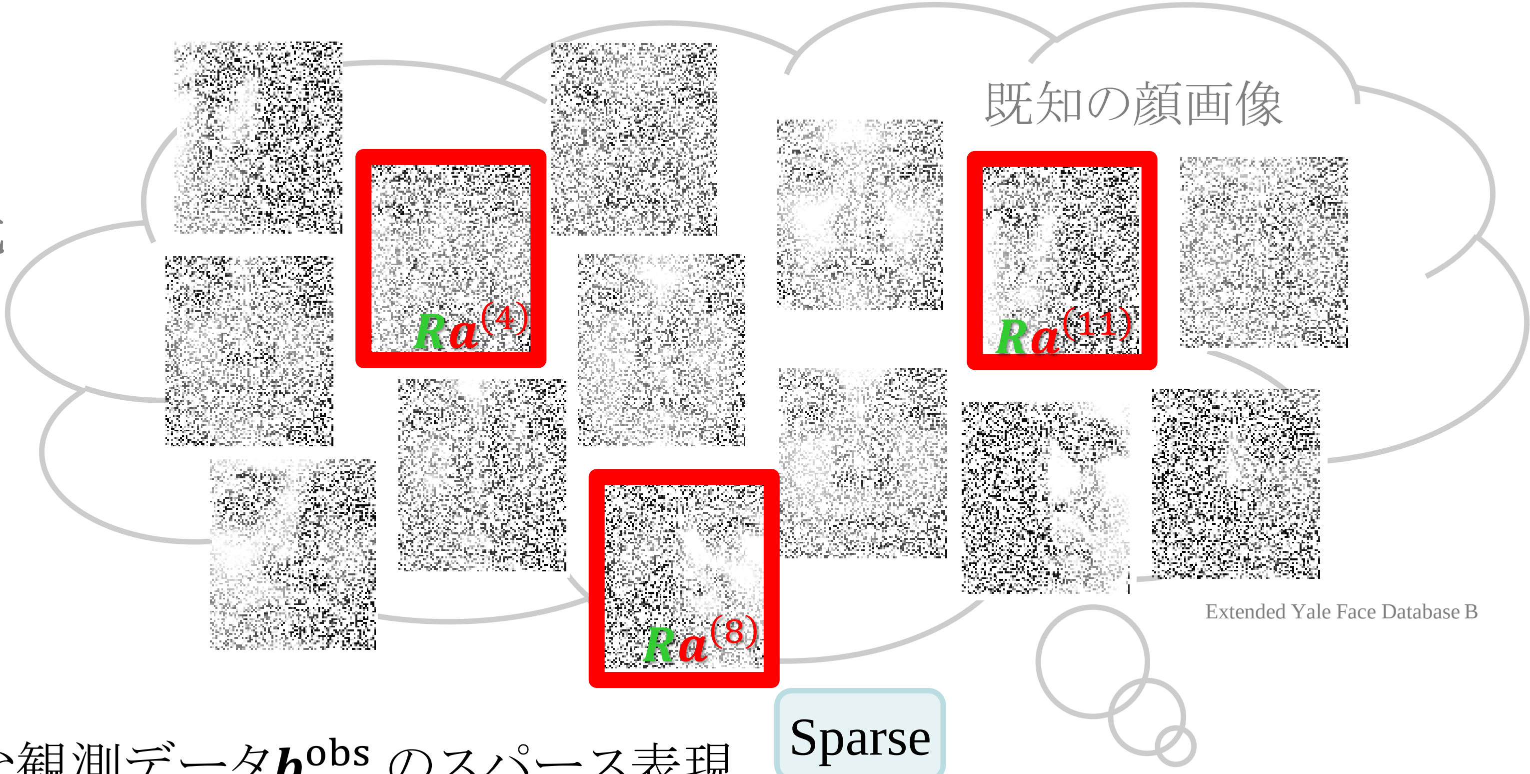


観測が不完全でも認識できる



ランダム標本化

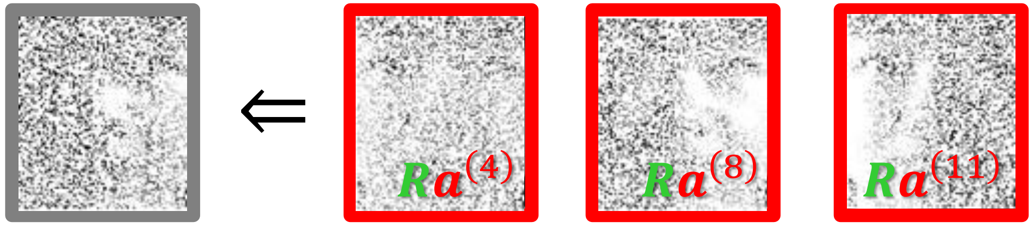
$\boldsymbol{b}^{\mathrm{obs}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{b}$



Sparse

- 不完全な観測データ$\boldsymbol{b}^{\mathrm{obs}}$ のスパース表現

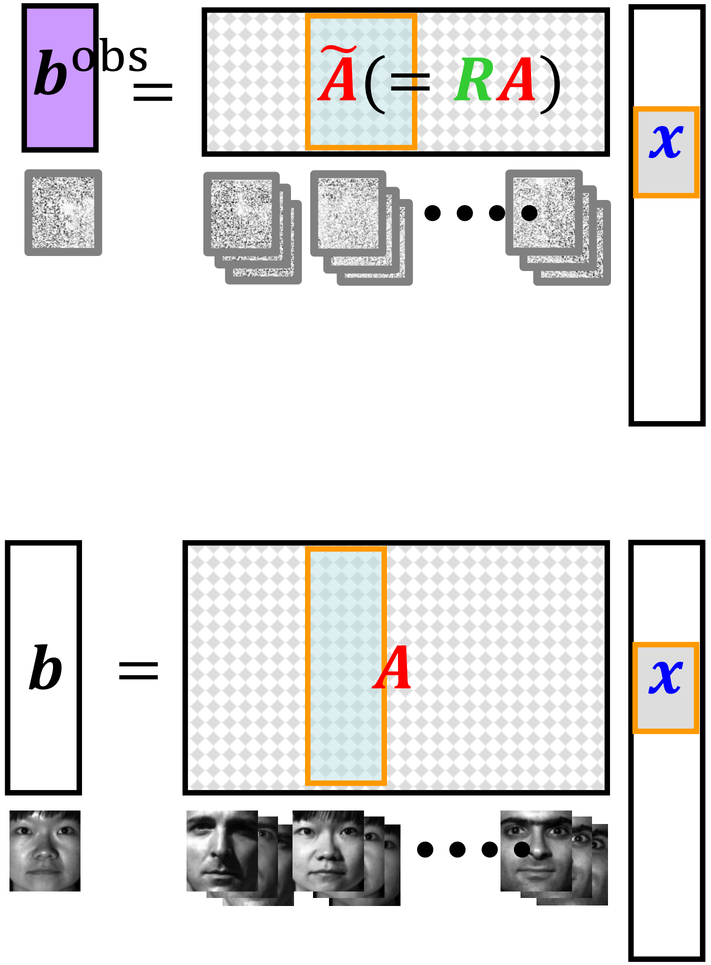
$$\boldsymbol{b}^{\mathrm{obs}} = x_1 \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + x_n \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{(n)} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \quad (\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A})$$



スパース表現に基づくパターン認識

[Wright+, 09]

(1) 不完全なデータ$\boldsymbol{b}^{\mathrm{obs}}$
を上手に取得する.

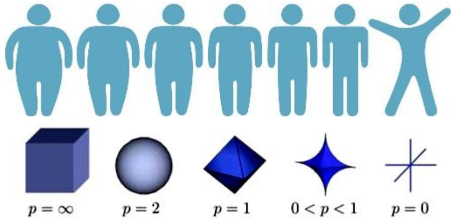


(2) 適切な辞書(原料の集合)
を用いてスパース解 $\boldsymbol{x}$ を求める.

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}} \; \|\boldsymbol{x}\|_0 \;\; \text{subject to} \;\; \widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \approx \widetilde{\boldsymbol{b}}$$

(3) 非ゼロ成分で判別できる.

スパース解をもつ凸緩和問題



- BP: Basis pursuit

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}}\ \|\boldsymbol{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

- BP$_\delta$: Constrained BP denoising

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}}\ \|\boldsymbol{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 \le \delta$$

- LASSO: least absolute shrinkage and selection operator

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}}\ \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2 \quad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{x}\|_1 \le \tau$$

- LASSO regression / unconstrained BP denoising (BPDN) / ℓ_1-regularized least squares (ℓ_1-LS)

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}}\ \frac{1}{2}\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 + \lambda\|\boldsymbol{x}\|_1$$

貪欲法

問　なるべく少ない枚数のコインで623円を作る手順を説明せよ.
ただし, 説明相手は小学校1年生で,
数の大小と, 足し算, 引き算しか知らないものとする.

OMP

Orthogonal matching pursuit

$$\underset{\boldsymbol{x}}{\text{Minimize}}\ \|\boldsymbol{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Repeat:

- pick up $\boldsymbol{a}^{(s)}$ which is most similar to the residual $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, and update $T \leftarrow T \cup \{s\}$;
- estimate the nonzeros $\boldsymbol{x}_T$ by least squares ($\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$);

```
def OMP(A, b, tol=1e-5, maxnnz=np.inf):
    m, n = A.shape
    supp = []
    x = np.zeros(n)
    r = b.copy()
    while len(supp) < maxnnz and linalg.norm(r) > tol:
        s = np.argmax(np.abs( A.T.dot(r) ))
        supp.append(s)
        Asupp = A[:,supp]
        x[supp] = np.linalg.lstsq(Asupp, b)[0]
        r = b - Asupp.dot(x[supp])
    return x
```

例

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
x = [0.00,  0.00,  0.00,  0.00,  0.00]'
r = [2.00,  -2.00,  -1.00,  -1.00]'
c = [2.00,  -3.00,  -4.00,  -1.00,  -1.00]'
s = 3
T = [3]
x = [0.00,  0.00,  -0.57,  0.00,  0.00]'
r = [2.57,  -0.86,  -0.43,  -0.43]'
c = [2.57,  -1.29,  -0.00,  -0.43,  -0.43]'
s = 1
T = [3  1]
x = [3.00,  0.00,  -1.00,  0.00,  0.00]'
r = [-0.00,  0.00,  0.00,  0.00]'
```

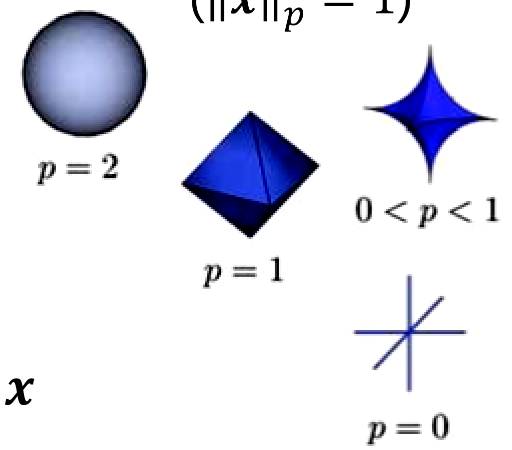
How to count nonzeros?

Sparsity-inducing norms ($p \leq 1$)

ℓ_pノルム $\quad \|\boldsymbol{x}\|_p^p = |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p$

- $p = 2 \quad \ell_2$ノルム $\quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$
- $p = 1 \quad \ell_1$ノルム $\quad \|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $p \to 0 \quad \ell_0$ノルム $\quad \lim_{p\to 0} \|\boldsymbol{x}\|_p^p =$ **# of nonzero entries of $\boldsymbol{x}$**

ℓ_p-ball
($\|\boldsymbol{x}\|_p^p = 1$)




```
import numpy as np
# define a function of computing Lp norm to the power p
lpnormp = lambda x,p: sum(abs(x)**p)

# observe if the Lp norm converges to no. of nonzeros if p->0
x = np.array([1, 2, 0, 3, 0, 0, 4])
print(lpnormp(x, 1))        # 10
print(lpnormp(x, 0.5))      # 6.14626436994
print(lpnormp(x, 0.1))      # 4.33659499157
print(lpnormp(x, 0.01))     # 4.03196172178
```