

# Projet ECMA - MPRO 2022-2023

Camille Richer, Héloïse Gachet

## Exercice 1. Modélisation papier

### 1. Modélisation du problème statique sous la forme d'un PLNE

On cherche à partitionner les sommets d'un graphe non orienté complet  $G = (V, E)$  avec des longueurs d'arêtes  $l_{ij}$  et des poids de sommets  $w_i$  en  $K$  parties de poids maximum  $B$ , de façon à minimiser le poids des arêtes à l'intérieur des parties.

On définit les variables de décision suivantes :

$$\forall u, v \in \{1, \dots, n\} : x_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{si } u \text{ et } v \text{ sont dans la même partie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall v \in V, \forall k \in \{1, \dots, K\} : y_{vk} = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est dans la partie } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum_{i=1}^n w_i y_{ik} \leq B \quad \forall k \in \{1, \dots, K\} \\ & y_{ik} + y_{jk} \leq x_{ij} + 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \\ & x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \end{array} \right.$$

### 2. Modélisation du problème robuste sous la forme d'un programme en nombres entiers

Avec les mêmes variables de décision, on écrit le problème robuste :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \max_{l^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij}^1 x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^n w_i^2 y_{ik} \leq B \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \forall w^2 \in \mathcal{U}^2 \quad (1) \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2) \\ & y_{ik} + y_{jk} \leq x_{ij} + 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (3) \\ & x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \quad (4) \end{array} \right.$$

### 3. Résolution par plans coupants et LazyCallback

a/ On fait apparaître la robustesse dans les contraintes plutôt que dans l'objectif :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y,z} & z \\ \text{s.c.} & z \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij}^1 x_{ij} \quad \forall l^1 \in \mathcal{U}^1 \\ & \sum_{k=1}^K y_{ik} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum_{i=1}^n w_i^2 y_{ik} \leq B \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}, \forall w^2 \in \mathcal{U}^2 \\ & y_{ik} + y_{jk} \leq x_{ij} + 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \\ & x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, K\} \end{array} \right.$$

**b/**

On prend des petits ensembles pour  $\mathcal{U}_{\text{initial}}^{1*}$  et  $\mathcal{U}_{\text{initial}}^{2*}$ , par exemple :

$$\mathcal{U}_{\text{initial}}^{1*} = \{\{l_{ij}^1 = l_{ij}\}_{i,j \in E}\}$$

$$\mathcal{U}_{\text{initial}}^{2*} = \{\{w_i^2 = w_i\}_{i \in V}\}$$

**c/** Le problème-maître s'écrit comme  $(\mathcal{P})$  en remplaçant les ensembles  $\mathcal{U}^1$  et  $\mathcal{U}^2$  par leurs sous-ensembles partiels  $\mathcal{U}^{1*}$  et  $\mathcal{U}^{2*}$ . On a ensuite  $K + 1$  sous-problèmes à  $(x^*, y^*)$  fixé. On a un sous-problème pour la contrainte sur  $z$  :

$$(\mathcal{SP}_1) \left\{ \begin{array}{l} \max_{l^1 \in \mathcal{U}^1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^* l_{ij}^1 \end{array} \right.$$

et pour les contraintes faisant intervenir  $w^2$ , on a autant de sous-problèmes que de parties.  $\forall k \in \{1, \dots, K\}$  :

$$(\mathcal{SP}_{2k}) \left\{ \begin{array}{l} \max_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \sum_{i=1}^n w_i^2 y_{ik}^* \end{array} \right.$$

On réécrit ces problèmes en explicitant les contraintes de  $\mathcal{U}^1$  et  $\mathcal{U}^2$  :

$$(\mathcal{SP}_1) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta^1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^* (l_{ij} + \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^* l_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^* (\hat{l}_i + \hat{l}_j) \delta_{ij}^1 \\ \text{s.c.} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^1 \leq L \\ \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \end{array} \right. \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

$$(\mathcal{SP}_{2k}) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\delta^2} \sum_{i=1}^n y_{ik}^* w_i (1 + \delta_i^2) = \sum_{i=1}^n y_{ik}^* w_i + \max_{\delta^2} \sum_{i=1}^n y_{ik}^* w_i \delta_i^2 \\ \text{s.c.} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \leq W \\ \delta_i^2 \in [0, W_i] \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

On se retrouve donc avec de simples PL pour les sous-problèmes.

**d/** Une solution du problème-maître  $(x^*, y^*, z^*)$  est optimale si elle satisfait tous les scénarios des sous-problèmes, donc si :

- en notant  $\delta^{1*}$  la solution de  $(\mathcal{SP}_1)$ , on a  $\sum_{i,j \in E} x_{ij}^* (l_{ij} + \delta_{ij}^{1*} (\hat{l}_i + \hat{l}_j)) \leq z^*$
- $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ , en notant  $\delta^{k2*}$  la solution de  $(\mathcal{SP}_{2k})$ , on a  $\sum_{i=1}^n y_{ik}^* w_i (1 + \delta_i^{k2*}) \leq B$

**e/** Voici l'expression des coupes ajoutées pour chaque sous-problème :

Si on trouve une solution  $\delta^{1*}$  de  $(\mathcal{SP}_1)$  qui invalide  $(x^*, y^*)$ , on ajoute dans le problème-maître la contrainte suivante :

$$z \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^* (l_{ij} + \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j))$$

Si on trouve une solution  $\delta^{k2*}$  de  $(\mathcal{SP}_{2k})$  qui invalide  $(x^*, y^*)$ , même si on ne la trouve que pour le sous-problème  $k$ , on peut ajouter la coupe pour toutes les parties  $k$  puisqu'elles sont interchangeables. Donc on ajoute dans le problème-maître :

$$\sum_{i=1}^n y_{ik} w_i (1 + \delta_i^{2*}) \leq B, \forall k \in \{1, \dots, K\}$$

#### 4. Résolution par dualisation

a/ On reformule l'objectif du problème robuste de façon à isoler les  $\delta_{ij}^1$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \max_{\substack{l^1 \in \mathcal{U}^1 \\ w^2 \in \mathcal{U}^2}} \sum_{i,j \in E} l_{ij}^1 x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \max_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \max_{\delta^1} \sum_{i,j \in E} (l_{ij} + \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j)) x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 \leq L \\ & \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \quad \forall i, j \in E \\ & \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \end{array} \right. \\
 & \quad (2), (3), (4) \\
 & = \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \max_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \sum_{i,j \in E} l_{ij} x_{ij} + \max_{\delta^1} \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 \leq L \\ & \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \quad \forall i, j \in E \\ & \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \end{array} \right. \\
 & \quad (2), (3), (4) \\
 & = \left\{ \begin{array}{ll} \min_{x,y} & \max_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \sum_{i,j \in E} l_{ij} x_{ij} + G(x, y) \\ \text{s.c.} & \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \end{array} \right. \\
 & \quad (2), (3), (4) \\
 & \text{où } G(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\delta^1} & \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 \leq L \\ & \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \quad \forall i, j \in E \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

b/ Le problème interne lié aux variables  $\delta_{ij}^1$  est le problème suivant :

$$G(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\delta^1} & \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{i,j \in E} \delta_{ij}^1 \leq L \quad \leftarrow \alpha \\ & \delta_{ij}^1 \in [0, 3] \quad \forall i, j \in E \quad \leftarrow \beta_{ij} \end{array} \right.$$

c/ La dualisation de ce problème linéaire interne s'écrit :

$$H(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \min_{\alpha, \beta} & L\alpha + \sum_{i,j \in E} 3\beta_{ij} \\ \text{s.c.} & \alpha + \beta_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \quad \forall i, j \in E \\ & \alpha \geq 0 \\ & \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in E \end{array} \right.$$

d/ Soient  $x, y$  fixés.

Soit  $k \in \{1 \dots n\}$  et  $(\mathcal{P}_k)$  le problème suivant associé à la partie  $k$  :

$$(\mathcal{P}_k) \left\{ \begin{array}{ll} \max_{\delta^2} & \sum_{v \in V} (w_v (1 + \delta_v^2)) y_{v,k} \\ \text{s.c.} & \sum_{v \in V} \delta_v^2 \leq W \\ & \delta_v^2 \in [0, W_v] \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

On reformule les contraintes robustes de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} w^2 \in \mathcal{U}^2 \\ \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{v \in V} (w_v (1 + \delta_v^2)) y_{v,k} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ \sum_{v \in V} \delta_v^2 \leq W \\ \delta_v^2 \in [0, W_v] \quad \forall v \in V \end{array} \right. \\
 = \{v(\mathcal{P}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\}\}$$

**f/** On cherche à écrire le dual de  $(\mathcal{P}_k)$ . On introduit pour cela les variables duales  $\mu$  et  $\{\lambda_v\}_{v \in V}$  associées aux contraintes de  $(\mathcal{P}_k)$ . Alors :

$$(\mathcal{DP}_k) \begin{cases} \min_{\mu, \lambda} & W\mu + \sum_{v \in V} W_v \lambda_v + \sum_{v \in V} w_v y_{v,k} \\ \text{s.c.} & \mu + \lambda_v \geq w_v y_{v,k} \quad \forall v \in V \\ & \mu \geq 0 \\ & \lambda_v \geq 0 \quad \forall v \in V \end{cases}$$

**g/** Finalement, par dualité forte, on a :  $G(x, y) = H(x, y)$  et  $v(\mathcal{P}_k) = v(\mathcal{DP}_k) \quad \forall k \in \{1 \dots n\}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \min_{x, y} & \max_{\substack{l^1 \in \mathcal{U}^1 \\ w^2 \in \mathcal{U}^2}} \sum_{i, j \in E} l_{ij}^1 x_{ij} \\ \text{s.c.} & \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & (2), (3), (4) \end{cases} = \begin{cases} \min_{x, y} & \max_{w^2 \in \mathcal{U}^2} \sum_{i, j \in E} l_{ij} x_{ij} + G(x, y) \\ \text{s.c.} & \sum_{v \in V} w_j^2 y_{vk} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & (2), (3), (4) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min_{x, y} & \sum_{i, j \in E} l_{ij} x_{ij} + G(x, y) \\ \text{s.c.} & v(\mathcal{P}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & (2), (3), (4) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min_{x, y} & \sum_{i, j \in E} l_{ij} x_{ij} + H(x, y) \\ \text{s.c.} & v(\mathcal{DP}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & (2), (3), (4) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \min_{x, y, \alpha, \beta, \mu, \lambda} & \sum_{i, j \in E} l_{ij} x_{ij} + L\alpha + \sum_{i, j \in E} 3\beta_{ij} \\ \text{s.c.} & v(\mathcal{DP}_k) \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & \alpha + \beta_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \quad \forall i, j \in E \\ & \alpha \geq 0 \\ & \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in E \\ & (2), (3), (4) \end{cases} \\ &\Leftarrow \begin{cases} \min_{x, y, \alpha, \beta} & \sum_{i, j \in E} l_{ij} x_{ij} + L\alpha + \sum_{i, j \in E} 3\beta_{ij} \\ \text{s.c.} & W\mu + \sum_{v \in V} W_v \lambda_v + \sum_{v \in V} w_v y_{v,k} \leq B \quad \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & \mu + \lambda_v \geq w_v y_{v,k} \quad \forall v \in V, \forall k \in \{1 \dots n\} \\ & \mu \geq 0 \\ & \lambda_v \geq 0 \quad \forall v \in V \\ & \alpha + \beta_{ij} \geq (\hat{l}_i + \hat{l}_j) x_{ij} \quad \forall i, j \in E \\ & \alpha \geq 0 \\ & \beta_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in E \\ & (2), (3), (4) \end{cases} \end{aligned}$$