ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2017 στο μάθημα:
"ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ"

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Αν $\vec{F}(x,y,z) = x^2 y\vec{i} - 2xz\vec{j} + 2yz\vec{k}$, να βρεθούν:

α) $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$ (ή ισοδύναμα $grad(div\vec{F})$), β) $rot(rot\vec{F})$.

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = \ln(e^x + e^y).$$

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$\text{α) } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y},\quad \text{β) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad f(x,y) = x^2(1-x) - y^2(1+x).$$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Θεωρούμε το αμελητέου πάχους χωρίο D, το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$, την ευθεία $y = 1$ και τον άξονα $x = 0$.
Αν στο χωρίο D έχει κατανεμηθεί μάζα πυκνότητας $\sigma(x,y) = 60x$, να υπολογιστούν:
(α) η μάζα του D και (β) το κέντρο μάζας του D.

ΘΕΜΑ 5$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2$ στο τετράεδρο με κορυφές τα σημεία (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), δηλαδή στο τετράεδρο που ορίζεται από τις ανισότητες:
$0 \le x \le 1$,
$0 \le y \le 1 - x$,
$0 \le z \le 1 - x - y$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t)=\frac{1}{\left\|\dot{\vec{X}}(t)\right\|}\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\left\|\dot{\vec{X}}(t)\right\|}\dot{\vec{X}}(t)\right)\right\|,\quad R(\mathrm{t})=\frac{1}{K(t)}.$$

$$f=f(x,y,z),\ grad\ f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\vec{F}(x,y,z)=(f_1,f_2,f_3),\ \ div\,\vec{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z},\quad rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

<u>Θεώρημα</u> (*Κριτήριο του Sylvester*) Έστω η πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση *f* και *P* κρίσιμο σημείο της *f*. Για συντομία συμβολίζουμε: $a_{ij}=\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i\partial x_j}$, $i,j\in\{1,2,...,n\}$.

και τις ορίζουσες $\Delta_1=a_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, …, $\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

οι οποίες ονομάζονται ορίζουσες Εσσιανών πινάκων. Τότε:

(i) Αν $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, …, $\Delta_n>0$, τότε η *f* έχει τοπικό ελάχιστο στο *P*.

(ii) Αν $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, …, $(-1)^n\Delta_n>0$, τότε η *f* έχει τοπικό μέγιστο στο *P*.

(iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k\neq 0$, $\forall k\in\{1,2,...,n\}$, τότε η *f* δεν έχει τοπικό ακρότατο στο *P*.

(iv) Αν $\Delta_k=0$, για κάποιο $k\in\{1,2,...,n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο *P*.

$$E=\frac{1}{2}\int_c xdy-ydx,\quad \mathrm{E}=\iint_D dxdy,\quad V=\iiint_D dxdydz$$

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)),\ \int_c Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$m=\iint_D s(x,y)dxdy,\ \ \bar{x}=\frac{\iint_D xs(x,y)dxdy}{m},\ \ \bar{y}=\frac{\iint_D ys(x,y)dxdy}{m}$$

$$m=\iiint_D s(x,y,z)dxdydz,\ \bar{x}=\frac{\iiint_D xs(x,y,z)dxdydz}{m},\ \bar{y}=\frac{\iiint_D ys(x,y,z)dxdydz}{m},\ \bar{z}=\frac{\iiint_D zs(x,y,z)dxdydz}{m}$$

$$E=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$I=\iiint_D(div\,\vec{F})dxdydz$ (ροή διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$)

$I=\iiint_D(div\,\vec{u})dxdydz$ (όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^{O}

α) Έχουμε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y)+\frac{\partial}{\partial y}(-2xz)+\frac{\partial}{\partial z}(2yz)=2xy+2y=2y(x+1)$$

και επομένως

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)=2y\vec{i}+2(x+1)\vec{j}\,.$$

β) Είναι

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2y & -2xz & 2yz\end{vmatrix}=(2z+2x)\vec{i}+(-2z-x^2)\vec{k}$$

και τελικά

$$rot\left(rot\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2(z+x) & 0 & -2z-x^2\end{vmatrix}=2(x+1)\vec{j}$$

ΘΕΜΑ 2^{O}

Είναι

α) Είναι $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{e^x}{e^x+e^y}+\dfrac{e^y}{e^x+e^y}=\dfrac{e^x+e^y}{e^x+e^y}=1.$

β) Έχουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)=\frac{e^x(e^x+e^y)-e^xe^x}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{e^x+e^y}\right)=-\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{e^x+e^y}\right)=\frac{e^y(e^x+e^y)-e^ye^y}{(e^x+e^y)^2}=\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}\,.$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=\left[\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}\right]\cdot\left[\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}\right]-\left[\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}\right]^2=0\,.$$

ΘΕΜΑ 3^{O}

$$\left.\begin{array}{l}\partial f/\partial x=0\\ \partial f/\partial y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}x(2-3x)-y^2=0\\ 2y(1+x)=0\end{array}\right\}$$ άρα τα κρίσιμα σημεία είναι: $P_1(0,0)$ και $P_2(\frac{2}{3},0)$.

Υπολογίζουμε τις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2-6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2(1+x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2y$.

Για το $P_1(0,0)$ έχουμε $\Delta=\left\{(2-6x)[-2(1+x)]-(-2y)^2\right\}\Big|_{P_1}=-4<0$.

Επομένως η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο P_1.

Για το $P_2(\frac{2}{3},0)$ έχουμε $\Delta=\left\{(2-6x)[-2(1+x)]-(-2y)^2\right\}\Big|_{P_2}=(-2)\left[\frac{-10}{3}\right]=\frac{20}{3}>0$ και

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{P_2}=-2<0$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο P_2 και $f_{\max}=f(P_2)=\frac{4}{27}$.

ΘΕΜΑ 4^{O}

(α) $m=\iint_D s(x,y)dxdy=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{1}60xdy\right)dx=60\int_{x=0}^{1}x[y]_{y=x^2}^{1}dx=\int_{x=0}^{1}x(1-x^2)dx=$

$=60\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1}=60\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=60\cdot\frac{1}{4}=15$.

Άρα η μάζα θα είναι ίση με 15.

(β) $\bar{x}=\frac{1}{m}\iint_D xs(x,y)dxdy=\frac{1}{15}\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{1}x\cdot 60xdy\right)dx=4\int_{x=0}^{1}x^2[y]_{y=x^2}^{1}dx=4\int_{x=0}^{1}x^2(1-x^2)dx$

$=4\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{1}=4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=4\cdot\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$

$\bar{y}=\frac{1}{m}\iint_D ys(x,y)dxdy=\frac{1}{15}\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x^2}^{1}y\cdot 60xdy\right)dx=4\int_{x=0}^{1}x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{1}dx=2\int_{x=0}^{1}x(1-x^4)dx=$

$=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{1}=2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right]=2\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$.

Άρα το κέντρο μάζας θα είναι το σημείο $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{8}{15},\frac{2}{3}\right)$.

ΘΕΜΑ 5^{O}

Υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα $\int\limits_{z=0}^{1-x-y} f(x,y,z)dz = \int\limits_{z=0}^{1-x-y} x^2 dz = x^2(1-x-y)$.

Εν συνεχεία υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{y=0}^{1-x} x^2(1-x-y)dy = \ldots = \frac{1}{2}x^2(1-x^2)$.

Τέλος υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{x=0}^{1} \frac{1}{2}x^2(1-x^2)dx = \ldots = \frac{1}{60}$.

Εν κατακλείδι το ζητούμενο τριπλό ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\frac{1}{60}$.