حل 80% من مسائل الكتاب

* Discrete Mathematics *

Chapter 1

Exercises :-

[1] p, r are false, q, s are true, find..

① $p \to q \equiv F \to T \equiv T$ #

② $\bar{p} \to \bar{q} \equiv T \to F \equiv F$ #

③ $\overline{p \to q} \equiv \overline{(F \to T)} \equiv \bar{T} \equiv F$ #

④ $(p \to q) \to (q \to r) \equiv (F \to T) \to (T \to F) \equiv T \to F \equiv F$ #

⑤ $(p \to q) \to r \equiv (F \to T) \to F \equiv T \to F \equiv F$ #

⑥ $p \to (q \to r) \equiv F \to (T \to F) \equiv F \to F \equiv T$ #

⑦ $(s \to (p \wedge \bar{r})) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$

$\equiv [T \to (F \wedge \bar{F})] \wedge [(F \to (F \vee T)) \wedge T]$

$\equiv [T \to (F \wedge T)] \wedge [(F \to T) \wedge T]$

$\equiv (T \to F) \wedge (T \wedge T)$

$\equiv F \wedge T \equiv F$ #

⑧ $(p \wedge r \wedge s) \to (p \vee q) \equiv (F \wedge F \wedge T) \to (F \vee T) \equiv F \to T \equiv T$ #

[2]

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

#

$\boxed{3}$ Show That $p \to q \equiv \bar{p} \vee q$

p	q	$p \to q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

#

$\boxed{4}$ $A = \{2,4,6\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{1,6\}$

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ prob?

5 $X = \{1,2\}$, $Y = \{a,b,c\}$

① $X \times Y = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

② $Y \times X = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

③ $X \times X = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}$

④ $Y \times Y = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),$
$(c,b),(c,c)\}$

6 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ find $A \Delta B$

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = A \oplus B$

$A \Delta B = \{1,2,3,4,5\} - \{3,2\} = \{1,4,5\}$

7 Sate which is true

① $(\forall x \in \mathbb{Z}), x \geq 0$ is false

② $(\forall x \in \mathbb{N}), x \geq 0$ is True

8 ① $(n+1=n) \vee (n=5)$ is True at $n=5$

② $(n>7) \vee (n<4)$ is True at $n = 8, 9, \ldots$ or $n = 3, 2, 1, 0, \ldots$
i.e at $n \in \mathbb{Z} - [4,7]$

③ $(n>7) \wedge (n<4)$ is always false.

④ $(n<7) \vee (n>4)$ is True always on $\mathbb{Z}$

$\boxed{9}$ $p(x,y,z)$ is $xy < x+z+1$

① $p(1,2,3)$ is $(1)(2) < 2+3+1$ is True

③ $P(x,x,y)$ is $x^2 < x+y+1$

④ $P(x, x+y, y+z)$ is $x(x+y) < x+y+z+1$

⑤ $P(x,x,x)$ is $x^2 < 2x+1$

B − + +

A − − +

$$x^2 - 2x - 1 < 0$$

$$(x-(\overset{A}{1+\sqrt{2}}))(x-(\overset{B}{1-\sqrt{2}})) < 0$$

$\therefore$ $p(x)$ is true at $x \in \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$

$p(x)$ is false at $x \in \mathbb{R} - \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$

⑥ $P(x, x-1, x+1)$ is $x(x-1) < x+x+1+1$

− − +

− + +

$$x^2 - 3x - 2 < 0$$

$$\left[x - \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\right]\left[x - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\right] < 0$$

$\therefore$ $P(x)$ is True at $x \in \left]\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right[$

$P(x)$ is false at $\mathbb{R} - \left]\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right[$

\#

$\boxed{10}$ ① $\forall n (n+3 \geq n)$ is T

② $(\forall x)(x+3 \geq x)$ is T

③ $(\forall n)(3n > n)$ is F

④ $(\forall n)(3x > x)$ is F

⑤ $(\forall n)(3n+1 > n)$ is F

⑥ $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ is T

⑦ $(\forall x)$(if $x > 1$ Then $x+1 > 1$) is T

⑧ $(\forall x)(x^2-1>0)$ is F

⑨ $(\exists x)\left(\frac{x}{x^2+1}=\frac{2}{5}\right)$ is T

$5x=2(x^2+1)$

$2x^2-5x+1=0 \rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$ ※

⑩ for every positive integer n, if n is even Then n^2+n+19 is prime is F

Contraexample is "2", 2 is even but $2^2+2+19=25$ isn't Prime ※

ملغي

$\boxed{11}$

$\boxed{12}$ If $A=\{1,2\}$, $B=\{0,3\}$, $C=\{1,4,5\}$

① • $A\times B=\{(1,0),(2,0),(2,3),(1,3)\}$

• $B\times A=\{(0,1),(0,2),(3,1),(3,2)\}$

• $A\times B\times C=\{(1,0,1),(2,0,1),(2,3,1),(1,3,1),$
$(1,0,4),(2,0,4),(2,3,4),(1,3,4),$
$(1,0,5),(2,0,5),(2,3,5),(1,3,5)\}$

- $B \times (A \times C) = \{(0,(1,1)), (0,(1,4)), (0,(1,5)),$
$(0,(2,1)), (0,(2,4)), (0,(2,5)),$
$(3,(1,1)), (3,(1,4)), (3,(1,5)),$
$(3,(2,1)), (3,(2,4)), (3,(2,5))\}$
- $B \times A^2 = \{(0,1,1), (0,1,2), (0,2,1), (0,2,2),$
$(3,1,1), (3,1,2), (3,2,1), (3,2,2)\}$
- $A \times B^2 = \{(1,0,0), (1,0,3), (1,3,0), (1,3,3),$
$(2,0,0), (2,0,3), (2,3,0), (2,3,3)\}$

2) prove that:-

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

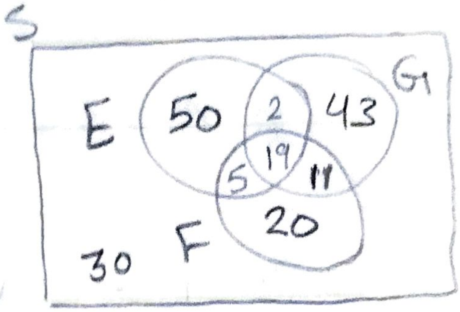
$L.H.S = \{1,2\} \times \{0,1,3,4,5\}$
$= \{(1,0), (1,1), (1,3), (1,4), (1,5)$
$(2,0), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5)\} \rightarrow ①$

$R.H.S = \{(1,0), (1,3), (2,0), (2,3)\} \cup$
$\{(1,1), (1,4), (1,5), (2,1), (2,4), (2,5)\}$
$= \{(1,0), (1,1), (1,3), (1,4), (1,5),$
$(2,0), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5)\} \rightarrow ②$

①,② Then $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ✱

المسألة فيها غلط في 8، 10، دول   نغيرهم

13. $|S| = 180$, $|F \cup E \cup G| = 150$, $|E| = 76$, $|F| = 55$,
$|G| = 75$, $|E \cap F| = 24$, $|E \cap G| = 21$, $|F \cap G| = 30$
find $|E \cap F \cap G|$, draw venn-diagram



$$|E \cup G \cup F| = |E| + |G| + |F| - |E \cap F| - |E \cap G| - |F \cap G| + |E \cap F \cap G|$$

$$150 = 76 + 55 + 75 - 24 - 21 - 30 + |E \cap F \cap G|$$

$\therefore |E \cap F \cap G| = 19$ #

14. ① n divides 16 is $\{\pm 16, \pm 32, \pm 48, \pm 64, \dots\}$

or $\{16n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

② $\{n^2 \in \mathbb{N} \mid n \text{ divides } 16\} = \{256, 1024, 2304, \dots\}$

③ $\{n^2 \in \mathbb{Z} \mid n \text{ divides } 16\} = \{256, 1024, 2304, \dots\}$

15. $A_n = \{(x, y) \mid (y = \frac{1}{x^n}) \wedge (0 < x < \infty)\}$, find $\bigcap_{n \geq 1} A_n$

$A_1 = \{(x, y) \mid (0 < x < \infty) \wedge (y = \frac{1}{x})\}$

- intersection :-

$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3} = \dots$

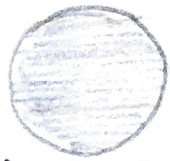
at $x = 1 \Rightarrow y = 1$

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{(1, 1)\}$$ #

$\boxed{16}$ ① $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

A is

② $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

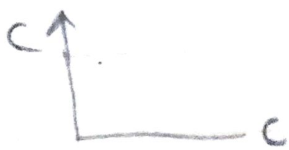


A is a disk with a center (0,0) & radius 1

③ $C = \{B / A\}$

④ $D = C \times B$

⑤ $S = C \times C$



$\boxed{17}$

- $20 = 3 + 17$

  $18 = 13 + 5$

  $16 = 13 + 3$

  $14 = 11 + 3$

  $12 = 7 + 5$

- $\forall n \in \mathbb{Z}\ ((n > 5) \wedge (n \text{ odd}))$

  $\longrightarrow (\exists\, p, q, r \in \mathbb{P} \ni n = p + q + r)$

- $7 = 3 + 2 + 2$

  $9 = 2 + 2 + 5$

  $11 = 5 + 3 + 3$

  $13 = 5 + 5 + 3$

  $15 = 5 + 5 + 5$

  $17 = 5 + 5 + 7$

  $19 = 5 + 11 + 3$

  $21 = 17 + 2 + 2$ ...

$\boxed{18}$ $(\exists p \in \mathbb{P})[(p \text{ odd}) \vee (p=2)]$

$\boxed{19}$ ① $(p \wedge q) \vee [\bar{p} \vee (p \wedge \bar{q})] \vee r$

$\equiv (p \wedge q) \vee [(\bar{p} \vee p) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \vee r$

$\equiv (p \wedge q) \vee [\ T \wedge (\bar{p} \vee \bar{q})] \vee r$

$\equiv (p \wedge q) \vee (\bar{p} \vee \bar{q}) \vee r$

$\equiv (p \wedge q) \vee \overline{(p \wedge q)} \vee r$

$\equiv T \vee r$

$\equiv T$ tautology #

② $[(\bar{p} \wedge q) \wedge (q \vee r)] \wedge (\bar{q} \vee r)$

let $A = (\bar{p} \wedge q) \wedge (q \vee r)$

$B = A \wedge (\bar{q} \vee r)$

By True table :-

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge q$	$q \vee r$	$\bar{q} \vee r$	A	B
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F	T	F	F

Contingency #

$\boxed{20}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ if n^2 is even, Then n is even

"Contradiction proof"

[n^2 is even $\rightarrow$ n is even]

Since n^2 is even $\Rightarrow n^2 = 2m$

let n is odd $\Rightarrow n = 2l+1$

$$\Rightarrow n^2 = (2l+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 4l^2 + 4l + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2[2l^2 + 2l] + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2k + 1 \Rightarrow \text{odd}$$

but $n^2 = 2m \Rightarrow$ even

This is a contradiction; our axiom is false

Then n^2 is even $\rightarrow$ n is even #

مش ده المطلوب - المطلوب اللي قولتلنا نثبته

Chapter 2

• Relations •

$\boxed{1}$ $R_1 = \{(1,1), (1,2), (3,4), (4,2)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,4), (2,2)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,2), (2,4)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,1), (3,4), (4,1), (1,2), (4,2)\}$

$\boxed{2}$ ① $R = \{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$

② Domain $= \{2, 3, 4\}$, Codomain $= Y$

③ not equivalent

$\boxed{3}$ $X = \{1,2,3,4,5,6\}$; $x, y \in X$

① $x = y^2 \Rightarrow R_1 = \{(4,2), (1,1)\}$ not r, s, t ✗

② $x > y \rightarrow R_2 = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (3,2),$
$(4,2), (5,2), (6,2), (4,3), (5,3), (6,3),$
$(5,4), (6,4), (6,5)\}$ not r, s, t ✗

③ $x \geq y \Rightarrow R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \cup R_2$
ref. ✓, not sym., transitive ✓

④ $x = y \Rightarrow R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ ✓ref. ✓sym. ✓trans.

⑤ x divides $y \Rightarrow R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6),$
$(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4),$
$(2,6), (3,6)\}$ ref. ✓, sym. ✗, trans ✓

ref. sym. trans.

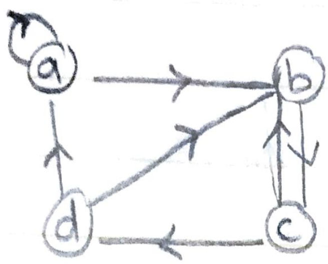
4 ① $R_1 = \{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4),(25,5),\ldots\}$ ×, ×, ×

② $R_2 = \{(2,1),(3,2),(3,1),(4,3),(4,2),(4,1),\ldots\}$ ×, ×, ×

③ $R_3 = \{(1,1),(2,1),(3,3),(3,2),(3,1),(4,4),(4,3)\ldots\}$ ✓, ×, ✓

④ $R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),\ldots\}$ ✓, ✓, ✓

5



8

	reflexive	symmetric	transitive
①	×	×	×
②	✓	×	×

$c \rightarrow d$

رابطه نقض

9 reflexive: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)

symetric: (1,1) → (1,1) , (1,3) → (3,1)

(2,2) → (2,2) , (1,5) → (5,1)

(3,3) → (3,3) , (2,4) → (4,2)

(4,4) → (4,4) , (3,5) → (5,3)

(5,5) → (5,5) ,

transitive: (1,3), (3,1) → (1,1) , (1,3),(3,3) → (1,3)

(1,5), (5,3) → (1,3) | (1,3),(3,5) → (1,5)

(1,5), (5,1) → (1,1) | (1,5), (5,5) → (1,5)

$(2,4),(4,2) \to (2,2)$	$(3,5),(5,1) \to (3,1)$	$(5,1),(1,1) \to (5,1)$
$(2,4),(4,4) \to (2,4)$	$(3,5),(5,3) \to (3,3)$	$(5,1),(1,3) \to (5,3)$
$(3,1),(1,1) \to (3,1)$	$(3,5),(5,5) \to (3,5)$	$(5,1),(1,5) \to (5,5)$
$(3,1),(1,3) \to (3,3)$	$(4,2),(2,2) \to (4,2)$	$(5,3),(3,5) \to (5,5)$
$(3,1),(1,5) \to (3,5)$	$(4,2),(2,4) \to (4,4)$	$(5,3),(3,3) \to (5,3)$
$(3,3),(3,3) \to (3,3)$	$(4,4),(4,4) \to (4,4)$	$(5,3),(3,1) \to (5,1)$
$(1,1),(1,1) \to (1,1)$	$(2,2),(2,2) \to (2,2)$	$(5,5),(5,5) \to (5,5)$

$\boxed{10}$ $x,y \in \{1,2,3,4,5\}$, $(x,y) \in R$ if $x+y \leq 6$

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$

$\boxed{12}$ ① $A\times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\bar{R} = \{(1,3),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}$

$\bar{S} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

$R \cap S = \{(3,1)\}$

$S^{-1} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,3)\}$

② $A\times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$

$\bar{R} = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(c,1)\}$

$\bar{S} = \{(a,3),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$

$R \cap S = \{(a,1),(b,1)\}$

$S^{-1} = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$

$\boxed{5}$ ① $R_1 = \{(a,a), (a,c), (c,c), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

$R_2 = \{(w,w), (w,y), (y,w), (y,y), (z,z)\}$

$R_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (2,4)\}$

②

$$M[R_1^{-1}] \quad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

③

ref.	sym.	trans.
X	X	X

$$M[R_2^{-1}] \quad \begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ref.	sym.	trans.
X	✓	✓

$$M[R_3^{-1}] \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ref.	sym.	trans.
X	X	X

27 $X=\{2,3,4\}$, $Y=\{4,5,6,8\}$

① $R_1=\{(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,8)\}$

② $R_2=\{(2,4),(3,4),(5,2)\}$

③ R_1 isn't reflexive, symmetric or transitive

R_2 isn't reflexive, symmetric or transitive

30 ①

reflexive closure $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ symmetric closure

31 ① $M_{\overline{R}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{R\cap S}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{R\cup S}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_{R^{-1}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

② $M_{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_{R \cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{R \cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{34}$ ① $R = \{(a,b), (b,b), (b,f), (c,a), (c,e), (c,d),$
$(d,b), (d,c), (e,f), (f,d)\}$

② Path π_1 : c, a, b
π_2 : c, e, f
π_3 : c, d, b
π_4 : c, d, c

③ cycle c, d, c

④ of length 1 are all elements of R
of length 3 are: c, a, b, f | a, b, f, d

d, c, d, b	b, f, d, c	c, e, f, d	a, b, b, f
e, f, d, c	b, f, d, b	c, a, b, b	d, c, e, f
e, f, d, b	d, b, f, d	d, b, b, f	d, c, d, b

⑤ reflexive closure $= R \cup \{(a,a),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)\}$
⑥ symmetric closure $= R \cup \{(f,e),(f,b),(b,d),(d,f),(b,a)$
$(a,c),(e,c)\}$

Chapter 3

- $n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{r\ \text{times}}$ with replacement r times

- $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$ without replacement n times

- $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ → without replacement r times [The order of selection is important]

- $^nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ → without replacement r times but The order of selection isn't important

* Simplification laws:-

① $^nC_r = {^nC_{n-r}}$

② $^nP_n = n!$

③ $\dfrac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$

④ $^{2n}C_n - {^{2n}C_{n-1}} = \dfrac{^{2n}C_n}{n+1}$ Called Catalan no.

- $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \cdots n_r!}$

لما يكون في عناصر مكررة

n: عدد العناصر

n_r: عدد التكرارات لكل عنصر

- at least one:- $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$

- around a circle:- $(n-1)!$

Ex :- Q1

① $3 \times P(2,1) - C(2,1) = 3\left[\frac{2!}{(2-1)!}\right] - \frac{2!}{1!(2-1)!} = 6 - 2 = 4$

② $P(4,3) = \frac{4!}{1!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

③ $(24)^2 (10)^2 = 576 \times 100 = 57600$

④ $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

⑤ $P(5,2) = \frac{5!}{3!} = 5 \times 4 = 20$

⑥ $P(7,4) = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

⑦ $P(10;1,1,1,7) = \frac{10!}{1!\,1!\,1!\,7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

⑧ ① $P(4,3) = \frac{4!}{1!} = 24$ ② $4^3 = 64$

⑨ ① $4! = 24$ ② $4^4 = 256$

⑩ $P(10,1,1,1,1,1,1,4) = \frac{10!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!\,4!} = 151200$

⑪ ① $3^3 = 27$ ② $P(3,3) = 3! = 6$

Q2

(2) BALL $\rightarrow P(4;1,1,2) = \dfrac{4!}{1!\,1!\,2!} = 12$

SUCCEED $\rightarrow P(7;1,1,2,2,1) = \dfrac{7!}{2!\,2!} = 1260$

COCO $\rightarrow P(4;2,2) = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$

SUCCESSIVE $\rightarrow P(10;3,1,2,2,1,1) = \dfrac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151200$

(3) L.H.S $= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k.(k-1)!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right]$$

$$= \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\right)\left(\frac{\cancel{k}+n-\cancel{k}}{k(n-k)}\right)$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k\,(k-1)!\,(n-k)\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} = \text{R.H.S}$$ *

④ $l.H.S = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)\,k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k-1)!}\left[\frac{\cancel{k}+1+n-\cancel{k}}{(n-k)(k+1)}\right]$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{(k+1)\,k!\,(n-k)(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} = R.H.S \#$$

⑤ $\binom{n}{k} \div \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \div \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$

$$= \frac{n!}{k(k-1)!\,(n-k)!} \times \frac{(k-1)!\,(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} = \frac{n+1}{k} - 1 \#$$

⑫ $\frac{(2n)!}{(2n-2)!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{(2n-2)!} = 2n(2n-1) \#$

- Binomial :-

Q2..

(1) $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{189}{8192}$

(6) $(a+b)^{11} = C_0^{11} a^{11} b^0 + C_1^{11} a^{10} b^1 + C_2^{11} a^9 b^2 + C_3^{11} a^8 b^3$

$= a^{11} + 11 a^{10} b + 55 a^9 b^2 + 165 a^8 b^3$

(7) $(a+b)^6 = C_0^6 a^6 b^0 + C_1^6 a^5 b^1 + C_2^6 a^4 b^2 + C_3^6 a^3 b^3$

$+ C_4^6 a^2 b^4 + C_5^6 a^1 b^5 + C_6^6 a^0 b^6$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a^1 b^5 + b^6$

(8) $(x-i)^6 = x^6 + 6x^5 i + 15 x^4 i^2 + 20 x^3 i^3$

$+ 15 x^2 i^4 + 6 x i^5 + i^6$

$= x^6 + 6i x^5 - 15x^4 - 20 i x^3 + 15x^2 + 6i x^5 - 1$

(9) $(3x^4+1)^4 = C_0^4 (3x^4)^4 + C_1^4 (3x^4)^3 + C_2^4 (3x^4)^2$

$C_3^4 (3x^4)^1 + C_4^4 (3x^4)^0$

$\therefore (3x^4+1)^4 = 81x^{16} + 108x^{12} + 54x^8 + 12x^4 + 1$

(10) $\left[x^2+\frac{y}{2}\right]^5 = C_0^5 (x^2)^5 \left(\frac{y}{2}\right)^0 + C_1^5 (x^2)^4 \left(\frac{y}{2}\right)^1 + C_2^5 (x^2)^3 \left(\frac{y}{2}\right)^2$

$+ C_3^5 (x^2)^2 \left(\frac{y}{2}\right)^3 + C_4^5 (x^2)^1 \left(\frac{y}{2}\right)^4 + C_5^5 (x^2)^0 \left(\frac{y}{2}\right)^5$

$\therefore \left(x^2+\frac{y}{2}\right)^5 = x^{10} + \frac{5}{2} x^8 y + \frac{5}{2} x^6 y^2 + \frac{5}{4} x^4 y^3 + \frac{5}{16} x^2 y^4 + \frac{y^5}{32}$

(11) ① $(1.01)^{10} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{10}$

$\simeq C_0^{10} + C_1^{10} \frac{1}{100} + C_2^{10} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + C_3^{10} \left(\frac{1}{100}\right)^3$

$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{9}{2000} + \frac{3}{25000} \doteq 1.10462$ #

② $\sqrt[3]{9} = (8+1)^{\frac{1}{3}} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\simeq 1 + \frac{1/3}{1!}\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3$

$= 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{576} + \frac{5}{41472} \doteq 1.04005$ #

③ $\sqrt{99} = (100-1)^{\frac{1}{2}} = 10\left(1-\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(\frac{1}{100}\right)^3$

$= 1 + \frac{1}{200} - \frac{1}{80000} + \frac{1}{16000000} \doteq 1.004988$ #

④ $(1.1)^7 = (1+0.1)^7 = 1 + 7(0.1) + 21(0.1)^2 + 35(0.1)^3 = 1.945$ #

Chapter 5...

Ex...

② $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2)\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

vert	tail	Head	Next
3	1	2	0
5	1	3	1
6	1	1	2
8	2	3	0
	2	4	4
	3	1	7
	3	4	0
	4	2	0

vert = [3, 5, 6, 8]

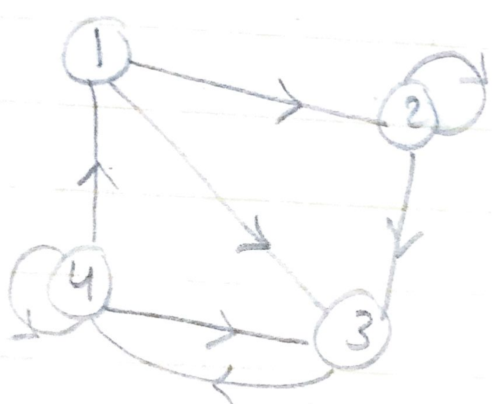
Tail = [1,1,1,2,2,3,3,4]

Head = [2,3,1,3,4,1,4,2]

Next = [0,1,2,0,4,7,0,0]

$\boxed{3}$

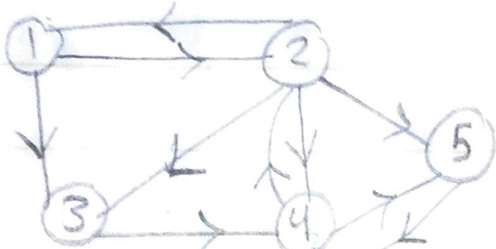
vert	Tail	head	Next
1	1	2	8
2	2	2	3
6	2	3	0
4	4	3	5
	4	4	7
	3	4	0
	4	1	0
	1	3	0



$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

4

vert	tail	head	next
6	2	4	3
2	2	3	1
8	2	5	4
7	2	1	0
10	1	2	0
	1	3	5
	4	5	9
	3	4	0
	4	2	0
	5	4	0



$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boxed{5}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

vert	tail	head	next
1	~~1~~ 1	1	2
3	1	4	0
5	~~3~~ 2	2	4
6	2	3	0
9	~~5~~ 3	4	0
	~~6~~ 4	1	7
	4	3	8
	4	5	0
	~~9~~ 5	2	10
	5	5	0

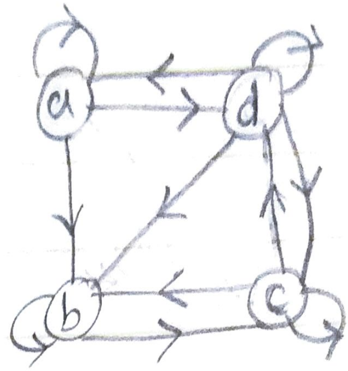
6

$$M_R = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

vert	tail	head	next
2	a	a	0
4	a	d	1
7	b	c	0
9	b	d	3
11	c	a	0
	c	b	5
	c	e	6
	d	b	0
	d	d	8
	e	a	0
	e	e	10

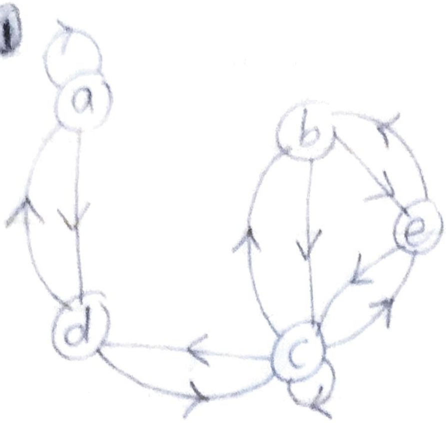
$\boxed{7}$ $A = \{a, b, c, d\}$

$$M_R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

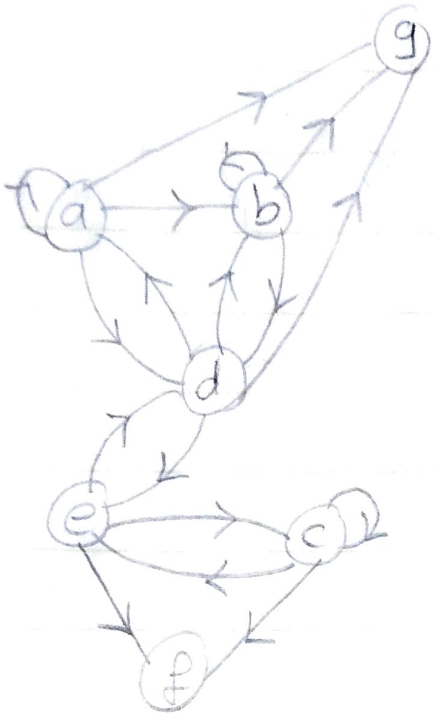


vert	tail	head	next
1	a	a	2
4	a	b	3
6	a	d	0
9	b	b	5
	b	c	0
	c	b	7
	c	c	8
	c	d	0
	d	a	10
	d	b	11
	d	c	12
	d	d	0

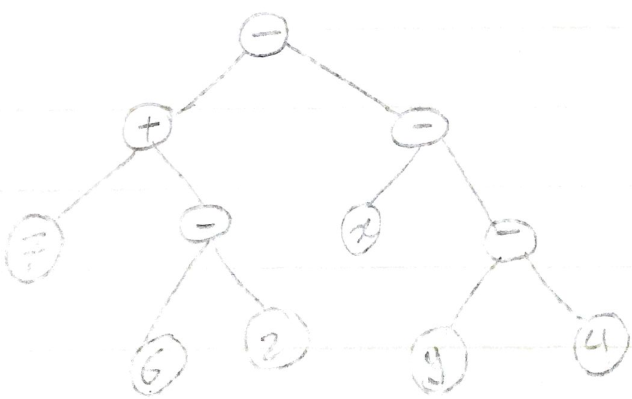
8 1



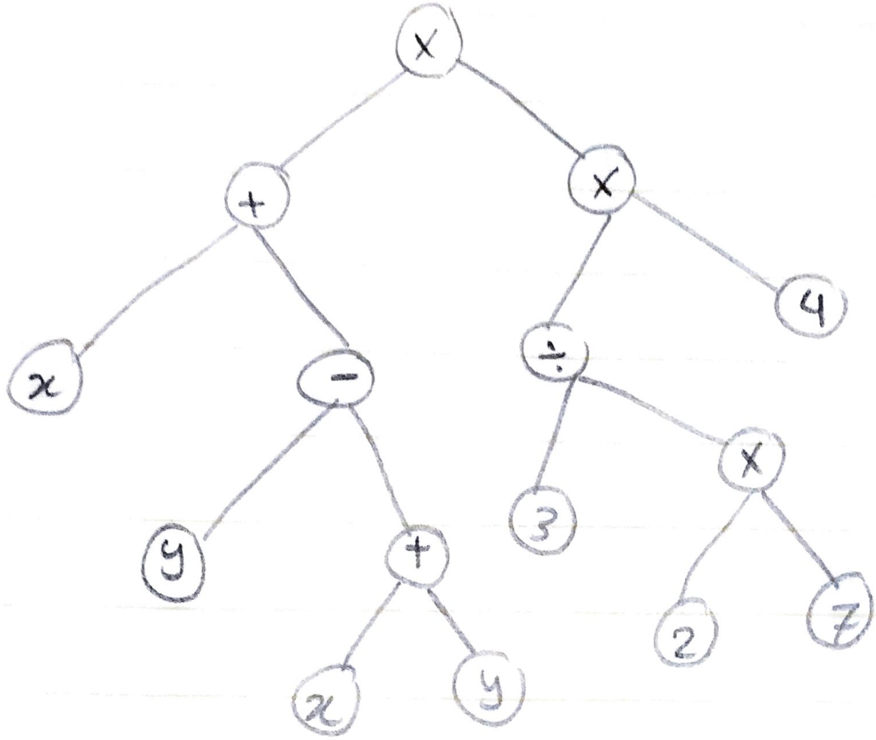
2



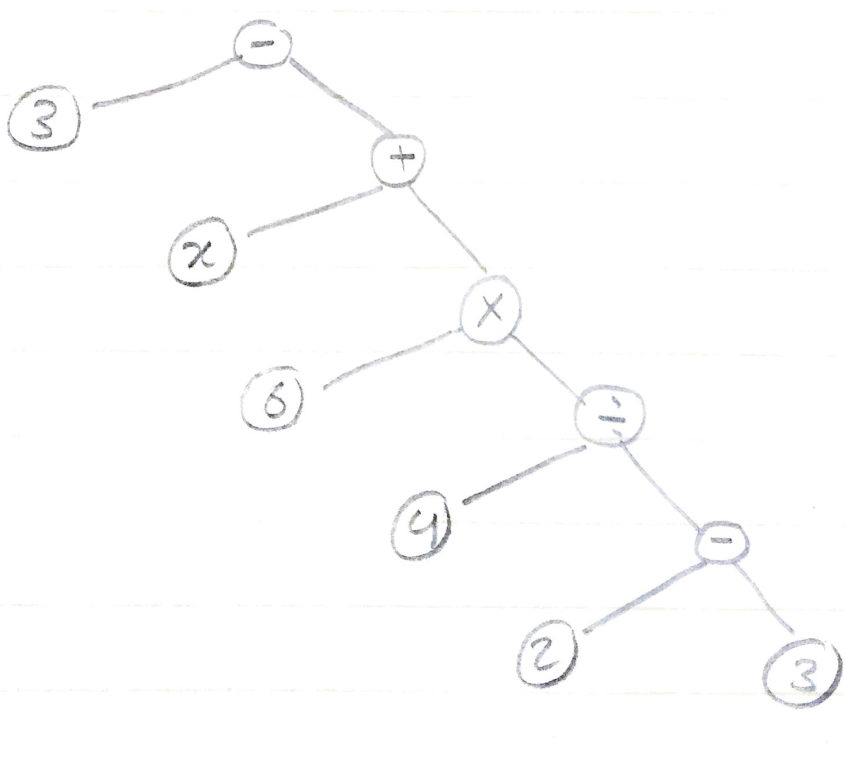
9 1 $(7+(6-2))-(x-(y-4))$



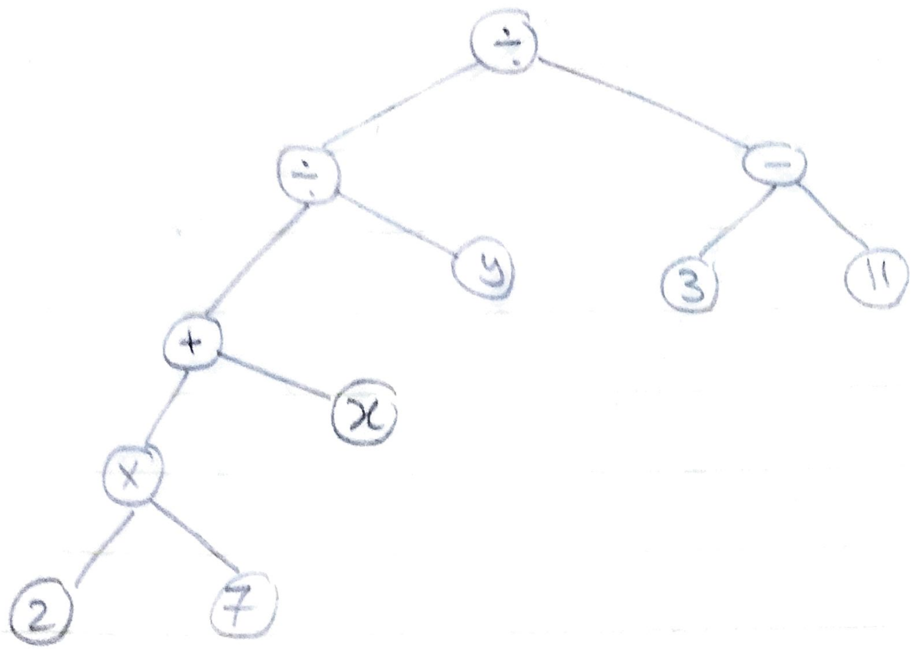
② $(x+(y-(x+y)))\times((3\div(2\times 7))\times 4)$



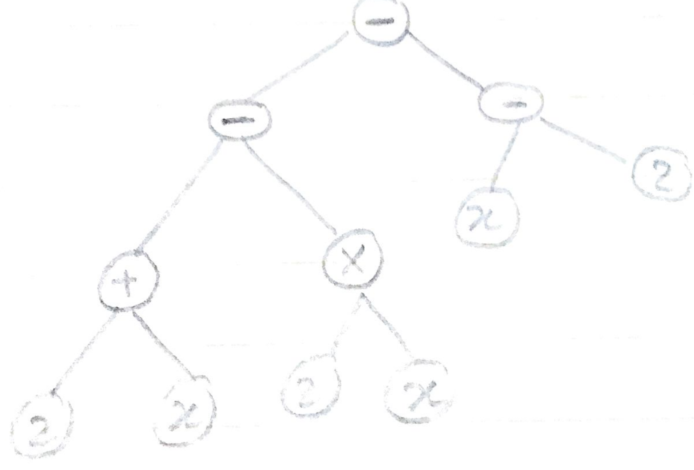
③ $3-[x+(6\times(4\div(2-3)))]$



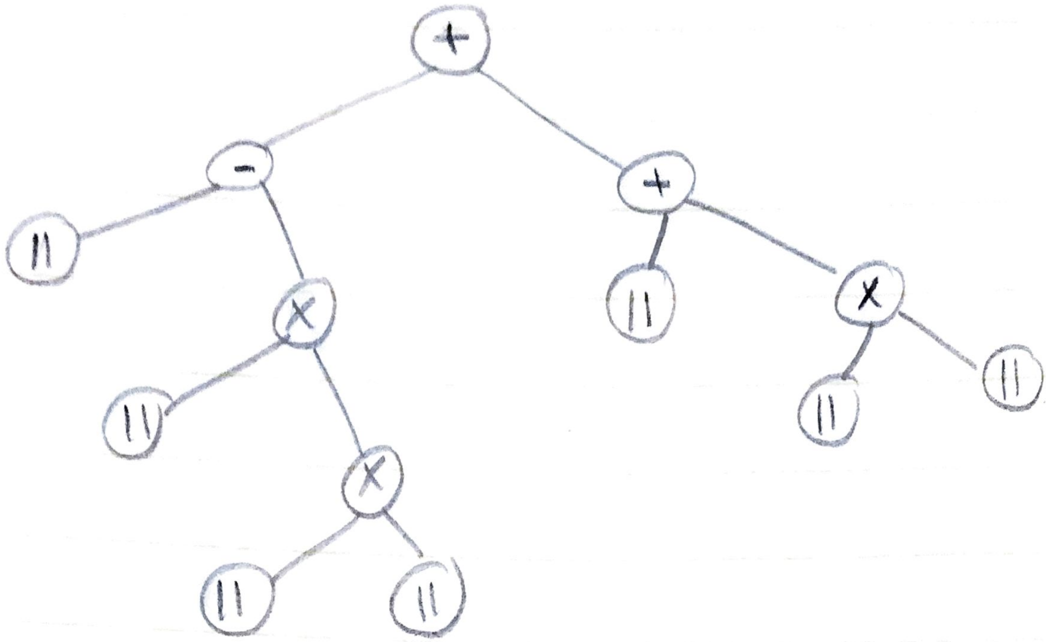
4. $(((2 \times 7) + x) \div y) \div (3 - 11)$



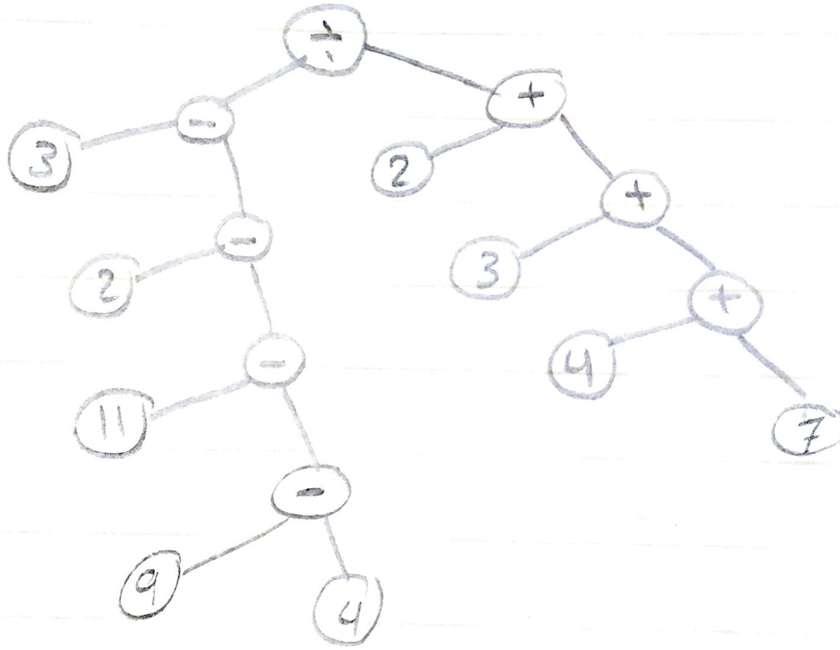
5. $((2 + x) - (2 \times x)) - (x - 2)$



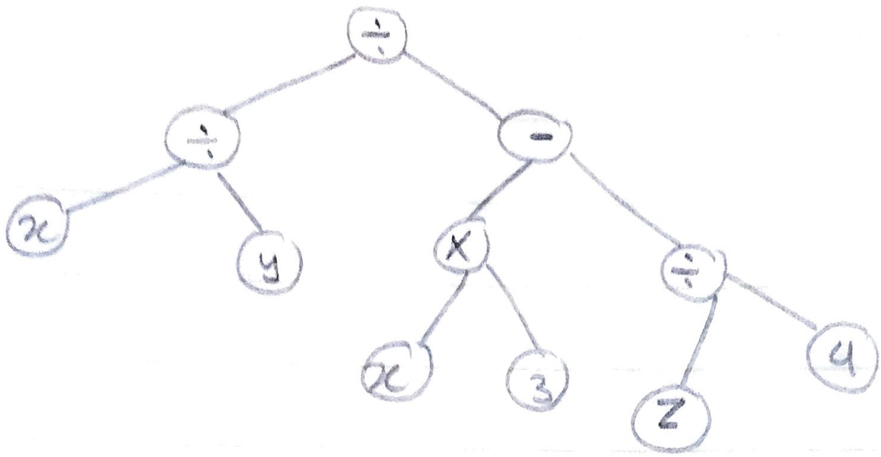
⑥ $(11-(11\times(11\times11)))+(11+(11\times11))$



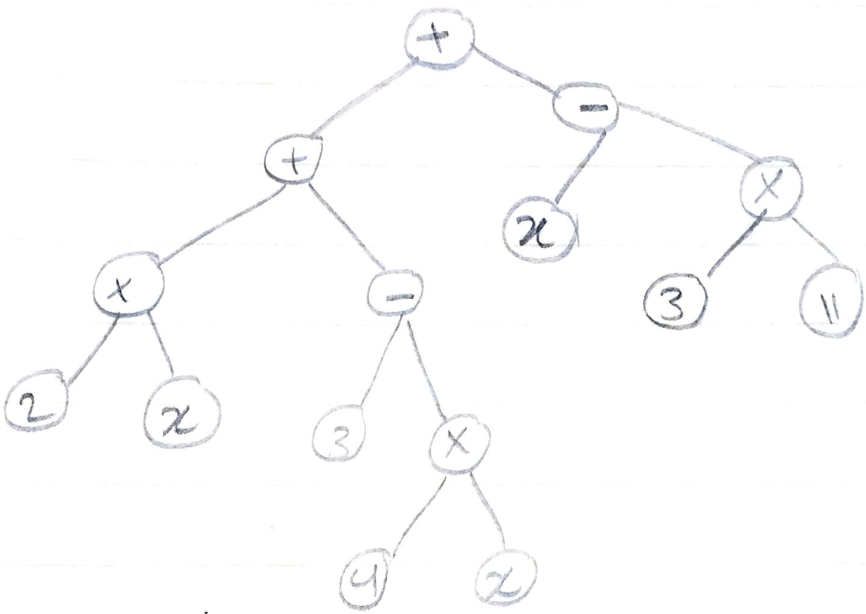
⑦ $(3-(2-(11-(9-4))))\div(2+(3+(4+7)))$



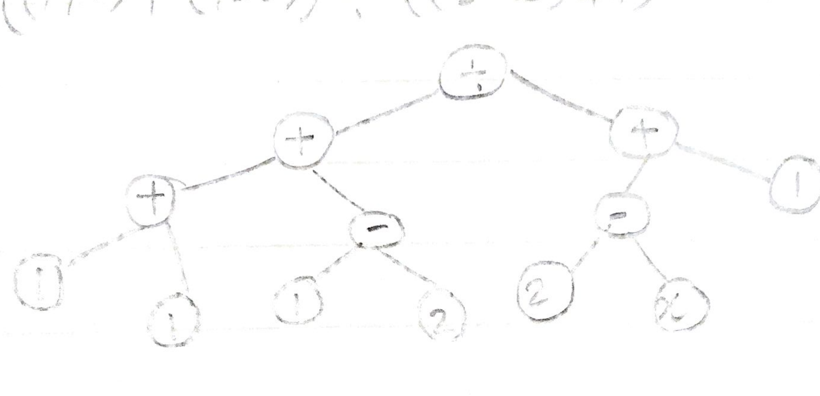
⑧ $(x \div y) \div ((x \times 3) - (z \div 4))$



⑨ $((2 \times x) + (3 - (4 \times x)) + (x - (3 \times 11))$



⑩ $((1+1) + (1-2)) \div ((2-x)+1)$



حل مسائل محددة بتطلب كتير

pg 30 Example 27: (4)

!إثبات انه ← $\sqrt{3}$ عدد غير نسبي

* let $\sqrt{3}$ is rational

Then $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ ∍ $a, b \in \mathbb{Z}^*$

a & b has no common factors (least term)

Then $3 = \dfrac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = 3b^2$

* if b is even

$b = 2l$

$\therefore a^2 = 2(2l)^2 = 12l^2 = 2(6l^2)$

$\Rightarrow a^2$ is even

$\Rightarrow a$ is even

$\Rightarrow a, b$ has a common factor 2.

which represent a contradiction

$\therefore \sqrt{3}$ is irrational

if b is odd

$b = 2l + 1$

$a^2 = 3(2l+1)^2 = 12l^2 + 12l + 3$

$= 2k + 1$

Then a^2 is odd

$\Rightarrow$ a is odd

let $a = 2m + 1$

$(2m+1)^2 = 3(2l+1)^2$

$4m^2 + 4m + 1 = 12l^2 + 12l + 3$

$\cancel{2}(2m^2 + 2m) = \cancel{2}(6l^2 + 6l + 1)$

$2(m^2 + m) = 2(3l^2 + 3l) + 1$

even $=$ odd

impossible

Pg $\boxed{47}$

$\boxed{18}$ n^2 is even $\rightarrow$ n is even

$\bar{q}$: n is odd

$\bar{p}$: n^2 is odd

let n is odd

$\Rightarrow n = 2k+1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$

$= 2m + 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$

$\therefore n^2$ is odd

$\therefore \bar{q} \rightarrow \bar{p}$

Then $p \rightarrow q$

\#

19 a^2-2a+6 is even $\to$ a is even

let p: a^2-2a+6 is even

let $\bar{q}$: a is odd

Then $a = 2k+1$

$$a^2-2a+6 = [2k+1]^2-2(2k+1)+6$$

$$= 4k^2+\cancel{4k}+1-\cancel{4k}-2+6$$

$$= 2(2k^2+2)+1$$

$$= 2m+1 \qquad = \text{odd}$$

but a^2-2a+6 is even

There's a Contradiction

Then $p \to q$

pg 136.

$\boxed{2}$ طالب أشوف الـ R إذا كانت ref.
sym.
transitive
ولا لأ

وقالنا معرفة على X يعني من X لـ X يعني البداية والنهاية من نفس المجموعة

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

① $(x, y) \in R$ if $x = y^2$

بيقولك إن النقط اللي موجودة جوة الـ R لازم تحقق إن $x = y^2$
فتعالى نجيب الـ R الأول..

$R = \{(1,1), (4,2)\}$ $\quad 4 = 2^2$ $\quad 1 = 1^2$

مفيش غير النقطتين دول من الـ X اللي بيحققوا $x = y^2$

كده عندي الـ R .. أشوف بقى إذا كانت ref, sym, trans

$\boxed{\text{I}}$ عشان تكون ref.. لازم كل نقطة ترتبط بنفسها
أول نقطة (1,1) تمام مرتبطة بنفسها
تاني نقطة (4,2) لازم يكون عندي (4,4)
ولأصلاً مش موجودة

$\therefore$ R is not ref. #

$\boxed{2}$ عشان اتحقق من sym. ولا .. لازم كل نقطة
يكون موجود عكسها في ال R

* أول نقطة (1,1) عكسها (1,1) ✓ موجودة
* تاني نقطة (4,2) عكسها (2,4) X مش موجودة

$\therefore$ R is not sym. *

$\boxed{3}$ عشان تكون transitive لازم تحقق دي

$(a,b), (b,c) \rightarrow (a,c)$

لو دول موجودين   دي لازم تكون موجودة

* أول نقطة (1,1) و (,)

مفيش أصلاً نقطة تانية بتبدأ بـ 1

$\therefore$ R not transitive

وهكذا .. كل المسائل في رقم $\boxed{3}$

[4] في المسألة دي .. هيفترض انه موجود اكتر من طالب ال R تكون على كل الأعداد الصحيحة الموجبة .. مش بس ٦ أرقام زي رقم 3 .. فمشكلتها إننا لما هنيجي نشوف كل relation بتحقق ال 3 خواص ولا لأ .. مش هنعرف نتحقق من كل النقط لأنها غير منتهية ..

① $(x,y) \in R$ if $x = y^2$

ولكن أول نقطة نجيب ال R

$R = \{(1,1), (4,2), (9,3), (16,4), \dots\}$

في الحالة دي هنستخدم القانون بتاع العلاقة عشان أتحقق من الخواص .. مش النقط نفسها لأنها مش هتخلص ..

* هفترض ان النقطة (a,b) من R واشوف هتتحقق ولا لأ

عشان تكون ref. لازم يكون فيها (a,a) لكل النقط

$(a,a) \in R \rightarrow a = a^2$

$a - a^2 = 0$

$a(1-a)=0$

$a=0 \quad \times \quad \notin \mathbb{Z}^+$ | or | $a=1$

مرفوض عشان مش من ضمن الأعداد

وده معناه انه نقطة واحدة
بس لي هتحقق الـ .ref
دهي (1,1) -- وده طبعا معناه
انه باقي النقط مبتحققش الـ .ref.

$\therefore R$ is not ref.

* الـ سـ sym ـتري :

$(a,b) \in R \rightarrow a=b^2$

لازم يكون عندي عكسها كمان

$(b,a) \in R \rightarrow b=a^2$

نعوض من المعادلتين في بعض

$a=(a^2)^2=a^4$

$a-a^4=0$

$a(1-a^3)=0$

$a=0$ | or | $a=1$

$\times\times$ ✓

وكده هنلاقيه برده مش sym. لأنه بيحقق عند
نقطة واحدة بس (1,1) مش كل النقط

$\therefore$ R is not sym.

* الـ transitive

$(a,b), (b,c) \in R$

$\therefore \ a = b^2 \ , \ b = c^2 \Rightarrow a = (c^2)^2 = c^4$

if $(a,c) \in R$ المفروض كده يكون

$a = c^2$

but $a = c^4$

$\therefore \ c^2 = c^4$

$c^2 - c^4 = 0$

$c^2(1 - c^2) = 0$

$c^2 = 0$	$c^2 = 1$
مرفوض	$c = 1$ ✓ , $c = -1$ ✗ مرفوض

كده بردو المسألة transitive بتتحقق عند ال 1 بس -

$\therefore$ R is not transitive

نحل مسألة تانية نحقق عشان نشوف هنعرف ازاي

③ $(x,y) \in R \rightarrow x \geqslant y$

let $(a,a) \in R \rightarrow a \geqslant a \equiv$ True

الكلام ده طبعًا صحيح لكل الأعداد الصحيحة لو جبت (a أكبر من أو يساوي a) صح عشان $a=a$

$\therefore$ R is ref. ※

let $(a,b) \in R \rightarrow a \geqslant b$

if $(b,a) \in R \rightarrow b \geqslant a$ } XX استحالة يحصلوا سوا

we have a Contradiction

$\therefore$ R is not sym. ※

let $(a,b), (b,c) \in R$

$\rightarrow a \geq b$ ①, $b \geq c \rightarrow$ ②

if $(a,c) \in R$

$\rightarrow a \geq c \rightarrow$ ③

① & ② $\Rightarrow a \geq b \geq c$

$\Rightarrow a \geq c$ ✓ أم ③ اتحققت

$\therefore (a,c) \in R$

$\therefore R$ is transitive ※

Page (136)

11 Prove that if n is odd, Then $\left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil = \frac{n^2+3}{4}$

Sol.

Since n is odd

we can write $\boxed{n = 2k+1}$ ← شكل أي عدد فردي

$$L.H.S = \left\lceil \frac{(2k+1)^2}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{4k^2+4k+1}{4} \right\rceil$$

$$= \left\lceil k^2 + k + \frac{1}{4} \right\rceil$$

الدالة ⌈ ⌉ بتاخد أي رقم مش صحيح وتجبره لأول عدد صحيح أعلى منه
يعني k^2 صحيح و k صحيح بس $\frac{1}{4}$ كسر - يبقى هتزوده لحد ما يوصل 1

$$\therefore L.H.S = k^2 + k + 1 \rightarrow (1)$$

يعني لو كانت مثلاً 97.25

ده عدد صحيح بدل k^2 و k

ده الربع

$97 + 1 = \underline{\underline{98}}$ هتطلعها

بدل ما كانت $97 + \frac{1}{4}$

وهكذا !!

$$R.H.S = \frac{n^2+3}{4}$$

$$= \frac{(2k+1)^2+3}{4}$$

$$= \frac{4k^2+4k+1+3}{4}$$

$$= \frac{\cancel{4}k^2+\cancel{4}k+\cancel{4}}{\cancel{4}}$$

$$= k^2+k+1 \rightarrow (2)$$

from (1) & (2)

$$\therefore \left\lceil \frac{n^2}{4} \right\rceil = \frac{n^2+3}{4}$$

$\boxed{14}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x + 8$

* to be one to one :-

$$\text{let } f(x_1) = f(x_2)$$

$$-5x_1 + 8 = -5x_2 + 8 \qquad -8$$

$$-5x_1 = -5x_2 \qquad \div -5$$

$$x_1 = x_2$$

$\therefore f(x)$ is one to one

عشان أعرف إذا كانت one to one ولا لأ ..
بنفرض ان $f(x_1) = f(x_2)$
ونمشي خطوات جبرية عادي
عشان نوصل ل $x_1 = x_2$
لو طلعت صحيحة تبقى one 2 one
لو طلعت مثلاً $x_1 = \pm x_2$ .. يبقى
not one to one *

* to be onto :-

Domain of $f(x)$ is $\mathbb{R}$

معطى في السؤال $A = \mathbb{R}$ ولو مش معطى فإن كل
الدوال الخطية مجالها $\mathbb{R}$

$$\therefore -\infty < x < \infty$$

نكتب في صورة فترة ونمشي خطوات جبرية عشان
نوصل ال x ل $f(x)$

$$\times -5 \qquad -\infty < -5x < \infty$$

$$+8 \qquad -\infty < -5x + 8 < \infty$$

$$\therefore -\infty < f(x) < \infty$$

ده المدى في صورة فترة

$\therefore$ Range of $f(x) = \mathbb{R}$

but Codomain of $f(x) = \mathbb{R}$ معطى

$\therefore$ Range of $f(x) =$ Codomain of $f(x)$

$\therefore f(x)$ is onto *

عشان تكون onto
لازم أجيب المدى (Range)
لو طلع بيساوي ال (Codomain)
اللي هو B في السؤال $= \mathbb{R}$
يبقى onto .. طلعوا مش
متساويين تبقى مش onto
وعشان اجيب المدى لازم اجيب المجال

Page 190

32

قانون الباركود [معرفش من وين وليش]

$$x_{13} = 10 - [(x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + \dots + 3x_{12}) \bmod 10]$$

الزوجي مضروب 3X والفردي مش مضروب

هون في الحالة عايز نشوف x_{13} ده صح ولا غلط .. فهنروح نحسبه لكل واحد في الكتاب

(1) $$x_{13} = 10 - [(9 + 7(3) + 8 + 0(3) + 6 + 7(3) + 4 + 0(3) + 2 + 7(3) + 9 + 5(3)) \bmod 10]$$

$$= 10 - [116 \bmod 10]$$

$$= 10 - 6 = 4$$

ISBN 978-0-674-02795-4

هو هو ✓✓

$\therefore x_{13} = 4$ is right ✲

(2) $$x_{13} = 10 - [(9 + 7(3) + 8 + 0(3) + 9 + 7(3) + 1 + 3(3) + 7 + 1(3) + 8 + 4(3)) \bmod 10]$$

$$\therefore x_{13} = 10 - (108 \bmod 10)$$

$$x_{13} = 10 - 8$$

$$x_{13} = 12$$

ISBN 978-0-9713718-4-2

✓✓

$x_{13} = 12$ is right ✲

Example 10   page 185

$$x_{n+1} = 7x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = -9x_n - 5y_n$$

ده كده اسم نظام system لمعادلات تكرارية .. يعني كذا معادلة كلهم مع بعض ..

ده كده اسم نظام معادلات .. يعني كذا معادلة كلهم مع بعض .. لو عايزة احلهم في كذا طريقة .. عكس اعوض مثلا بـ $y = \frac{1}{-5}(-13-2x)$ في المعادلة التانية واجيب الـ x او اضرب فوق وتحت x معاملات x واطرح .. كذا طريقة او عكس مثلا احولهم مصفوفات ..

زي مثلا

$$2x - 5y = -13$$
$$y + 4x = 7$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

معاملات x · معاملات y · المجاهيل · الحد المطلوب

وحلها بطريقة Cramer ..

* هنا المسألة بتاعتنا عكس خالص ازاي ؟ لو جربت تعوض هنلاقي في التانية مش هتعرف تفصل الـ x لوحدها والـ y لوحدها برده .. ولو ضربنا فوق وتحت في معاملات الـ x_n وطرحنا برده مش هتغير كل الـ x هيتبقى x_{n+1} مع الـ y_n، y_{n+1} في المعادلة .. يبقى مفاضلش غير تالت حل انتا نخليها مصفوفات

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

معاملات x_n · معاملات y_n · المجاهيل · الحد المطلوب

كده عندي معادلات تكرارية [يعني فيها a_n، a_{n+1} ..] بس شكلها غريب .. زي مثلا لما كان بيقول $\ln a_n = \ln a_{n-1} + 1$ معادلة تكرارية بس في صورة في شكل الـ a_n، a_{n-1} وده بيخلينا مش عارفين نحلها .. كنا ساعتها بنشوف له شكل الـ a_n زي الـ a_{n-1} بالظبط بنفرض حاجة تانية .. زي مثلا $b_n = \ln a_n \leftarrow b_{n+1} = \ln a_{n+1}$ .. يبقى المعادلة تكون $\boxed{b_n = b_{n-1} + 1}$

او مثلا لو قالي $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}}$ كنت بحاول اظبط شكلها قبل ما افرض بحيث يكون الـ a_n زي الـ a_{n-1} بالظبط

$$a_n = (a_{n-1})^{\frac{1}{3}}$$

الطرفين $\boxed{\ln}$

$$\ln a_n = \frac{1}{3}\ln(a_{n-1})$$

كده تقدوا تعملي يعني يبقى افرض

$$b_n = \ln a_n$$
$$\therefore b_{n-1} = \ln a_{n-1}$$

هتكون المعادلة $\boxed{b_n = \frac{1}{3} b_{n-1}}$ وهكذا ..

طب هي هنا شكل ال x_n , y_n زي ال x_{n+1} وال y_{n+1} بالضبط

الاتنين مصفوفات بنفس النظم والترتيب .. يبقى هعوض عنهم

$$\text{let} \quad Z_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \rightarrow Z_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$$

وبالمرة نعرف المصفوفة بتاعت المعاملات ب A

لانها ثابت اصلا معهاش متغيرات

$$\therefore \boxed{Z_{n+1} = A Z_n}$$

نحل بقى بال iteration method

$$Z_{n+1} = A Z_n$$

$$= A(A Z_{n-1}) = A^2 Z_{n-1}$$

$$= A^2 (A Z_{n-2}) = A^3 Z_{n-2}$$

$$= A^3 (A Z_{n-3}) = A^4 Z_{n-3}$$

الرقم اللي هياخده أس ال A هيتطرح من ال n أقل منه بواحد

$$\therefore Z_{n+1} = A^k Z_{n-(k-1)}$$

$$\text{put } n-(k-1) = 0 \longrightarrow k = n+1$$

عشان هو قالي انها بتبدأ من x_0 y_0 في المسألة [شرط $n \geq 0$]

$$\therefore Z_{n+1} = A^{n+1} Z_0$$

ثابت

كده حلينا المعادلة التكرارية ..

نرجع لقيم ال x, y

$$Z_{n+1} = A^{n+1} Z_0$$

علشان نحط n بدل n+1 .. لازم يكون رقم الـ Z هو هو أس الـ A

$$\therefore Z_n = A^n Z_0$$

لزوم الشياكة بس

(إلا مش عايز يحطها عادي ميحطهاش)

نرجعها لأصلها بقى

$$\therefore \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

هوا إحنا مدينين A^n في المسألة عشان مش هنعرف نجيبها

$$\therefore \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6n & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

زي ما حولنا المعادلات لمصفوفات .. نرجع المصفوفات لمعادلات

$$\therefore x_n = (1+6n)x_0 + 4n y_0$$

$$y_n = (1-6n)y_0 - 9n x_0$$

وفكرة الـ x_0 و y_0 ثوابت .. يعني كده مبقاش في متغيرات

غير الـ n كده المعادلات اتحلت :)

الحمد لله

example 18 Page 197

$f(n) = 7n^2$
Is it $O(n^3)$? } ⟹ عايز يعرف إذا كان الدالة دي يتقال عليها big O ولا لأ ؟!

عشان أقول إن الدالة big O of (n^3) لازم تحقق الخاصية دي

$$\underbrace{f(n)}_{\text{الدالة المعطاة}} \leq c \underbrace{g(n)}_{\text{الدالة اللي جوة الـ O}} \quad \forall\ n \geq k$$

بحيث يكون c,k ثوابت ..

فهنا $f(n) = 7n^2$ و $g(n) = n^3$ ← (اللي جوة الـO)

- بقى عايزين نقارن بينهم بحيث نلاقي ثابت c لو ضربناه في g(n) تبقى أكبر من الـ f(n)

طبعًا عارفين إن

$$n^3 \geq n^2$$

ده في حالة إن $n \geq 1$ عشان لو أقل من 1 أو سالب هيصغر كل ما الأس يكبر فكده نقول

$$n^2 \leq n^3 \quad \forall\ n \geq 1$$ ← شرط

بعد كده نحاول نوصل الطرف الشمال لشكل الـ f(n) والطرف اليمين لشكل الـ g(n) بس مضروب في رقم
هنضرب الطرفين $\times 7$

$$\therefore\ 7n^2 \leq 7n^3 \quad \forall\ n \geq 1$$

$$f(n) \leq 7\, g(n) \quad \forall\ n \geq 1$$

كده قدرنا نوصل شكل المتباينة المطلوبة

$$\boxed{f(n) \leq c\, g(n) \quad \forall\ n \geq k}$$

كده نقول على f(n) إنها big O of g(n) بحيث $c = 7$, $k = 1$

$\therefore$ at $k = 1$, $c = 7$, $f(n)$ is $O(n^3)$ ※

Page 215

$\boxed{9}$

$\boxed{2}$ $a_n = 5a_{n-1} + 3 \quad , \quad a_1 = 3$

$\therefore a_n = 5(5a_{n-2} + 3) + 3$

$= 5 \times 5\, a_{n-2} + 3 \times 5 + 3$

$\therefore a_n = 5 \times 5 (5a_{n-3} + 3) + 3 \times 5 + 3$

$= 5 \times 5 \times 5\, a_{n-3} + 5 \times 5 \times 3 + 5 \times 3 + 3$

$\therefore a_n = 5 \times 5 \times 5 (5a_{n-4} + 3) + 5 \times 5 \times 3 + 5 \times 3 + 3$

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5\, a_{n-4} + 5 \times 5 \times 5 \times 3 + 5 \times 5 \times 3 + 5 \times 3 + 3$

$\vdots$

$a_n = 5^k a_{n-k} + 5^{k-1}(3) + 5^{k-2}(3) + \cdots + 5 \times 3 + 3$

$= 5^k a_{n-k} + 3\Big[\underbrace{5^{k-1} + 5^{k-2} + 5^{k-3} + \cdots + 5 + 1}\Big]$

مجموع متتابعة هندسية أساسها 5 وحدها الأول 1
وعدد حدودها $(k-1)$
هنستخدم المجموع ده

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

n عدد الحدود

$\therefore a_n = 5^k a_{n-k} + 3\left[\dfrac{1(5^{k-1} - 1)}{5 - 1}\right]$

put $\boxed{n - k = 1}$ عشان أوصل $\underline{\underline{a_1}}$

$k = n - 1$

$\therefore a_n = 5^{n-1} a_1 + 3\, \dfrac{(5^{n-2} - 1)}{4}$

#

$\therefore$

$\boxed{9}$ $\boxed{3}$ $b_n = b_{n-1} + n \quad , \quad b_1 = 4$

$\therefore b_{n-1} = b_{n-2} + (n-1)$

لو عايزين نجيب b_{n-1} هنعوض عن كل n ب $n-1$

$\Rightarrow b_n = b_{n-2} + (n-1) + n$

$= b_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n$

$= b_{n-4} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$

ع أقل منه بواحد

$\vdots$

$= b_{n-4} + n + (n-1) + (n-2) + \underbrace{(n-3)}$ هنحط شكلها

ع أزيد منه بواحد

$\vdots$

$= b_{(n-k)} + n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1)$

put $\boxed{n-k=1} \rightarrow \boxed{k=n-1}$

$\therefore b_n = b_1 + \underbrace{n + (n-1) + \dots + 2}$

مجموع متتابعة حسابية أساسها (-1)
وحدها الأول (n) والأخير (2)
وعدد حدودها (n-1)
نستخدم المجموع

$\frac{n(a+L)}{2}$

n: عدد الحدود
a: الحد الأول
L: الحد الأخير

$\therefore b_n = b_1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}$

Page 215 : $\boxed{14}$

بيقول ان في مدينة عنيا سكانه عددهم 600 وكل سنة بتقل 3% من سكانها

يعني اول سنة كانوا 600 .. تاني سنة هيكون عددهم 600 بس ناقص

منهم 3% من ال 600 ⟸ تاني سنة = $600 - 600\left(\frac{3}{100}\right)$

600 ⟵ عددهم قبل السنة دي

$600\left(\frac{3}{100}\right)$ ⟵ اللي نقصوه خلال السنة

كده لو خدنا 600 عامل مشترك هيكون $600\left(1 - \frac{3}{100}\right)$

$= 600\,(0.97) = 582$

600 ⟵ عددهم قبل السنة

0.97 ⟵ نسبة المتبقي منهم بعد السنة.

طب السنة اللي بعدها هيكون عددهم كام؟

هيكون = عددهم السنة الفائتة − $\left(\frac{3}{100} \times \text{عددهم السنة الفائتة}\right)$

أو = عددهم السنة الفائتة $\times\ (0.97)$

طب عددهم كان كام قبل بداية السنة التالتة؟

كان 582 .. يبقى عددهم في السنة التالتة

هيكون $= 582 \times 0.97 = 564.54$

أو $= 582 - \left(582 \times \frac{3}{100}\right) = 564.54$

وهكذا.. عددهم في السنة الرابعة هيقل عن السنة الثالثة بمقدار $\frac{3}{100}$ من عددهم في السنة الثالثة ..

$\therefore a_4 = (564.54) \times 0.97 = 547.6038$

وهكذا

المفروض نحلها بمعادلة تكرارية .. بس ممكن نستسهل ونحلها بالمتتابعات

يعني نكتب الاعداد في صورة seq.

$(600, 582, 564.54, \ldots)$

هنلاحظ متتابعة هندسية ← كل مرة بنضرب في عدد ثابت r

$r = 0.97$, $a = 600$

$\therefore$ الحد العام ليها $a_n = a\, r^{n-1}$

محفوظ المفروض

بما هو في المسألة عايز عددهم بعد 10 سنين .. يعني في السنة الـ 11

$a_{11} = 600\,(0.97)^{11-1}$

$= 442.5$ **

لازم نقرب عشان دول أشخاص !!

Page 215 : $\boxed{15}$

بيقول واحد مرتبه 6000 كل سنة بيزيد 500 دولار

طبعًا هنحول نكتبها متتابعة

(6000, 6500, 7000, 7500, 8000, ...)

مرتبه أول سنة — مرتبه تاني سنة — - - -

$a = 6000$
$d = 500$ ⟸ Arithmetric متتابعة حسابية — بالتأكيد ده دي

$a_n = a + (n-1)d$ — يبقى حدها العام

$S_n = [2a + (n-1)d] \times \frac{n}{2}$ — ويكون مجموع عدد n من الحدود

طب هو عايز ايه في المسألة ؟ عايز مجموع مرتبه من يوم ما اشتغل

لحد ٤٠ سنة شغل .. يعني مجموع أول 40 حد

$$\therefore S_{40} = \frac{40}{2}\left[2(6000) + (40-1)(500)\right]$$

$$= 630\,000$$

P.g. 217

R3

(4) $\sum_{m=2}^{m=25} 3^m$

let $k=1$

$\Rightarrow m-k=1$

$m=k+1$

$\sum_{k+1=2}^{k+1=25} 3^{k+1}$

$= \sum_{k=1}^{k=24} 3^{k+1}$

$= 3 \sum_{k=1}^{24} 3^k$

$= 3 \frac{(1-3^{24+1})}{1-3}$

page 133

$\boxed{\text{Example } 54}$ $f(t) = 8[u(t-0) - u(t-2)]$
$+ 6[u(t-2)]$

$= 8u(t) - 8u(t-2) + 6u(t-2)$

$= 8\cancel{u(t)} - 2u(t-2)$

1

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

page 141

$\boxed{35}$ ① $f(t) = t^3[u(t-0) - u(t-1)]$
$+ 3[u(t-1)$

$= t^3 + (3 - t^3)u(t-1)$

② $f(t) = (t^2+7)[u(t-3)]$.

$f(t) = 2[u(\cancel{t-0}) - u(t-5)]$
$+ 2t[u(t-5) - u(t-8)]$
$+ \cancel{t^2}_{7}[u(t-8)]$

$= 2 + (2t-2)u(t-5) + (\cancel{t^2}_{7} - 2t)u(t-8)$

* شرح إيجاد عدد حدود المتتابعة :-

الحد العام لأي متتابعة حسابية

$$\boxed{a_n = a + (n-1)d}$$

a الحد الأول

d الأساس

n رقم الحد

لو انا عندي الحد الأول a ✓ وعندي الأساس ✓ والحد الأخير ✓
أحط في القانون ده الحد الأخير واشوف رقم كام
لو طلع الحد رقم ٥٠ .. يبقى عدد الحدود ٥٠ ..

مثلاً

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, 76$

كده $a = 1$ الحد الأول
$d = 1$ الأساس .. المتتابعة بتزيد 1 بالجمع (حسابية)
والحد الأخير $\boxed{a_n = 76}$

$\therefore 76 = 1 + (n-1)(1)$

$\therefore \boxed{n = 76}$

يبقى الحد الأخير ترتيبه الـ 76 .. يبقى المتتابعة كلها 76 حد

المتتابعة الهندسية نفس الكلام

$a_n = a r^{n-1}$

a الحد الأول
r الأساس
n رقم الحد

نعوض بالحد الأخير .. وكده يبقى الحد هو عدد المتتابعة

حل امتحان Final 2018

Suez Canal University

Faculty of Computers & Informatics

First Semester; First Level

Date: 4-1-2018; Time: 3- Hours

Final Examination of
Discrete Mathematics BS - 103

First Question (16 Points)

❶ **Calculate** the value of $(12 \bmod 5) + h(15) - 3\lfloor -4.7\rfloor + 2\lceil 0.3\rceil$.

❷ **Solve** the 1st order **difference** equation: $a_n = a_{n-1}$, with $a_1 = 4$.

❸ **Change** the lower index of the sum $\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}$ to start with $k = 0$.

❹ Find the **check digit** of the opposite bar code :

4 710088 41253

Second Question (16 Points)

❶ Find a numerical value of $\sqrt{50}$ approximated to four digits.

❷ **Solve** the recurrence relation $P_n = a + s\, P_{n-1}$ of the economic model where, a and s are parameters depend on the model.

❸ If $f(x) = x^2$, **Find** the $\text{Lim}_{n\to 1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

❹ **Give** three **different** examples of odd functions.

Third Question (20 Points)

❶ **Calculate** the numerical value of the summation: $\sum_{k=1}^{k=800}(2k+1)$.

❷ Department consists of 10 men and 5 women. **How many ways** to conform a committee consists of 4 persons provided that at least 2 men are selected?

❸ Find Taylor series expansion (just 4 terms) for the function: $f(x) = \cos x$ about $x = 0$.

❹ **Choose** the correct answer:

① $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor + 1$ for all $x \in \cdots$	$\{z, Q - z, \mathcal{R}\}$
② The function $f(x) = \sin(3x)$ is	{even, odd}
③ If $f(x) = \lceil x+1\rceil$, then 10 mod 5 − 0.5 $f(-1.5)$ equals	{ 1, 2, 0}
④ A tree with 3 −vertices has exactely .... edges	{2, 4, 8}
⑤ Every relation is a function?	{Yes, No}

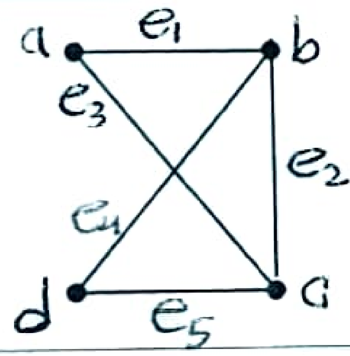
الإمتحان يقع فى صفحتين من نفس الورقة.

Fourth Question (28 Points)

❶ **Construct** the **tree** of the following mathematical **expression**:

$$\Big(\big(2 \times x\big) + \big(3 - (4 \times x)\big)\Big) + \big(x - (3 \times 11)\big)$$

❷ For the opposite diagraph:

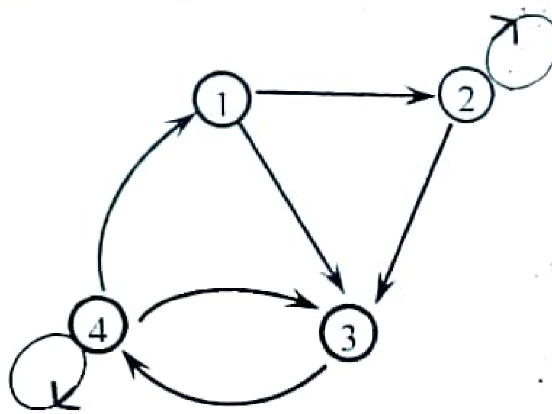


(1) Find the **adjacency** matrix.

(2) Find the **Laplacian** matrix.

(3) Find the **incident** matrix.

❸ For the opposite graph:



(1) **Write** the ordered pairs for the relation R

(2) **Construct** a linked list representation,

VERT, TAIL, HEAD and NEXT.

The End.

Dr/ Yasser M. Hamada

(Final 2018)

Q1..

① $12 \bmod 5 + h(15) - 3\lfloor -4.7 \rfloor + 2\lceil 0.3 \rceil$

باقي القسمة　　$15 \bmod 11$　　لا ولازم تجمع الاصفار

$= 2 + 4 - 3(-5) + 2(1) = 23$ ※

② $a_n = a_{n-1}$,　　$a_1 = 4$

$a_2 = a_1 = 4$

$a_3 = a_2 =$

$a_4 = a_3 = 4$

$\boxed{a_n = 4}$ ※

④ $X_{13} = 10 - [(x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + \cdots + 3x_{12}) \bmod 10]$

$x_{13} = 10 - [(4 + 3(7) + 1 + 3(0) + 0 + 3(8) + 8 + 3(4) + 1 + 3(2) + 5 + 3(3)) \bmod 10]$

$= 10 - (91 \bmod 10) = 9$

③ $k = 1$　　to　　$j = 0$

$k - j = 1 \Rightarrow k = 1 + j$

lower :→ $k = 1 = j + 1$

$\therefore j = 0$

upper → $k = n = j + 1$

$j = n - 1$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-(j+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{n-j-1}$$

Q2 :-

هنا الحل في صفحة $\boxed{156}$

① $\sqrt{50} = (49+1)^{\frac{1}{2}} = \left[49\left(1 + \frac{1}{49}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$= (49)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$

using :- $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2$

$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \cdots$

$\forall n \notin Z^*$ & $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$

$\therefore \sqrt{50} = 7 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{49}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} \left(\frac{1}{49}\right)^2 \right.$

$\left. + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} \left(\frac{1}{49}\right)^3 + \cdots \right]$

$\therefore \sqrt{50} \simeq 7.071$

(2) $P_n = a + sP_{n-1}$ $\boxed{184}$ اكمل مفعل في صفحة

(3) $f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}$

$$\lim_{n\to 1} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} = \lim_{n\to 1} \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{قانون}}$$

$$= \lim_{n\to 1} \left[\frac{1}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{2(2+1)}{1 \times 6} = 1$$

(4) $f(x) = x$ is an odd fun.

$f(x) = x^3$ is an odd fun.

$f(x) = \sin x$ is an odd fun

$f(x) = x^3 + 5x$ —

$f(x) = x^5 - x$ —

Q 3 :-

(1) $\sum_{k=1}^{800} (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{800} k + \sum_{k=1}^{800} 1$

$$= \cancel{2} \frac{800(800+1)}{\cancel{2}} + 1(800) = 641600$$

(2) $C^{10}_2 C^5_2 + C^{10}_3 C^5_1 + C^{10}_4 C^5_0 = 1260$

(3) $f(x) = \cos x$ about $x = 0$

$$f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -\sin x \longrightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos x \longrightarrow f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \sin x \longrightarrow f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(0) = 0$$
$$f^{(6)}(0) = -1$$
$$\vdots$$

عايز رابع حدود هجيب الجمع منين ؟

Taylor :- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

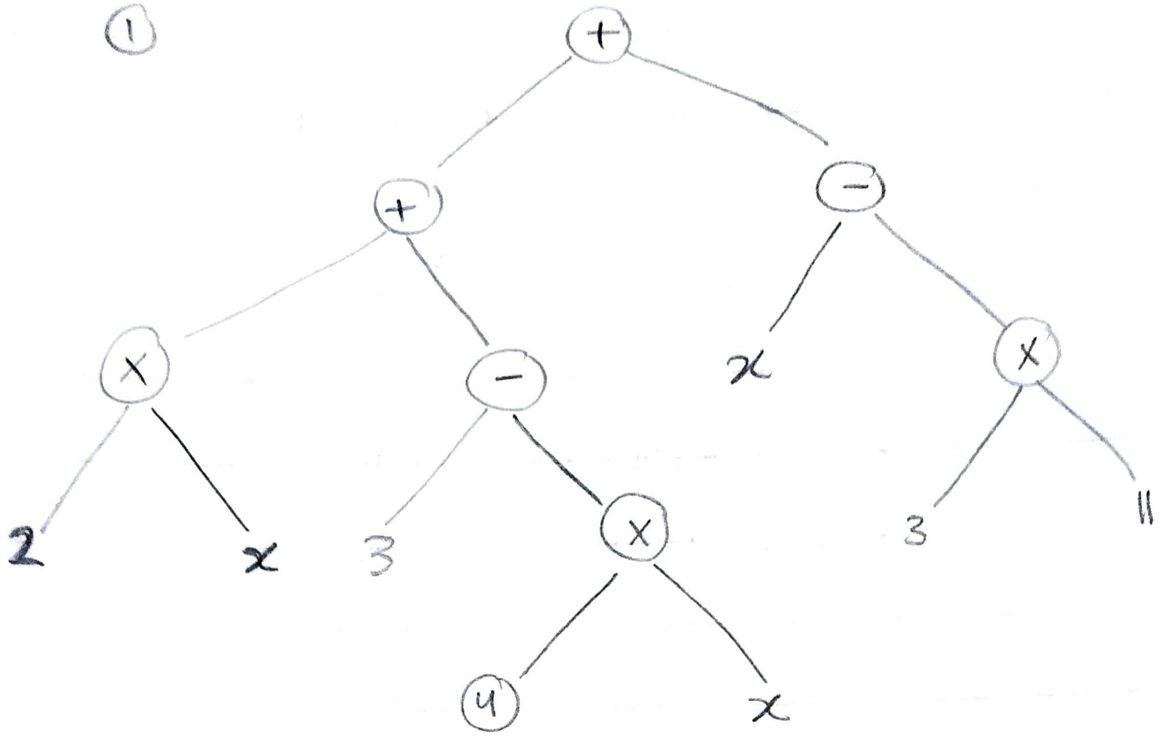
$$\therefore \cos x = \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

(4)
1. $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$
2. odd
3. 0
4. 2
5. No

Q4.:-

(1)



(2)

adjacency matrix =

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

نحط 1 ادام كل اثنين مرتبطين ببعض.

lablacian matrix =

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 2 & -1 & -1 & 0 \\ b & -1 & 3 & -1 & -1 \\ c & -1 & -1 & 3 & -1 \\ d & 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}$$

نحط 1- ادام كل عنصرين مرتبطين ببعض والقطر الرئيسي نحط فيه عدد العناصر المرتبطة بالعنصر ده

يعني نفس اللي فوق بس باختلاف السالب والقطر الرئيسي

③ incident matrix =

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

نحط 1 ادام كل عنصر والحافات
الخارجة منه

④ ① $R = \{(2,2), (4,4), (1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (4,1), (4,3)\}$

②

vertix	tail	head	next
1	1	2	2
3	1	3	0
5	2	2	4
6	2	3	0
	3	4	0
	4	1	7
	4	3	8
	4	4	0

237 , 236 , 235 شرحها بالعربي في ملخص
في الهامش

حل امتحان Final 2017

Suez Canal University

Faculty of Computers & Informatics

First Semester; First Level

Date: 22-1-2017; Time: 3- Hours

Final Examination

Discrete Mathematics BS - 103

First Question (20 Points)

❶ **Calculate** the values of x that satisfy the equation: $x^2 + |-4.7|x + (13 \bmod 7) = 0$.

❷ **Solve** the 2^{d} order **difference** equation: $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, with $a_0 = 5, a_1 = 16$.

❸ **Change** the lower index of the sum $\sum_{k=1}^{k=n} a_{n-k}$ to start with $k = 3$.

Second Question (20 Points)

❶ **Graph** the function: $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ t - 2 & 2 \le t < 4 \\ 1 & t \ge 4 \end{cases}$, and then **express** it using **unit step** function.

❷ **Solve** the **first** order **difference** equation: $a_n = 2a_{n-1}$, with $a_1 = 5$.

❸ If $f(x) = 1 - x^2$, **prove** that $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\right\} = \frac{2}{3}$.

Third Question (20 Points)

❶ **Compute** the following sum: $\sum_{k=1}^{k=10}(k^2 + 3k + 2)$.

❷ Find the first four terms of **Taylor series** expansion to approximate the function.

$f(x) = \sin x$ about $x_0 = 0$.

❸ Use **binomial theorem** to approximate the function $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ for $|x| < 1$.

Fourth Question (20 Points)

❶ Construct the **tree** of the following mathematical **expression**:

$$\left(x + \left(11 / (3 \times 4)\right)\right) \div \left(11 + (3 + 4)\right)$$, and then find

① Number of **levels**, ② Number of **paths**, ③ **Height** of the tree.

... function $f(x) = x^2 + 8x - 9,\ x \le -4$.

Final Examination (2017)

• Q1 :.

① $x^2 + \lfloor -4.7 \rfloor x + (13 \bmod 7) = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$

$x = 3$ or $x = 2$ *

② $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0, \quad a_0 = 5, \; a_1 = 16$ ①

$\therefore \quad r^2 - 7r + 10 = 0$

$(r+2)(r-5) = 0$

$r_1 = 2 \;, \; r_2 = 5$

$\therefore \quad a_n = C_1(2)^n + C_2(5)^n \rightarrow *$

① into *

$n = 0$: $a_0 = C_1 + C_2$, $5 = C_1 + C_2$ | $n = 1$: $a_1 = 2C_1 + 5C_2$, $16 = 2C_1 + 5C_2$

↳ solving together ↵

$\therefore \quad C_1 = 3 \;, \quad C_2 = 2$

in *

$\therefore \quad a_n = 3(2)^n + 2(5)^n$ #

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_{n-k}$, start with $j=3$

$$k-j = 1-3 = -2$$

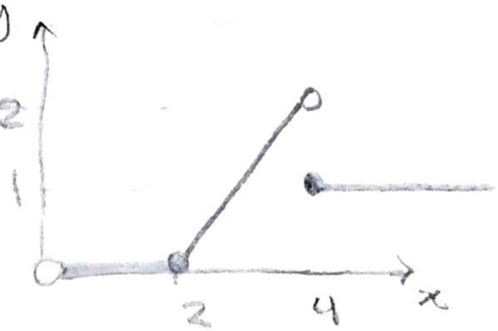
$$\therefore \boxed{k = j-2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{k=n} a_{n-k} = \sum_{j-2=1}^{j-2=n} a_{n-(j-2)} = \sum_{j=3}^{j=n+2} a_{n-j+2} \quad \#$$

Q2:-

(1) $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0<t<2 \\ t-2 & 2\le t<4 \\ 1 & t\ge 4 \end{cases}$$

$$g(t) = 0\,[u(t-0) - u(t-2] + (t-2)[u(t-2) - u(t-4)] + 1\,[u(t-4)]$$



$$g(t) = (t-2)\,u(t-2) - (t-3)\,u(t-4) \quad *$$

② $a_n = 2a_{n-1}$, $a_1 = 5$

put $n=2 \rightarrow a_2 = 2a_1 = (2)(5)$

$n=3 \longrightarrow a_3 = 2a_2 = (2)(2)(5)$

$n=4 \longrightarrow a_4 = 2a_3 = (2)(2)(2)(5)$

$n=5 \rightarrow a_5 = 2a_4 = (2)(2)(2)(5)$

$\vdots$

$$a_n = 5(2)^{n-1} \quad \#$$

③ $f(x) = 1 - x^2$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = 2/3 \rightarrow$ Prove

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 = 1 - \frac{k^2}{n^2}$$

$$\text{L.H.S} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]\left[\frac{1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{k^2}{n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \left[\cancel{n} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\overbrace{n(n+1)(2n+1)}^{2n^2+3n+1}}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{2}{6} - \underbrace{\frac{3}{6n}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{6n^3}}_{0}\right] = 1 - \frac{2}{6} = 2/3 \quad \#$$

Q3:-

① $\sum_{k=1}^{k=10} (k^2 + 3k + 2)$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 3\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2$

$= \frac{10(10+1)(2\times 10+1)}{6} + 3 \cdot \frac{10(10+1)}{2} + 2(10) = 570$

② $f(x) = \sin x \quad , x_0 = 0$

Taylor:- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

$\sin x \simeq \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3$

$f(x) = \sin x \rightarrow f(0) = 0$

$f^{(1)}(x) = \cos x \rightarrow f^{(1)}(0) = 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin x \rightarrow f^{(2)}(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \rightarrow f^{(3)}(0) = -1$

$\therefore \sin x \simeq 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{-1}{3!} x^3$

$\therefore \sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7$

③ $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$, $|x|<1$

· binomial :- $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \cdots$$

→ n isn't positive integer & $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$

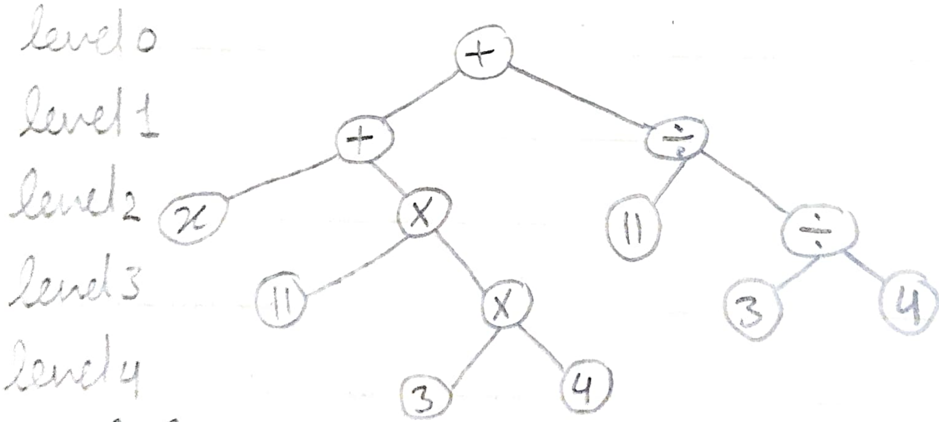
$$\therefore (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{(1/3)}{1!} (1)^{\frac{1}{3}-1} x + \frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)}{2!} (1)^{\frac{1}{3}-2} x^2$$

$$+ \frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} (1)^{\frac{1}{3}-3} x^3 + \cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} x - \frac{9}{4} x^2 + \frac{5}{81} x^3 + \cdots$$

Q4 :-

① $(x + (11 \times (3 \times 4))) + (11 \div (3 \div 4))$



① no. of levels = 5 , no. of paths = 7 , hight of tree = 4

عدد مستويات   عدد الدوائر الأخيرة   رقم آخر مستوى

② $f(x) = x^2 + 8x - 9 \quad ; \quad x \leq -4$

$$y = \underbrace{x^2 + 8x + 16} - 16 - 9$$

اکمال مربع

$$y = (x+4)^2 - 9$$

$$y + 9 = (x+4)^2$$

$$\sqrt{y+9} = x + 4$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{y+9} - 4$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+9} - 4 \quad *$$

③ $S_n = x^{2n} - y^{2n}$

at $n=1$ $\Rightarrow$ $S_1 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$\therefore$ S_1 is divisible by $(x+y)$

let S_n is be divisible by $(x+y)$

Then $S_{n+1} = x^{2n+2} - y^{2n+2}$

$$= x^{2n} x^2 - y^{2n} y^2$$

$$= x^{2n} x^2 - x^{2n} y^2 - y^{2n} y^2 + x^{2n} y^2$$

$$= x^{2n}(x^2 - y^2) - y^2(x^{2n} - y^{2n})$$

$$\therefore \quad S_{n+1} = x^{2n} S_1 \pm y^2 S_n$$

but S_1 & S_n are divisible by $(x+y)$

Then S_{n+1} is divisible by $(x+y)$ $*$