Θέμα 2ο

Η λύση της ΔΕ είναι: $y(x) = y_{o\mu}(x) + y_{\mu}(x)$

Εύρεση $y_{o\mu}(x)$: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 3\omega \Rightarrow \omega_1 = -3 \,,\ \omega_2 = 0$$

Συνεπώς αφού $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\boxed{y_{o\mu}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2}$$

Εύρεση $y_{\mu}(x)$: Το δεξί μέλος είναι της μορφής $f(x) = P_n(x)\, e^{kx}$ με $k=0$ που είναι ρίζα της χαρακτηριστικής πολλαπλότητας $\rho = 1$. Η λύση είναι της μορφής $y_{\mu}(x) = x^{\rho} Q_n(x) e^{kx} \overset{\substack{k=0 \\ \rho=1}}{=} x \cdot Q_n(x) = y_{\mu}(x) \Rightarrow$

$$y_{\mu}(x) = x(ax+b) \Rightarrow ax^2 + bx \quad \text{για}$$

$$\begin{cases} y_{\mu}(x) = x(ax+b) \Rightarrow ax^2 + bx \\ y'_{\mu}(x) = 2ax + b \\ y''_{\mu}(x) = 2a \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην αρχική. Άρα

$$2a + 3(2ax + b) = x + 3 \Rightarrow$$

$$2a + 6ax + 3b = x + 3 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} + 3b = 3 \Rightarrow b = \frac{8}{9} \end{cases}$$

Συνεπώς $\boxed{y_{(\mu)}(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{9}x.}$

Άρα $\boxed{y = c_1 e^{-3x} + c_2 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{8}{9}x.}$