

Assignment 7 due by December 18, 2023

第七組

410650229 010 林可翰

410650252 011 何少鈞

410650377 015 張哲瑋

1. (30 pt.) Do Problem 11.14.

P308.

實驗為隨機選三種配方中的一種，做五個蛋糕各放入300、325、350、375、400度的烤箱烤，烤完評價品質，再隨機選剩下的配方並重複步驟直到三種配方都輪過。實驗被重複r次。

a.寫出資料表格。

| | | 烤箱溫度(°F) | | | | |
|-------------|----|----------|-----|-----|-----|-----|
| 重複次數 (次) | 配方 | 300 | 325 | 350 | 375 | 400 |
| 1 | A | 蛋糕品質評分 | | | | |
| | B | | | | | |
| | C | | | | | |
| 2 | A | | | | | |
| | B | | | | | |
| | C | | | | | |
| ... | A | | | | | |
| | B | | | | | |
| | C | | | | | |
| r | A | | | | | |
| | B | | | | | |
| | C | | | | | |

b.寫出模型以及EMS、F檢定統計量。

模型假設:

$$Y_{ijk} = \mu + R_i + M_j + RM_{ij} + T_k + RT_{ik} + MT_{jk} + RMT_{ijk} + \varepsilon_{(ijk)}$$

$$i=1,2,\dots,r; j=1,2,3; k=1,2,3,4,5$$

Y_{ijk} :第i次實驗, 第j個配方, 第k個溫度的蛋糕品質評分;

μ :共同效果;

R_i :第i次實驗的因子效果;

M_j :第j個配方的因子效果;

RM_{ij} :第i次實驗第j個配方的交互作用;

T_k :第k個溫度的因子效果;

RT_{ik} :第i次實驗第k個溫度的交互作用;

MT_{jk} :第j個配方第k個溫度的交互作用;

RMT_{ijk} :第i次實驗第j個配方第k個溫度的交互作用;

$\varepsilon_{(ijk)}$:第i次實驗第j個配方第k個溫度的誤差。

前提假設:

$$R_i \sim NID(0, \sigma_R^2); \sum_{j=1}^3 M_j = 0; \sum_{k=1}^5 T_k = 0; \sum_{k=1}^5 MT_{jk} = 0; \sum_{j=1}^3 MT_{jk} = 0$$

$$RM_{ij} \sim NID(0, \sigma_{RM}^2); RT_{ik} \sim NID(0, \sigma_{RT}^2); RMT_{ijk} \sim NID(0, \sigma_{RMT}^2);$$

$$\varepsilon_{(ijk)} \sim NID(0, \sigma^2);$$

$$\sum_{k=1}^5 RT_{ik} = 0, \sum_{i=1}^r RT_{ik} \neq 0; \sum_{j=1}^3 RM_{ij} = 0, \sum_{i=1}^r RM_{ij} \neq 0;$$

$$\sum_{k=1}^5 RMT_{ijk} = 0, \sum_{j=1}^3 RMT_{ijk} = 0, \sum_{i=1}^r RMT_{ijk} \neq 0;$$

R_i 、 RM_{ij} 、 RT_{ik} 、 RMT_{ijk} 和 $\varepsilon_{(ijk)}$ 之間彼此獨立。

第一步：

將包含誤差、各個效果和它們的交互作用寫在行排頭。

| | | | | |
|-----------------------|--|--|--|--|
| R_i | | | | |
| M_j | | | | |
| RM_{ij} | | | | |
| T_k | | | | |
| RT_{ik} | | | | |
| MT_{jk} | | | | |
| RMT_{ijk} | | | | |
| $\varepsilon_{(ijk)}$ | | | | |

第二步：

將各下標所對應的個數、因子是固定還是隨機的(固定以F, 隨機以R標示)和因子下標符號依序寫在列排頭。

| | r | 3 | 5 |
|--------------------|---|---|---|
| | R | F | F |
| | i | j | k |
| R_i | | | |
| M_j | | | |
| RM_{ij} | | | |
| T_k | | | |
| RT_{ik} | | | |
| MT_{jk} | | | |
| RMT_{ijk} | | | |
| $\epsilon_{(ijk)}$ | | | |

第三步：

將該效果或交互作用中沒有出現的下標所對應的個數寫在對應格子中。

| | | | |
|--------------------|---|---|---|
| | r | 3 | 5 |
| | R | F | F |
| | i | j | k |
| R_i | | 3 | 5 |
| M_j | r | | 5 |
| RM_{ij} | | | 5 |
| T_k | r | 3 | |
| RT_{ik} | | 3 | |
| MT_{jk} | r | | |
| RMT_{ijk} | | | |
| $\epsilon_{(ijk)}$ | | | |

第四步：

將該效果或交互作用中括號內的下標所對應的格子中寫上1。

| | | | |
|--------------------|---|---|---|
| | r | 3 | 5 |
| | R | F | F |
| | i | j | k |
| R_i | | 3 | 5 |
| M_j | r | | 5 |
| RM_{ij} | | | 5 |
| T_k | r | 3 | |
| RT_{ik} | | 3 | |
| MT_{jk} | r | | |
| RMT_{ijk} | | | |
| $\epsilon_{(ijk)}$ | 1 | 1 | 1 |

第五步：

剩餘的空格子要是該格直行對應的是F(固定)填入'0', 要是直行對應的是R(隨機)填入'1'。

| | | | |
|--------------------|---|---|---|
| | r | 3 | 5 |
| | R | F | F |
| | i | j | k |
| R_i | 1 | 3 | 5 |
| M_j | r | 0 | 5 |
| RM_{ij} | 1 | 0 | 5 |
| T_k | r | 3 | 0 |
| RT_{ik} | 1 | 3 | 0 |
| MT_{jk} | r | 0 | 0 |
| RMT_{ijk} | 1 | 0 | 0 |
| $\epsilon_{(ijk)}$ | 1 | 1 | 1 |

第六步：

將各效果或交互作用不在括號內的下標所在的列忽略，剩餘的橫列相乘作為對應變異的係數，剩下只要將有關變異相加就是對應忽略的下標的效果或交互作用的EMS。

| | r | 3 | 5 | EMS |
|-----------------------|---|---|---|--|
| | R | F | F | |
| | i | j | k | |
| R_i | 1 | 3 | 5 | $\sigma^2 + 15\sigma_R^2$ |
| M_j | r | 0 | 5 | $\sigma^2 + 5\sigma_{RM}^2 + 5r\phi_M^*$ |
| RM_{ij} | 1 | 0 | 5 | $\sigma^2 + 5\sigma_{RM}^2$ |
| T_k | r | 3 | 0 | $\sigma^2 + 3\sigma_{RT}^2 + 3r\phi_T^*$ |
| RT_{ik} | 1 | 3 | 0 | $\sigma^2 + 3\sigma_{RT}^2$ |
| MT_{jk} | r | 0 | 0 | $\sigma^2 + \sigma_{RMT}^2 + r\phi_{MT}^*$ |
| RMT_{ijk} | 1 | 0 | 0 | $\sigma^2 + \sigma_{RMT}^2$ |
| $\varepsilon_{(ijk)}$ | 1 | 1 | 1 | σ^2 (無法估計) |

$$\phi_M^* = \frac{\sum_{j=1}^3 M_j^2}{3-1}; \phi_T^* = \frac{\sum_{k=1}^5 T_k^2}{5-1}; \phi_{MT}^* = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^5 (MT_{jk})^2}{(5-1)(3-1)}$$

檢定與F檢定統計量:

檢定與檢定統計量F:

$$H_{01} : \sigma_R^2 = 0; H_{11} : \sigma_R^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_R}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{02} : M_1 = M_2 = M_3 = 0; H_{12} : \text{至少有一 } M_j \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_M}{MS_{RM}}$$

$$H_{03} : T_1 = T_2 = \dots = T_5 = 0; H_{13} : \text{至少有一 } T_k \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_C}{MS_{RT}}$$

$$H_{04} : \sigma_{RM}^2 = 0; H_{14} : \sigma_{RM}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RM}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{05} : \sigma_{RT}^2 = 0; H_{15} : \sigma_{RT}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RT}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{06} : MT_{11} = MT_{12} = \dots = MT_{35} = 0; H_{16} : \text{至少有一 } MT_{jk} \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{MT}}{MS_{RMT}}$$

$$H_{07} : \sigma_{RMT}^2 = 0; H_{17} : \sigma_{RMT}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RMT}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

c. 重複次數r要為多少才可接受, 為什麼?

重複次數 $r \geq 2$, 因為自由度 $r-1$ 為0是不能接受的, 所以重複次數 $r \geq 2$ 。

2. (30 pt.) Do Problem 11.15. Also determine the EMS column and indicate what tests would be made after the analysis.

P309.若實驗只有一個烤箱但可以放入三個蛋糕，與11.14有何不同？哪一個比較好，為什麼？

資料表格：

| 重複次數 (次) | 烤箱溫度 (°F) | 配方 | | |
|-------------|--------------|--------|---|---|
| | | A | B | C |
| 1 | 300 | 蛋糕品質評分 | | |
| | 325 | | | |
| | 350 | | | |
| | 375 | | | |
| | 400 | | | |
| ... | ... | | | |
| r | 300 | | | |
| | 325 | | | |
| | 350 | | | |
| | 375 | | | |
| | 400 | | | |

11.14的情況是隨機選擇一個配方的蛋糕放入五個個別溫度的烤箱。與11.14的區別在於，11.15的情況需要先隨機選擇一個溫度，將三個個別配方的蛋糕放入烤箱。

由於11.15在單輪的實驗下要調整的因子為烤箱溫度，其因子水準有5個；相比11.14在單輪的實驗下要調整的因子為蛋糕的配方其因子水準只有3個。通常認為11.14的方法的效率較11.15的方法高，因此11.14的方法我認為比較好。

EMS與11.14相同

| | | | | |
|-----------------------|---|---|---|--|
| | r | 3 | 5 | EMS |
| | R | F | F | |
| | i | j | k | |
| R_i | 1 | 3 | 5 | $\sigma^2 + 15\sigma_R^2$ |
| T_k | r | 3 | 0 | $\sigma^2 + 3\sigma_{RT}^2 + 3r\phi_T^*$ |
| RT_{ik} | 1 | 3 | 0 | $\sigma^2 + 3\sigma_{RT}^2$ |
| M_j | r | 0 | 5 | $\sigma^2 + 5\sigma_{RM}^2 + 5r\phi_M^*$ |
| RM_{ij} | 1 | 0 | 5 | $\sigma^2 + 5\sigma_{RM}^2$ |
| MT_{jk} | r | 0 | 0 | $\sigma^2 + \sigma_{RMT}^2 + r\phi_{MT}^*$ |
| RMT_{ijk} | 1 | 0 | 0 | $\sigma^2 + \sigma_{RMT}^2$ |
| $\varepsilon_{(ijk)}$ | 1 | 1 | 1 | σ^2 (無法估計) |

$$\phi_M^* = \frac{\sum_{j=1}^3 M_j^2}{3-1}; \phi_T^* = \frac{\sum_{k=1}^5 T_k^2}{5-1}; \phi_{MT}^* = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^5 (MT_{jk})^2}{(5-1)(3-1)}$$

檢定與F檢定統計量:

檢定與檢定統計量F:

$$H_{01} : \sigma_R^2 = 0; H_{11} : \sigma_R^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_R}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{02} : M_1 = M_2 = M_3 = 0; H_{12} : \text{至少有一 } M_j \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_M}{MS_{RM}}$$

$$H_{03} : T_1 = T_2 = \dots = T_5 = 0; H_{13} : \text{至少有一 } T_k \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_C}{MS_{RT}}$$

$$H_{04} : \sigma_{RM}^2 = 0; H_{14} : \sigma_{RM}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RM}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{05} : \sigma_{RT}^2 = 0; H_{15} : \sigma_{RT}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RT}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{06} : MT_{11} = MT_{12} = \dots = MT_{35} = 0; H_{16} : \text{至少有一 } MT_{jk} \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{MT}}{MS_{RMT}}$$

$$H_{07} : \sigma_{RMT}^2 = 0; H_{17} : \sigma_{RMT}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RMT}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

由於有關MSE 的檢定統計量都無法計算，因此，先是進行配方與烤箱溫度交互作用的檢定，若結果不顯著，則進行配方與烤箱溫度個別效果的檢定就可以了。

3. (40 pt.) Do Problem 11.16. Also analyze the data and make conclusions.

P309.依11.14類似設計的實驗進行ANOVA檢定

模型假設:

$$Y_{ijk} = \mu + R_i + M_j + RM_{ij} + T_k + RT_{ik} + MT_{jk} + RMT_{ijk} + \varepsilon_{(ijk)}$$

$$i=1,2;j=1,2,3;k=1,2,3,4,5$$

Y_{ijk} :第i次實驗，第j個配方，第k個溫度的蛋糕品質評分;

μ :共同效果;

R_i :第i次實驗的因子效果;

M_j :第j個配方的因子效果;

RM_{ij} :第i次實驗第j個配方的交互作用;

T_k :第k個溫度的因子效果;

RT_{ik} :第i次實驗第k個溫度的交互作用;

MT_{jk} :第j個配方第k個溫度的交互作用;

RMT_{ijk} :第i次實驗第j個配方第k個溫度的交互作用;

$\varepsilon_{(ijk)}$:第i次實驗第j個配方第k個溫度的誤差。

前提假設:

$$R_i \sim NID(0, \sigma_R^2); \sum_{j=1}^3 M_j = 0; \sum_{k=1}^5 T_k = 0; \sum_{k=1}^5 MT_{jk} = 0; \sum_{j=1}^3 MT_{jk} = 0$$

$$RM_{ij} \sim NID(0, \sigma_{RM}^2); RT_{ik} \sim NID(0, \sigma_{RT}^2); RMT_{ijk} \sim NID(0, \sigma_{RMT}^2);$$

$$\varepsilon_{(ijk)} \sim NID(0, \sigma^2);$$

$$\sum_{k=1}^5 RT_{ik} = 0, \sum_{i=1}^2 RT_{ik} \neq 0; \sum_{j=1}^3 RM_{ij} = 0, \sum_{i=1}^2 RM_{ij} \neq 0;$$

$$\sum_{k=1}^5 RMT_{ijk} = 0, \sum_{j=1}^3 RMT_{ijk} = 0, \sum_{i=1}^2 RMT_{ijk} \neq 0;$$

R_i 、 RM_{ij} 、 RT_{ik} 、 RMT_{ijk} 和 $\varepsilon_{(ijk)}$ 之間彼此獨立。

EMS表(11.14, r=2):

| | 2 | 3 | 5 | EMS |
|-----------------------|---|---|---|--|
| | R | F | F | |
| | i | j | k | |
| R_i | 1 | 3 | 5 | $\sigma^2 + 15\sigma_R^2$ |
| M_j | r | 0 | 5 | $\sigma^2 + 5\sigma_{RM}^2 + 10\phi_M^*$ |
| RM_{ij} | 1 | 0 | 5 | $\sigma^2 + 5\sigma_{RM}^2$ |
| T_k | r | 3 | 0 | $\sigma^2 + 3\sigma_{RT}^2 + 6\phi_T^*$ |
| RT_{ik} | 1 | 3 | 0 | $\sigma^2 + 3\sigma_{RT}^2$ |
| MT_{jk} | r | 0 | 0 | $\sigma^2 + \sigma_{RMT}^2 + 2\phi_{MT}^*$ |
| RMT_{ijk} | 1 | 0 | 0 | $\sigma^2 + \sigma_{RMT}^2$ |
| $\varepsilon_{(ijk)}$ | 1 | 1 | 1 | σ^2 (無法估計) |

$$\phi_M^* = \frac{\sum_{j=1}^3 M_j^2}{3-1}; \phi_T^* = \frac{\sum_{k=1}^5 T_k^2}{5-1}; \phi_{MT}^* = \frac{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^5 (MT_{jk})^2}{(5-1)(3-1)}$$

檢定與F檢定統計量:

檢定與檢定統計量F:

$$H_{01} : \sigma_R^2 = 0; H_{11} : \sigma_R^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_R}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{02} : M_1 = M_2 = M_3 = 0; H_{12} : \text{至少有一 } M_j \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_M}{MS_{RM}}$$

$$H_{03} : T_1 = T_2 = \dots = T_5 = 0; H_{13} : \text{至少有一 } T_k \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_T}{MS_{RT}}$$

$$H_{04} : \sigma_{RM}^2 = 0; H_{14} : \sigma_{RM}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RM}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{05} : \sigma_{RT}^2 = 0; H_{15} : \sigma_{RT}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RT}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

$$H_{06} : MT_{11} = MT_{12} = \dots = MT_{35} = 0; H_{16} : \text{至少有一 } MT_{jk} \neq 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{MT}}{MS_{RMT}}$$

$$H_{07} : \sigma_{RMT}^2 = 0; H_{17} : \sigma_{RMT}^2 > 0$$

$$\text{檢定統計量 } F = \frac{MS_{RMT}}{MSE} \text{ (無法計算)}$$

因此，先進行配方與溫度交互作用的檢定：

$$H_0: MT_{11} = MT_{12} = \dots = MT_{35} = 0; H_1: \text{至少有一 } MT_{jk} \neq 0$$

| 使用 類型 III MS (針對 r*m*t) 作為誤差項的假設檢定 | | | | | |
|------------------------------------|----|-------------|-------------|------|--------|
| 來源 | DF | 類型 III SS | 均方 | F 值 | Pr > F |
| m*t | 10 | 230.3333333 | 23.03333333 | 0.64 | 0.7502 |

| 使用 類型 III MS (針對 r*t) 作為誤差項的假設檢定 | | | | | |
|----------------------------------|----|-------------|-------------|------|--------|
| 來源 | DF | 類型 III SS | 均方 | F 值 | Pr > F |
| t | 5 | 494.9166667 | 98.98333333 | 2.12 | 0.2150 |

| 使用 類型 III MS (針對 r*m) 作為誤差項的假設檢定 | | | | | |
|----------------------------------|----|-------------|-------------|------|--------|
| 來源 | DF | 類型 III SS | 均方 | F 值 | Pr > F |
| m | 2 | 14.00000000 | 7.000000000 | 0.09 | 0.9178 |

P值=0.7502>0.1，不拒絕 H_0 ，配方與烤箱溫度之間沒有顯著的交互作用。因此可以進行個別因子效果的檢定。

烤箱溫度因子效果的檢定：

$$H_{01}: T_1 = T_2 = \dots = T_5 = 0; H_{11}: \text{至少有一 } T_k \neq 0$$

P值=0.215>0.1，不拒絕 H_{01} ，烤箱溫度的不同對蛋糕品質並無顯著影響。

配方因子效果的檢定：

$$H_{02}: M_1 = M_2 = M_3 = 0; H_{12}: \text{至少有一 } M_j \neq 0$$

P值=0.8647>0.1，不拒絕 H_{02} ，配方的不同對蛋糕品質並無顯著影響。

SAS:

```

data d116;
  do r = 1 to 2;
    do m = 1 to 3;
      do t = 1 to 6;
        input ob @@;
        output;
      end;
    end;
  end;
cards;
47 29 35 47 57 45
35 46 47 39 52 61
43 43 43 46 47 58
26 28 32 25 37 33
21 21 28 26 27 20
21 28 25 25 31 25
;
run;
proc glm data=d116;
class r m t;
model ob=r|m|t;
test H=t*m E=r*t*m;
test H=t E=r*t;
test H=m E=r*m;
run;

```