Projet ECMA - MPRO 2022-2023

Camille Richer, Héloïse Gachet

Exercice 1. Modélisation papier

1. Modélisation du problème statique sous la forme d'un PLNE

On cherche à partitionner les sommets d'un graphe non orienté complet $G = (V, E)$ avec des longueurs d'arêtes l_{ij} et des poids de sommets w_i en K parties de poids maximum B, de façon à minimiser le poids des arêtes à l'intérieur des parties.

On définit les variables de décision suivantes :

$$\forall u, v \in \{1, \dots, n\} : x_{uv} = \begin{cases} 1 \text{ si } u \text{ et } v \text{ sont dans la même partie} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\forall v \in V, \forall k \in \{1, \dots, K\} : y_{vk} = \begin{cases} 1 \text{ si } v \text{ est dans la partie } k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} & \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} l_{ij} x_{ij} & \\ s.c. & \sum\limits_{k=1}^{K} y_{ik} = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} w_i y_{ik} \leq B & \forall k \in \{1, \dots, K\} \\ & y_{ik} + y_{jk} \leq x_{ij} + 1 & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \\ & x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \end{cases}$$

2. Modélisation du problème robuste sous la forme d'un programme en nombres entiers

Avec les mêmes variables de décision, on écrit le problème robuste :

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} & \max\limits_{l^1 \in \mathcal{U}^1} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} l_{ij}^1 x_{ij} & & \\ s.c. & \sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2 y_{ik} \leq B & \forall k \in \{1, \dots, K\}, \forall w^2 \in \mathcal{U}^2 & (1) \\ & \sum\limits_{k=1}^{K} y_{ik} = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} & (2) \\ & y_{ik} + y_{jk} \leq x_{ij} + 1 & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} & (3) \\ & x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} & (4) \end{cases}$$

3. Résolution par plans coupants et LazyCallback

a/ On fait apparaître la robustesse dans les contraintes plutôt que dans l'objectif :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min\limits_{x,y,z} & z & \\ s.c. & z \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} l_{ij}^1 x_{ij} & \forall l^1 \in \mathcal{U}^1 \\ & \sum\limits_{k=1}^{K} y_{ik} = 1 & \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2 y_{ik} \leq B & \forall k \in \{1, \dots, K\}, \forall w^2 \in \mathcal{U}^2 \\ & y_{ik} + y_{jk} \leq x_{ij} + 1 & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \\ & x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \end{cases}$$

b/ On peut prendre comme sous-ensembles initiaux de $\mathcal{U}^1, \mathcal{U}^2$ des points extrêmes de ces ensembles :

$$\mathcal{U}^{1*}_{\text{initial}} = \{\{l^1_{ij} = l_{ij} + \delta^{1*}_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)\}_{i,j \in E} \text{ tq } \delta^{1*} \in \arg\max_{\delta^1} \sum_{i,j\in E} \delta^1_{ij} s.c. \sum_{i,j\in E} \delta^1_{ij} \leq L \text{ et } \delta^1_{ij} \in [0,3]\}$$

$$\mathcal{U}^{2*}_{\text{initial}} = \{\{w^2_i = w_i(1 + \delta^{2*}_j)\}_{i\in V} \text{ tq } \delta^{2*} \in \arg\max_{\delta^2} \sum_{i\in V} \delta^2_i s.c. \sum_{i\in V} \delta^2_i \leq W \text{ et } \delta^2_i \in [0, W_i] \forall i \in V\}$$

On peut aussi vouloir prendre des ensembles plus simples pour $\mathcal{U}^{1*}_{\text{initial}}$ et $\mathcal{U}^{2*}_{\text{initial}}$, par exemple :

$$\mathcal{U}^{1*}_{\text{initial}} = \{\{l^1_{ij} = l_{ij}\}_{i,j\in E}\}$$

$$\mathcal{U}^{2*}_{\text{initial}} = \{\{w^2_i = w_i\}_{i\in V}\}$$

c/ Le problème-maître s'écrit comme $(\mathcal{P})$ en remplaçant les ensembles $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ par leurs sous-ensembles partiels $\mathcal{U}^{1*}$ et $\mathcal{U}^{2*}$. On a ensuite $K+1$ sous-problèmes à (x^*, y^*) fixé. On a un sous-problème pour la contrainte sur z :

$$(\mathcal{SP}_1) \left\{ \max_{l^1 \in \mathcal{U}^1} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^*_{ij} l^1_{ij} \right.$$

et pour les contraintes faisant intervenir w^2, on a autant de sous-problèmes que de parties. $\forall k \in \{1, \ldots, K\}$:

$$(\mathcal{SP}_2k) \left\{ \max_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \quad \sum_{i=1}^n w^2_i y^*_{ik} \right.$$

On réécrit ces problèmes en explicitant les contraintes de $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$:

$$(\mathcal{SP}_1) \left\{ \begin{array}{lll} \max_{\delta^1} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^*_{ij}(l_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)) & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^*_{ij} l_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^*_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)\delta^1_{ij} \\ s.c. & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta^1_{ij} \leq L & \\ & \delta^1_{ij} \in [0,3] & \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{SP}_2k) \left\{ \begin{array}{lll} \max_{\delta^2} & \sum_{i=1}^n y^*_{ik} w_i (1 + \delta^2_i) & = \sum_{i=1}^n y^*_{ik} w_i + \max_{\delta^2} \sum_{i=1}^n y^*_{ik} w_i \delta^2_i \\ s.c. & \sum_{i=1}^n \delta^2_i \leq W & \\ & \delta^2_i \in [0, W_i] & \forall i \in \{1,\ldots,n\} \end{array} \right.$$

On se retrouve donc avec de simples PL pour les sous-problèmes.

d/ Une solution du problème-maître (x^*, y^*, z^*) est optimale si elle satisfait tous les scénarios des sous-problèmes, donc si :

- en notant δ^{1*} la solution de $(\mathcal{SP}_1)$, on a $\sum_{i,j\in E} x^*_{ij}(l_{ij} + \delta^{1*}_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j)) \leq z^*$
- $\forall k \in \{1, \ldots, K\}$, en notant δ^{k2*} la solution de $(\mathcal{SP}_2k)$, on a $\sum_{i=1}^n y^*_{ik} w_i (1 + \delta^{k2*}_i) \leq B$

e/ Voici l'expression des coupes ajoutées pour chaque sous-problème :
Si on trouve une solution δ^{1*} de $(\mathcal{SP}_1)$ qui invalide (x^*, y^*), on ajoute dans le problème-maître la contrainte suivante :

$$z \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}(l_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{l}_i + \hat{l}_j))$$

Si on trouve une solution δ^{k2*} de $(\mathcal{SP}_2k)$ qui invalide (x^*, y^*), même si on ne la trouve que pour le sous-problème k, on peut ajouter la coupe pour toutes les parties k puisqu'elles sont interchangeables. Donc on ajoute dans le problème-maître :

$$\sum_{i=1}^n y_{ik} w_i (1 + \delta^{2*}_i) \leq B, \forall k \in \{1, \ldots, K\}$$

,

4. Résolution par dualisation

a/ On reformule l'objectif du problème robuste de façon à isoler les δ^1_{ij}

$$\left\{\begin{array}{lll}\min\limits_{x,y} & \max\limits_{\substack{l^1\in\mathcal{U}^1\\ w^2\in\mathcal{U}^2}} & \sum\limits_{i,j\in E} l^1_{ij}x_{ij}\\ s.c. & & \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk}\le B \quad \forall k\in\{1...n\}\\ & (2),(3),(4) & \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{llll}\min\limits_{x,y} & \max\limits_{w^2\in\mathcal{U}^2} & \max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{i,j\in E}(l_{ij}+\delta^1_{ij}(\hat{l}_i+\hat{l}_j))x_{ij}\\ s.c. & & & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}\le L\\ & & & \delta^1_{ij}\in[0,3] \quad \forall i,j\in E\\ & & \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk}\le B \quad \forall k\in\{1...n\} & \\ & (2),(3),(4) & & \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{lllll}\min_{x,y} & \max\limits_{w^2\in\mathcal{U}^2} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij}+ & \max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}(\hat{l}_i+\hat{l}_j)x_{ij}\\ s.c. & & & s.c. & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}\le L\\ & & & & \delta^1_{ij}\in[0,3] \quad \forall i,j\in E\\ & & \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk}\le B \quad \forall k\in\{1...n\} & & \\ & (2),(3),(4) & & & \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{lll}\min_{x,y} & \max\limits_{w^2\in\mathcal{U}^2} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij}+G(x,y)\\ s.c. & & \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk}\le B \quad \forall k\in\{1...n\}\\ & (2),(3),(4) & \end{array}\right.$$

où $G(x,y) = \left\{\begin{array}{ll}\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}(\hat{l}_i+\hat{l}_j)x_{ij}\\ s.c. & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}\le L\\ & \delta^1_{ij}\in[0,3] \quad \forall i,j\in E\end{array}\right.$

b/ Le problème interne lié aux variables δ^1_{ij} est le problème suivant :

$$G(x,y) = \left\{\begin{array}{lll}\max\limits_{\delta^1} & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}(\hat{l}_i+\hat{l}_j)x_{ij} & \\ s.c. & \sum\limits_{i,j\in E}\delta^1_{ij}\le L & \leftarrow \alpha\\ & \delta^1_{ij}\in[0,3] \quad \forall i,j\in E & \leftarrow \beta_{ij}\end{array}\right.$$

c/ La dualisation de ce problème linéaire interne s'écrit :

$$H(x,y) = \left\{\begin{array}{ll}\min\limits_{\alpha,\beta} & L\alpha+\sum\limits_{i,j\in E}3\beta_{ij}\\ s.c. & \alpha+\beta_{ij}\ge(\hat{l}_i+\hat{l}_j)x_{ij} \quad \forall i,j\in E\\ & \alpha\ge 0\\ & \beta_{ij}\ge 0 \quad \forall i,j\in E\end{array}\right.$$

d/ Soient x, y fixés.
Soit $k\in\{1...n\}$ et $(\mathcal{P}_k)$ le problème suivant associé à la partie k :

$$(\mathcal{P}_k)\left\{\begin{array}{ll}\max\limits_{\delta^2} & \sum\limits_{v\in V}(w_v(1+\delta^2_v))y_{v,k}\\ s.c. & \sum\limits_{v\in V}\delta^2_v\le W\\ & \delta^2_v\in[0,W_v] \quad \forall v\in V\end{array}\right.$$

On reformule les contraintes robustes de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} w^2\in\mathcal{U}^2\\ \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk}\le B \quad \forall k\in\{1...n\}\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{v\in V}(w_v(1+\delta^2_v))y_{v,k}\le B \quad \forall k\in\{1...n\}\\ \sum\limits_{v\in V}\delta^2_v\le W\\ \delta^2_v\in[0,W_v] \quad \forall v\in V\end{array}\right.$$

$$= \{v(\mathcal{P}_k)\le B \quad \forall k\in\{1...n\}$$

f/ On cherche à écrire le dual de $(\mathcal{P}_k)$. On introduit pour cela les variables duales μ et $\{\lambda_v\}_{v\in V}$ associées aux contraintes de $(\mathcal{P}_k)$. Alors :

$$(\mathcal{DP}_k)\begin{cases} \min\limits_{\mu,\lambda} & W\mu + \sum\limits_{v\in V} W_v\lambda_v + \sum\limits_{v\in V} w_v y_{v,k} \\ s.c. & \mu + \lambda_v \geq w_v y_{v,k} \quad \forall v \in V \\ & \mu \geq 0 \\ & \lambda_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{cases}$$

g/ Finalement, par dualité forte, on a : $G(x,y) = H(x,y)$ et $v(\mathcal{P}_k) = v(\mathcal{DP}_k) \quad \forall k \in \{1...n\}$. Donc :

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} & \max\limits_{\substack{l^1\in\mathcal{U}^1 \\ w^2\in\mathcal{U}^2}} & \sum\limits_{i,j\in E} l^1_{ij}x_{ij} \\ s.c. & & \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1...n\} \\ & (2),(3),(4) \end{cases} = \begin{cases} \min_{x,y} & \max\limits_{w^2\in\mathcal{U}^2} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij} + G(x,y) \\ s.c. & & \sum\limits_{v\in V} w^2_j y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1...n\} \\ & (2),(3),(4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min_{x,y} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij} + G(x,y) \\ s.c. & v(\mathcal{P}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1...n\} \\ & (2),(3),(4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min_{x,y} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij} + H(x,y) \\ s.c. & v(\mathcal{DP}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1...n\} \\ & (2),(3),(4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min_{x,y,\alpha,\beta,\mu,\lambda} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij} + L\alpha + \sum\limits_{i,j\in E} 3\beta_{ij} \\ s.c. & v(\mathcal{DP}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1...n\} \\ & \alpha + \beta_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j)x_{ij} \quad \forall i,j \in E \\ & \alpha \geq 0 \\ & \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j \in E \\ & (2),(3),(4) \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \min_{x,y,\alpha,\beta} & \sum\limits_{i,j\in E} l_{ij}x_{ij} + L\alpha + \sum\limits_{i,j\in E} 3\beta_{ij} \\ s.c. & W\mu + \sum\limits_{v\in V} W_v\lambda_v + \sum\limits_{v\in V} w_v y_{v,k} \leq B \quad \forall k \in \{1...n\} \\ & \mu + \lambda_v \geq w_v y_{v,k} \quad \forall v \in V, \forall k \in \{1...n\} \\ & \mu \geq 0 \\ & \lambda_v \geq 0 \quad \forall v \in V \\ & \alpha + \beta_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j)x_{ij} \quad \forall i,j \in E \\ & \alpha \geq 0 \\ & \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j \in E \\ & (2),(3),(4) \end{cases}$$