3η Εργασία Διαφοριές Εξισώσεις & Μετασχηματισμοί

[redacted]

<u>Άσκηση 3.1</u>

Να λυθεί το ΠΑΤ

$y' = y^2 - 2y - 3, \quad y(0) = 4 \ , \ \ y \neq -1 \ , \ \ y \neq 3$

Έχουμε

$$y' = y^2 - 2y - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 - 2y - 3 \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 2y - 3} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y+1)(y-3)} = dx \quad (1)$$

Άρα

$$\frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-3} = \frac{1}{(y+1)(y-3)} \Rightarrow A(y-3) + B(y+1) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ay - 3A + By + B = 1 \Rightarrow (A+B)y - 3A + B = 1$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} A + B = 0 &\Rightarrow A = -B \\ -3A + B = 1 &\Rightarrow -3A + B = 1 \end{aligned}$$

Άρα $-3A + B = 1 \Rightarrow = -4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

Και $-B = -\frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

Συνεπώς η (1) γίνεται:

$$(1) \Rightarrow \int \frac{-\frac{1}{4}}{y+1} dy + \int \frac{\frac{1}{4}}{y-3} dy = \int 1 \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\int \frac{1}{y+1} dy + \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-3} dy = x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\ln(y+1) + \frac{1}{4}\ln(y-3) = x + c \Rightarrow \ln(y-3) - \ln(y+1) = 4x + 4c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y-3}{y+1} = 4x + 4c \Rightarrow \frac{y-3}{y+1} = e^{4(x+c)} \Rightarrow y - 3 = ye^{4(x+c)} + e^{4(x+c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - ye^{4(x+c)} = e^{4(x+c)} + 3 \Rightarrow y(1 - e^{4(x+c)}) = e^{4(x+c)} + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{4(x+c)} + 3}{1 - e^{4(x+c)}}$$ Επίσης έχουμε ότι $y(0) = 4$

άρα

$$\frac{e^{4c}+3}{1-e^{4c}}=4 \Rightarrow 4-4e^{4c}=e^{4c}+3 \Rightarrow 5e^{4c}=1 \Rightarrow e^{4c}=\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c=\ln\frac{1}{5} \Rightarrow 4c=-1,6 \Rightarrow c=-0,4$$

Επομένως $y=\dfrac{e^{4(x+0,4)}+3}{1-e^{4(x+0,4)}} \Rightarrow y\dfrac{e^{4x+1,6}+3}{1-e^{4x+1,6}}$

<u>Άσκηση 3.2</u>

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+x\ln x)dy=0$$

Θέτουμε $P(x,y)=x\sin y+y$ και $Q(x,y)=x^2\cos y+x\ln x$

Έχουμε $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=x\cos y+1$ και $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x\cos y+\ln x+1$

Επομένως παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ άρα η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{dP(x,y)}{dy}-\frac{dQ(x,y)}{dx}\right)=\frac{1}{x^2\cos y+x\ln x}(x\cos y+1-2x\cos y-\ln x-1)=$$

$$=-\frac{x\cos y+\ln x}{x^2\cos y+x\ln x}=-\frac{(x\cos y+\ln x)}{x(x\cos y+\ln x)}=-\frac{1}{x}$$

Άρα $F(x)=-\dfrac{1}{x}$

Άρα

$$R(x)=e^{\int -\frac{1}{x}dx}\Rightarrow R(x)=e^{-\int \frac{1}{x}dx}\Rightarrow R(x)=e^{-\ln x}\Rightarrow R(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$$

Επομένως,πολλαπλασιάζοντας με την R(y) , η ΔΕ γίνεται:

$$(\sin y+\frac{y}{x})dx+(x\cos y+\ln x)dy=0$$

Πλέον έχουμε $P(x,y)=\sin y+\dfrac{y}{x}$ και $Q(x,y)=x\cos y+\ln x$

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{dP(x,y)}{dy}=\cos y+\dfrac{1}{x}$ και $\dfrac{dQ(x,y)}{dx}=\cos y+\dfrac{1}{x}$

Άρα $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, επομένως η ΔΕ είναι πλήρης

Από τη ΔΕΜΠ $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\sin y+\dfrac{y}{x}$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\sin y+\frac{y}{x}\Rightarrow g(x,y)=x\sin y+y\ln x+\varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}=x\cos y+\ln x$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=x\cos y+\ln x\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}(x\sin y+y\ln x+\varphi(y))=$$

$$=x\cos y+\ln x\Rightarrow x\cos y+\ln x+\varphi'(y)=x\cos y+\ln x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=c$$

Άρα $g(x,y)=x\sin y+y\ln x+c$