

Lista 3

Helena Sękowska-Słoka, nr indeksu 321531

2023-12-22

SPIS TREŚCI

Zadanie 1	2
Opis modelu	2
Wyznaczenie równań nullcline'ów	3
Opis schematu numerycznego wykorzystującego metodę Rungego-Kutty 2. i 4. rzędu	3
Implementacja schematu	4
Przykładowe rozwiązania dla różnych warunków początkowych oraz różnych parametrów b i I_{ext} .	4
Zadanie 2	10
Opis modelu	10
Opis schematu numerycznego wykorzystującego metodę Rungego-Kutty 2. i 4. rzędu	10
Porównanie rozwiązania numerycznego układu Lorenza dla zadanych stałych i warunku początkowego różnymi metodami i z różną długością kroku	11
Zadanie 3	14
Opis modelu	14
Wyznaczenie stanów stacjonarnych układu oraz zbadanie ich stabilności	14
Opis schematu numerycznego wykorzystującego metodę Rungego-Kutty 2. i 4. rzędu	15
Zastosowanie schematu RK4 dla wariantu c) - mało infekcji niezaraźliwej choroby	16
Wprowadzenie lockdownu dla wariantu b)	17

Zadanie 1

Opis modelu

Model FitzHugh-Nagumo został skonstruowany w wyniku modyfikacji modelu oscylacji Bonhoeffer–Van der Pola. Pierwotne równanie miało postać:

$$v'' + (v^2 - 1)v' + \phi v = 0$$

Można ją zapisać również jako dwa równania pierwszego stopnia, stosując transformację Lienarda $w = -v' + v - \frac{v^3}{3}$:

$$v' = v - \frac{v^3}{3} - w$$

$$w' = \phi v$$

Zauważmy, że dla $\phi > 0$ mamy niestabilny punkt stacjonarny, a rozwiązania startujące w pobliżu zbiegają do globalnie stabilnego rozwiązania okresowego będącego cyklem granicznym. Modyfikacja w postaci modelu FitzHugh-Nagumo przesuwa punkt stacjonarny, czyniąc go stabilnym:

$$v' = v - \frac{v^3}{3} - w - I$$

$$w' = \phi(v + a - bw)$$

Przy czym na liście nr 3 zapisano to, podstawiając $I = -RI_{ext}$, $\phi = \frac{1}{\tau}$, zatem ostatecznie otrzymujemy:

$$v' = v - \frac{v^3}{3} - w + RI_{ext}$$

$$\tau w' = v + a - bw$$

Z warunkami początkowymi

$$v(0) = v_0$$

$$w(0) = w_0$$

W tej wersji model opisuje proces aktywacji i dezaktywacji impulsu neuronowego jako uproszczenie modelu Hodgkina-Huxleya.

Oznaczenia:

- v - spoczynkowy potencjał błonowy (membranowy) neuronu (kiedy nie generuje impulsu nerwowego)
- I_{ext} - bodziec zewnętrzny (napięcie)
- w - zmienna „regeneracji”, która reprezentuje łączne działanie dezaktywacji kanału sodowego i potasowego
- a, b, τ, R - dodatnie stałe

Typowo przyjmujemy $a = 0.7$, $\tau = 12.5$, $R = 0.1$.

Źródła:

- *FitzHugh–Nagumo Model*, Encyclopedia of Computational Neuroscience, William Erik Sherwood: [link](#)
- *Van der Pol oscillator*, Wikipedia: [link](#)
- *The neuronal membrane*, Encyclopedia Britannica: [link](#)

Wyznaczenie równań nullcline'ów

Zapiszmy równania modelu w postaci dwóch funkcji:

$$g(v, w) = v - \frac{v^3}{3} - w + RI_{ext}$$
$$h(v, w) = \frac{v + a - bw}{\tau}$$

Żeby wyznaczyć nullcline'y, przyrównujemy obie funkcje do zera, otrzymując:

$$NULLCLINE(v') = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 | w = v - \frac{v^3}{3} + RI_{ext}\}$$

$$NULLCLINE(w') = \{(v, w) \in \mathbb{R}^2 | v = bw - a\}$$

Opis schematu numerycznego wykorzystującego metodę Rungego-Kutty 2. i 4. rzędu

Niech y będzie wektorem postaci $y = (v, w)$, zaś funkcja f niech będzie postaci $f(t, y) = (g(t, y), h(t, y))$, gdzie f i g są funkcjami jak wyżej, zatem funkcja f przyjmuje liczbę i wektor, a zwraca wektor. Oznaczmy krok jako h (przyjmijmy 0.1), zaś czas jako t .

Schemat numeryczny Rungego-Kutty rzędu 2:

$$y_{n+1} = y_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)$$

Gdzie:

$$f(t, (v, w)) = \left(v - \frac{v^3}{3} - w + RI_{ext}, \frac{v + a - bw}{\tau} \right)$$

Schemat numeryczny Rungego-Kutty rzędu 4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Gdzie:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1 \right)$$
$$k_3 = f \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2 \right)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3)$$

Implementacja schematu

```
# h, R, I_ext, a, b oraz tau zostaną ustawione jako stałe poza poniższym kodem

# w tym przypadku
f <- function(t, y) {
  v <- y[1]
  w <- y[2]
  return(c(v-v^3/3-w+R*I_ext, (v+a-b*w)/tau))
}

# funkcja obliczająca y_{n+1} metodą RK drugiego rzędu
RK2 <- function(y_n, h, f, t_n) {
  y_n1 <- y_n + h*f(t_n+h/2, y_n+h/2*f(t_n, y_n))
  return(y_n1)
}

# funkcja obliczająca y_{n+1} metodą RK czwartego rzędu
RK4 <- function(y_n, h, f, t_n) {
  k1 <- f(t_n, y_n)
  k2 <- f(t_n+h/2, y_n+h/2*k1)
  k3 <- f(t_n+h/2, y_n+h/2*k2)
  k4 <- f(t_n+h, y_n+h*k3)

  y_n1 <- y_n + h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)
  return(y_n1)
}
```

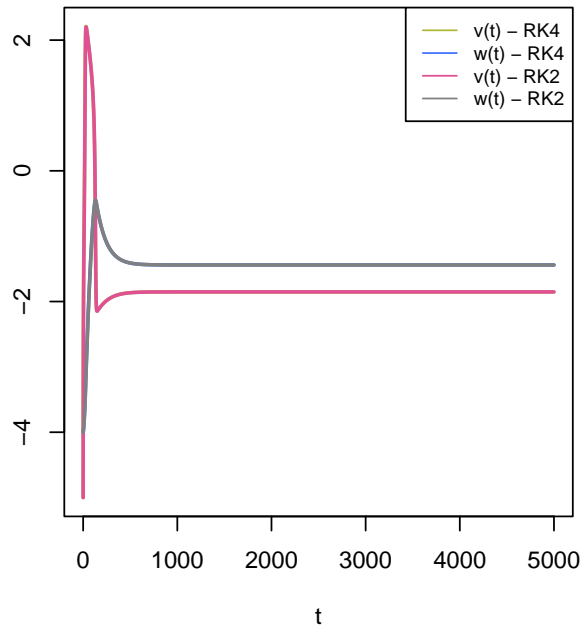
Przykładowe rozwiązania dla różnych warunków początkowych oraz różnych parametrów b i I_{ext}

Będziemy rozpatrywać następujące pary parametrów $[b, I_{ext}]$: $[0.8, -17.08]$, $[0.01, 0.1]$, $[0.8, 15]$, $[4.5, 6]$, $[2, 3.5]$.
Zadajmy również odległe od siebie warunki początkowe, żeby lepiej zobaczyć przebieg różnych rozwiązań: $(-5, 2.5)$, $(-5, -4)$, $(5, 1)$.

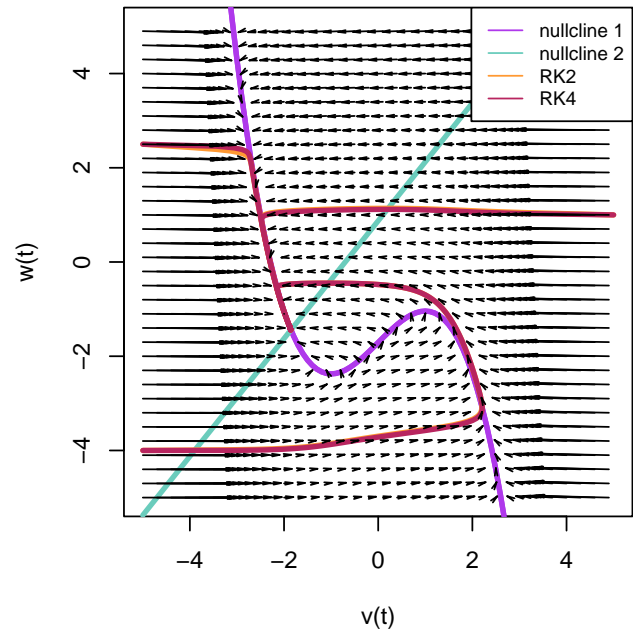
Do zobrazowania zależności rozwiązań od czasu będziemy używać rozwiązania startującego w punkcie początkowym $(-5, -4)$.

$$b = 0.8, I_{ext} = -17.08$$

zale no rozwi za od czasu



trajektorie rozwi za

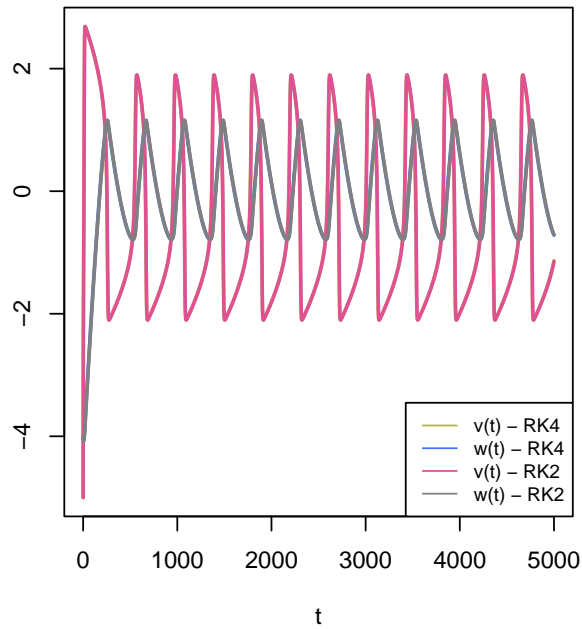


W tym przypadku mamy jeden punkt stacjonarny stabilny na przecięciu nullcline'ów na lewo od pierwszego ekstremum lokalnego nullcline'a będącego wielomianem trzeciego stopnia. Widać, że do punktu tego zbiegają wszystkie trzy rozpatrywane rozwiązania. Również na wykresie zależności rozwiązań od czasu widać stabilizację $v(t)$ i $w(t)$.

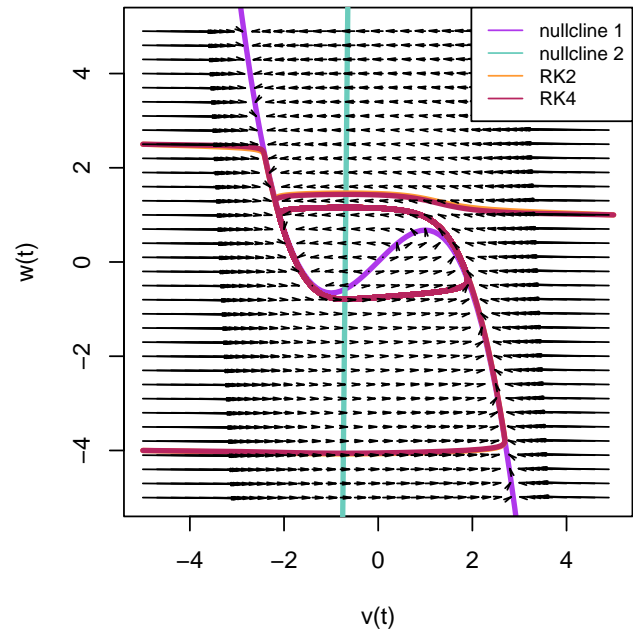
Metody RK2 i RK4 różnią się nieco na wykresie trajektorii, ale nie są to znaczące różnice.

$$b = 0.01, I_{ext} = 0.1$$

zale no rozwi za od czasu



trajektorie rozwi za

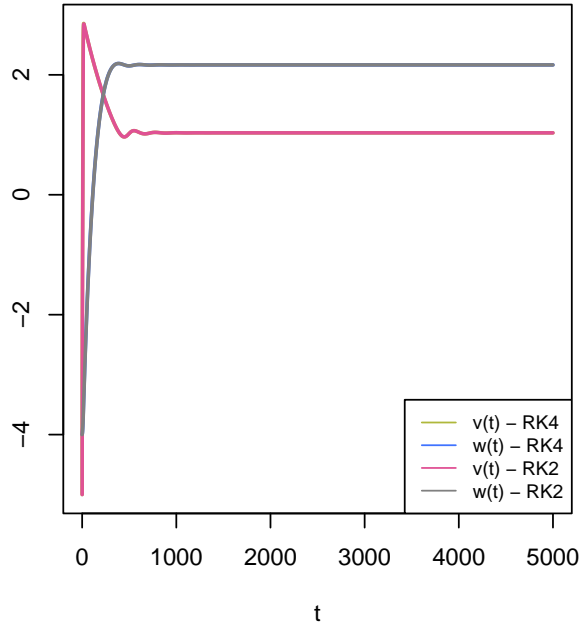


Dla takich współczynników przecięcie nullcline'ów znajduje się pomiędzy ekstremami lokalnymi wielomianu i widzimy, że nie jest już ono punktem stacjonarnym. Rozwiązania zbiegają do zamkniętej krzywej okalającej oba ekstrema wzdłuż spirali łączącej się z wykresem nullcline'a dla v' . Na wykresie zależności rozwiązań od czasu widać okresowość.

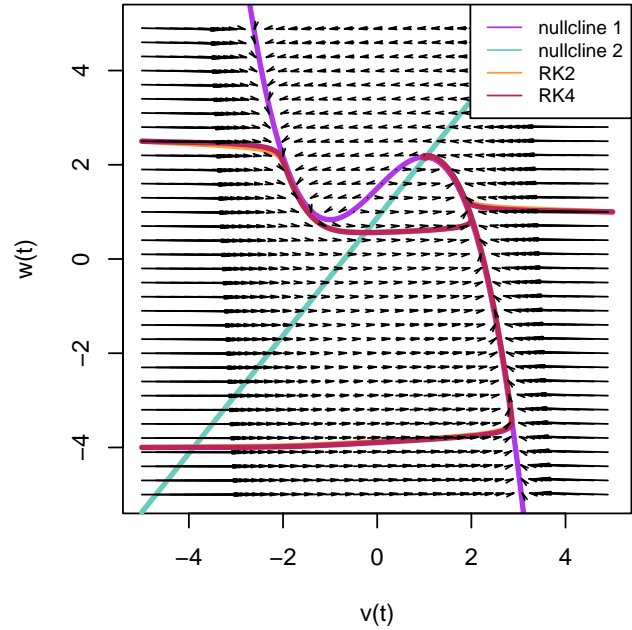
Znów pojawia się nieduża, mało widoczna różnica między metodą RK2 i RK4.

$$b = 0.8, I_{ext} = 15$$

zale no rozwi za od czasu



trajektorie rozwi za



W tym przypadku prosta przecina wykres wielomianu na prawo od większego ekstremum lokalnego i znów widzimy, że punkt przecięcia jest punktem stacjonarnym stabilnym. Po raz kolejny widać też niewielką rozbieżność między metodą RK2 i RK4 w trajektoriach startujących w górnej części wykresu.

Podsumowując ten przypadek przecięcia - widzimy, że dla punktów stabilnych (czyli tych nie pomiędzy ekstremami lokalnymi pierwszego nullcline'a) trajektorie, zbiegając do nich, biegną najpierw wzdłuż wykresu wielomianu, a następnie po krzywej będącej cyklem granicznym w przypadku braku stabilności punktu przecięcia, obracając się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dopiero na końcu rozwiązania zdążają do punktu zbieżności.

Rozważmy inne przypadki liczby punktów stacjonarnych. Żeby uzyskać dokładnie dwa punkty wspólne obu nullcline'ów, musielibyśmy znaleźć taką zależność między b i I_{ext} , żeby prosta trafiała w ekstremum lokalne wielomianu. Okazuje się, że, ponieważ są dwa ekstrema, są również dwa możliwe typy takiej zależności:

$$b = \frac{1.7}{\frac{2}{3} + 0.1I_{ext}}$$

$$b = \frac{9}{20 - 3I_{ext}}$$

Rozpatrzmy zatem wykresy z dwoma oraz trzema punktami wspólnymi nullcline'ów.

Ze względu na to, że chcemy rozpatrzeć teraz zachowanie większej liczby przecięć, dobierzemy dodatkowo dwa nowe punkty początkowe: $(0, 5)$ oraz $(0, 0.2)$.

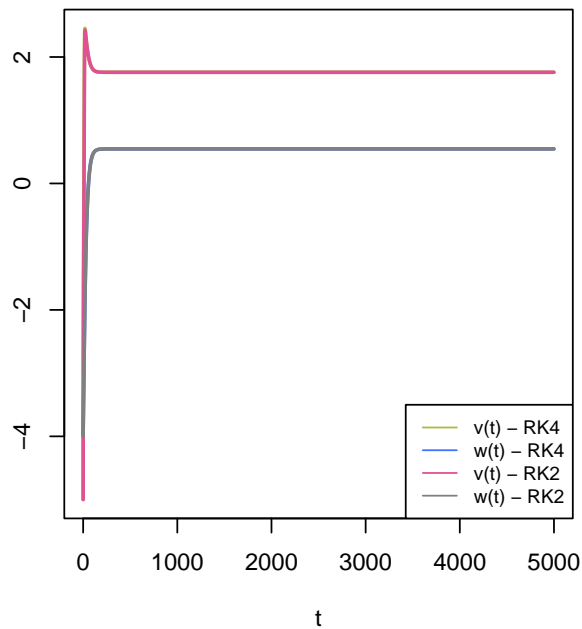
Dla dwóch przecięć wykorzystamy punkt wspólny

$$b = \frac{9}{20 - 3I_{ext}}$$

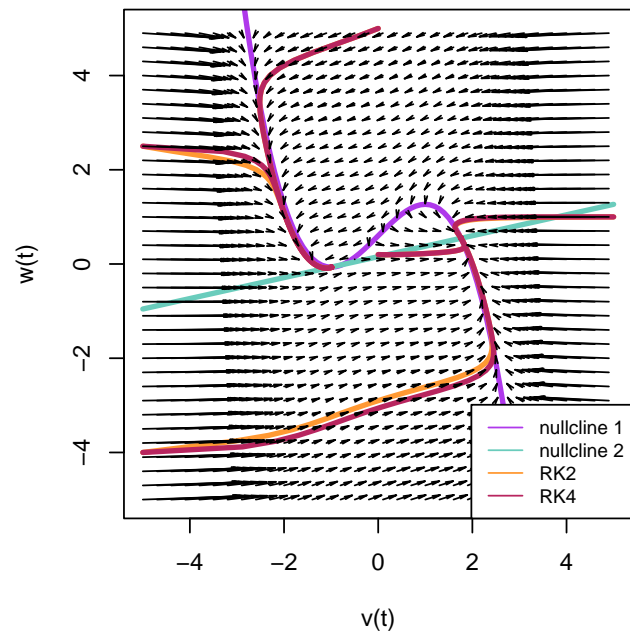
, ponieważ dużo łatwiej dobrać do niego współczynniki, z których żaden nie jest ułamkiem okresowym, przez co możemy uzyskać dokładniejszy wykres.

$$b = 4.5, I_{ext} = 6$$

zale no rozwi za od czasu



trajektorie rozwi za



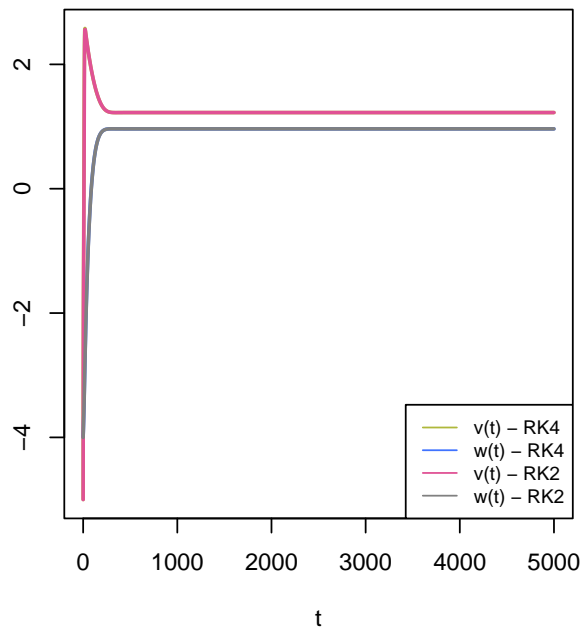
Widzimy, że oba punkty przecięcia są zbieżne. Co więcej, uzyskaliśmy ciekawy układ strzałek. Można z niego wywnioskować, że w tym przypadku rozwiązania zbiegają najpierw przeciwnie do ruchu wskazówek zegara do wykresu nullcline dla v' , ale tylko do części na lewo od mniejszego ekstremum lokalnego lub na prawo od większego, nie do części między ekstremami, od której strzałki się oddalają lub przez nią przechodzą. Potem wzdłuż wykresu rozwiązania dążą do jednego z punktów stacjonarnych.

Widać tu także największą do tej pory różnicę między RK2 i RK4.

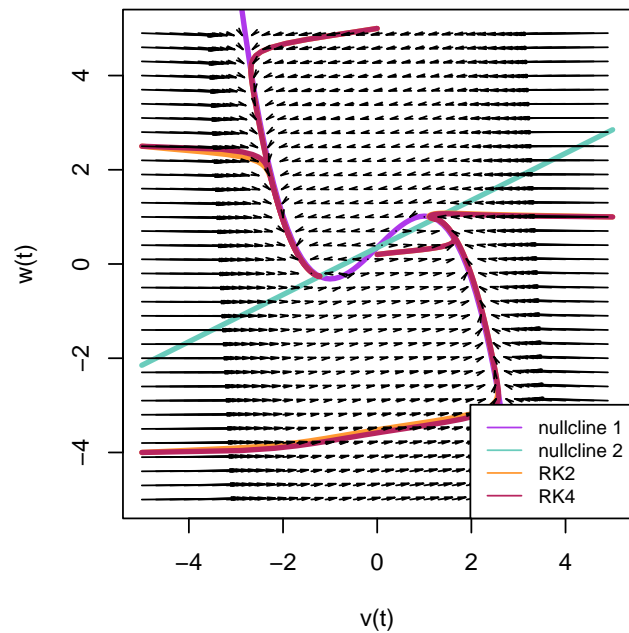
Zobaczmy teraz, jak prezentują się wykresy dla trzech przecięć:

$$b = 2, I_{ext} = 3.5$$

zale no rozwi za od czasu



trajektorie rozwi za



Rozwiązania poruszają się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zbiegając do bliższego zgodnie z tym ruchem punktu stacjonarnego stabilnego - przed ekstremami lokalnymi wielomianu lub po nich. Punkt pomiędzy znów jest niestabilny, widać strzałki portretu fazowego odchodzące od niego w prawo i w lewo. Podsumowując, stabilność rozwiązań stacjonarnym w zależności od położenia względem ekstremów lokalnych nullcline'a dla v' jest taka sama we wszystkich przypadkach liczby przecięć. Ciekawym zjawiskiem jest zbieganie po kształcie przypominającym spiralę, co może sugerować punkty stacjonarne stabilne typu ognisko przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Interesująca jest również krzywa będąca cyklem granicznym przy jednym punkcie stacjonarnym niestabilnym przypominająca zaokrąglony równoległobok.

Zadanie 2

Opis modelu

Konwekcja jest jednym ze sposobów przekazywania ciepła. W tym przypadku przekazywane jest ono poprzez przemieszczanie się materii w gazach i cieczach. Ruch ten powodowany jest przez różnicę temperatur, w związku z którą powstaje różnica gęstości. Jeśli warstwa dolna ma wyższą temperaturę niż warstwa górna, wówczas ma ona mniejszą gęstość, a w związku z tym wznosi się ku górze, podobnie jak oliwa wypływa na powierzchnię wody. Za to znajdujące się na górze cząsteczki o niższej temperaturze i niższej gęstości w wyniku grawitacji opadają na dół. W ten sposób powstają pionowe prądy konwekcyjne.

Model Lorenza w możliwie prosty sposób opisuje konwekcję termiczną w atmosferze. Zachodzi ona, gdy troposfera (czyli najniższa warstwa atmosfery planety, jednocześnie będąca warstwą o największej masie) jest podgrzewana od dołu, na przykład poprzez masy powietrza mające kontakt z cieplejszym lądem czy wodą. Temperatura w obrębie troposfery spada wraz ze wzrostem wysokości, wobec tego zachodzi sytuacja opisana powyżej - następuje cyrkulacja gazu, w tym przypadku powietrza związana z różnicą temperatur.

Poza tym drugim ważnym czynnikiem w tym wypadku jest parowanie oceanów i mórz. Przy połączeniu tych dwóch zjawisk otrzymujemy kondensację pary wodnej na aerozole w atmosferze. Między innymi z tego powodu powstają chmury, turbulencje i wiatry, za pomocą których ciepło jest redystrybuowane.

Model Lorenza dla zjawiska konwekcji termicznej przedstawiony został w postaci następujących równań:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - qz\end{aligned}$$

Z zadanymi warunkami początkowymi

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$$

Równania opisują tempo zmian trzech wielkości w zależności od czasu: x jest wprost proporcjonalne do szybkości konwekcji, y opisuje różnicę temperatur w atmosferze, a z jej rozkład w pionie.

Objaśnienie stałych:

- σ - liczba Prandtla, charakteryzująca lepkość ośrodka (wartość dodatnia, zwykle 10)
- r - liczba Rayleigha, charakteryzująca przewodnictwo cieplne ośrodka (wartość dodatnia)
- q - rozmiar obszaru (również wartość dodatnia, zwykle $\frac{8}{3}$)

Źródła:

- *Czym jest konwekcja?*, Zintegrowana Platforma Edukacyjna Ministerstwa Edukacji i Nauki: [link](#)
- *Climate Change*, The Open University: [link](#)
- *Lorenz system*, Wikipedia: [link](#)

Opis schematu numerycznego wykorzystującego metodę Rungego-Kutty 2. i 4. rzędu

Niech v będzie wektorem postaci $v = (x, y, z)$, zaś funkcja f niech będzie postaci $f(t, v) = (g(t, v), h(t, v), i(t, v))$, gdzie:

- $g(t, v) = \sigma(y - x)$
- $h(t, v) = rx - y - xz$
- $i(t, v) = xy - qz$

Zatem funkcja f przyjmuje liczbę i wektor, a zwraca wektor. Oznaczmy krok jako h (przyjmijmy 0.1), zaś czas jako t .

Schemat numeryczny Rungego-Kutty rzędu 2:

$$v_{n+1} = v_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} f(t_n, v_n) \right)$$

Gdzie:

$$f(t, (x, y, z)) = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - qz)$$

Schemat numeryczny Rungego-Kutty rzędu 4:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, v_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, v_n + hk_3) \end{aligned}$$

Implementacja metod RK2 i RK4 jest analogiczna jak w zadaniu 1, zmienia się tylko funkcja zwracająca ramkę danych z trajektorią oraz funkcja f .

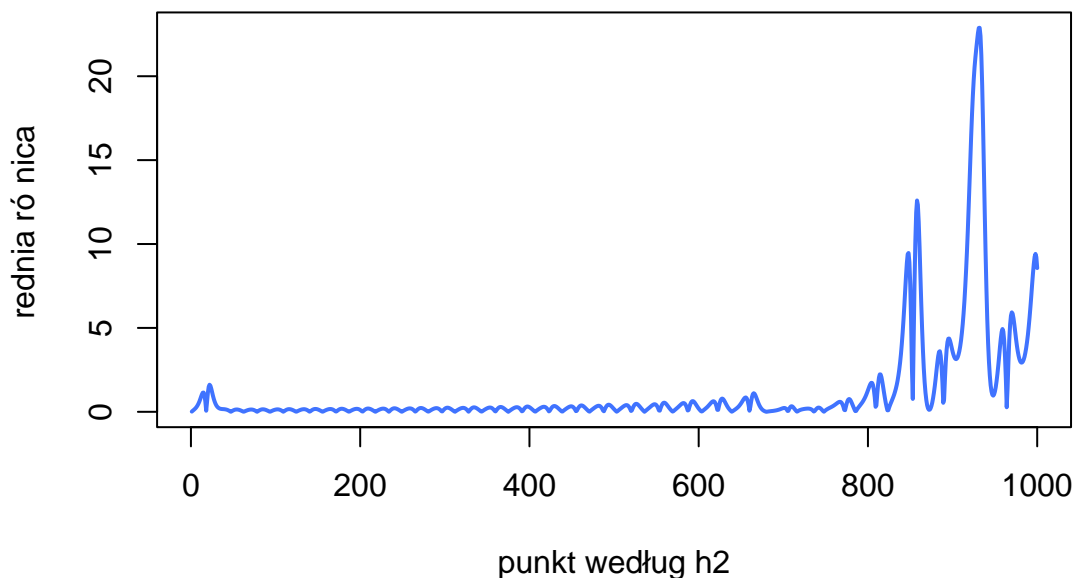
```
f <- function(t, v) {  
  x <- v[1]  
  y <- v[2]  
  z <- v[3]  
  return(c(s*(y-x), r*x-y-x*z, x*y-q*z))  
}  
  
# funkcja zwracająca df z trajektorią  
trajjectory <- function(RK_scheme, n, v0, h, f, t_n) {  
  x_v <- c(v0[1])  
  y_v <- c(v0[2])  
  z_v <- c(v0[3])  
  for (i in 1:n) {  
    v_n <- c(x_v[i], y_v[i], z_v[i])  
    x_v <- c(x_v, RK_scheme(v_n, h, f, t_n)[1])  
    y_v <- c(y_v, RK_scheme(v_n, h, f, t_n)[2])  
    z_v <- c(z_v, RK_scheme(v_n, h, f, t_n)[3])  
  }  
  return(data.frame("x"=x_v, "y"=y_v, "z"=z_v))  
}
```

Porównanie rozwiązania numerycznego układu Lorenza dla zadanych stałych i warunku początkowego różnymi metodami i z różną długością kroku

Porównanie dokładności dla kroku $h_1 = 0.01$ z dokładnością dla kroku $h_2 = 0.02$

Będziemy porównywać średnią różnic bezwzględnych wartości po trzech współrzędnych x, y, z w zależności od długości kroku w punktach jak dla kroku h_2 . Jako n_1 dla krótszego kroku przyjmijmy 2000, zaś jako n_2 dla kroku dłuższego - 1000. Wykorzystamy metodę RK4.

średnia różnica bezwzględnych wartości po współrzędnych w metodzie RK4 dla $h=0.01$ i $h=0.02$

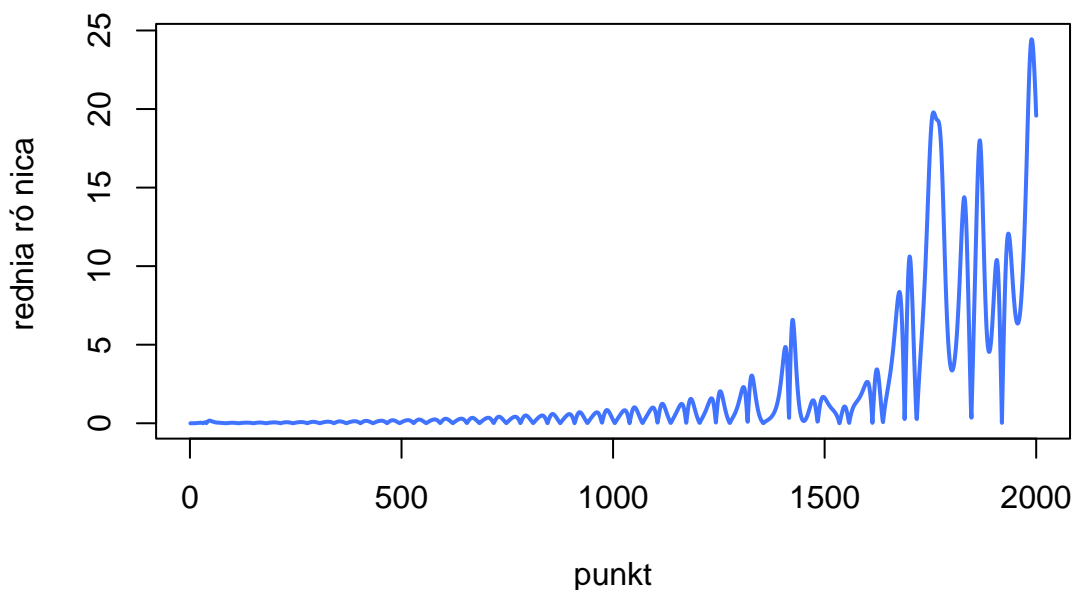


Mniej więcej do punktu 800 średnia różnica jest niewielka, ale potem zaczyna gwałtownie zmieniać wartości, aż do pików rzędu ponad 20.

Porównanie metody RK2 i RK4 z krokiem $h = 0.01$

Wiemy, że schemat RK4 jest dokładniejszy, ale chcemy zbadać, o ile i czy opłaca się go użyć. Zobaczmy, jak na wykresie prezentują się różnice między schematami:

średnia różnica bezwzględnych wartości po współrzędnych w metodzie RK4 i RK2 dla $h=0.01$



Średnia różnica dla dwóch różnych schematów zmienia się dynamicznie, ale ma tendencję wzrostową wraz ze wzrostem przebytych kroków. Wydaje się, że rośnie wolniej niż dla tego samego schematu i dwóch

różnych wartości kroku, ale zauważmy, że punkt ok. 1400, który na tym wykresie rozpoczyna występowanie największych wartości, odpowiada punktowi 700 na wykresie poprzednim, zatem de facto duża średnia różnica występuje tutaj wcześniej. Sprawdźmy jednak, jak prezentuje się czas działania obu metod dla tej samej długości kroku.

Porównanie czasu działania metody RK2 i RK4 z krokiem $h = 0.01$

Różnica czasu RK2 i RK4:

```
## Time difference of 0.05676 secs
```

Przewagę kilku setnych sekundy ma RK2, co nie jest zaskoczeniem, bowiem jest to metoda prostsza, wymagająca mniejszej liczby operacji. Zauważmy, że wzięliśmy względnie nieduże n (2000) i nie aż tak dokładny krok (0.01). Gdybyśmy chcieli policzyć większy fragment wykresu i nieco precyzyjniej, różnica mogłaby się znacznie zwiększyć. Sprawdźmy jeszcze, jak prezentowałyby się różnica czasu dla różnych długości kroku, czyli dla RK4 z $h = 0.02$ i RK4 z $h = 0.01$:

```
## Time difference of 0.071204 secs
```

Jak widać, różnica czasu w przypadku innej długości kroku jest większa niż w przypadku innej metody. Podsumowując, jeśli chcemy zoptymalizować dokładność naszych trajektorii względem czasu potrzebnego do ich policzenia, lepiej wybrać metodę RK4 i większy krok, aniżeli metodę RK2 z krokiem mniejszym. Natomiast jeśli mamy dowolność wyboru, najlepsza będzie metoda RK4 z jak najmniejszym krokiem.

Zadanie 3

Opis modelu

W tym zadaniu rozważamy wariant modelu epidemii SIR z uwzględnieniem efektu przyrostu naturalnego (wariant z zastępowalnością pokoleń):

$$S' = \mu N - \beta SI - \mu S$$

$$I' = \beta SI - \gamma I - \mu I$$

$$R' = \gamma I - \mu R$$

$$N = S + I + R$$

Z zadanymi warunkami początkowymi:

$$S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) = 0$$

Gdzie:

- S - populacja narażona na chorobę
- I - zakażeni
- R - ozdrowieńcy
- μ - wskaźnik urodzeń i śmierci w populacji (dodatni)
- β - współczynnik zachorowań (dodatni)
- γ - współczynnik wyzdrowień (dodatni)

Dla uproszczenia przyjmujemy wielkości bezwymiarowe, ustalmy więc $N = 1$. Ponadto zauważmy, że wartość ta jest stała. Dzięki temu możemy nieco uprościć układ, otrzymując tylko 2 równania różniczkowe i jedno równanie liniowe wprost na R , co ułatwi nam dalszą analizę. Taka postać prezentuje się następująco:

$$S' = \mu N - \beta SI - \mu S$$

$$I' = \beta SI - \gamma I - \mu I$$

$$R = 1 - S - I$$

Wyznaczenie stanów stacjonarnych układu oraz zbadanie ich stabilności

Ustanówmy stałą pomocniczą $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}$ zwaną bazowym wskaźnikiem reprodukcji.

Przyrównując układ dwóch równań różniczkowych do zera, otrzymujemy dwa stany stacjonarne:

- 1) $(1, 0)$
- 2) $\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\beta}{\mu + \gamma} - 1\right)\right) = \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1)\right)$

Co daje nam dla trzech zmiennych stany:

- 1) $(1, 0, 0)$
- 2) $\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta} (R_0 - 1)\right)$

Ponieważ w tym momencie mamy tylko 2 równania różniczkowe, możemy rozpatrywać macierz Jacobiego rozmiaru 2x2. Ogólnie dla punktu (S, I) wygląda ona następująco:

$$\begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ I\beta & \beta S - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Dla stanu pierwszego otrzymujemy zatem:

$$\begin{bmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Wyznacznik tej macierzy to $-\mu \cdot (\beta - \gamma - \mu)$, zaś wartości własne tej macierzy to $\lambda_1 = -\mu$ oraz $\lambda_2 = \beta - \gamma - \mu$. Wiemy, że $\mu > 0$, zatem $-\mu < 0$.

Wobec tego mamy 3 możliwości:

1. $\beta - \gamma - \mu < 0$

Wówczas wyznacznik jest dodatni, natomiast obie wartości własne są ujemne i rzeczywiste, zatem jest o stan stacjonarny stabilny. Zauważmy, warunek ten jest równoznaczny z $\frac{\beta}{\gamma + \mu} = R_0 < 1$.

2. $\beta - \gamma - \mu = 0$ Wówczas wyznacznik jest równy 0, mamy jedną zerową i jedną ujemną wartość własną. Jest to stan stabilny. Warunek jest równoznaczny z $\frac{\beta}{\gamma + \mu} = R_0 = 1$.

3. $\beta - \gamma - \mu > 0$ Wyznacznik jest ujemny, a wartości własne mają różne znaki. Jest to stan niestabilny. Warunek jest równoznaczny z $\frac{\beta}{\gamma + \mu} = R_0 > 1$.

Zatem stabilność stanu 1), który odpowiada brakowi choroby w populacji, zależy od wartości $\beta - \gamma - \mu$, czyli w wygodniejszej formie $\frac{\beta}{\gamma + \mu}$. Jeśli $\frac{\beta}{\gamma + \mu} > 1$, czyli współczynnik zakażeń jest większy od sumy wyzdrowień oraz narodzin, to epidemia się rozprzestrzenia. W przeciwnym wypadku wygasa.

Dla drugiego stanu stacjonarnego macierz Jacobiego (po przekształceniach dla większej przejrzystości) to:

$$\begin{bmatrix} -\mu R_0 & -\gamma - \mu \\ \mu(R_0 - 1) & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy to $(-\gamma - \mu)\mu(R_0 - 1)$, ponadto jej ślad jest ujemny, zatem znów otrzymujemy trzy, a tak naprawdę dwa przypadki, tzn. jeśli $R_0 > 1$, to mamy stan stacjonarny stabilny i odpowiednie części populacji utrzymują się na stałym poziomie, zaś w przeciwnym przypadku stan stacjonarny jest niestabilny. Źródła:

- *Compartmental models in epidemiology*, Wikipedia: [link](#)
- *The SIR model with demographics*, University of Sheffield: [link](#)

Opis schematu numerycznego wykorzystującego metodę Rungego-Kutty 2. i 4. rzędu

Niech v będzie wektorem postaci $v = (S, I, R)$, zaś funkcja f niech będzie postaci $f(t, v) = (g(t, v), h(t, v), i(t, v))$, gdzie:

- $g(t, v) = \mu - \beta SI - \mu S$
- $h(t, v) = \beta SI - \gamma I - \mu I$
- $i(t, v) = \gamma I - \mu R$

Zatem funkcja f przyjmuje liczbę i wektor, a zwraca wektor. Oznaczmy krok jako h (przyjmijmy 0.1), zaś czas jako t .

Schemat numeryczny Rungego-Kutty rzędu 2:

$$v_{n+1} = v_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} f(t_n, v_n) \right)$$

Gdzie:

$$f(t, (x, y, z)) = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - qz)$$

Schemat numeryczny Rungego-Kutty rzędu 4:

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Gdzie:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, v_n) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(t_n + h, v_n + hk_3)\end{aligned}$$

Implementacja metod RK2 i RK4 jest analogiczna jak w zadaniu 2, zmienia się tylko funkcja f .

```
f <- function(t, v) {  
  S <- v[1]  
  I <- v[2]  
  R <- v[3]  
  return(c(mi-beta*S*I-mi*S, beta*S*I-gamma*I-mi*I, gamma*I-mi*R))  
}
```

Jako że pokazaliśmy już, że RK4 jest schematem dokładniejszym, a nie zależy nam na czasie wykonania, zastosujemy tylko ten rząd.

Zastosowanie schematu RK4 dla wariantu c) - mało infekcji niezaraźliwej choroby

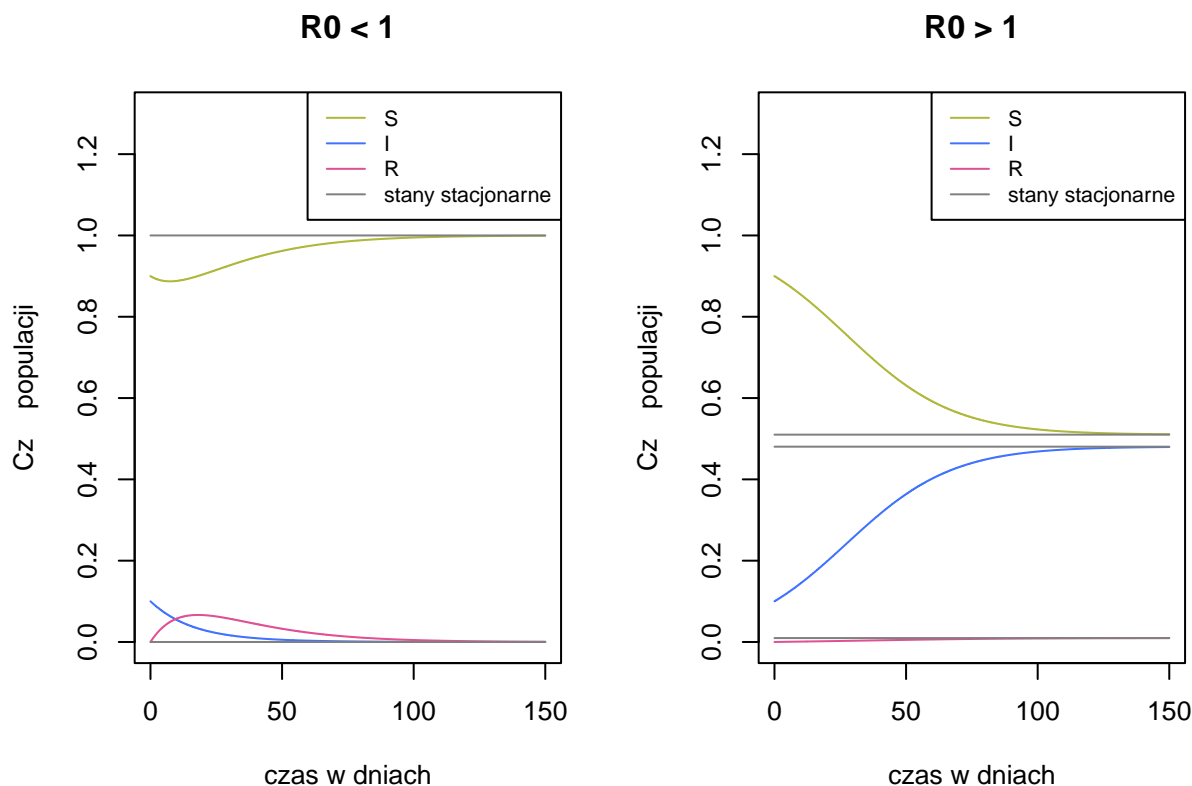
Chcemy mieć mało infekcji niezaraźliwej choroby. Ustalmy dwa zestawy parametrów i jeden punkt początkowy:
Zestaw 1:

- $(S_0, I_0, R_0) = (0.9, 0.1, 0)$
- $\beta = 0.1$
- $\mu = 0.05$
- $\gamma = 0.1$

Jest to wariant, gdzie współczynnik wyzdrowień jest równy współczynnikowi zakażeń, co jest równoznaczne z $\frac{\beta}{\gamma+\mu} = R_0 < 1$, czyli według wcześniejszych obliczeń startujemy w pobliżu punktu stacjonarnego stabilnego.
Zestaw 2:

- $(S_0, I_0, R_0) = (0.9, 0.1, 0)$
- $\beta = 0.1$
- $\mu = 0.05$
- $\gamma = 0.001$

Jest to wariant, gdzie współczynnik wyzdrowień jest bardzo mały, zatem mamy $\frac{\beta}{\gamma+\mu} = R_0 > 1$, czyli startujemy w pobliżu punktu stacjonarnego niestabilnego.



Zgodnie z przewidywaniami, dla pierwszego zestawu parametrów obserwujemy wygaśnięcie epidemii, czyli pierwszy stan stacjonarny jest stabilny. Natomiast dla drugiego zestawu pierwszy stan stacjonarny jest niestabilny, za to rozwiązania zbiegają do drugiego stanu stacjonarnego.

Wprowadzenie lockdownu dla wariantu b)

Ponieważ w przypadku mało zaraźliwej choroby raczej nie wprowadza się lockdownu, przeprowadzimy symulację dla opcji, gdzie mamy dużo infekcji zaraźliwej choroby. Wobec tego zobaczymy najpierw, jak wyglądają wykresy bez lockdownu.

Ustalmy dwa zestawy parametrów i jeden punkt początkowy:

Zestaw 1:

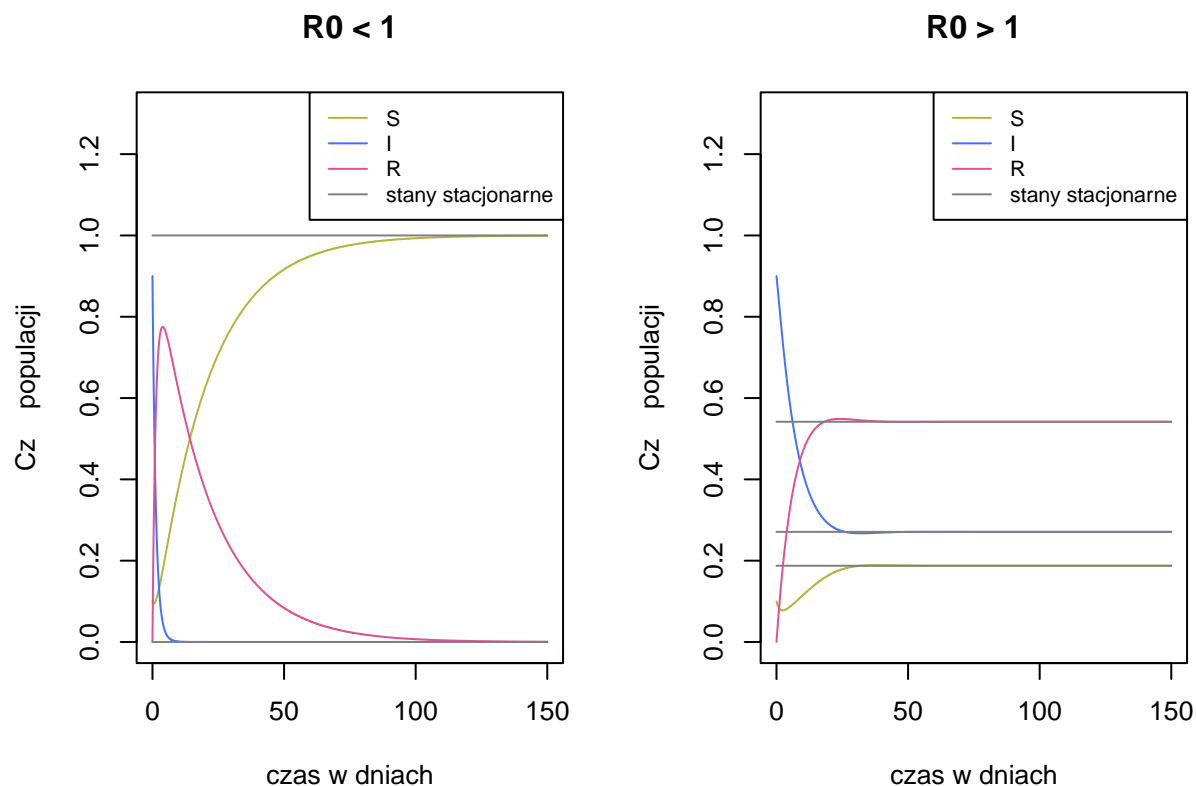
- $(S_0, I_0, R_0) = (0.1, 0.9, 0)$
- $\beta = 0.8$
- $\mu = 0.05$
- $\gamma = 0.9$

Jest to wariant, gdzie współczynnik wyzdrowień jest równy współczynnikowi zakażeń, co jest równoznaczne z $\frac{\beta}{\gamma + \mu} = R_0 < 1$.

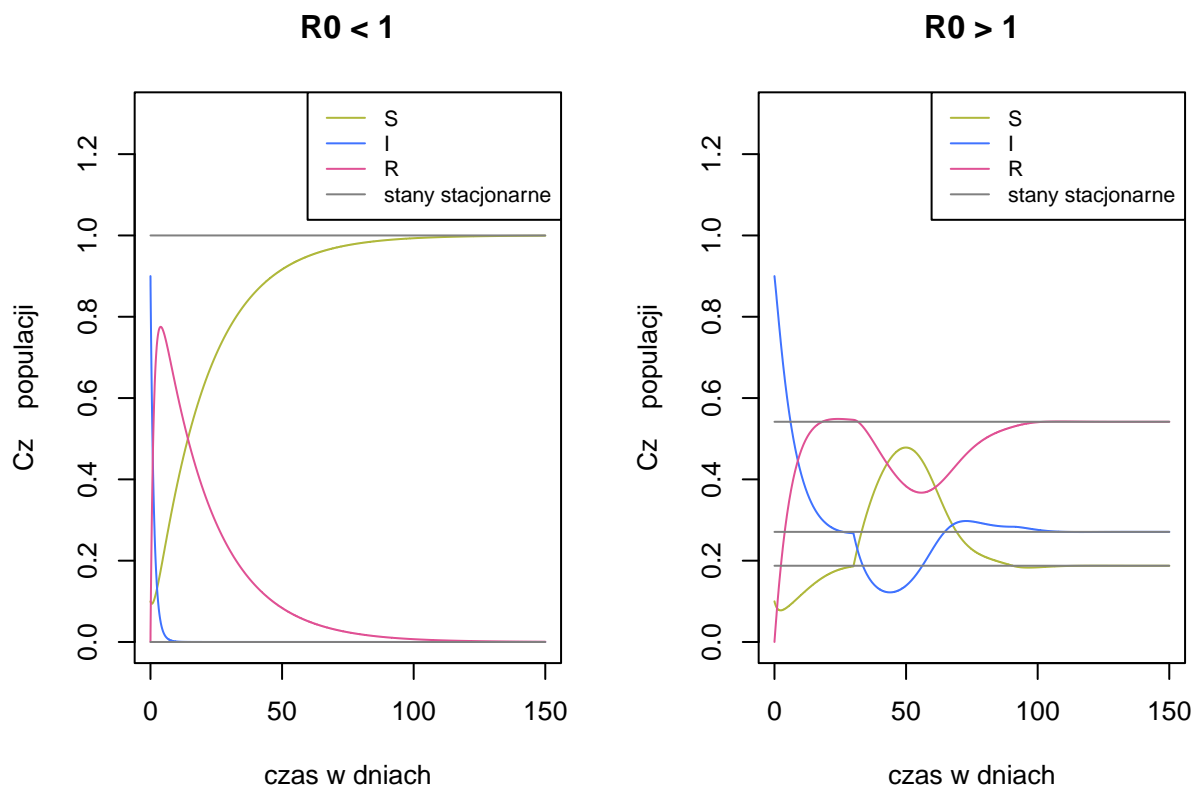
Zestaw 2:

- $(S_0, I_0, R_0) = (0.1, 0.9, 0)$
- $\beta = 0.8$
- $\mu = 0.05$
- $\gamma = 0.1$

Jest to wariant, gdzie współczynnik wyzdrowień jest mały, zatem mamy $\frac{\beta}{\gamma + \mu} = R_0 > 1$.



Dla tego przypadku wykresy również są zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Wprowadźmy zatem “miękki” lockdown w następujący sposób: przyjmijmy, że miesiąc ma 30 dni. Po pierwszym miesiącu parametr β spada o $\frac{3}{4}$ swojej wartości, a następnie w ciągu dwóch miesięcy wraca liniowo do swojej pierwotnej wartości, codziennie wzrastając o 0.01, aż osiągnie znowu poziom 0.8, wówczas wzrost zatrzymuje się. Wykresy prezentują się następująco:



Widzimy, że w przypadku pierwszym w zasadzie nic się nie zmieniło. Natomiast w przypadku drugim widać, jak po wprowadzeniu lockdownu liczba chorych i ozdrowiałych gwałtownie spada, ale w miarę wzrastania β wraca do poprzedniego poziomu i stabilizuje się w punkcie stacjonarnym numer 2.

Wynika z tego, że wprowadzenie miękkiego lockdownu nie ma większego sensu, jeśli $R_0 < 1$, natomiast dla $R_0 > 1$ może chwilowo pomóc przy np. przeciążeniu systemu ochrony zdrowia, ale na dłuższą metę nie zmieni punktu stacjonarnego stabilnego - opóźni tylko jego osiągnięcie. Ostateczny udział procentowy frakcji S , I , R w populacji pozostanie bez zmian.