

# Logic and Set theory

1-

\* Logic :- المنطق (تحديد قيم الصواب)

\* Proposition (Statement) :- فردية منطقية

عبارة عن جملة مفيدة وهذه الجملة ممكن تكون T أو F

\* Logical variable :- المتغيرات المنطقية

is variables has value True or false and using the previous symbole p, q, r, s,

T or F = دائماً قيمهم p, q, ... الى رموز Statement

\* Logical operators : المؤثرات المنطقية

تساعدنا في تبسيط الجمل المنطقية المعقدة

1- negative operator reflex operator  $\neg$  or  $\sim$  مؤثر النفي

2- Conjunction operator AND  $\wedge$  مؤثر الـ و

3- disjunction operator OR  $\vee$  مؤثر الفـ و

4- Implication operator  $\rightarrow$  مؤثر الانسياق

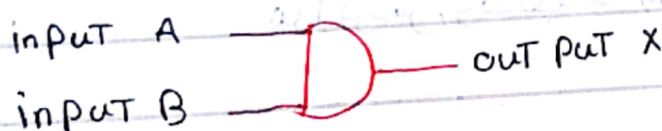
5- bi directional operator  $\leftrightarrow$  مؤثر التزدوج

1- negative operator : NOT  $P \rightarrow \neg P$

P	$\neg P$ or $\sim P$
T	F
F	T

2- Conjunction operator :

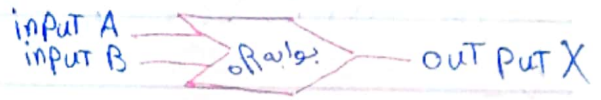
عشان تكون T لازم الجملتين مع بعض يكونوا T



$P \leftarrow \text{AND} \equiv \wedge$

P	q	$P \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3- disjunction operator (OR)  $\vee$



P	q	$P \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تكون T لو واحدة فقط على

الأقل تكون T

تكون F لو الجملتين

we get Two kind of OR

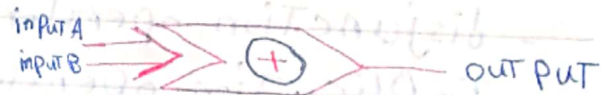
inclusive OR ( $\vee$ )

IF  $p$  or  $q$  Both True then  $p \vee q$  is True

Exclusive OR ( $\oplus$ )

if  $p$  or  $q$  (But not Both) True then  $p \oplus q$  True

P	q	$P \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F



4- Implication operator ( $\rightarrow$ ) ( $p$  implies  $q$ )

P	q	$P \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ذا كرت ونجحت (طبيعى) T

ذا كرت وسقط (غير طبيعى) F

مذا كرتش ونجحت (طبيعى غش) T

مذا كرتش ولا نجحت (طبيعى) T

5. Bidirection :-  $(P \leftrightarrow Q)$   
 (bi implication)  
 (iff) (if and only if)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

يكون True لو الحدين متساويان  
 عكس (+) يكون True لو الحدين مختلفين

$$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

الأقواس  $\rightarrow$  NOT  $\rightarrow$  AND  $\rightarrow$  (OR, XOR)

ترتيب العملية  
 له الأولوية على حسب القرب من اليسار

Types of propositions :-

Tautology :- A proposition is said to be a Tautology if its Truth-values always True

Contradiction :- A proposition is said to be a contradiction if its Truth-values always False

Contingency :- A Contingency proposition is neither a Tautology nor a Contradiction.

\* De Morgan's Laws :-  $P \leftrightarrow Q$  or  $P = Q$

1<sup>st</sup> Law :  $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

2<sup>nd</sup> Law :  $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

\* Distributive law :-

1<sup>st</sup> Law :  $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

2<sup>nd</sup> Law :  $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

\* Complement of AND :  $P \uparrow Q$  (NAND)

$P \uparrow Q = (P \wedge Q) = \text{invert } (P \wedge Q) \equiv \neg(P \wedge Q)$



\* Complement of OR :  $(NOR)$

$$\overline{p \vee q} \equiv \text{invert}(p \vee q) \equiv \neg(p \vee q)$$



\* Complement of NOR :  $p \oplus q$  (171)

\* List of Identities

1-  $p \equiv p \vee p$  and  $p \equiv p \wedge p$

2-  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  and  $p \vee q \equiv q \vee p$

3-  $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$  and  $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

4-  $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$  and  $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

5-  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  and  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

6-  $p \vee T \equiv T$  and  $p \wedge T \equiv p$

7-  $p \vee F \equiv p$  and  $p \wedge F \equiv F$

8-  $p \vee \bar{p} \equiv T$  and  $p \wedge \bar{p} \equiv F$

9-  $\overline{(\bar{p})} \equiv p$

10-  $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$

11-  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

12-  $p \rightarrow q \equiv \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

13-  $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

# Exercises 1

Date: \_\_\_\_\_ no: \_\_\_\_\_

1- Assuming that  $p$  and  $r$  are false that  $q$  and  $s$  are true, Find the Truth-value of each the following proposition.

- ①  $p \rightarrow q \quad F \rightarrow T = T$
- ②  $\bar{p} \rightarrow \bar{q} \quad T \rightarrow F = F$
- ③  $\overline{p \rightarrow q} \quad \bar{T} = F$
- ④  $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) = T \rightarrow (T \rightarrow F) = T \rightarrow F = F$
- ⑤  $(p \rightarrow q) \rightarrow r = (F \rightarrow T) \rightarrow F = T \rightarrow F = F$
- ⑥  $p \rightarrow (q \rightarrow r) = F \rightarrow (T \rightarrow F) = F \rightarrow F = T$
- ⑦  $(s \rightarrow (p \wedge \bar{r})) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s) = (T \rightarrow (F \wedge T)) \wedge (F \rightarrow (F \vee T) \wedge T)$
- ⑧  ~~$(p \wedge r \wedge s) \rightarrow (p \vee q)$~~   $= (T \rightarrow F) \wedge ((F \rightarrow T) \wedge T)$   
 $= F \wedge (T \wedge T) = F$
- ⑧  $(p \wedge r \wedge s) \rightarrow (p \vee q) = (F \wedge F \wedge T) \rightarrow (F \vee T)$   
 $= F \rightarrow T = T$

2- Verify the second De Morgan Law,  $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

$p$	$q$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

3- Show that  $(p \rightarrow q) \equiv (\bar{p} \vee q)$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

⑧ For each predicate give (if possible) an integer  $n$  for each which the predicate is True and another integer for which it is False

①  $(n+1=n) \vee (n=5)$

عبر صيغة  $n$  داخل Predicate صحيحة

at  $n=5$

$(6=5) \vee (5=5) \quad \therefore F \vee T = T$

في حالة القيمة التي تجعل Predicate خاطئة

at  $n \neq 5$  مثلا  $n=3$

$(3+1=5) \vee (3=5) = F \vee F = F$

②  $(n > 7) \vee (n < 4)$

at  $n=8, 9, \dots$  صحيحة في حالة at  $n=3, 2, 1, \dots$

$(n > 7) \vee (n < 4)$

$(n > 7) \vee (n < 4)$

$= T \vee F$

$= F \vee T$

$= T \vee F$

$= F \vee T$

خاطئة في حالة

أي رقم صحيح في الفترة interval  $n \in [4, 7]$

صحيحة في حالة i.e at  $n \in \mathbb{Z} - ]4, 7[$

③  $(n > 7) \wedge (n < 4)$  is always false

لأن كماطينا في السؤال السابق وجدنا ان استحالة نوجد قيمة لـ  $n$

تخلي ال Two Statement صحيحة في نفس الوقت لأن AND

مش هطلع True غير لو الاثنين True

(4)  $(n < 7) \vee (n > 4)$  is true always on all  $\mathbb{Z}$   
 $(n < 7) \equiv T$  at  $n = 6, 5, 4, \dots$   
 $(n > 4) \equiv T$  at  $n = 5, 6, 7, \dots$

[9] Let  $P(x, y, z)$  be the predicate  $xy < x + z + 1$ .  
 the domain is the positive real numbers, write out  
 each of these predicates

(1)  $P(1, 2, 3)$   $xy < x + z + 1$

$(1)(2) < 1 + 3 + 1$   $2 < 4$  is True

[10] which of these statements are True?

$n$  is an integer, and  $x$  is real number

(1)  $\forall n (n + 3 \geq n)$  always true  $\begin{matrix} \oplus & 2 + 3 \geq 2 \\ \ominus & -5 + 3 \geq -5 \end{matrix}$

(2)  $\forall x (x + 3 \geq x)$  True

(3)  $\forall n (3n > n)$  False  $\begin{matrix} \oplus & 3(2) > 2 \equiv T \\ \ominus & 3(-2) > 2 \equiv F \end{matrix}$

لأن مش لكل قيم  $n$  تحقق ال Statement

(4)  $\forall x (3x > x)$  False

(5)  $\forall n (3n + 1 > n)$  False  $\begin{matrix} \oplus & 3(2) + 1 > 2 = T \\ \ominus & 3(-2) + 1 > 2 = F \end{matrix}$

(6)  $\forall x (3x + 1 > x)$  False

(7)  $\forall x (\text{if } x > 1, \text{ then } x + 1 > 1) \equiv \text{True}$

if  $p$  then  $q$   $p \rightarrow q$

$p \equiv (x > 1) \equiv F$

$x \in \mathbb{R}$  لأن كل قيم  $x$  ليس أكبر من 1

$q \equiv (x + 1 > 1) \equiv F$

$F \rightarrow F \equiv T$

$$\textcircled{8} \quad \forall x (x^2 - 1 > 0) \equiv \text{False}$$

False لأن  $\forall$  (لكل قيم  $x$ ) لا يتحقق الـ Statement  
XER

at  $x=0$   $(0)^2 - 1 > 0$  False

$x=1$   $1 - 1 > 0$  False

$x=2$   $(2)^2 - 1 > 0$  True

10 For every positive integer  $n$ , if  $n$  is even then  $n^2 + n + 19$  is prime  
False

$2^2 + 2 + 19 = 25$  is not prime