• ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n\, συν\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\, ημ\frac{n\pi x}{L} \right], \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, συν\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, ημ\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

<u>Θεώρημα</u> Αν η $f(x)$ είναι περιοδική περιόδου $2L$, στο $[-L, L]$, κατά τμήματα συνεχής, φραγμένη με πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα τότε η σειρά Fourier της $f(x)$ που είναι

$$\boxed{n = \mathbb{N}}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\, συν\frac{n\pi x}{L} + b_n\, ημ\frac{n\pi x}{L}\right] = \begin{cases} f(x) & \text{σε κάθε σημείο συνέχειας} \\ \frac{1}{2}\left[\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right] & \text{σε κάθε σημείο ασυνέχειας} \end{cases}$$

Να βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x) = \begin{cases} 2, & αν\ -\pi \le x < 0 \\ 1, & αν\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$ $\quad f(x+2\pi) = f(x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = \frac{2}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi} = 2+1 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, συν\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\,συνnx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} συνnx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\, ημnx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\, ημnx\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\,ημnx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} ημnx\,dx =$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\left[συνnx\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n}\left[συνnx\right]_{0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] - \frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-2 + 2(-1)^n - (-1)^n + 1\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & αν\ n\ άρτιος \\ -\frac{2}{\pi n} & αν\ n = 2k+1\ περιττός \end{cases}$$

άρα σειρά Fourier: $\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \eta\mu nx = \frac{3}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2k+1}\eta\mu(2k+1)x$

η οποία είναι $\begin{cases} 2, & -\pi\leq x<0 \\ 1, & 0\leq x<\pi \\ \frac{1+2}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$

πχ Να βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x)=\begin{cases} 0, & -2<x<0 \\ x, & 0\leq x<2 \end{cases}$

και να βρεθεί το ανάπτυγμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_0^2=1$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\left[\frac{\eta\mu\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right]'dx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left[x\,\eta\mu\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\eta\mu\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2}, & \text{αν } n=2k+1 \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\,\eta\mu\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{-2}{2n\pi}\int_0^2 x\left(\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{2}\right)'dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[x\,\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi x}{2}\right]=-\frac{1}{n\pi}\left[2(-1)^n-\cancel{\frac{\eta\mu\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}}^{\,0}\Big|_0^2\right]$$

$$b_n=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

άρα σειρά Fourier: $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\sigma\upsilon\nu\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right]+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\eta\mu\frac{n\pi x}{2}$

η οποία ισούται με $\begin{cases} 0, & -2<x<0 \\ x, & 0<x<2 \\ 0 & \text{στο } x=0 \text{ (σημείο ασυνέχειας)} \end{cases}$

στο $x=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

• Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια στο $[-L,L]$ τότε η σειρά Fourier της $f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{συν}\frac{n\pi x}{L}$ όπου $a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{συν}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = 0 \quad \forall\, n = 1,2,3,\dots$$

• Αν η $f(x)$ είναι περιττή τότε $a_0 = 0$, $a_n = 0$ και $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{ημ}\frac{n\pi x}{L}\,dx$

και η σειρά Fourier της $f(x)$: $f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{ημ}\frac{n\pi x}{L}$

• Αν η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται στο $[0,L]$ τότε μπορούμε να (επεκτείνοντας το διάστημα στο $[-L,0]$) την θεωρήσουμε είτε άρτια είτε περιττή. (συνημιτονική σειρά (άρτια) και ημιτονική σειρά (περιττή) αντίστοιχα)

π.χ. $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$

η $f(x)$ είναι άρτια, άρα η σειρά Fourier της είναι:

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \,\text{συν}\frac{n\pi x}{1}, \quad b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x\,dx = x^2 = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\,\text{συν}(n\pi x)\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,(\text{ημ}n\pi x)'\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\Big[\underbrace{x\,\text{ημ}(n\pi x)\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \text{ημ}(n\pi x)\,dx\Big] = \frac{2}{n^2\pi^2}\,\text{συν}n\pi x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{-4}{\pi^2 n^2}, & \text{αν } n = 2k+1 \text{ περιττός} \end{cases}$$

άρα $|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\,\text{συν}(2k+1)\pi x$

π.χ $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ (περιττή)

αφού είναι περιττή $a_0 = 0$, $a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\eta\mu nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu nx\,dx = \frac{-2}{n\pi}\left[\sigma\upsilon\nu nx\right]_0^\pi =$

$= \frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$, άρα $b_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{αν } n = 2k+1 \text{ περιττός} \end{cases}$

Επομένως, η σειρά είναι $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\eta\mu(2k+1)x = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{-1+1}{2} = 0, & x = 0 \end{cases}$ (όρια είναι)

π.χ Να δειχθεί ότι για $0 \leq x \leq \pi$, $\underbrace{x(\pi - x)}_{f(x)} = \underbrace{\frac{8}{\pi}\left(\frac{\eta\mu x}{1^3} + \frac{\eta\mu 3x}{3^3} + \dots\right)}_{\text{Σειρά Fourier}}$

$f(x) = x(\pi - x)$

Επεκτείνω το διάστημα σε $[-\pi, \pi]$ ώστε η $f(x)$ να είναι περιττή

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\eta\mu\frac{n\pi x}{\pi}$ όπου $a_0 = 0$, $a_n = 0$ $\forall n$

και $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\eta\mu nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\,\eta\mu nx\,dx$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\left[\frac{-\sigma\upsilon\nu nx}{n}\right]' dx = \frac{2}{\pi n}\left\{-x(\pi - x)\frac{\sigma\upsilon\nu nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x)\,\sigma\upsilon\nu nx\,dx\right\} =$

$= \frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi (\pi - 2x)(\eta\mu nx)'\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left\{\underbrace{\cancel{(\pi - 2x)\,\eta\mu nx\Big|_0^\pi}}_{0} + 2\int_0^\pi \eta\mu nx\,dx\right\} =$

$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \frac{(-\sigma\upsilon\nu nx)'}{n}\,dx = \frac{-4}{\pi n^3}\left(\sigma\upsilon\nu nx\right)_0^\pi = \frac{-4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)$

άρα $b_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{8}{\pi n^3}, & \text{αν } n = 2k+1 \text{ περιττός} \end{cases}$