Lista 4

Helena Sękowska-Słoka, nr indeksu 321531

2024-01-11

SPIS TREŚCI

Zadanie 1

Rozważmy następujące równanie transportu ze stałą prędkością pojazdów $c > 0$ oraz parametrem $A >> 0$ na nieskończonym (bardzo długim) odcinku jezdni $x \in [0, +\infty)$:

$$u_t + cu_x = 0$$
$$u(x, 0) = e^{-(x-A)^2}$$

Dokładnie rozwiązanie zagadnienia

Zauważmy, że charakterystykami powyższego zagadnienia są proste postaci

$$x - ct = D$$

gdzie D jest stałą. Wobec tego powinien być spełniony warunek:

$$u(x, t) = f(D) = f(x - ct)$$

dla pewnej funkcji f. Użyjmy zadanego warunku początkowego do wyznaczenia tej funkcji.
Mamy:

$$u(x, 0) = f(x) = e^{-(x-A)^2}$$

Zatem f spełnia:

$$f(x - ct) = e^{-(x-ct-A)^2}$$

czyli rozwiązanie jest postaci:

$$u(x, t) = e^{-(x-ct-A)^2}$$

Schemat numeryczny wykorzystujący metodę różnic skończonych

Rozważymy dwa schematy: w pierwszym przybliżymy pochodne metodą różnic prawostronnych, w drugim metodą różnic centralnych.

Schemat dla przybliżenia pochodnych metodą różnic prawostronnych

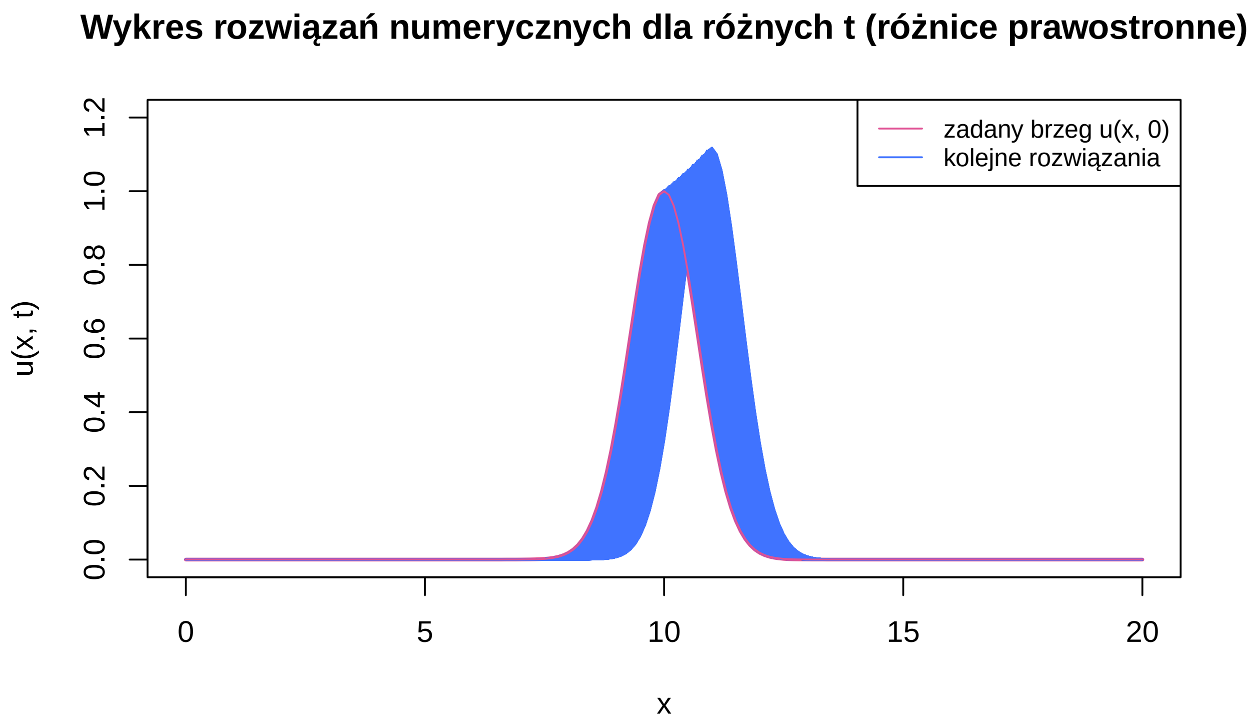
$$u_x \approx \frac{u(x + h_x, t) - u(x, t)}{h_x}$$
$$u_t \approx \frac{u(x, t + h_t) - u(x, t)}{h_t}$$

Podstawiamy do pierwotnego równania i wyliczamy $u(x, t + h_t)$, ostatecznie otrzymując:

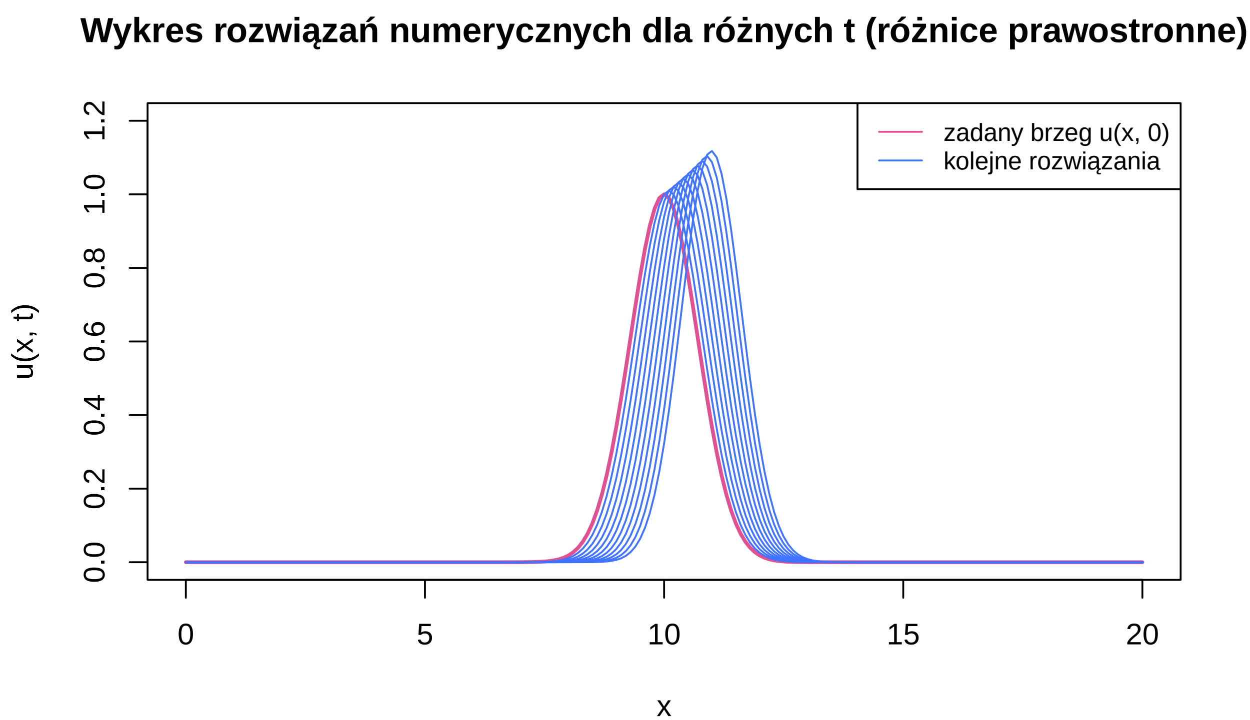
$$u(x, t + h_t) = -c \cdot h_t \cdot \frac{u(x + h_x, t) - u(x, t)}{h_x} + u(x, t)$$

Jako warunki brzegowe przyjmujemy $u(x, 0) = e^{(-(x-A)^2)}$, zaś $u(0, t) = u(0, T_{max}) = u(L, T_{max}) = 0$.
Ponadto przyjmujemy wielkości bezwymiarowe:

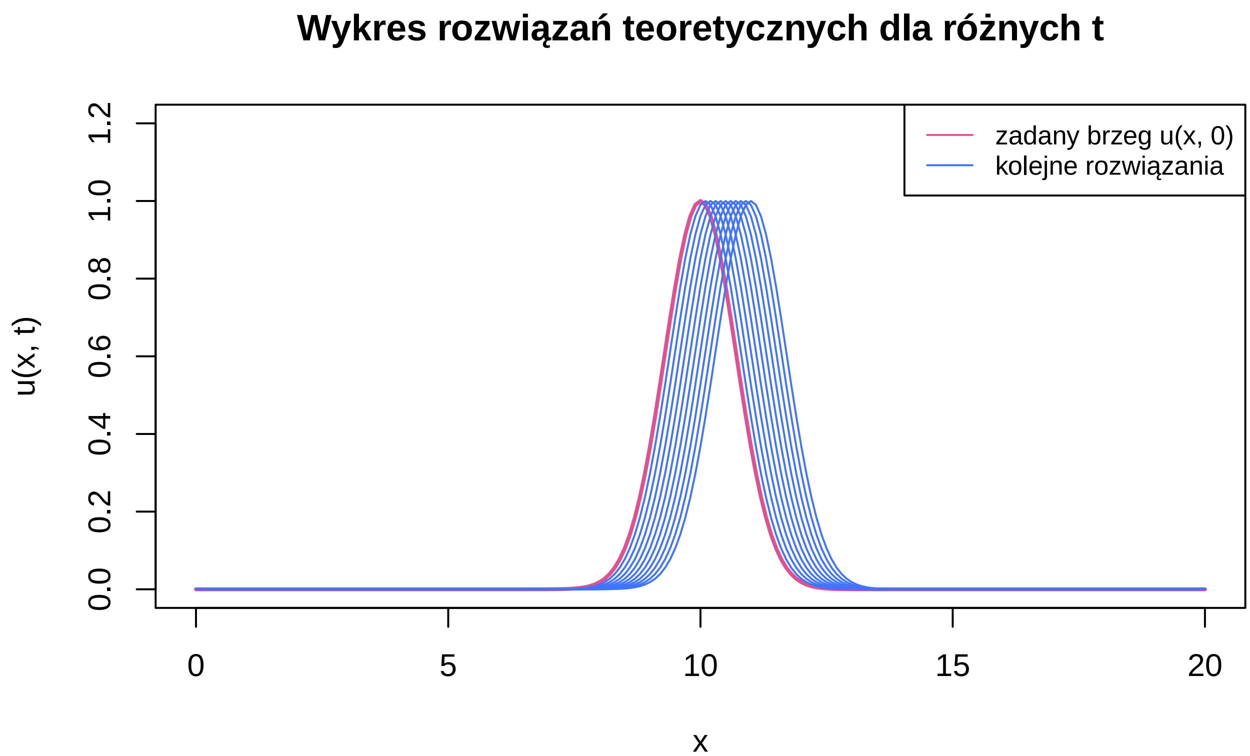
- $x \in [0, L]$
- $L = 20$
- $h_x = 0.1$
- $h_t = 0.001$
- $A = 10$
- $T_{max} = 1$
- $c = 1$



Ponieważ zagęszczenie na wykresie jest bardzo duże, jest on mało czytelny. Spójrzmy na przerzedzony wykres, gdzie wyświetlane są rozwiązania dla co dziesiątej jednostki czasu:



Porównajmy z wykresem dla teoretycznego rozwiązania:



Schemat dla przybliżenia pochodnych metodą różnic centralnych

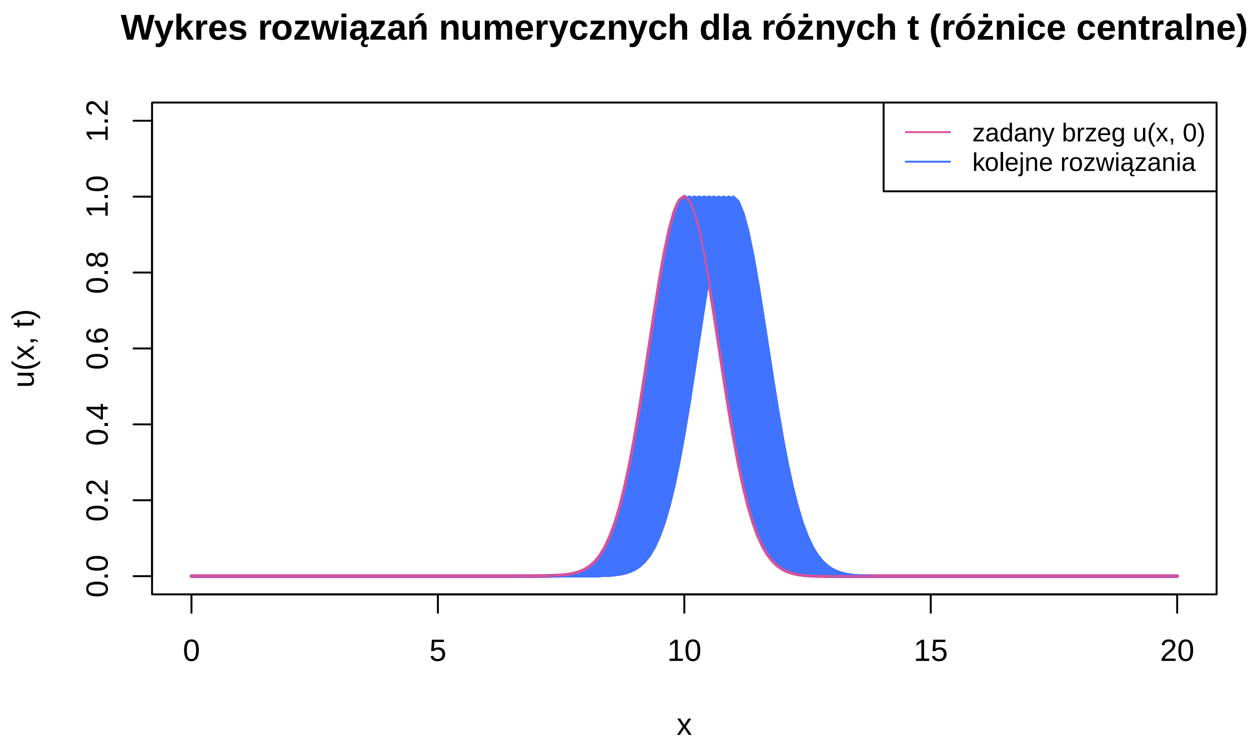
$$u_x \approx \frac{u(x+h_x,t)-u(x-h_x,t)}{2h_x}$$

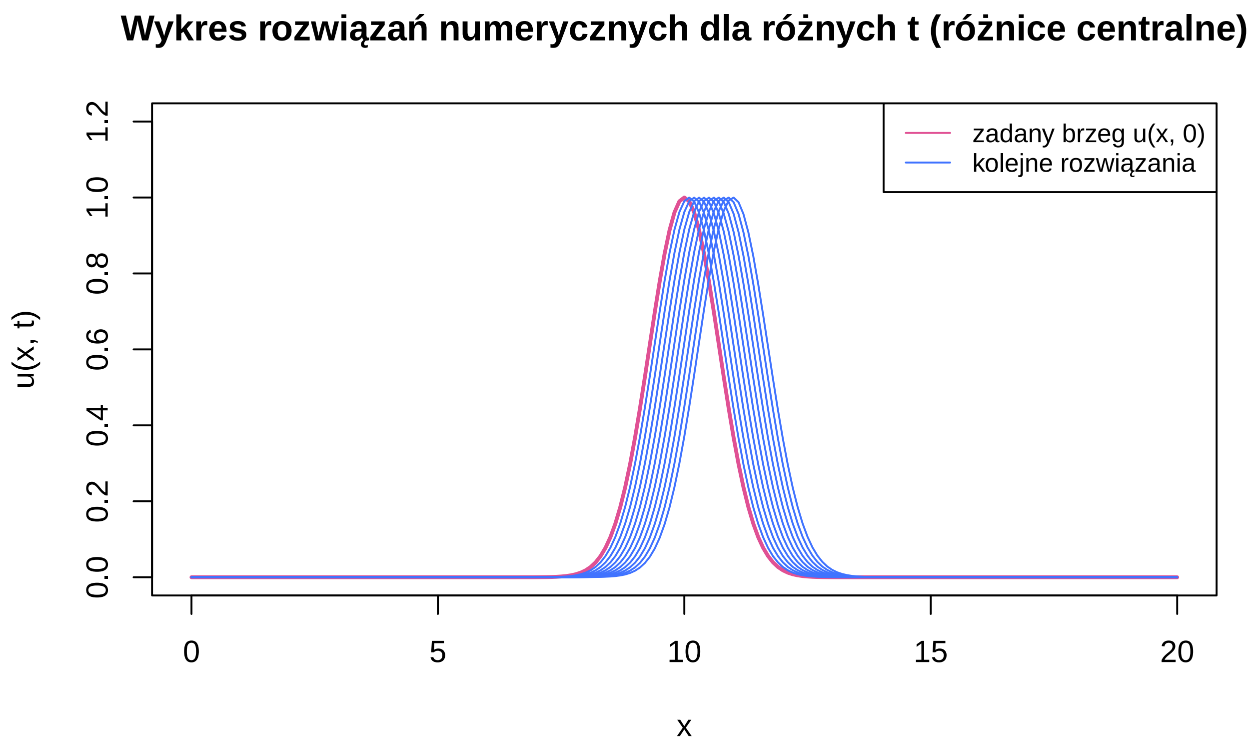
$$u_t \approx \frac{u(x,t+h_t)-u(x,t-h_t)}{2h_t}$$

Podstawiamy do pierwotnego równania i wyliczamy $u(x, t+h_t)$, ostatecznie otrzymując:

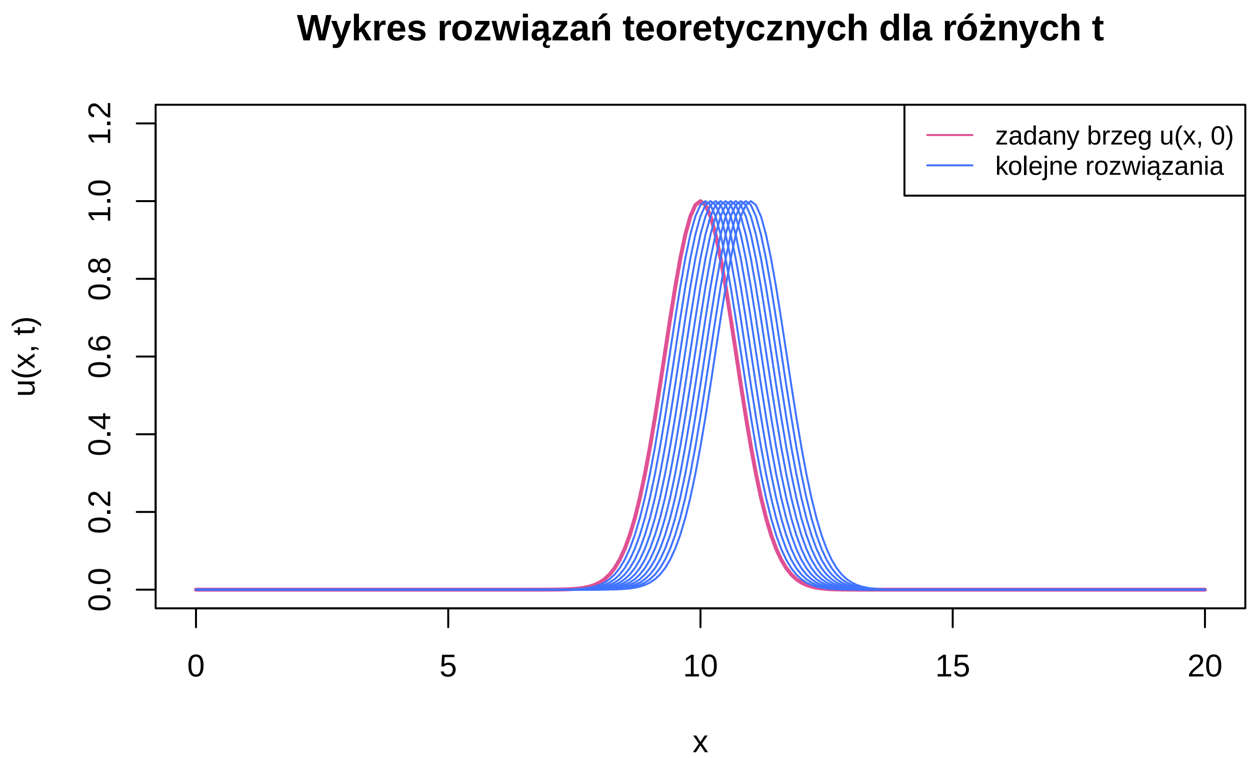
$$u(x,t+h_t) = -c \cdot 2h_t \cdot \frac{u(x+h_x,t)-u(x-h_x,t)}{2h_x} + u(x,t-h_t)$$

Jako że odwołujemy się tutaj nie do jednego, a do dwóch elementów wstecz, przyjmujemy rozszerzone warunki brzegowe, tzn. $u(x,0) = e^{(-(x-A)^2)}$, $u(x,h_t) = e^{(-(x-A)^2)}$ i, analogicznie ja w metodzie prawostronnej, 0 dla trzech pozostałych wartości skrajnych.
Stałe przyjmujemy identyczne jak poprzednio.





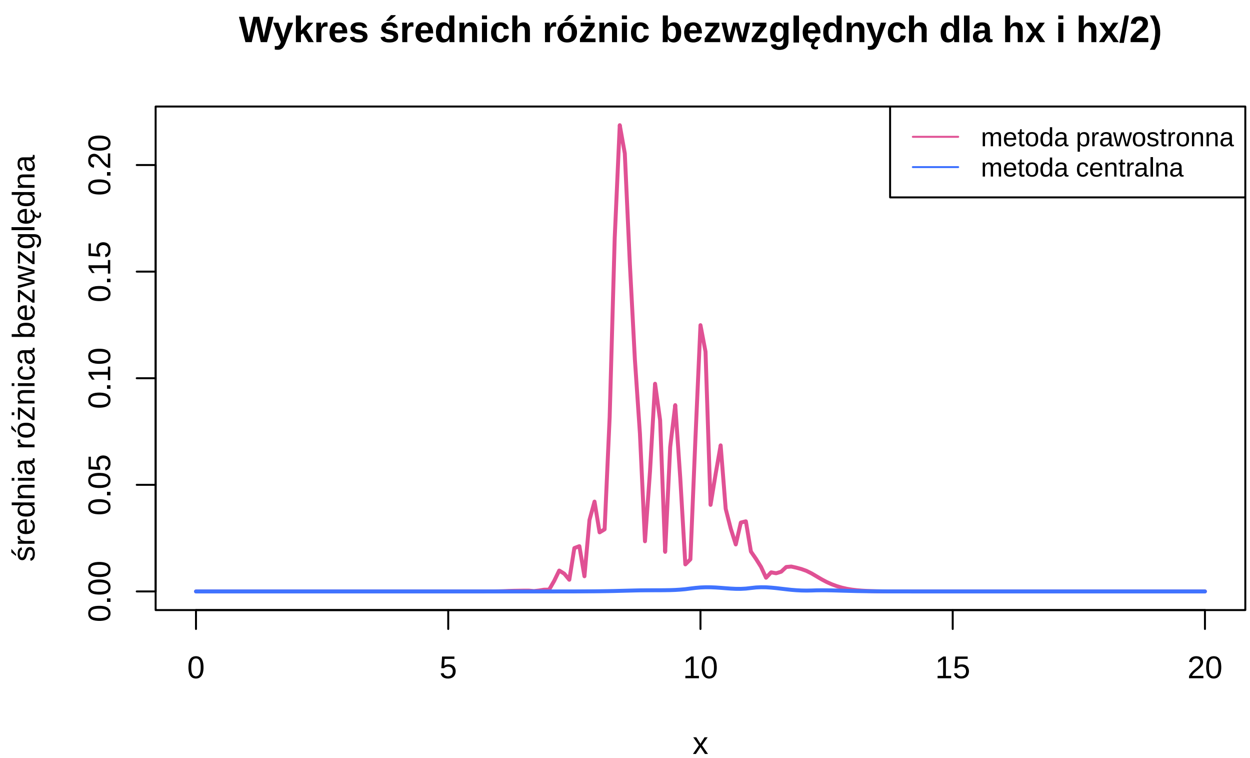
Porównajmy z wykresem dla teoretycznego rozwiązania:



Różnica rozwiązań dla h_x i $\frac{h_x}{2}$

Generujemy nową macierz z rozwiązaniami, tym razem zminiejszając dwukrotnie h_x, zatem stosując krok 0.05 po x. Następnie wybieramy z tej macierzy macierz składającą się z jej nieparzystych kolumn, czyli tę, której wyrazy odpowiadają wartościom x z macierzy pierwotnej, żeby móc zbadać średnią różnicę rozwiązań dla poszczególnych wartości x.

Wykres średnich różnic dla metody prawostronnej



Dziwne wykresy