

どの知識を選んで認識する？



誰？



?????



どの知識を選んで認識する？



大量の知識の中から、
質問に対して簡潔な説明が作れる知識を選ぶ。

- 簡潔な説明＝厳選した少数の知識の組合せ



どの原料を選んで合成する？



- 質問画像の合成

$$b = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)}$$

- 簡潔な説明＝使う画像の係数 x_j だけが非ゼロ
(疎, スパース(sparse))



連立一次方程式 = 配合量を求める問題

混合物 \mathbf{b} は,

- どの材料 (= ベクトル $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$) が使われているか?
- それぞれの配合量 (= x_1, x_2, \dots, x_n) はいくらか?

$$x_1 \mathbf{a}^{(1)} + x_2 \mathbf{a}^{(2)} + \dots + x_n \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}^{(1)} \dots \mathbf{a}^{(n)}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

例:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

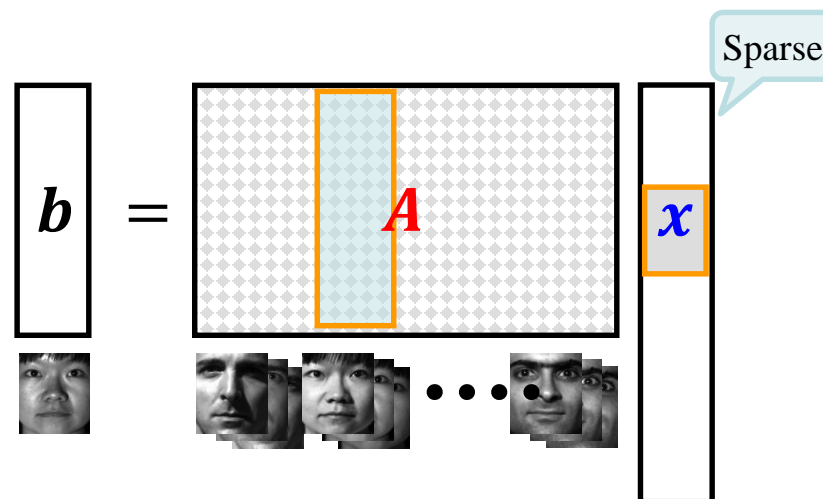
スパース表現に基づくパターン認識

[Wright+, 09]

データ \mathbf{b} を簡潔に合成できる少数の原料を特定する.

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}^{(1)} + x_2 \mathbf{a}^{(2)} + \cdots + x_n \mathbf{a}^{(n)}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} & \mathbf{a}^{(2)} & \cdots & \mathbf{a}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



どの原料を選んで合成する？



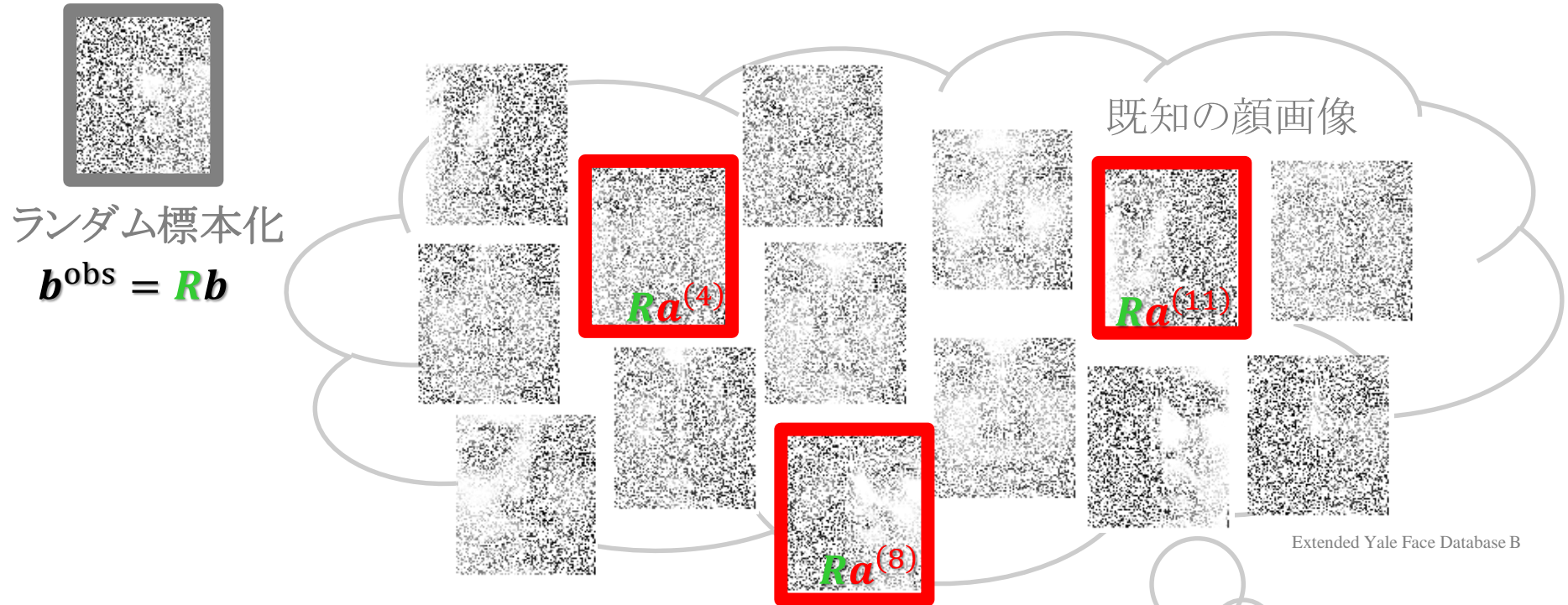
- 質問画像の合成

$$b = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)}$$

- 簡潔な説明＝使う画像の係数 x_j だけが非ゼロ
(疎, スパース(sparse))

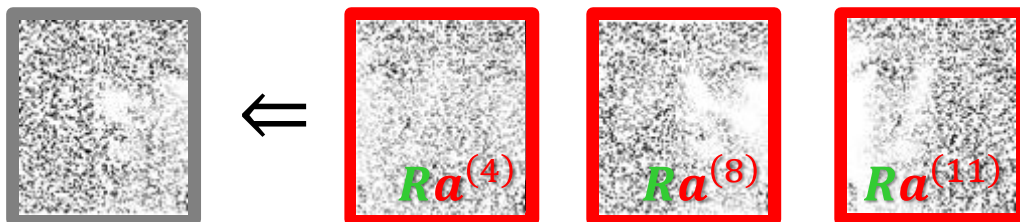


観測が不完全でも認識できる



- 不完全な観測データ b^{obs} のスパース表現
- $$b^{\text{obs}} = x_1 Ra^{(1)} + \dots + x_n Ra^{(n)} = \tilde{A}x \quad (\tilde{A} = RA)$$

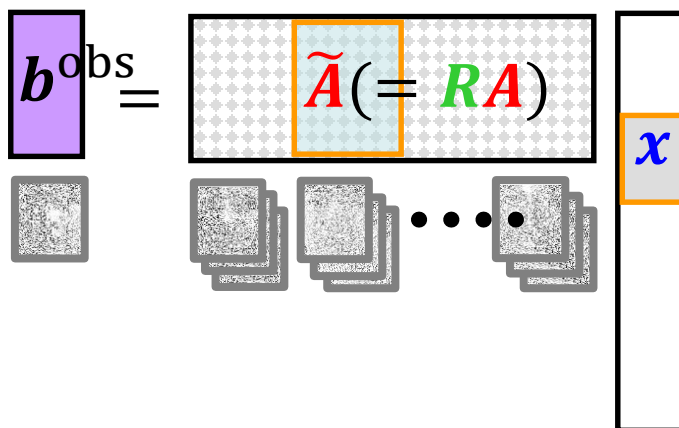
Sparse



スパース表現に基づくパターン認識

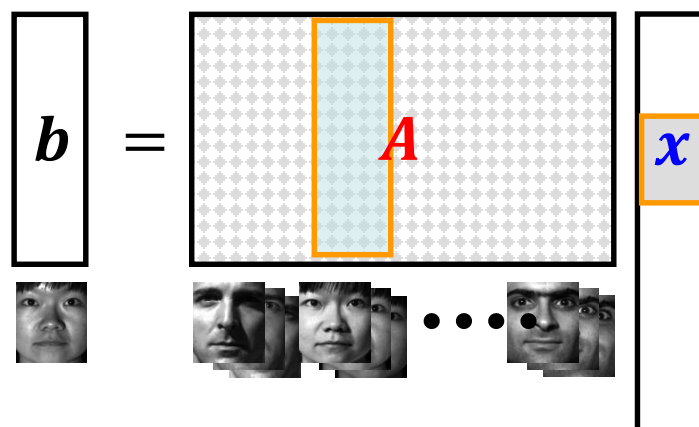
[Wright+, 09]

(1) 不完全なデータ \mathbf{b}^{obs}
を上手に取得する.



(2) 適切な辞書 (原料の集合)
を用いてスパース解 \mathbf{x} を求める.

Minimize $\|\mathbf{x}\|_0$ subject to $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \approx \tilde{\mathbf{b}}$

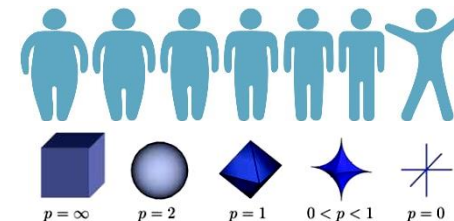


(3) 非ゼロ成分で判別できる.

スパース解をもつ凸緩和問題

- BP: Basis pursuit

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



- BP_δ : Constrained BP denoising

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2 \leq \delta$$

- LASSO: least absolute shrinkage and selection operator

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq \tau$$

- LASSO regression / unconstrained BP denoising (BPDN) / ℓ_1 -regularized least squares (ℓ_1 -LS)

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1$$

貪欲法

問 なるべく少ない枚数のコインで623円を作る手順を説明せよ.
ただし, 説明相手は小学校1年生で,
数の大小と, 足し算, 引き算しか知らないものとする.



$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize }} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



Repeat:

- pick up $\mathbf{a}^{(s)}$ which is most similar to the residual $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$, and update $T \leftarrow T \cup \{s\}$;
- estimate the nonzeros \mathbf{x}_T by least squares ($\mathbf{r} \perp \mathbf{Ax}$);

```
def OMP(A, b, tol=1e-5, maxnnz=np.inf):
    m, n = A.shape
    supp = []
    x = np.zeros(n)
    r = b.copy()
    while len(supp) < maxnnz and linalg.norm(r) > tol:
        s = np.argmax(np.abs( A.T.dot(r) ))
        supp.append(s)
        Asupp = A[:,supp]
        x[supp] = np.linalg.lstsq(Asupp, b)[0]
        r = b - Asupp.dot(x[supp])
    return x
```

例 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

```
x = [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00]'
r = [2.00, -2.00, -1.00, -1.00]'
c = [2.00, -3.00, -4.00, -1.00, -1.00]'
s = 3
T = [3]
x = [0.00, 0.00, -0.57, 0.00, 0.00]'
r = [2.57, -0.86, -0.43, -0.43]'
c = [2.57, -1.29, -0.00, -0.43, -0.43]'
s = 1
T = [3 1]
x = [3.00, 0.00, -1.00, 0.00, 0.00]'
r = [-0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00]'
```

How to count nonzeros?

Sparsity-inducing norms ($p \leq 1$)

ℓ_p ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p$$

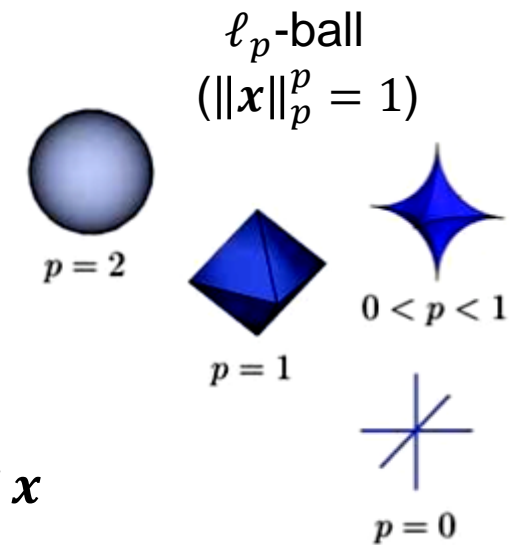
- $p = 2$ ℓ_2 ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

- $p = 1$ ℓ_1 ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

- $p \rightarrow 0$ ℓ_0 ノルム $\lim_{p \rightarrow 0} \|\mathbf{x}\|_p^p = \text{\# of nonzero entries of } \mathbf{x}$



```
import numpy as np
# define a function of computing Lp norm to the power p
lpnormp = lambda x,p: sum(abs(x)**p)

# observe if the Lp norm converges to no. of nonzeros if p->0
x = np.array([1, 2, 0, 3, 0, 0, 4])
print(lpnormp(x, 1))           # 10
print(lpnormp(x, 0.5))         # 6.14626436994
print(lpnormp(x, 0.1))         # 4.33659499157
print(lpnormp(x, 0.01))        # 4.03196172178
```

