Lista 2

Helena Sękowska-Słoka, nr indeksu 321531

2023-11-25

SPIS TREŚCI

Zadanie 1

Niech $y := y(t)$ oznacza liczebność populacji w chwili $t \geq 0$. Badany gatunek rozwija się zgodnie z modelem logistycznym z uwzględnieniem efektu Alleego, tzn. populacja zmniejsza się po osiągnięciu pewnej liczebności. Może się tak dziać na przykład w wyniku:

- zaburzenia więzi socjalnych (przy odpowiednio małej grupie zanika współpraca między osobnikami, każdy zaczyna walczyć głównie o swoje przetrwanie)
- ułatwionego grasowania drapieżników (mała liczebność stada upośledza możliwość obrony grupowej)
- utrudnionego polowania (niektóre drapieżniki polują stadnie, a co za tym idzie - jeśli zostanie ich zbyt mało, trudniej im zdobyć pożywienie)

Równanie różniczkowe opisujące podane zjawisko

Jak podaje pani Urszula Foryś w podręczniku "Modelowanie matematyczne w biologii i medycynie" (2011), równanie ma następującą postać:

$$y'(t) = ry(t) \cdot (y(t) - y_c) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

Oznaczenia:

- $y(t)$ - liczba osobników w chwili t
- r - współczynnik rozrodczości
- y_c - górny próg liczebności utrudniającej kooperację
- K - pojemność środowiska

Przy czym $0 < y_c < K$.

Stany stacjonarne równania

Żeby znaleźć stany stacjonarne, przyrównujemy prawą stronę równania do 0:

$$0 = ry(t) \cdot (y(t) - y_c) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = 0 \vee y(t) = y_c \vee y(t) = K$$

Co daje nam stany stacjonarne 0, y_c oraz K. Analizując znak pochodnej, widzimy, że prawdopodobnie 0 i K to rozwiązania stabilne, natomiast y_c - niestabilne. Potwierdźmy to jednak numerycznie.

Schemat jawny i niejawny Eulera

Zapis schematu jawnego:

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot ry(t) \cdot (y(t) - y_c) \cdot \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

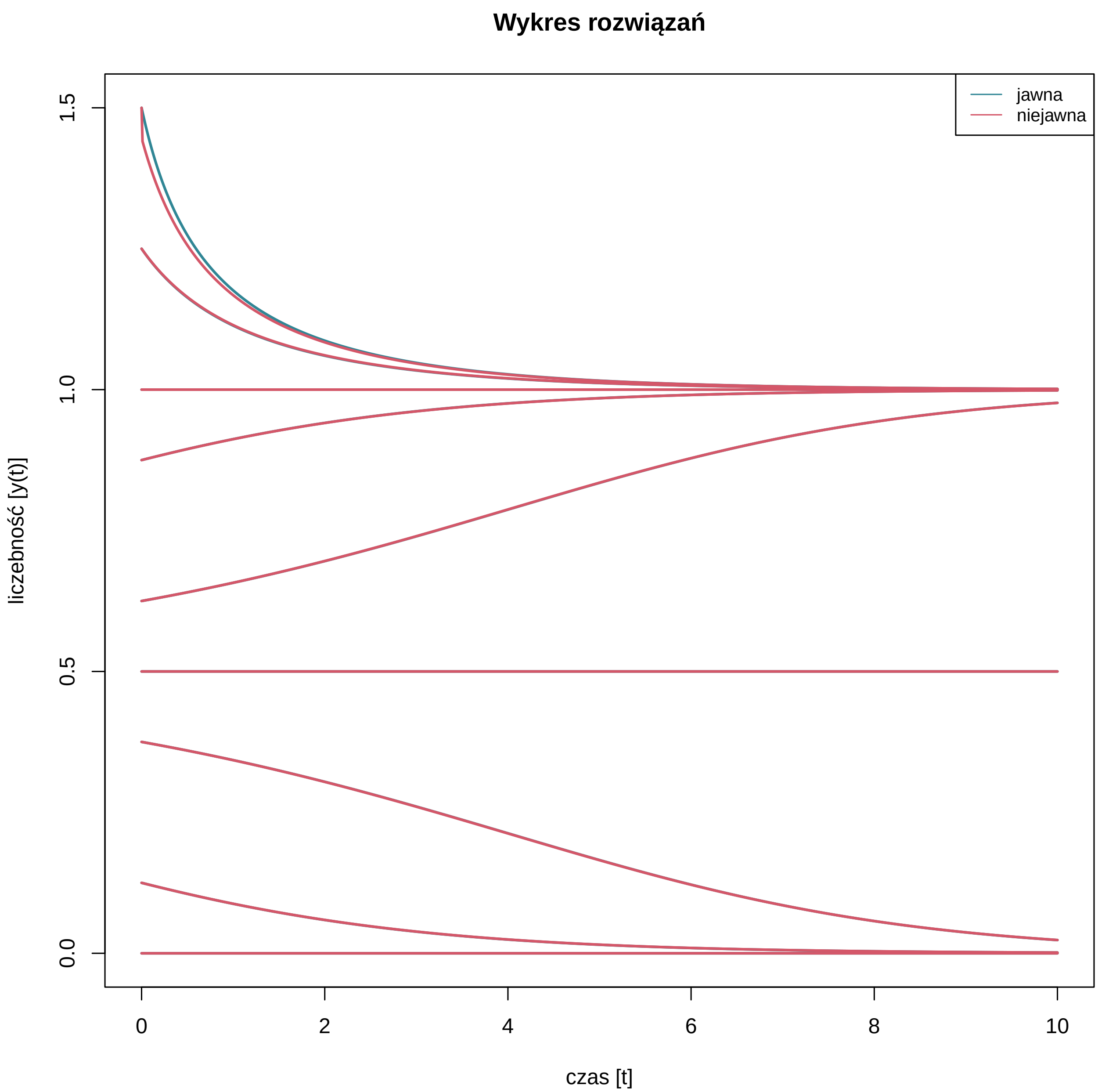
Zapis schematu niejawnego (w oparciu o metodę prawych prostokątów):

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot ry(t+h) \cdot (y(t+h) - y_c) \cdot \left(1 - \frac{y(t+h)}{K}\right)$$

Rozwiązania równania dla różnych warunków początkowych

W celu uzasadnienia numerycznego stanów stacjonarnych i ich stabilności rozwiążemy zadane równanie dla różnych warunków początkowych.

Dla uproszczenia przyjmijmy, że wszystkie wielkości są bezwymiarowe, w związku z czym możemy wziąć $r = 1$, $K = 1$ i $y_c = \frac{1}{2}$ (chcemy zobaczyć 3 stany stacjonarne, stąd $y_c \neq K$). Ponadto niech $T_{max} = 10$. Rozpatrywać będziemy $y_0 \in \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\}$. Ponieważ w tym zadaniu chcemy pokazać jedynie stany stacjonarne, a w następnym będziemy rozważać zależność od długości kroku, przyjmiemy tu tylko jedną wartość $h = 0.01$ (ze względu na stosunkowo małe r, h nie musi być bardzo małe).



Jak widać, rzeczywiście 0 oraz 1 są stanami stacjonarymi stabilnymi - rozwiązania mające punkt początkowy w pobliżu zbiegają do nich. Natomiast $\frac{1}{2}$ (czyli wybrane y_c) jest stanem stacjonarnym niestabilnym - rozwiązania startujące w bliskiej odległości oddalają się od niego.

Przy przyjętym kroku $h = 0.01$ różnicę między metodą jawną i niejawną widać jedynie dla punktu początkowego $y(0) = \frac{3}{2}$ - w schemacie niejawnym pojawia się tu na początku "skok". Natomiast we wszystkich pozostałych przypadkach obie metody pokrywają się. Przeanalizujmy głębiej ich zastosowanie do tego problemu.

Porównanie zastosowania metody jawnej i niejawnej

Porównamy błąd metody jawnej i niejawnej w zależności od długości kroku, a także warunku początkowego. Przyjmiemy 3 różne y_0 : $\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{2}$.

Dla stałych jak w wyżej i warunku początkowego $y(0) = \frac{1}{4}$ dokładne rozwiązanie (policzone przy pomocy Wolfram Alpha) wynosi:

$$y(t) = \frac{-\sqrt{3e^{\frac{t}{2}} + e^t} + e^{\frac{t}{2}} + 3}{2(e^{\frac{t}{2}} + 3)}$$

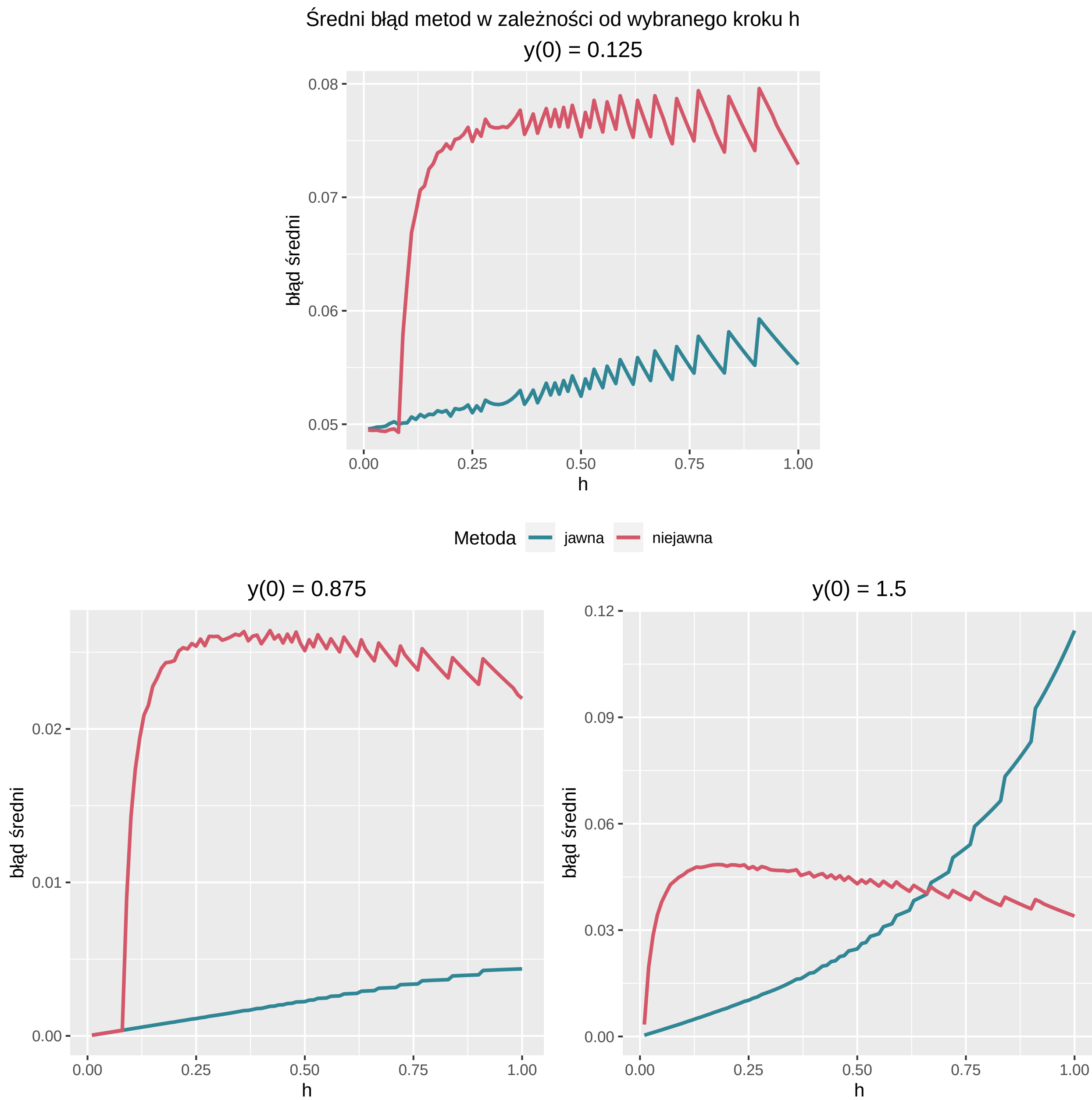
Dla $y(0) = \frac{7}{8}$ mamy:

$$y(t) = \frac{3\sqrt{7e^{\frac{t}{2}} + 9e^t} + 9e^{\frac{t}{2}} + 7}{2(9e^{\frac{t}{2}} + 7)}$$

Natomiast dla $y(0) = \frac{3}{2}$:

$$y(t) = \frac{2\sqrt{-3e^{\frac{t}{2}} + 4e^t} + 4e^{\frac{t}{2}} - 3}{8e^{\frac{t}{2}} - 6}$$

Zobaczmy zatem, jak będą wyglądały wykresy średniego błędu bezwględnego dla tych punktów początkowych w zależności od długości kroku.



Widzimy, że, choć wszystkie trzy wykresy różnią się kształtem, to mają wspólne cechy. Od pewnej wartości h błędy obu metod zaczynają mniej lub bardziej wyraźnie oscylować. Ogólnie rzecz biorąc, błąd metody jawnej ma stałą tendencję wzrostową, natomiast błąd metody niejawnej osiąga maksimum, a następnie zaczyna maleć.

W przypadku najmniejszego punktu początkowego $y(0) = 0.125$ metoda niejawna wypada lepiej jedynie dla bardzo małych wartości h, z kolei dla największego $y(0) = 1.5$ dzieje się odwrotnie - dopiero dla dużych h błąd metody niejawnej jest mniejszy.

Zauważmy jednak, że algorytm metody niejawnej wymaga więcej pamięci operacyjnej i czasu, a ostateczne różnice w dokładności dla małych kroków h nie są aż tak znaczące. Można zatem powiedzieć, że przeciętnie bardziej opłaca się użyć metody jawnej, chyba, że mamy do czynienia z punktem początkowym o stosunkowo dużej wartości i dużą długością kroku, wtedy zdecydowanie lepiej wypada metoda niejawna.

Zadanie 2

Niech $y := y(t)$ oznacza, tak jak poprzednio, liczebność populacji w chwili $t \geq 0$. W tym zadaniu będziemy chcieli przeanalizować model populacji, w którym liczebność w danej chwili t zależy od pewnego momentu w przeszłości: $t - \tau$.
Opóźnienie to może mieć związek na przykład z rozmnażaniem, które następuje tylko w konkrentym momencie u danego osobnika (np. w pewnym wieku lub tylko o jednej porze w roku). Wówczas pełne efekty wpływu działa drapieżników czy niekorzystych warunków środowiskowych widać dopiero po czasie (kiedy więcej osobników umrze, a mniej się urodzi).
Uproszczonym opisem tego zjawiska będzie model logistyczny z opóźnieniem (w rzeczywistości mamy zwykle do czynienia z pewnym rozłożeniem w czasie: rozsiewanie nasion trwa kilka dni, pora roku - trzy miesiące, tu zaś zakładamy, że proces ten zachodzi w konkretnej chwili).

Równanie różniczkowe opisujące podane zjawisko

Jak zostało zaprezentowane na wykładzie, równanie ma następującą postać:

$$y'(t) = ry(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K}\right)$$

Oznaczenia:

- r - współczynnik rozrodczości
- τ - opóźnienie
- K - pojemność środowiska

Stany stacjonarne równania

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, żeby znaleźć stany stacjonarne, przyrównujemy prawą stronę równania do 0:

$$0 = ry(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = 0 \vee y(t-\tau) = K$$

Mamy zatem dwa stany stacjonarne, 0 oraz K. Sprawdźmy numerycznie stabilność tych rozwiązań.

Schemat jawny i niejawny Eulera

Zapis schematu jawnego:

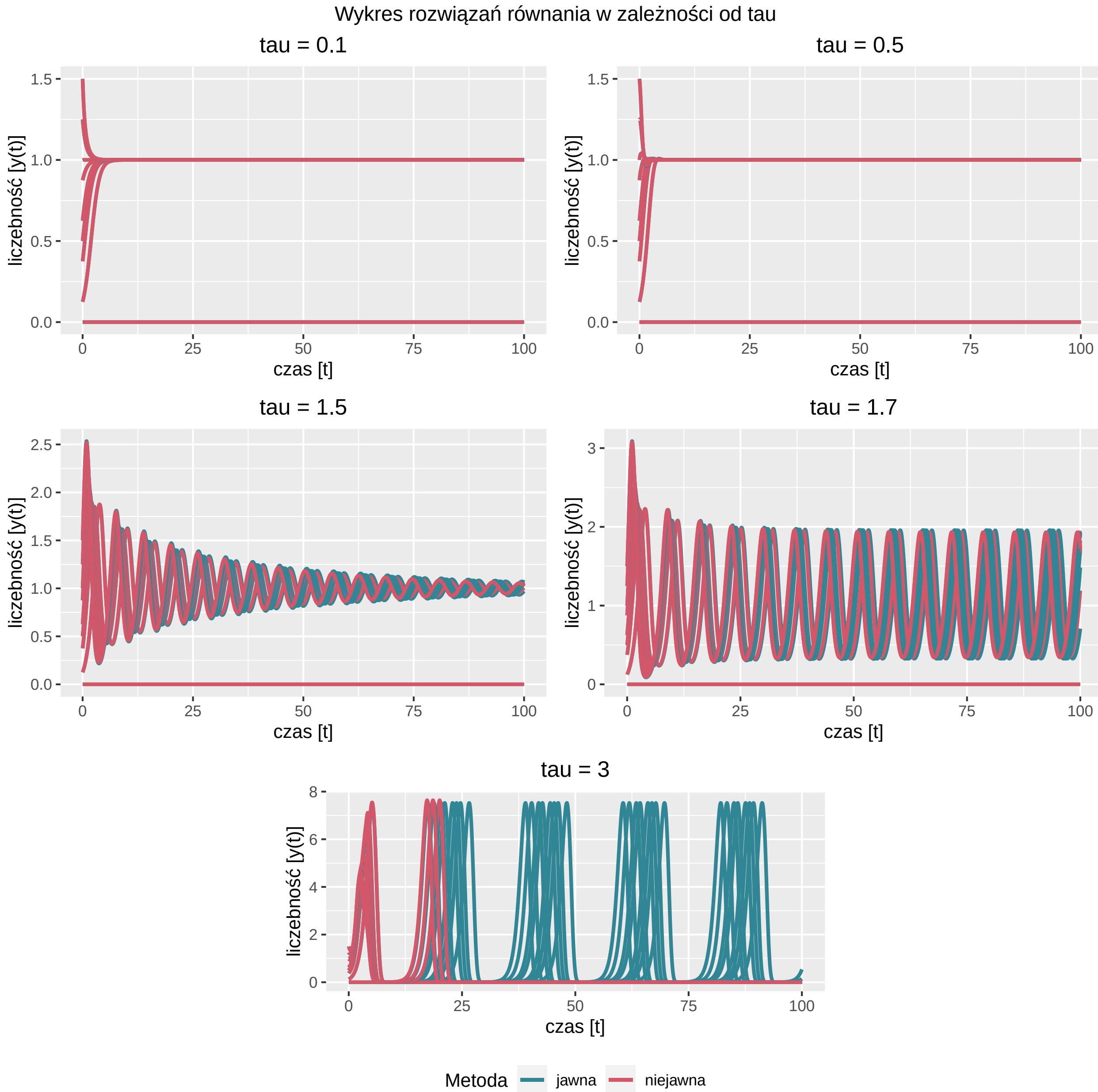
$$y(t+h) = y(t) + h \cdot ry(t) \cdot \left(1 - \frac{y(t-\tau)}{K}\right)$$

Zapis schematu niejawnego (w oparciu o metodę prawych prostokątów):

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot ry(t+h) \cdot \left(1 - \frac{y(t-\tau+h)}{K}\right)$$

Rozwiązania równania dla różnych warunków początkowych $y(0)$ i różnych wartości τ

Wartości r, K oraz h pozostawmy takie, jak w zadaniu pierwszym. Musimy jednak nieco zwiększyć T_{max}, ponieważ będziemy tu rozpatrywać przypadek, gdzie zbieżność jest nieco wolniejsza. Wobec tego niech $T_{max} = 100$.
Chcąc zbadać stabilność znalezionych stanów stacjonarnych, rozwiążemy zadane równanie dla różnych warunków początkowych.
Zauważmy, że żeby to zrobić, nie wystaczy nam warunek początkowy na $y(0)$, potrzebujemy ich więcej, konkretnie, jak u pani Foryś: funkcji początkowej $y_0\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Zgodnie z założeniem funkcja ta musi być różniczkowalna. Chcielibyśmy także, żeby możliwe było zadanie konkretnej wartości w zerze: $y(0) = a > 0$ bez zmieniania konstrukcji całej funkcji. Weźmy zatem $y_0(t) = y(0) \cdot \cos^2(t)$, gdzie $y(0)$ to zadana przez nas liczba dodatnia. Zauważmy, że $\cos^2(0) = 1$, zatem $y_0(0) = y(0)$, czyli tak, jak chcemy.
Z tego względu możemy rozpatrywać $y(0)$ takie, jak w zadaniu 1.
Musimy jeszcze wybrać różne wartości opóźnienia τ. Jak pisze pani Foryś, to właśnie od opóźnienia zależy stabilność stanu stacjonarnego K, a graniczną wartością jest $\tau = \frac{\pi}{2} \approx 1.571$. Wobec tego zbadajmy pięć różnych τ: małe ($\tau = 0.1$), nieco większe ($\tau = 0.5$), blisko granicy, ale mniejsze od niej ($\tau = 1.5$), nieco większe od graniczego ($\tau = 1.7$) oraz duże ($\tau = 3$).



Z wykresów możemy wywnioskować, że 0 jest stanem stacjonarnym niestabilnym, natomiast K (w tym przypadku równe 1) jest stabilne do wartości $\tau = \frac{\pi}{2}$. Widzimy, że dla większych opóźnień występują już regularne oscylacje liczebności populacji, bez oznak stabilizacji na konkretnym poziomie.

Im większa wartość τ, tym większe są również różnice między maksimum i minimum, a także między metodą jawną i niejawną. W związku z wynikami poprzedniego zadania możemy przypuszczać, że skoro krok jest mały, a punkty początkowe stosunkowo duże, to bardziej godne zaufania są wyniki metody jawnej.