

# Sincronização de Sistemas Caóticos

**Heloísa Junqueira Barbosa**

*Universidade de São Paulo/ Escola de Engenharia de São Carlos*

[heloisajunqueirab@usp.br](mailto:heloisajunqueirab@usp.br)

## Resumo

Sistemas caóticos são de difícil estudo devido a suas características de imprevisibilidade, não linearidade, sensibilidade às condições iniciais, porém tais sistemas estão presentes na maioria dos fenômenos físicos da natureza, tais como a mudanças climáticas, fluxo turbulento de uma corredeira, ritmo dos batimentos cardíacos, dentre tantos outros exemplos. Para o estudo de tais sistemas utiliza-se a simulação numérica e a aproximação analítica, porém neste projeto será abordado o estudo de tais sistemas utilizando-se a modelagem através de circuitos eletrônicos, onde é possível um estudo mais detalhado dos espaços de parâmetros em relação a outros métodos numéricos. Neste estudo foi modelado o sistema massa-mola e montado o modelo eletrônico em *protoboard* e através de um osciloscópio foi monitorado principalmente os parâmetros de distância e velocidade do circuito. Através desta análise pode-se verificar as propriedades dos sistemas caóticos tais como não linearidade, sensibilidade às condições iniciais e constatar os pontos no espaço de fase em que tais sistemas são caóticos, pontos estes onde há a quebra de linearidade. Através destas pesquisas constatou-se que tais sistemas são caóticos e que somente alterando-se alguns padrões e componentes no circuito eletrônico podemos simular a variação de parâmetros que ocorrem nos sistemas mecânicos que são simulados.

**Palavras Chaves:** sistemas caóticos, modelagem, circuitos eletrônicos.

## Abstract

Chaotic systems are difficult to study due to its characteristics of unpredictability, nonlinearity, sensitivity to initial conditions, but such systems are present in most physical phenomena, such as climate change, turbulent flow of a **corredeira**, rhythm of heart beats, among many other examples. For the study of such systems we use the numerical simulation and the analytical approach, but this project will embroidery the study of such systems using modeling through electronic circuits, where it is possible a more detailed study of the parameter spaces in relation other numerical methods. This study modeled the mass-spring system and mounted electronic protoboard model and through an oscilloscope was mainly monitored parameters of distance and speed of the circuit. Through this analysis, one can check the properties of chaotic systems such as non-linearity, sensitivity to initial conditions and observe points in phase space where such systems are chaotic, these points where there is a break linearity. Through these studies it was found that such systems are chaotic and who only change some standards and components in electronic circuit we can simulate the change of parameters that occur in mechanical systems are simulated. And through this circuit we study the synchronization of this system in future stages of the project, so that it be applied in the area of telecommunications.

**Key words:** chaotic systems, modeling, electronic circuits.

## Introdução

Muito antes de se determinar a teoria do Caos, uma de suas características começou a ser observada por Aristóteles, a sensibilidade às condições iniciais, onde o mesmo constatou que *"O menor desvio inicial da verdade é multiplicado mais tarde por mil vezes"*. Porém tal parâmetro somente foi posteriormente estudado a fundo por Edward Lorenz em seus estudos sobre meteorologia. Onde em suas simulações computacionais observou que somente um pequeno arredondamento de casas decimais em suas condições iniciais, provocava uma enorme mudança climática em suas simulações.[1]

A partir desta época a teoria do Caos vem sendo estudada por vários cientistas e através desses estudos foram descobertas as principais características que descrevem os sistemas Caóticos: são sistemas dinâmicos, que se alteram com o decorrer do tempo; são determinísticos, pois com o decorrer do tempo somente um estado atual dá origem a um estado futuro; não lineares, sistemas que não atendem ao

princípio da superposição, consequentemente uma alteração proporcional nas condições iniciais, não resulta em uma também proporcional mudança na resposta do sistema; sensibilidade as condições iniciais, como descrito anteriormente uma pequena mudança nas condições iniciais pode gerar uma grande mudança na resposta do sistema, tornando-o imprevisível.

Para o estudo de tais sistemas atualmente lança-se mão de métodos tais como simulação numérica e aproximação analítica. Porém neste trabalho, o método de análise para tais sistemas utiliza-se da analogia juntamente com a modelagem de sistemas. Modelos físicos distintos podem ser comparados através de equações matemáticas idênticas, por exemplo, nesta pesquisa onde é feita uma analogia entre um fenômeno elétrico e outro mecânico. Tal analogia pode ser feita através da modelagem de um sistema físico, sistema massa mola, e a partir de uma analogia à uma modelagem eletrônica, obteve-se o circuito elétrico equivalente utilizando diodos, capacitores e resistores.

## Objetivos

Na primeira parte do trabalho foi feita a modelagem e a simulação do sistema massa-mola na presença do atrito seco. Constatado as características caóticas do sistema, foi então estudada a modelagem do sistema tratado no trabalho de S.W.Shaw[2] e que também foi estudado na tese de Gonçalves [3].

Tal estudo servirá posteriormente para a sincronização e posteriormente podendo atuar, por exemplo, como uma forma de criptografia do canal de telecomunicações.

## Materiais e Métodos

Neste trabalho foi utilizada a modelagem do sistema mecânico, onde utilizou-se das equações físicas que regem o modelo massa mola em presença de atrito viscoso e seco obtendo a equação 1.1. Para a analogia entre as equações, foi adotada uma equação geral com parâmetros arbitrários equação 1.2, então normalizou-se a mesma até chegar em uma equação final 1.3. A partir deste método e de posse da equação de cada componente do circuito eletrônico, utilizou-se o mesmo método de normalização e chegou-se a equação final 1.4. Que é análoga matematicamente a equação 1.1 e 1.3 e a partir destas analogias foi montado o circuito eletrônico que é mostrado na Figura 1.1, para uma melhor visualização dos parâmetros utilizou-se a Tabela 2.1

$$m \frac{\partial x}{\partial t} + f \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + kx = F e(t) \quad 1.1$$

$$\frac{a}{c} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{b}{c} \frac{\partial y}{\partial t} - f \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{d}{c} y = \frac{P(t)}{c} \quad 1.2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{\partial z}{\partial \tau} + z = p(\tau) \quad 1.3$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R1} \left( \frac{RfR2C2}{C1} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \tau} + \arcsin \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) \frac{Vo}{2Io} \right) \sqrt{\frac{C2}{RfC1R2}} + x = \frac{-Rf}{ReVo} y \sin(\Omega \tau) \quad 1.4$$

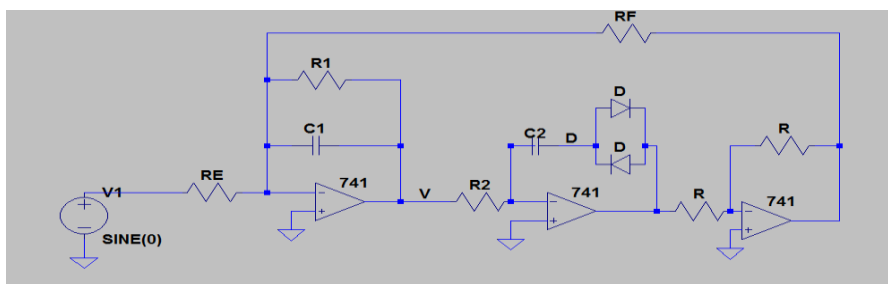


Figura 1.1: Circuito eletrônico análogo ao sistema mecânico com atrito seco e viscoso.

Tabela de analogia entre os parâmetros

Equação Base	Massa-Mola	Circuito Eletrônico
y	Posição x	Tensão no pt. V V
dy/dt	Velocidade dx/dt	Proporcional a $V_c = -R_2C_2 dV/dt$
a	Massa m	$C_1R_2C_2$
b	Constante de Atrito Viscoso k	$R_2C_2/R_1$
cy	Força de Resistividade da Mola kx	Corrente de Realimentação $V/R_F$
c	Constante de Resistividade da Mola k	$1/R_F$
f(dy/dt)	Força de Atrito Seco: f(dx/dy)	Corrente Devido a $V_D/R_F$
pe(t)	Força Externa Aplicada F(t)	Corrente Externa Aplicada $I_{re} = -V_E(t)/R_E$ $(C_1R_2C_2R_F)^{-1/2}$
Frequência Natural $\omega_0 = \sqrt{c/a}$	$\sqrt{k/m}$	$R_2C_2R_F/R_1$
Tempo de Amortecimento $t_a = b/c$	k/m	$R_1\sqrt{C_1/R_F R_2C_2}$
Fator de Qualidade $Q = \sqrt{ac}/b$	$\sqrt{k/m}/k$	

Tabela 2.1- Gonçalves[3]

Na segunda etapa deste trabalho do partiu-se então para a variação destes parâmetros físicos e consequentemente eletrônicos, para uma melhor compreensão do comportamento caótico. Esta variação é apresentada no artigo de S.W.Shaw[2], onde é tratado o parâmetro  $Q < 0$ , para este circuito não há a presença de dissipação viscosa, havendo somente a ação de um termo externo senoidal ( $p(\tau) = p_1 \sin(\Omega\tau)$ ), onde é variada somente a frequência deste termo.

## Resultados

Através da simulação do circuito sem a presença de dissipação viscosa e com  $Q < 0$ , estudado no artigo de S.W.Shaw[2], obteve-se as Figuras 3.1 onde não fica evidente o comportamento caótico do sistema, pelo fato de não apresentar claramente que se trata de um movimento com período dois, supõe-se que seja pelo fato de imprecisão do aparelho e outros fatores. Porém ao observar-se os espaços de fase, na Figura 3.1b, de velocidade pela distância, observa-se a quebra de simetria nas laterais do espaço de fase, representando um movimento de período 2, consequentemente caracterizando um sistema caótico. Abaixo estão ilustrados alguns espectros de fase que validam o circuito tratado também na tese de Gonçalves [3].

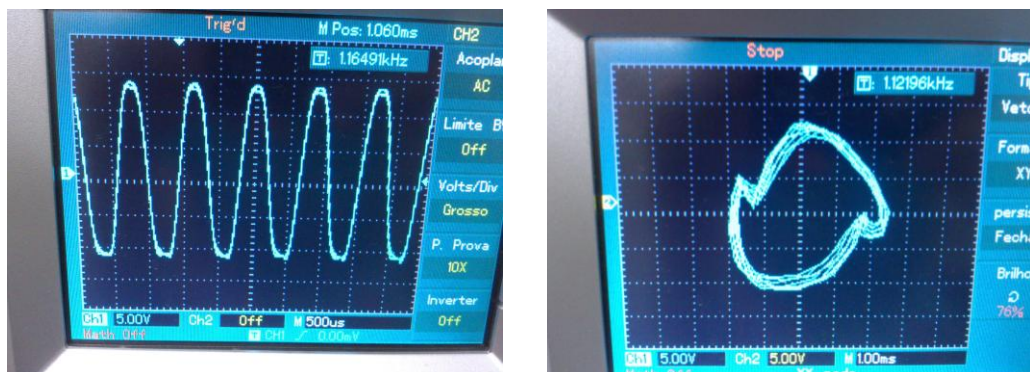


Figura 3.1: parâmetros  $\alpha = -0,1$ ,  $p_1 = 3$  e  $\Omega = 0,055$  para : a) distância x tempo com período 2 com uma parada por ciclo; b) Espaço de fase da velocidade x distancia com período 2 com uma parada por ciclo

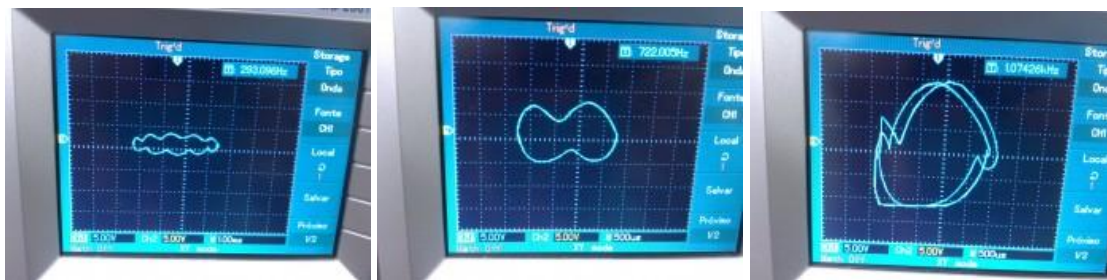


Figura 3.2: Espaço de fase da velocidade x distancia com periodo 2 com uma parada por ciclo com os parâmetros  $\alpha = -0,1$ ,  $p_1=3$ ; a)  $\Omega=0,013$  b)  $\Omega=0,03$  c)  $\Omega=0,04$

Através da variação da amplitude do sinal verificamos a sua não linearidade. A comparação da Figuras 3.3a e 3.3b onde para uma baixa amplitude, Figura 3.3a pode ser observado um achatamento na parte superior do gráfico, o que indica que são posições onde não há uma variação da distancia com o tempo, porém com um aumento desta amplitude, Figura 3.3b essas regiões desaparecem, evidenciando assim a propriedade e não linearidade do sinal.

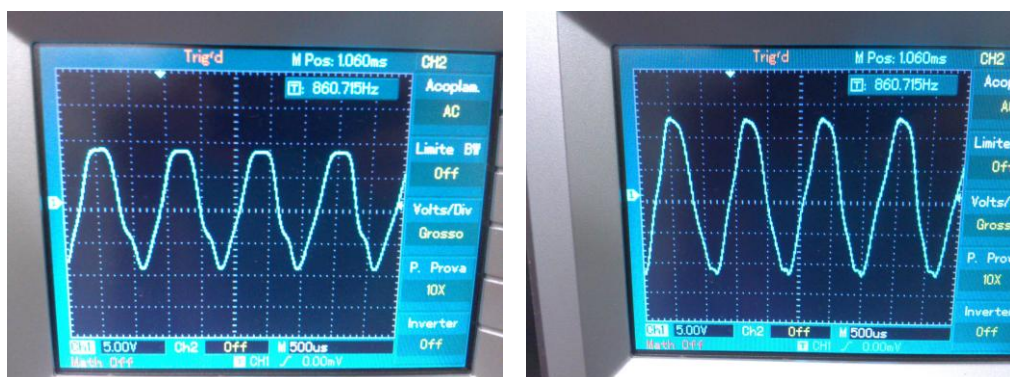


Figura 3.3: Distância x tempo com periodo 2 com uma parada por ciclo com os parâmetros  $\alpha = -0,1$ ,  $\Omega=0,039$ ; a)  $p_1=3$  b)  $p_1=6$

## Conclusões

A partir dos resultados obtidos observa-se que a modelagem do sistema através de um circuito eletrônico se torna eficiente para o estudo dos parâmetros que regem o sistema mecânico. Pode-se reproduzir os trabalhos de S.W.Shaw[2] e Gonçalves [3] neste trabalho através de resultados satisfatórios, onde levou-se em conta os resultados qualitativos através dos resultados obtidos através dos espectros de fase do circuito. A partir destes resultados verificou-se as características do sistema caótico, tais como a sensibilidade as condições iniciais, não linearidade do sistema, dentre outros, servindo para uma melhor compreensão da dinâmica de tais sistemas e estudar com maior detalhe seus parâmetros.

Tais resultados servirão a uma posterior sincronização do sistema, através de um circuito mestre-escravo, o qual está em estudo porém ainda não foi implementado, e para que posteriormente estudasse sua aplicação na área de segurança em telecomunicações, podendo servir como uma criptografia do canal de comunicações.

## Referências Bibliográficas

- [1] Lorenz, Edward N., 1963: Deterministic Nonperiodic Flow
- [2] S. W. Shaw, 1985, Journal of Sound and Vibration, 108(2) , p.305-325
- [3] Gonçalves, L. N., (1990). Modelos eletrônicos do atrito seco, sistemas biestáveis e colisões inelásticas. Dissertação (Mestrado)-Instituto de Física e Química de São Carlos- Departamento de Física e Ciências dos Materiais, Universidade de São Paulo, 1990.