ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2017 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ”

ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Θεωρούμε την καμπύλη με διανυσματική εξίσωση

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad X(t) = \left(1-2t, \ \ t^2, \ \ 2e^{2(1-t)}\right).$$

α) Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $t_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $P\left(X(t_0)\right)$ να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $X(t_0)$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $P\left(X(t_0)\right)$.

ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Να υπολογιστούν οι σταθερές $\kappa, \ \lambda, \ \mu,$ έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = \left(y^2 + k z^2, \ \ l x^2 + 2z^2, \ \ 4x^2 + m y^2\right)$$

να επαληθεύει τη σχέση

$$rot(rotF) = \vec{0}.$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$ (2 *μονάδες*)
Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Να υπολογιστεί το εμβαδόν του παραβολοειδούς

$$z = x^2 + y^2$$

όπου $0 \le z \le 1$.

ΘΕΜΑ 5$^{\text{Ο}}$ (*2 μονάδες*)
Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = \left(xy, \ \ yz, \ \ zx\right)$$

και το τετράεδρο S που ορίζεται από τα επίπεδα $x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ x + y + z = 1$.
Να υπολογιστεί η ροή του διανυσματικού πεδίου F δια μέσου της επιφάνειας S.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t)=\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|}\left\|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|}\dot{X}(t)\right)\right\|,\ \ R(t)=\frac{1}{K(t)}.$$

$$f=f(x,y,z),\ grad\ f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\vec{F}(x,y,z)=(f_1,f_2,f_3),\ \ div\,\vec{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z},\ \ rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

<u>Θεώρημα</u> (*Κριτήριο του Sylvester*) Έστω η πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση f και P κρίσιμο σημείο της f. Για συντομία συμβολίζουμε: $a_{ij}=\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j\in\{1,2,...,n\}$.

και τις ορίζουσες $\Delta_1=a_{11}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, …, $\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

οι οποίες ονομάζονται ορίζουσες Εσσιανών πινάκων. Τότε:

(i) Αν $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, …, $\Delta_n>0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο *P*.

(ii) Αν $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, …, $(-1)^n\Delta_n>0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο *P*.

(iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k\neq 0$, $\forall k\in\{1,2,...,n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο *P*.

(iv) Αν $\Delta_k=0$, για κάποιο $k\in\{1,2,...,n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο *P*.

$$E=\frac{1}{2}\int_c xdy-ydx,\quad \mathrm{E}=\iint_D dxdy,\quad V=\iiint_D dxdydz$$

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)),\ \int_c Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$m=\iint_D s(x,y)dxdy,\ \ \bar{x}=\frac{\iint_D xs(x,y)dxdy}{m},\ \ \bar{y}=\frac{\iint_D ys(x,y)dxdy}{m}$$

$$m=\iiint_D s(x,y,z)dxdydz,\ \bar{x}=\frac{\iiint_D xs(x,y,z)dxdydz}{m},\ \bar{y}=\frac{\iiint_D ys(x,y,z)dxdydz}{m},\ \bar{z}=\frac{\iiint_D zs(x,y,z)dxdydz}{m}$$

$$E=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$I=\iiint_D(div\,\vec{F})dxdydz$$ (ροή διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$)

$$I=\iiint_D(div\,\vec{u})dxdydz$$ (όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^Ο

α) Έχουμε

$$\dot{X}(t)=\left(-2,\ \ 2t,\ \ -4e^{2(1-t)}\right)\Rightarrow \dot{X}(t_0)=\left(-2,\ \ 2t_0,\ \ -4e^{2(1-t_0)}\right)$$

Για να είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $P\left(X(t_0)\right)$ να είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $X(t_0)$, θα πρέπει να υπάρχει $t_0\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\dot{X}(t_0)=\lambda X(t_0)\Rightarrow\left(-2,\ \ 2t_0,\ \ -4e^{2(1-t_0)}\right)=\lambda\left(1-2t_0,\ \ t_0^{\ 2},\ \ 2e^{2(1-t_0)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1-2t_0)\lambda=-2\\ t_0^{\ 2}\lambda=2t_0\\ 2e^{2(1-t_0)}\lambda=-4e^{2(1-t_0)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_0=0\\ \lambda=-2\end{cases}$$

Άρα $t_0=0$.

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι:

$$Y(t)=X(0)+t\dot{X}(0)\Rightarrow Y(t)=\left(1,0,2e^2\right)+t\left(-2,0,-4e^2\right)\Rightarrow\begin{cases}y_1(t)=-1-2t\\ y_2(t)=0\\ y_1(t)=e^2-4e^2t\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2^Ο

Είναι

$$rotF=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+kz^2&\lambda x^2+2z^2&4x^2+my^2\end{vmatrix}=(2my-4z)\vec{i}-(8x-2kz)\vec{j}+(2\lambda x-2y)\vec{k}\,.$$

Και τελικά

$$rot(rotF)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2my-4z&+2kz-8x&2\lambda x-2y\end{vmatrix}$$

$$=(-2-2k)\vec{i}-(2\lambda+4)\vec{j}+(-8-2m)\vec{k}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}k=-1\\ \lambda=-2\\ m=-4\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3$^{\text{Ο}}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2-3x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}x^2-y=0\\ y^2-x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}y=x^2\\ x^4-x=0\end{aligned}\right\}$$

από όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$.

Υπολογίζουμε τις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$.

Οπότε $\Delta_2=[(6x)(6y)-(-3)^2]=36xy-9$.

Στο $P_1(0,0)$ είναι $\Delta_1=\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}=0$ άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Στο $P_2(1,1)$ είναι $\Delta_1=\frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2}=6>0$ και $\Delta_2=27>0$ άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο $f_{\min}=f(P_2)=-1$.

ΘΕΜΑ 4$^{\text{Ο}}$

$$E=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$$

$$=\int_0^{2p}\left\{\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\right\}dq=\frac{1}{8}\int_0^{2p}\left\{\int_0^1\left(1+4r^2\right)^{1/2}\left(1+4r^2\right)'\,dr\right\}dq$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2p}\left[\frac{\left(1+4r^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_{r=0}^{1}dq=\frac{1}{8}\int_0^{2p}\frac{2}{3}(5^{3/2}-1)dq=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(5^{3/2}-1)\left[q\right]_0^{2p}=\frac{p}{6}(5^{3/2}-1).$$

ΘΕΜΑ 5$^{\text{Ο}}$

Έχουμε $\quad D=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x,\ \ 0\le z\le 1-x-y\}$

Επομένως $\quad I=\iiint_D(\operatorname{div}\vec{F})\,dxdydz=\int_{x=0}^{1}\left\{\int_{y=0}^{1-x}\left(\int_{z=0}^{1-x-y}(x+y+z)dz\right)dy\right\}dx$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-x-y}=(x+y)(1-x-y)+\frac{(1-x-y)^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{(x+y)^2}{2},$$

$$\int_0^{1-x-y}\left(\frac{1}{2}-\frac{(x+y)^2}{2}\right)dy=\frac{1}{2}[y]_{y=0}^{1-x}-\frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{1-x}=-\frac{1}{2}(1-x)-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x^3,$$

και έτσι $\int_0^{1-x-y}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}x^3\right)dz=-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1}+\frac{1}{3}[x]_{x=0}^{1}+\frac{1}{6}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}.$