

Διαφορικές Εξισώσεις και Μετασχηματισμοί

Άσκηση 1.1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(1+i\sqrt{3})^8 + (1-i\sqrt{3})^8$$

Απάντηση

Έχουμε:

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$
$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

Ισχύει ότι:

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Οπότε συμπερνούμε ότι:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\bar{z} = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} A &= 2^8 e^{8i\frac{\pi}{3}} + 2^8 e^{-8i\frac{\pi}{3}} = 2^8 \left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3} \right) + 2^8 \left(\cos\frac{8\pi}{3} - i\sin\frac{8\pi}{3} \right) = \\ &= 2^8 \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right) + 2^8 \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= 2^8 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2^8 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= 2^8 \left(-\frac{1}{2} \right) + 2^8 i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2^8 \left(-\frac{1}{2} \right) - 2^8 i \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \cdot 2^7 = -256 \end{aligned}$$

Άσκηση 1.2

Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $y=0$ μέσω του μετασχηματισμού:

$$w = \frac{z-2i}{z+3i}$$

Απάντηση

Έχουμε :

$$w = f(z) = \frac{z-2i}{z+3i} = \frac{(z-2i)(z-3i)}{z^2+9} = \frac{z^2-5zi-6}{z^2+9} = \frac{z^2-6}{z^2+9} + \frac{-5z}{z^2+9}i$$

Όπου

$$z = x + yi$$

$$y = 0$$

$$z = x$$

Άρα

$$w = \frac{x^2-6}{x^2+9} + \frac{-5x}{x^2+9}i$$

Θέτω

$$u = \frac{x^2-6}{x^2+9}$$

$$v = \frac{-5x}{x^2+9}$$

Όπου

$$u = \frac{x^2-6}{x^2+9}$$

$$x^2u + 9u = x^2 - 6$$

$$x^2u - x^2 = -9u - 6$$

$$x^2 = \frac{9u+6}{1-u}$$

Και

$$v = \frac{-5x}{x^2+9}$$

$$v^2 = \frac{25x^2}{(x^2+9)^2}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}v^2 &= \frac{25 \frac{9u+6}{1-u}}{\left(\frac{9u+6}{1-u} + 9\right)^2} = \frac{25 \frac{9u+6}{1-u}}{\left(\frac{9u+6+9-9u}{1-u}\right)^2} = \frac{25 \frac{9u+6}{1-u}}{\frac{15^2}{(1-u)^2}} = \frac{25(9u+6)(1-u)}{15^2} = \\&= \frac{-225u^2 + 75u + 150}{225} = -u^2 + \frac{1}{3}u + \frac{2}{3} \\v^2 + u^2 - \frac{1}{3}u + \frac{1}{36} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{36} \\v^2 + \left(u - \frac{1}{6}\right)^2 &= \frac{25}{36} \\v^2 + \left(u - \frac{1}{6}\right)^2 &= \left(\frac{5}{6}\right)^2\end{aligned}$$

Άρα η εικόνα της ευθείας $y=0$ μέσω του μετασχηματισμού είναι ο κύκλος με κέντρο το $(1/6, 0)$ και ακτίνα $5/6$