量子情報通信

2016 年 3 月 2 日

1　この章の目的

この章では，量子情報通信が古典的な通信に対してどのようなメリットがあるかを理解するため，通信に関するいくつかの定理，性質を解説する．

2　クローニング禁止定理 (No-cloning theorem)

クローニング禁止定理とは，「任意の量子状態は複製できない」とする定理である．以下では簡単に定理を証明する．

まず 2 つのレジスタ A,B を用意し，レジスタ A からレジスタ B にデータをコピーすることを考える．a, b は $|\alpha|^2 + |b|^2 = 1$ の関係にある 2 つの複素数とし，レジスタ A,B の初期状態は以下のとおりになっているとする．

$$\text{レジスタ } A \text{ の初期状態} \quad |\psi\rangle_A = a\,|0\rangle_A + b\,|1\rangle_A \tag{1}$$

$$\text{レジスタ } B \text{ の初期状態} \quad |\phi\rangle_B \tag{2}$$

ケットベクトルの右下についている添字は，A がついていれば「レジスタ A の状態」，B がついていれば「レジスタ B の状態」を表している．データをコピーするようなユニタリ変換 U を以下のように定義する．

$$U(|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B) = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \tag{3}$$

これ以降，$|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ を $|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B$ というように，$\otimes$ を略して書くことにする．

(3) 式にレジスタ A の初期状態 (2) 式を代入して計算する．

$$\begin{aligned} U(|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B) &= U(a\,|0\rangle_A + b\,|1\rangle_A)\,|\phi\rangle_B && (4)\\ &= Ua\,|0\rangle_A |\phi\rangle_B + Ub\,|1\rangle_A |\phi\rangle_B && (5)\\ &= a\,|0\rangle_A |0\rangle_B + b\,|1\rangle_A |1\rangle_B && (6) \end{aligned}$$

一方で，

$$\begin{aligned} U(|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B) &= |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B && (7)\\ &= (a\,|0\rangle_A + b\,|1\rangle_A)(a\,|0\rangle_B + b\,|1\rangle_B) && (8)\\ &= a^2\,|0\rangle_A |0\rangle_B + ab\,|0\rangle_A |1\rangle_B + ab\,|1\rangle_A |0\rangle_B + b^2\,|1\rangle_A |1\rangle_B && (9) \end{aligned}$$

となる．(6) 式と (9) 式は等しいので

$$a\,|0\rangle_A |0\rangle_B + b\,|1\rangle_A |1\rangle_B = a^2\,|0\rangle_A |0\rangle_B + ab\,|0\rangle_A |1\rangle_B + ab\,|1\rangle_A |0\rangle_B + b^2\,|1\rangle_A |1\rangle_B \tag{10}$$

であるが，この式は以下の条件が成り立たなければならない．

$$a = a^2 \qquad (a = 0 \text{ または } 1) \tag{11}$$

$$b = b^2 \qquad (b = 0 \text{ または } 1) \tag{12}$$

$$ab = 0 \tag{13}$$

条件付きでデータのコピーが行えるものの，任意の状態にある量子ビット列はコピーできないということがわかった．

3　量子エンタングルメント（量子もつれ）

2 つの量子ビット A と B を考える．どちらの量子ビットも $|0\rangle$ である状態と，$|1\rangle$ である状態を重ねあわせた状態

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

は**エンタングルした状態**（もつれた状態）と呼ばれる．この状態では，仮に A で測定した結果が $|0\rangle$ だとすると，$|\psi\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B$ に収束するので，B での測定結果も必ず $|0\rangle$ となる．この式は A と B がどれだけ離れた場所にあっても，測定結果が常に同じになるということを示している．

$|0\rangle, |1\rangle$ を θ だけ回転させた直交基底を

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta\,|1\rangle \tag{15}$$

$$|\theta_\perp\rangle = -\sin\theta\,|0\rangle + \cos\theta\,|1\rangle \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

とすると，$|\psi\rangle$ は以下のように書き換えられる．

$$|\psi\rangle = \frac{|\theta\rangle_A |\theta\rangle_B + |\theta_\perp\rangle_A |\theta_\perp\rangle_B}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

従って，どのような基底の取り方でも A と B の測定結果は常に同じになる．

様々な基底の取り方が考えられるが，特に

$$|\phi^\pm\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \tag{19}$$

$$|\psi^\pm\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |1\rangle_B \pm |1\rangle_A |0\rangle_B}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

の 4 種類は **Bell 基底**という特別な名前がついている．これらの基底は，A の量子ビットにパウリ変換を施すことにより以下のように相互変換が可能である．

$$|\phi^+\rangle_{AB} = I\,|\phi^+\rangle_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} |\phi^+\rangle_{AB} \tag{22}$$

$$|\psi^+\rangle_{AB} = \sigma_x\,|\phi^+\rangle_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} |\phi^+\rangle_{AB} \tag{23}$$

$$|\psi^-\rangle_{AB} = -i\sigma_y\,|\phi^+\rangle_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} |\phi^+\rangle_{AB} \tag{24}$$

$$|\phi^-\rangle_{AB} = \sigma_z\,|\phi^+\rangle_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} |\phi^+\rangle_{AB} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

4　量子テレポーテーション

エンタングルメント状態と古典通信を用いて量子状態を遠方に転送するプロトコルを**量子テレポーテーション**と呼ぶ.

いま，送信者と受信者はエンタングルメント状態

$$|\phi^{\pm}\rangle_{AB} = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \tag{27}$$

を保持しているとする．このとき，送信者が持っている量子ビット X の状態

$$|\psi\rangle_X = a\,|0\rangle_X + b\,|1\rangle_X \tag{28}$$

を受信者に送りたい．その手順を以下に示す.

まず，X,A,B の 3 つの量子ビットを，4 つの Bell 基底を使って書き換える.

$$(a\,|0\rangle_X + b\,|1\rangle_X)\frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left[\frac{|0\rangle_X |0\rangle_A + |1\rangle_X |1\rangle_A}{\sqrt{2}}(a\,|0\rangle_B + b\,|1\rangle_B) + \frac{|0\rangle_X |0\rangle_A - |1\rangle_X |1\rangle_A}{\sqrt{2}}(a\,|0\rangle_B - b\,|1\rangle_B)\right. \\ &\quad \left. + \frac{|0\rangle_X |1\rangle_A + |1\rangle_X |0\rangle_A}{\sqrt{2}}(a\,|1\rangle_B + b\,|0\rangle_B) + \frac{|0\rangle_X |1\rangle_A - |1\rangle_X |0\rangle_A}{\sqrt{2}}(a\,|1\rangle_B - b\,|0\rangle_B)\right] \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left[|\phi^+\rangle_{XA}(a\,|0\rangle_B + b\,|1\rangle_B) + |\phi^-\rangle_{XA}(a\,|0\rangle_B - b\,|1\rangle_B)\right. \\ &\quad \left. + |\psi^+\rangle_{XA}(a\,|1\rangle_B + b\,|0\rangle_B) + |\psi^-\rangle_{XA}(a\,|1\rangle_B - b\,|0\rangle_B)\right] \end{aligned} \tag{31}$$

ここで，送信者は X と A の 2 つの量子ビットに対して，Bell 基底のうちどの状態なのかを決める測定を行う．この測定を **Bell 状態測定**という．そのとき，測定結果として $|\phi^-\rangle$ を得たとする．量子ビット全体の状態は，(31) 式の第 2 項

$$|\phi^-\rangle_{XA}(a\,|0\rangle_B - b\,|1\rangle_B) \tag{32}$$

に収束し，B の量子ビットの状態は $a\,|0\rangle - b\,|1\rangle$ となる．これに，σ_z を施すと,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{33}$$

となり，転送したい状態 $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$ が得られる.

送信者の測定結果 $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ に応じて，受信者は表 1 のように変換を行うことにより，どのような状態でも量子ビットを送ることができる．どのような変換を行えばよいかは，古典通信を用いて伝えればよい．量子エンタングルメント状態にある量子ビット間では，光の速さを超えて一瞬にして情報が伝わるように見えるが，古典通信を用いているので情報の転送速度が光速を超えるようなことは起こらない.

表 1　量子テレポーテーションの変換対応表

送信者の測定結果	B の状態	受信者が行うべき変換
$|\phi^+\rangle_{XA}$	$a\,|0\rangle_B + b\,|1\rangle_B$	I（何もしない）
$|\phi^-\rangle_{XA}$	$a\,|0\rangle_B - b\,|1\rangle_B$	σ_z
$|\psi^+\rangle_{XA}$	$a\,|1\rangle_B + b\,|0\rangle_B$	σ_x
$|\psi^-\rangle_{XA}$	$a\,|1\rangle_B - b\,|0\rangle_B$	$\sigma_z\sigma_x = -i\sigma_y$

参考文献

[1] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. **量子コンピュータと量子通信** *I* -**量子力学とコンピュータ科学**-. Trans. by 木村達也. オーム社, 2004.

[2] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. **量子コンピュータと量子通信** *II* -**量子コンピュータとアルゴリズム**-. Trans. by 木村達也. オーム社, 2004.

[3] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. **量子コンピュータと量子通信** *III* -**量子通信・情報処理と誤り訂正**-. Trans. by 木村達也. オーム社, 2004.

[4] 石坂 智 et al. **量子情報科学入門**. 共立出版, 2012.