

Assignment 2 due by October 24, 2023

第七組

410650161 008 陳威旭

410650229 010 林可翰

410650252 011 何少鈞

410650377 015 張哲瑋

410650880 033 鄭暉瀚

1 (20 pt.) 找到3.15題的 σ^2 的不偏估計量、共同效果 μ 的估計值以及塗料 I 的因子水準 τ_1

下表為四種電視顯像管的塗層對顯像管導電率影響。

塗層種類			
I	II	III	IV
56	64	45	42
55	61	46	39
62	50	45	45
59	55	39	43
60	56	43	41

則設:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \text{ for } i=1, \dots, n_j \text{ and } j=1, \dots, k; n_j=n=5; k=4.$$

Y_{ij} :導電率(第j種塗料的第i個觀察值)

μ :四種塗層對顯像管導電率影響的共同效果

$$\sum_{j=1}^4 \tau_j = 0, \tau_j \text{ 為第j種塗料的因子水準。}$$

第j個塗料的第i個觀察值的誤差和 $\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$: NID意思是獨立常態分配, 而 σ^2 是共同母體變異數。

變數 conduct 之變異數的巢狀隨機效果分析								
變異數來源	DF	平方和	F 值	Pr > F	誤差項	均方	變異數成分	總計百分比
總計	19	1338.200000				70.431579	85.826667	100.0000
coat	3	1135.000000	29.79	<.0001	誤差	378.333333	73.126667	85.2027
誤差	16	203.200000				12.700000	12.700000	14.7973

conduct 平均值	50.30000000
conduct 平均值的標準誤	4.34932945

ANOVA 程序

的層級 coat	N	conduct	
		平均值	標準差
1	5	58.4000000	2.88097206
2	5	57.2000000	5.44977064
3	5	43.6000000	2.79284801
4	5	42.0000000	2.23606798

基於 $\sigma^2 = E(MSE)$, MSE 是 σ^2 的不偏估計量, 所以誤差的變異數 σ^2 的不偏估計量為: $\hat{\sigma}^2 = MSE = 12.7$ 。

共同效果 μ 的估計值為:

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{..} = 50.3。$$

塗料 I 的因子水準 τ_1 的估計值為:

用塗料一的平均 $\bar{Y}_{.1}$ 減去共同效果 μ

$$\hat{\tau}_1 = \bar{Y}_{.1} - \hat{\mu} = 8.1$$

2 (80 pt.)在一家紡織廠中，每台織布機都應該在每分鐘都提供相同的布產量，為了研究這個假設，隨機選出五個織布機，並且在不同時間記錄它們每分鐘輸出的布的重量(磅):

(a) (25 pt.) 建立一個假設模型以描述這個問題。

由於是在很多的織布機中隨機抽取五個織布機，考慮的因子為不同的織布機，因此判斷為單一因子下的隨機效果模型。
則設:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \text{ for } i=1, \dots, n_j \text{ and } j=1, \dots, k; n_j = n = 5; k = 5.$$

Y_{ij} :產量(磅/每分鐘)(第j個織布機的第i個觀察值)

μ :織布機對產量(磅/每分鐘)共同效果

第j個塗料的第i個觀察值的誤差和 $\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$, σ^2 是共同母體變異數。

處理效果 $\tau_j \sim \text{NID}(0, \sigma_\tau^2)$, σ_τ^2 是第j個織布機效果的變異數。

假設 ε_{ij} 與 τ_j 為獨立關係。

n:單一處理樣本數

k:處理數

(b) (25 pt.) 用SAS進行變異數分析，檢定織布機的產量是否相等。

前提假設：

由於是隨機抽出五台織布機，且只有織布機一個因子，所以處理效果 τ_j

$\sim \text{NID}(0, \sigma_\tau^2)$ ， σ_τ^2 是不同織布機的處理效果的變異數。

誤差和 $\varepsilon_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$ 且假設 ε_{ij} 與 τ_j 為獨立關係。

檢定假設：

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0 ; H_1: \sigma_\tau^2 > 0$$

變數 cloth 之變異數的變狀隨機效果分析								
變異數來源	DF	平方和	F 值	Pr > F	誤差項	均方	變異數成分	總計百分比
總計	24	0.637600				0.026567	0.028920	100.0000
loom	4	0.341600	5.77	0.0030	誤差	0.085400	0.014120	48.8243
誤差	20	0.296000				0.014800	0.014800	51.1757

p-value=0.003

結果：根據所得到的p值<0.01，拒絕虛無假設。

結論：

根據實驗結果，有充足的證據認為不同的織布機不會影響每分鐘輸出的布的重量(磅)是錯誤的；換句話說，我們認為不同的織布機會影響每分鐘輸出的布的重量(磅)。

(c) (10 pt.) 求 σ^2 的不偏估計量。

基於 $\sigma^2 = E(MSE)$, MSE是 σ^2 的不偏估計量, 所以誤差的變異數 σ^2 的不偏估計量為: $\hat{\sigma}^2 = MSE = 0.0148$ 。

(d) (10 pt.) 估計織布機之間的變異。

$$\hat{\sigma}_{\tau}^2 = \frac{MSTR - MSE}{n} = \frac{0.0854 - 0.0148}{5} = 0.01412$$

(e) (10 pt.) 求織布機間變異佔總變異的百分比。

$$\frac{\text{織布機間變異}}{\text{總變異}} \times 100\% = \frac{0.01412}{0.01412 + 0.0148} \times 100\% = 48.8243\%$$

SAS 程式碼

```
*Q1;
data d;
input coat $ conduct @@;
cards;
1 56 1 55 1 62 1 59 1 60
2 64 2 61 2 50 2 55 2 56
3 45 3 46 3 45 3 39 3 43
4 42 4 39 4 45 4 43 4 41
;
run;
proc anova;
class coat;
model conduct=coat;
mean coat;
run;
proc nested;
class coat;
var conduct;
run;
*Q2;
data d;
input loom $ cloth @@;
cards;
1 14 1 14.1 1 14.2 1 14 1 14.1
2 13.9 2 13.8 2 13.9 2 14 2 14
3 14.1 3 14.2 3 14.1 3 14 3 13.9
4 13.6 4 13.8 4 14 4 13.9 4 13.7
5 13.8 5 13.6 5 13.9 5 13.8 5 14
;
run;
proc anova;
class loom;
model cloth=loom;
mean loom;
run;
proc nested;
class loom;
var cloth;
```

run;