이항분포를 정규분포로 근사시킨다는 고등학교 내용에 대한 설명이기도하다.

n이 무한대로 이동한다고 할때 ($n \to \infty$)

이항분포의 확률분포 $f(r) = {}_nC_r \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, ($p+q=1$이다)

$$f(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

양변에 자연로그를 취해주면

$$\ln f(r) = \ln n! - \ln r! - \ln(n-r)! + \ln p^r + \ln q^{n-r}$$

위 식에 스털링근사 (Stirling's approximation)를 적용할건데

(스털링근사 $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)$으로 근사시키는 방법)

(스털링근사는 감마함수를 통해 유도 할수있다.)

편의를 위해 $\ln f(r) = g(r)$ 이라하자.

$$\begin{aligned} g(r) = \; & n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \\ & - (r\ln r - r + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi r)) \\ & - ((n-r)\ln(n-r) + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi(n-r))) \\ & + r\ln p + (n-r)\ln q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(r) = \; & n\ln n - \cancel{n} + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi n) \\ & - r\ln r + \cancel{r} - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi r) \\ & - (n-r)\ln(n-r) + \cancel{n} - \cancel{r} - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi(n-r)) \\ & + r\ln p + (n-r)\ln q \end{aligned}$$

즉 정리하면

$$g(r) = n\ln n - r\ln r - (n-r)\ln(n-r)$$
$$+\frac{1}{2}\ln(2\pi n) - \frac{1}{2}\ln(2\pi r) - \frac{1}{2}\ln(2\pi r(n-r))$$
$$+ r\ln p + (n-r)\ln q$$

$$= n\ln n - r\ln r - (n-r)\ln(n-r)$$
$$+\cancel{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} + \frac{1}{2}\ln(n) - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2\pi)} - \frac{1}{2}\ln r$$
$$-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln(n-r)$$
$$+ r\ln p + (n-r)\ln q$$

①
$$= n\ln n - r\ln r - (n-r)\ln(n-r)$$
$$+\frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\ln r - \frac{1}{2}\ln(n-r) - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$
$$+ r\ln p + (n-r)\ln q$$

여기까지 놓고, 이를 ① 이라 하자.

이 후에 $g(r)$에 대하여 테일러급수를 해줄 예정이므로

$g'(r)$과 $g''(r)$을 구하도록하자.

r로 미분하자고.

$$g'(r) = -\ln r - 1 + \ln(n-r) + 1$$

$$-\frac{1}{2r} + \frac{1}{2(n-r)}$$

$$+\ln p - \ln q$$

2

$$= -\ln r + \ln(n-r) - \frac{1}{2r} + \frac{1}{2(n-r)} + \ln\frac{p}{q}$$

이를 2 라 한다.

3

$$g''(r) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{(n-r)} + \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2(n-r)^2}$$

다음 시간에...