ガウス積分

2016 年 2 月 19 日

ここでは,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1}$$

が成り立つことを証明する.

ガウス積分の値を I とおく．すなわち,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\mathrm{d}y \tag{2}$$

である．この 2 乗は

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ay^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3}$$

ここで,

$$x = r\cos\theta \tag{4}$$

$$y = r\sin\theta \tag{5}$$

とおくと，ヤコビアン

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{6}$$

より,

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} re^{-ar^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-ar^2}\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \tag{7}$$

となる.

$$\therefore I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{8}$$

参考文献

[1] 高遠 節夫 et al. **新訂　微分積分** *II*. 大日本図書, 2004.