ΕΡΓΑΣΊΑ 2

Διαφορικές Εξισώσεις & Μετασχηματισμοί

[redacted]

Άσκηση 2.1

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους Cauchy-Riemann να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις $e^z, \sin z, \cos z$ είναι αναλυτικές στο C.

Έστω $f(z) = e^z \Rightarrow f(z) = e^{x+iy} \Rightarrow f(z) = e^x e^{iy} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Άρα έχουμε $u = e^x \cos y$ και $v = e^x \sin y$

Οπότε $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

Επομένως ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann άρα είναι αναλυτική .

Έστω $f(z) = \sin z \Rightarrow f(z) = \sin(x+iy) \Rightarrow f(z) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

Άρα έχουμε $u = \sin x \cosh y$ και $v = \cos x \sinh y$

Οπότε $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \cosh y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sinh y$$

Επομένως ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann άρα είναι αναλυτική .

Έστω $f(z) = \cos z \Rightarrow f(z) = \cos(x+iy) \Rightarrow f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

Άρα έχουμε $u = \cos x \cosh y$ και $v = -\sin x \sinh y$

Οπότε $\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \cosh y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \cosh y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \sinh y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \sinh y$$

Επομένως ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann άρα είναι αναλυτική .

β) Να βρεθούν οι παράγωγοι αυτών χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y), z\varepsilon C$$

για $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

Έχουμε ό,τι $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

Επομένως $f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y \Rightarrow f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow f'(z) = e^z$

για $$f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

Έχουμε ό,τι $$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)\Rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Επομένως $$f'(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y\Rightarrow f'(z)=\cos(x+iy)\Rightarrow f'(z)=\cos z$$

για $$f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

Έχουμε ό,τι $$f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)\Rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Επομένως $$f'(z)=-\sin x\cosh y-i\cos x\sinh y\Rightarrow f'(z)=-(\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(z)=-\sin(x+iy)\Rightarrow f'(z)=-\sin z$$