

• ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})], \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}) dx$$

Θεώρημα Αν η $f(x)$ είναι περιστούμενη

περιόδου $2L$, στο $[-L, L]$, μετά την καταστροφή συγχρίσιμης,

(πραγμένη με πενερφασμένου αλινδαυς μεταξύ α

και ελαχιστικής τοτε η σειρά Fourier της $f(x)$

$$\text{που είναι } \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})] = \begin{cases} f(x) & \text{σε κάθε σημείο συνεχείας} \\ \frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)] & \text{σε κάθε σημείο διαυγείας} \end{cases}$$

$$m = N$$

$$\text{Να βρεθεί η σειρά Fourier της } f(x) = \begin{cases} 2, & \text{av } -\pi \leq x < 0 \\ 1, & \text{av } 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{2}{\pi} x \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} x \Big|_0^{\pi} = 2 + 1 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\frac{n\pi x}{\pi}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} n \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi n} n \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 2 n \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} n \sin nx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} [n \cos nx] \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi n} [n \cos nx] \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] - \frac{1}{\pi n} [(-1)^n - 1] =$$

$$= \frac{1}{\pi n} [-2 + 2(-1)^n - (-1)^n + 1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{av } n \text{ αριζίος} \\ -\frac{2}{\pi n} & \text{av } n = 2k+1 \text{ περιζάριος} \end{cases}$$

$$\text{άριστη Fourier: } \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \mu n x = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} n \mu (2k+1) x$$

n ονοματεία $\begin{cases} 2, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \\ \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, & x=0 \end{cases}$

πχ Να βρεθεί η σειρά Fourier της $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

Kai να βρεθεί το αντίγραφο της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \operatorname{συν} \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \left[\frac{n\mu \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right]' dx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[x n \mu \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 n \mu \frac{n\pi x}{2} dx \right] = \frac{2}{n^2 \pi^2} \operatorname{συν} \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} \left[(-1)^n - 1 \right] = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ αριτίος} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & \text{αν } n = 2k+1 \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x n \mu \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{-2}{2n\pi} \int_0^2 x (\operatorname{συν} \frac{n\pi x}{2})' dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \left[x \operatorname{συν} \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \operatorname{συν} \frac{n\pi x}{2} dx \right] = -\frac{1}{n\pi} \left[2(-1)^n - \frac{n \mu \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \Big|_0^2 \right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

$$\text{άριστη Fourier: } \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k+1)^2} \operatorname{συν} \frac{(2k+1)\pi x}{2} \right] + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n \mu \frac{n\pi x}{2}$$

n ονοματεία με $\begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{στο } x=0 \text{ (σημείο ασυνεχείας)} \end{cases}$

$$\text{στο } x=0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$