Lineare Algebra Zusammenfassung

613348

3. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Beweisstrategien

- Kontraposition
  Die folgenden Aussagen sind äquivalent, d.h. $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen, zeigt automatisch $A \Rightarrow B$ (und umgekehrt), was unter Umständen leichter zu beweisen ist.
  $$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{1}$$
- Vollständige Induktion
- Äquivalenz-Implikation-Zusammenhang
  Die logische Äquivalenz ist definiert Relation zweier Aussagen, die dieselben Einträge in der Wahrheitstabelle haben. Es gilt die nützliche Beziehung
  $$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{2}$$

1.2 Beweise Mengen

Um zu zeigen, dass $A \subset B$, also A eine **Teilmenge** von B ist, muss gelten

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \tag{3}$$

Dabei zeigt man (auf direktem Wege, kein Widerspruchsbeweis), dass die Folgerung $x \in A \Rightarrow x \in B$ für ein beliebiges x gilt und schließt daraus, dass dies somit für alle x gelten muss (siehe Bsp.).

Um zu zeigen, dass zwei Mengen **gleich** sind, also $A = B$, muss man zeigen, dass

$$A \subseteq B \ \wedge B \subseteq A \tag{4}$$

Tabelle 1: Ausformulierungen von Mengennotationen

Mengennotation	Ausformulierung
$x \in \overline{A}$	$x \notin A$
$x \in A \cup B$	$x \in A \vee x \in B$
$x \in A \cap B$	$x \in A \wedge x \in B$
$x \in A \setminus B$	$x \in A \wedge x \notin B$
$x \notin ...$	$\neg(x \in ...)$
$(x, y) \in A \times B$	$x \in A \wedge y \in B$

Einige nützliche Ausformulierungen von Verneinungen sind

$$\neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$
$$\neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$
$$\neg(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

zz: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Lös: Zeige $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

$\boxed{\subseteq}$ Sei $x \in \overline{A \cup B}$ beliebig.

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow \neg(x \in A \cup B) \Rightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

Da x beliebig, gilt dies für alle und somit $\forall x : x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, also $A \cap B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\boxed{\supseteq}$ Zeige $\boxed{\subseteq}$ rückwärts. ■

2 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow:(A,b) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{6}$$

Die **Lösungsmenge** ist die Menge aller x, die das LGS erfüllen.

$$\text{Lös}(A,b) = \{x \mid x \text{ erfüllt LGS}\} \tag{7}$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

geg: $\begin{cases} x - y + 2z + 3t + s = 1 \\ 2x - y - z - 2t + s = 1 \\ x + y - 2z + t + s = 1 \end{cases}$, ges: Lösungsmenge

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - \text{I} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \\ \\ \text{III} - 2\text{II} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 14 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} : 2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{II} + \text{III} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 3z + 5t \\ y = 2z + t \\ s = 1 - 3z \\ z, t \in \mathcal{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A,b) = \{(x,y,z,s,t) \mid \text{LGS erfüllt}\} = \{(3z+5t, 2z+t, z, 1-3z, t) \mid z,t \in \mathcal{R}\}$$

2.1 Cramer'sche Regel

Für invertierbare Matrizen A ($\det A \neq 0$) kann das LGS $A \cdot x = b$ über die Cramer'sche Regel gelöst werden

$$x_i = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A} \tag{8}$$

wobei die a^i Spaltenvektoren sind.

$\boxed{\text{Beispiel}}$

geg: $(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 0 - 0 - 2 - 0 = 2 \neq 0$$

A ist invertierbar.

$$x_1 = \frac{\det(b, a^1, a^2)}{\det A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 - 0 - 2 - 1) = -1$$

$$x_2 = \frac{\det(a^1, b, a^3)}{\det A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 3 + 0 - 0 - 0 - 0) = 2$$

$$x_3 = \frac{\det(a^1, a^2, b)}{\det A} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(0 + 3 + 0 - 3 - 2 - 0) = -1$$

$\Rightarrow \text{Lös}(A,b) = \{(-1, 2, -1)\}$

3 Basis

Die Basis eines Vektorraums ist eine linear unabhängige Familie von Vektoren, dessen Linearkombination jedes Element des Vektorraums beschreiben kann.

3.1 Linear (un)abhängige Familie von Vektoren

Um zu überprüfen, ob eine Familie von Vektoren linear unabhängig ist, stellt man die Linearkombination für den Nullvektor auf und schaut, ob folgt, dass dies nur möglich ist, wenn alle Koeffizienten null sind (trivialer Fall) oder ob es auch andere Möglichkeiten gibt.

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{nur für } \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0, & \text{linear unabhängig} \\ \text{sonst,} & \text{linear abhängig} \end{cases} \tag{9}$$

Beispiel

ges: $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ in V linear unabhängig?

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(4,5,6) + \alpha_3(7,8,9) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Somit kann der Nullvektor durch Linearkombinationen beschrieben werden, die von der trivialen abweichen wie z.B. $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$. Die Familie ist also linear abhängig.

4 Lineare Abbildung und darstellende Matrix

Eine lineare Abbildung $F : V \to W$ bildet von einem K-Vektorraum auf einen anderen K-Vektorraum ab und erfüllt dabei

$$F(\lambda \cdot v + \mu \cdot w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \tag{10}$$

mit $v \in V$, $w \in W$ und $\lambda, \mu \in K$.
Die Abbildungsvorschrift lässt sich (für festgelegte Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ in V, W) kompakt mittels einer Matrix A und Matrixmultiplikation schreiben, siehe Motivation. Diese Matrix nennt man **darstellende Matrix**.

4.1 Bestimmung darstellende Matrix

Seien $F : V \to W$ und $\mathcal{A} = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, $\mathcal{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_n\}$ Basen von V, W.

1. Bilde die Basisvektoren der Ausgangsbasis $\mathcal{A}$ mittels F ab
2. Stelle die abgebildete Basisvektoren in der neuen Basis $\mathbb{B}$ in Koordinatenform dar
3. Setze die Koordinatenformen als Spaltenvektoren der Matrix ein (Reihenfolge einhalten!)

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (F(b_1))_{\mathcal{B}} & (F(b_2))_{\mathcal{B}} & \dots & (F(b_n))_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \tag{11}$$

Motivation

Betrachte den allgemeinen Fall.
Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{A} = \{b_1, ..., b_n\}$ die Basis von V und $\mathcal{B} = \{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m\}$ die Basis von W.
Ein beliebiger Vektor $v \in V$ lässt sich als Linearkombination der Basis von V darstellen. Bilde diese mittels der Funktion F ab.

$$\begin{aligned} v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n &\mapsto \\ \mapsto F(v) = F(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n) &= \alpha_1 F(b_1) + \alpha_2 F(b_2) + ... + \alpha_n F(b_n) = \end{aligned}$$

Da $F(b_i)$ Element von W ist, kann es als Linearkombination dessen Basis $\mathcal{B} = \{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m\}$ dargestellt werden. Dabei kommt zum Index des Koeffizienten ein zweiter hinzu, der andeutet, zu welchem α die Linearkombination gehört.

$$\begin{aligned} &= \alpha_1(c_{11}\tilde{b}_1 + c_{21}\tilde{b}_2 + ... + c_{m1}\tilde{b}_m) + ... + \alpha_n(c_{1n}\tilde{b}_1 + c_{2n}\tilde{b}_2 + ... + c_{mn}\tilde{b}_n) = \\ &= \alpha_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \alpha_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + ... + \alpha_n c_{1n} \\ \alpha_1 c_{21} + \alpha_2 c_{22} + ... + \alpha_n c_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 c_{m1} + \alpha_2 c_{m2} + ... + \alpha_n c_{mn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} =: \end{aligned}$$

Um dies kompakter schreiben zu können, definiert man sich die folgende Matrixmultiplikation $\cdot$

$$=: \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (F(b_1))_{\mathcal{B}} & (F(b_2))_{\mathcal{B}} & \dots & (F(b_n))_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} =$$
$$\equiv M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot v_B$$

Man sieht, dass die Spalten der darstellenden Matrix den Koordinatendarstellungen der abgebildeten Basisvektoren $F(e_i)$ in der neuen Basis $\tilde{B}$ entsprechen.

4.2 Bestimmung Basiswechselmatrix

Seien V ein Vektorraum und $\mathcal{A} = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, $\mathcal{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, ..., \tilde{b}_n\}$ Basen.

1. Stelle die Basisvektoren der Ausgangsbasis $\mathcal{A}$ in der Koordinatenform der neuen Basis $\mathbb{B}$ dar
2. Setze die Koordinatenformen als Spaltenvektoren der Matrix ein (Reihenfolge einhalten!)

$$T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (b_1)_{\mathcal{B}} & (b_2)_{\mathcal{B}} & \dots & (b_n)_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \tag{12}$$

$\boxed{\text{Motivation}}$

Sei V ein Vektorram und $\mathcal{A} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, \mathcal{B} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\}$ zwei Basen.
Betrachte den Basiswechsel $v_{\mathcal{A}} \to v_{\mathcal{A}}$.

$$v_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n =$$
$$= \alpha_1(c_{11}\tilde{b}_1 + c_{21}\tilde{b}_2 + \dots + c_{n1}\tilde{b}_n) + \dots + \alpha_n(c_{1n}\tilde{b}_1 + c_{2n}\tilde{b}_2 + \dots + c_{nn}\tilde{b}_n) =$$
$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \alpha_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 c_{11} + \alpha_2 c_{12} + \dots + \alpha_n c_{1n} \\ \alpha_1 c_{21} + \alpha_2 c_{22} + \dots + \alpha_n c_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 c_{n1} + \alpha_2 c_{n2} + \dots + \alpha_n c_{nn} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}}$$

Wie zuvor auch, kann die Matrixmultiplikation eingeführt werden.

$$=: \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ (b_1)_{\mathcal{B}} & (b_2)_{\mathcal{B}} & \dots & (b_n)_{\mathcal{B}} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} \equiv T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{A}}$$

4.3 Kommutative Diagramme

Die lineare Abbildung, ihre Koordinatentransformationen, Basiswechsel und darstellende Matrix können der Nachvollziehbarkeit halber in einem Diagramm dargestellt werden. Die Symbole (abgesehen von F, V, W) bedeuten dabei

K^n bzw. K^m	Koordinatenraum, d.h. Vektorraum, der die Elemente des Vektorraums V bzw. W in Koordinatenform bzgl. einer Basis A, A' bzw. B, B' enthält
ϕ_A, $\phi_{A'}$ bzw. ϕ_B, $\phi_{B'}$	Abbildungen, die die Koordinatenform in die Linearkombination übersetzt (die Element des Vektorraums V bzw. W) ist. Die Abbildung, die die Linearkombination in die Koordinatenform bringt, ist dann $\phi_A^{-1}, \phi_{A'}^{-1}$ bzw. $\phi_B^{-1}, \phi_{B'}^{-1}$
$M_B^A(F)$	Darstellende Matrix der Funktion F für die Basis A von V und B von W.
$T_A^{A'}$	Basiswechselmatrix von der Basis A' zur Basis A

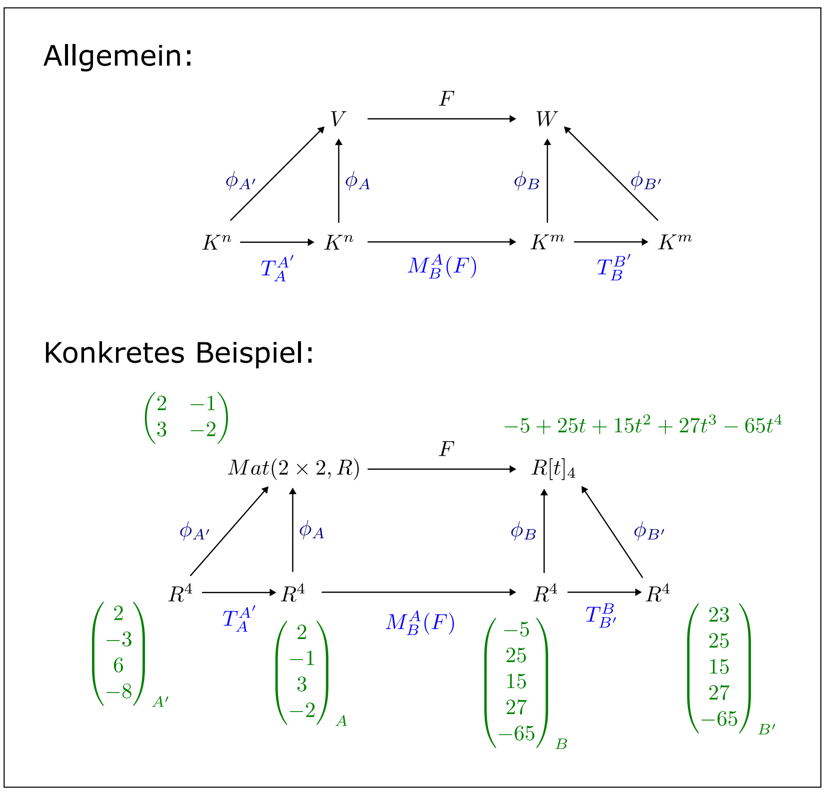


Abbildung 1: Kommutatives Diagramm für eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen und jeweils einem Basiswechsel.
Im unteren Beispiel ist, neben konkreten Vektorräumen, ein Element dargestellt, wie es in welchem Raum vorliegt.

5 Matrix

Notationen einer $m \times n$ Matrix A sind

$$A =\equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \equiv (w_1 \ \dots \ w_n) \equiv (a_{ij}) \tag{13}$$

wobei v_i Zeilenvektoren und w_j Spaltenvektoren sind.

5.1 Rechenregeln

- Addition
$$A + B \equiv (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{14}$$

- skalara Multiplikation
$$\lambda \cdot A \equiv \lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda a_{ij}) \tag{15}$$

- Matrixmultiplikation
Für $A \in M(m \times n; K), B \in M(n \times r; K)$
$$A \cdot B := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{16}$$
Die entstehende Matrix hat die Dimension $m \times r$.
Tipp: Die Matrixmultiplikation einer $a \times b$ und $c \times d$ Matrix (In dieser Reihenfolge!) ist nur möglich, wenn $b \overset{!}{=} c$ gilt. Die Dimension der entstehenden Matrix ist dann $a \times d$.

- Rechenregeln
Distributivgesetz
$$A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B' \quad \wedge \quad (A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B \tag{17}$$
Verträglichkeit
$$A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) \tag{18}$$
Assoziativgesetz
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{19}$$
Keine Kommutativität (im Allgemeinen)
$$A \cdot B \neq B \cdot A \tag{20}$$
Neutralität der Einheitsmatrix
$$E_m \cdot A = A \cdot E_n = A \tag{21}$$

5.2 Inverse Matrix

Die zu einer Matrix A gehörende Inverse A^{-1} ist definiert über

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \tag{22}$$

mit der Einheitsmatrix $E_n = (\delta_{ij})$.
Sie existiert, wenn

$$\det A \neq 0 \tag{23}$$

und kann wie folgt bestimmt werden:

- Schreibe auf die linke Seite einer erweiterte Matrix die Matrix A und rechts die Einheitsmatrix

$$(A|E_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \tag{24}$$

- Forme die linke Seite durch elementare Zeilenoperationen so um, dass dort die Einheitsmatrix entsteht. Auf der rechten Seite steht dann die Inverse.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}\right) = (E_n|A^{-1})$$

Herleitung

A kann durch elementare Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix E_n überführt werden. Dabei kann jede elementare Zeilenoperationen kann durch eine Matrix L_i beschrieben werden. Multipliziert man alle Matrizen der Zeilenoperationen zusammen, erhält man die Inverse A^{-1}.

$$A \Rightarrow L_1 \cdot A \Rightarrow L_2 \cdot L_1 \cdot A \Rightarrow \dots \Rightarrow L_s \cdot \dots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A = E_n$$
$$\Rightarrow A^{-1} = L_s \cdot \dots \cdot L_2 \cdot L_1$$

Die Inverse einer Matrix A lässt sich aber auch über komplementäre Matrix und Determinante berechnen. Die allgemeine Formel für $n \times n$-Matrizen, gefolgt von den Fällen einer 2×2 und 3×3 Matrix, ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\#} \tag{25}$$

$$A_{2\times 2}{}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$A_{3\times 3}{}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{27}$$

5.3 Komplementäre Matrix

Die komplementäre Matrix $A^{\#}$ einer Matrix A wird mittels einer der beiden Hilfsmatrizen

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}, \quad A'_{ij} := \left(\begin{array}{c|c} \quad & \quad \\ \hline \quad & \quad \end{array}\right) \tag{28}$$

berechnet werden, wobei A_{ij} alle Elemente von A beibehält, außer die $i-te$ Zeile und $j-te$ Spalte, die wie in Gl. 28 gezeigt besetzt sind und A'_{ij} die i_te Zeile und $j-te$ Spalte von A "löscht".
Die komplementären Matrixelemente sind dann definiert als

$$a^{\#}_{ij} := \det A_{ji} = (-1)^{i+j} \det A'_{ji} \tag{29}$$

WICHTIG: i, j sind in A vertauscht!

Beispiel

geg: $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ges: $A^{\#}$

Benutze Gl. 29, um die komplementären Matrixelemente zu bestimmen

$$a^{\#}_{11} = \det A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = d$$

$$a^{\#}_{12} = \det A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b$$

$$a^{\#}_{22} = \det A_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$$

$$a^{\#}_{21} = \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix} = -c$$

$$\Rightarrow A^{\#} = \begin{pmatrix} a^{\#}_{11} & a^{\#}_{12} \\ a^{\#}_{21} & a^{\#}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

5.4 Transponierte Matrix

Die zu einer Matrix $A = (a_{ij})$ gehörende Transponierte A^T ist definiert als

$$a^T_{ji} = a_{ij} \tag{30}$$

wobei a^T das Element der transponierten Matrix ist.
Für nicht-quadratische Matrizen, verändert sich also die Form der Matrix.

6 Determinante

Es gilt der Zusammenhang mit Permutationen über die **Leibniz-Formel**

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \tag{31}$$

Daraus folgen die Formeln, die man sich über Merkregeln wie die von **Sarrus** einprägen kann.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \tag{33}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Rechnung

Für die 3×3-Matrix ist die Indexmenge S_3 und der Laufindex kann 6 Permutationen annehmen. Von jeder Permutation wird dann das Signum berechnet und die $\sigma(i)$ in die $a_{i,\sigma(i)}$ eingetragen:

Bsp.: Laufindex $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Man liest ab $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$ und bestimme den Fehlstand, um daraus das Signum zu berechnen: $F(\sigma) = 3$ ist ungerade und somit $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. Der Summand ist also $-a_{13}a_{22}a_{31}$.

Die Determinante kann aber auch über den **Laplac'schen Entwicklungssatz** bestimmt werden, der auf zwei Weisen angewendet werden kann: für eine festgelegte Zeile i (Gl. 34) oder für eine festgelegte Spalte j (Gl. 35)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}) \tag{34}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}) \tag{35}$$

mit der Hilfsmatrix A'_{ij}, die definiert ist als die Matrix, die die $i-te$ Zeile und $j-te$ Spalte der Matrix A entfernt. $\det(A'_{ij})$ wird als **Minor** bezeichnet.

Beispiel

geg: $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, ges: $\det A$

Nutze die 1. Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det(A'_{1j}) =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot 12 + 0 + 7 \cdot (-(-8)) = -60 + 56 = -4$$

7 Eigenwerte und Eigenvektoren

λ ist EW der Matrix A, wenn das charakteristische Polynom null wird

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n) = 0 \tag{36}$$

Der EV v zum EW λ kann über das folgende LGS gefunden werden

$$(A - \lambda E_n, \vec{0}) \tag{37}$$

Folgt durch Umstellen der Definition: $A \cdot v = \lambda v \Leftrightarrow A \cdot v - \lambda v = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda E_n)v = \vec{0}$

Beispiel

geg: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ges: EW, EV

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (2-\lambda)^2(1-\lambda) + 4 + (-6) - 6(2-\lambda) + 2(2-\lambda) - 2(1-\lambda) = \\ = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 \end{aligned}$$

Die EW sind die Nullstellen dieses charakteristischen Polynoms

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

Durch Raten, Polynomdivision und p-q-Formel erhält man die EW $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$.

$$(A - \lambda_1 E_3, \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

8 Diagonalisierbarkeit

Mit dem folgenden Verfahren lässt sich überprüfen, ob eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ bzw. Funktion $F \in \mathrm{End}_K(V)$ (mit $\dim V = n < \infty$) diagonalisierbar ist oder nicht.

1. Berechne das char. Polynom $P_A(\lambda)$
2. Berechne dessen Nullstellen $P_A(\lambda) = 0$
3. Wenn die Anzahl der Nullstellen ¡ n, ist A bzw. F nicht diagonalisierbar. Breche ab.
   Wenn die Anzahl der Nullstellen $= n$, gehe weiter.
4. Finde $\mathrm{Eig}(A, \lambda_j) = \mathrm{Lös}(A - \lambda_j E_n, \vec{0})$ und deren Basen $\mathcal{B}_j$ für alle Nullstellen λ_j.
   Wenn für mindestens ein λ_j die Dimension des Eigenraums kleiner als dessen Vielfachheit ist ($\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_j) < \mu(P_F, \lambda_j)$), so ist A bzw. F nicht diagonalisierbar.
   Andernfalls ist $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ die Basis aus EW von V und A bzw. F damit diagonalisiert.

Man u.U. früher erkennen, ob eine Matrix bzw. Funktion diagonalisierbar ist. Nämlich dann, wenn, wenn die gefundenen EW paarweise verschieden sind ($\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$) und das char. Polynom in Linearfaktoren zerfällt (die auch alle paarweise verschieden sind).

Beispiel

geg: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 9$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 9\lambda + 9 \overset{!}{=} 0$$

Durch Raten, Polynomdivision und p-q-Formel lassen sich die Nullstellen (EW) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 - i\sqrt{2}$ finden. Da $P_A(\lambda)$ in Linearfaktoren mit paarweise verschiedenen EW zerfällt, ist A diagonalisierbar.
Bestimme den EV zum EW $\lambda_1 = 3$

$$(A - 3E_3, \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}, \quad \Rightarrow \mathrm{Eig}(A; \lambda_1) = \mathrm{span}\,(v_1)$$

$$\dim \mathrm{Eig}(A; \lambda_1) = \mu(P_A, \lambda_1) \checkmark$$

Analog ergeben sich die für EW $\lambda_{2,3}$ die Eigenräume

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A; \lambda_2) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Eig}(A; \lambda_3) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

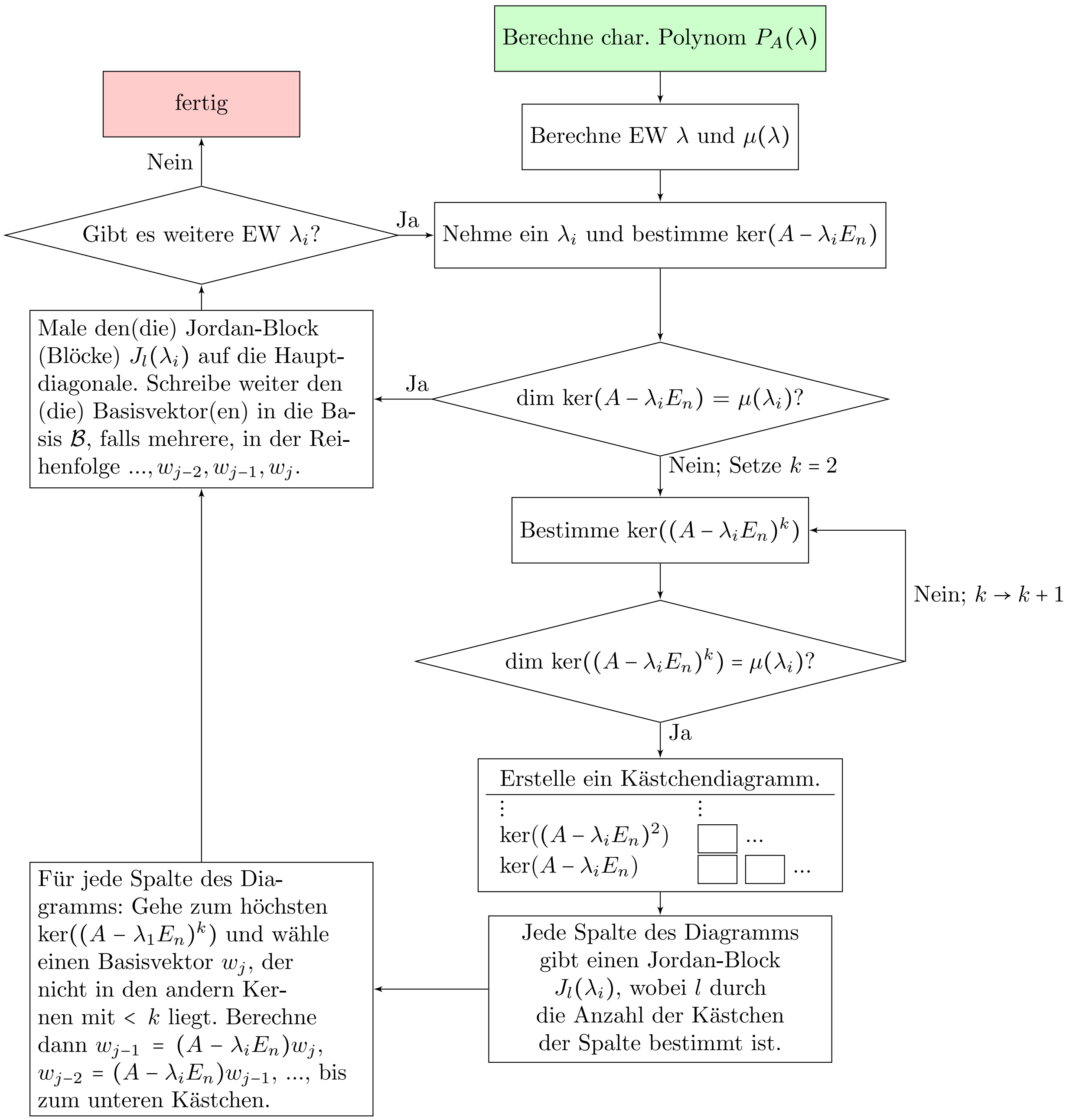
Somit ist die Basis $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 - i\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

---

9 Jordan'sche Normalform

Zerfällt das char. Polynom einer Matrix in Linearfaktoren, so existiert eine Basis, in der sie die Jordan'sche Normalform annimmt.



Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda(2+\lambda)^3$$

Die EW sind $\lambda_1 = 0$ ($\mu(P_A;0) = 1$) und $\lambda_1 = -2$ ($\mu(P_A;-2) = 3$).
Bestimme die EV zum EW $\lambda_2 = -2$.

$$(A + 2E_4, \vec{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \dots \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z \in \mathbb{C} \\ t \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(A + 2E_4) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \dim \ker(A + 2E_4) = 2 < \mu(P_A; -2) = 3$$

Da die Dimension kleiner als die Vielfachheit ist, untersuche die nächsthöhere Potenz von $(A+2E_4)$.

$$((A + 2E_4)^2, \vec{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \dots \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - t \\ y \in \mathbb{C} \\ z \in \mathbb{C} \\ t \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker((A + 2E_4)^2) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \dim \ker((A + 2E_4)^2) = 3 = \mu(P_A; -2) \quad \checkmark$$

Erstelle nun das Kästchendiagramm für $\lambda = -2$.

$$\begin{array}{rl} \ker((A+2E_4)^2): & \square \\ \ker(A+2E_4): & \square\square \end{array}$$

Die 1. Spalte hat 2 Kästchen und nimmt daher in der Jordan'sche Normalform einen 2x2 großen Jordan-Block ein. Dieser wird $B_2(-2)$ notiert, wobei der Index die Blockgröße und das Argument den EW angibt. Die zweite Spalte hat nur ein Kästchen und daher nur einen 1x1 Jordan-Block $B_1(-2)$.

Bestimme den EV zum EW $\lambda_1 = 0$.

$$(A + 0E_4, \vec{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = -t \\ t \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(A + 0E_4) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\dim\ker(A + 0E_4) = 1\mu(P_A; 0) \quad \checkmark$$

Der EW $\lambda = 0$ erhält einen 1x1 Jordan-Block $B_1(0)$. Die gefundenen Jordan-Blöcke können beliebig in der Matrix platziert werden. Für die Basis ist diese hier festgelegte Reihenfolge allerdings bindend.

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} B_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & B_2(-2) & 0 \\ 0 & 0 & B_1(-2) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Berechne nun die Basisvektoren. Gehe dabei von Block zu Block. Beim $B_2(-2)$ Jordan-Block muss ein Vektor aus $\ker((A + 2E_4)^2)$ gewählt werden, der nicht in $\ker(A + 2E_4)$ liegt. Anschließend wird er auf $(A + 2E_4)$ angewendet, um den anderen Basisvektor zu finden. Dabei wird der Vektor, den man zuletzt gefunden hat vor dem anderen in die Basis einsortiert (hier: b_2 vor b_3).

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = (A + 2E_4)^2 b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

$$\Rightarrow S^{-1} = (b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $J = S \cdot A \cdot S^{-1}$.

10 Darstellende Matrix von Bi- und Sesquilinearform

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-VR, $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ eine Basis und s eine Bilinearform. Dann ist die darstellende Matrix von s bezüglich $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} s(u_1, u_1) & \dots & s(u_1, u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(u_n, u_1) & \dots & s(u_n, u_n) \end{pmatrix} \tag{38}$$

mit $(x, y) \mapsto s(x, y) = (x)_{\mathcal{B}}^T \cdot M_{\mathcal{B}}(s) \cdot (y)_{\mathcal{B}}$.
Analog für eine Sesquilinearform S.

Motivation

Seien wie oben beschrieben $v, w \in V$ Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ eine Basis des Vektorraums. s sei eine Bilinearform und bilde v, w ab.
Verwende im 1. Schritt, dass v, w als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden können.

$$s(v, w) := s(\sum_{i=1}^{n} v_i u_i, \sum_{j=1}^{n} w_j u_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot s(u_i, u_j) \cdot w_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \cdot s_{ij \cdot w_j} = (v^T)_{\mathcal{B}} \cdot (s_{ij}) \cdot (w)_{\mathcal{B}}$$

Beispiel

geg: $\langle,\rangle : \mathbb{C}[t]_2 \times \mathbb{C}[t]_2 \to \mathbb{C}, \quad \langle (p(t), q(t)\rangle \mapsto \overline{p(0)}q(0) + \overline{p(1)}q(1) + \overline{p(i)}q(i)$
ges: $M_{\mathcal{B}}(S)$ bzgl. Basis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle 1, t\rangle & \langle 1, t^2\rangle \\ \langle t, 1\rangle & \langle t, t\rangle & \langle t, t^2\rangle \\ \langle t^2, 1\rangle & \langle t^2, t\rangle & \langle t^2, t^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

---

11 Gram-Schmidt-Verfahren

ERGÄNZEN

12 Stichwortverzeichnis

Begriff	Erklärung
Abbildung	Eine Abbildung von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. $$f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$$
öhnliche Matrizen	Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n; K)$ sind ähnlich, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}(m; K)$ gibt, s.d. $$B = S \cdot A \cdot S^{-1}$$
allgemeine lineare Gruppe	Gruppe $(\mathrm{GL}(n; K), \cdot)$ mit der Menge der invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n; K)$, dem neutralen Element E_n und der Verknüpfung Matrixmultiplikation $\cdot$.
Automorphismus	lineare Abbildung $F: V \to V$, die bijektiv ist
äquivalente Matrizen	Zwei Matrizen $A, B \in M(m \times n; K)$ sind äquivalent, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}(m; K)$ und $T \in GL(n; K)$ gibt, s.d. $$B = S \cdot A \cdot T^{-1}$$
Basis eines Vektorraums	Erzeugendensystem, das linear unabhängig ist
bijektiv(e Abbildung)	Abbildung $f: X \to Y$, s.d. jedes Element in der Zielmenge Y genau einmal von f getroffen wird. $$\forall y \in Y\ \exists! x \in X\ y = f(x)$$
Bild (unter einer Funktion)	Das Bild einer Menge $M \subset X$ unter einer Funktion $f: X \to Y$ ist die Menge aller aus M abgebildeten Elemente. $$f(M) := \{y \in Y \mid \exists x \in M\ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in M\}$$
bilinear	Eine Abbildung mit zwei Argumenten (z.B. $\langle , \rangle$) ist bilinear, wenn sie linear in beiden Argumenten ist. Eselsbrücke: zweimal linear = bilinear. • $\langle \lambda p + \mu r, q \rangle = \lambda \langle p, q \rangle + \mu \langle r, q \rangle$ • $\langle p, \lambda q + \mu r \rangle = \lambda \langle p, q \rangle + \mu \langle p, r \rangle$
Bilinearform	bilineare Abbildung, die in die reellen Zahlen abbildet

charakteristisches Polynom	Polynom, dessen Nullstellen die Eigenwerte λ einer Funktion bzw. Matrix sind. $$P_F(\lambda) = \det(F - \lambda \mathrm{id}_V) \quad \text{bzw.} \quad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$
Determinante	• (D1) det ist **linear in jeder Zeile** $$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \mu a_i + \delta \tilde{a}_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mu \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \delta \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \tilde{a}_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ • (D2) det ist **alternierend**, wird also null, sobald eine Zeile doppelt vorkommt • (D3) det ist **normiert** $$\det A = 1$$
diagonalisierbar	Eine Funktion ist diagonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, s.d. alle Basisvektoren Eigenvektoren sind. Eine Matrix ist diagonalisierbar, falls es eine ähnliche Matrix ($D = SAS^{-1}$) in Diagonalform gibt.
diagonalisierbar, simultan	Zwei Funktionen F, G sind simultan diagonalisierbar, falls eine Basis gefunden werden kann, s.d. alle Basisvektoren sowohl EV von F als auch von G sind. = Zwei Matrizen heißen simultan diagonalisierbar, wenn es ein $S \in \mathrm{GL}(n; K)$ gibt, s.d. sowhol SAS^{-1} als auch SBS^{-1} diagonal sind.
Dimension	Die Dimension eines K-Vektorraums ist $$\dim_K(V) := \begin{cases} n, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge } n \text{ besitzt} \\ \infty, & \text{falls V keine endliche Basis besitzt} \end{cases}$$
direkte Summe (von Vektorräumen)	Summe von Vektorräumen, deren Schnitt der Nullvektorraum $\{\vec{0}\}$
Eigenraum (von F bzgl. λ)	Menge aller Eigenvektoren bzgl. λ $\mathrm{Eig}(F; \lambda) = \{v \in V \mid F(v) = \lambda \cdot v\}$

Eigenvektor	Vektor $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ s.d. gilt $$F(v) = \lambda \cdot v$$ mit $F \in \mathrm{End}_K(V), \lambda \in K$. Für $F : K^n \to K^n$, $x \mapsto A \cdot x$ gilt $$A \cdot x = \lambda \cdot x$$ mit $A \in M(n \times n; K)$.
Eigenwert	$\lambda \in K$, das die Gleichung $$F(v) = \lambda v$$ erfüllt, mit $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Für $F : K^n \to K^n$, $x \mapsto A \cdot x$ gilt $$A \cdot x = \lambda \cdot x$$ mit $A \in M(n \times n; K)$.
Elementarmatrizen	Definierte Matrizen S_i, Q_i^j, P_i^j, die durch Matrixmultiplikation Elementarumformungen (wie Zeilenaddition, -multiplikation) auf einer Matrix A bewirken
Endomorphismus	lineare Abbildung $F : V \to V$
Epimorphismus	surjektive lineare Abbildung $F : V \to W$ $$\mathrm{im} F = W$$
Erzeugendensystem eines Vektorraums	Familie von Vektoren $v_1, ..., v_r$, die den Vektorraum aufspannen $$V = \mathrm{span}_K(v_1, ..., v_r)$$
euklidischer Vektorraum	$\mathbb{R}$-Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt definiert ist $(V, \langle\rangle)$
Familie	Sammlung von Objekten mit einem Index aus einer Indexmenge I, z.B. Familie von Vektoren $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = v_1, ..., v_n \in V$ mit der Indexmenge $\mathbb{N}$.
Faser (über $w \in W$)	siehe Urbild. Man verändert lediglich die Notation $F^{-1}(\{w\}) \to F^{-1}(w)$, also für $F : V \to W$: $F^{-1}(w) := \{v \in V \| F(v) = w\}$
Fehlstand (einer Permutation)	Anzahl der Paare $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$ in einer Permutation $\sigma \in S_n$.

	i, j stammen dabei aus der ersten Zeile der Permutationsmatrix, $\sigma(i), \sigma(j)$ stehen jeweils darunter. Bsp.: $$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow F(\sigma) = 1$$
Gauß'sches Eliminationsverfahren	Verfahren, das eine Matrix in die Zeilenstufenform bringt
Gruppe	Paar aus einer Gruppe G und einer Verknüpfung $\star$ $(G, \star)$, das die folgenden Axiome erfüllt • (G1, Assoziativgesetz) $$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$ • (G2, neutrales, inverses Element) $\exists e \in G$ s.d. a) $e \star a = a \star e = a \quad \forall a \in G$ b) $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G\ a^{-1} \star a = a \star a^{-1} = e$
Gruppe, abelsch	Gruppe $(G, \star)$, die zusätzlich (G3, Kommutativgesetz) erfüllt $$a \star b = b \star a \quad \forall a, b \in G$$
hermitesch (Abbildung)	Eine Abbildung $\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ ist hermitesch, wenn $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$
Homomorphismus, Gruppen	Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \odot)$ Gruppen, dann ist der Gruppenhomomorphismus die Abbildung $\varphi : G \to H$ mit $$\forall a, b \in G \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$$
Homomorphismus, Ringe	Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, \oplus, \odot)$ Ringe. Dann ist der Ringhomomorphismus die Abbildung $\varphi : R \to S$ mit $$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \wedge \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$$
Homomorphismus, Vektor	siehe lineare Abbildung
injektiv(e Abbildung)	Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist injektiv, wenn jedes Element der Zielmenge Y höchstens einmal getroffen wird $$\forall x, x' \in X\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

invertierbar	Eine Matrix $n \times n$ Matrix A ist invertierbar, wenn eine $n \times n$ Matrix A' existiert, s.d. gilt $$A \cdot A^{-1} = A{-}1 \cdot A = E_n$$
Isomorphismus (Gruppen, Ringe)	Gruppen- bzw. Ringhomomorphismus mit bijektiver Abbildung φ
Jordan-Block	$$B_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \in M(l \times l; K)$$
Jordan-Matrix	$$J_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in M(l \times l; K)$$
Jordan-Strang	
Kartesisches Produkt (zweier Mengen)	Menge aller geordneten Paare der beiden Mengen $$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \ b \in B\}$$
Kern	Faser (Urbild) des Nullvektors unter einer linearen Funktion F $$\ker F := F^{-1}(\vec{0}_W)$$
Kern-Bild-Satz	Für eine lineare Abbildung $F: V \to W$ und einen endlich dimensionalen Definitionsbereich $\dim V < \infty$ gilt: $$\dim V = \dim \mathrm{im} F + \dim \ker F$$
Kommutatives Diagramm	Diagramm, das Übersicht über lineare Abbildungen, die dazugehörigen Koordinatensysteme, darstellenden Matrizen und Transformationsmatrizen gibt

Komplement (von B in A)	Das Komplement einer Menge B in A ist die Menge bestehend aus den Elementen aus A, die nicht in B liegen. $$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$
Komposition	Hintereinanderausführung von Abbildungen, z.B. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ $$(f \circ g) : X \to Z,\ x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x))$$
Koordinaten (eines Vektors)	Einträge eines durch ein Koordinatensystem entstandenen Tupels
Koordinatensystem	Bijektive, durch $\mathcal{B}$ bestimmte Abbildung $\phi_{\mathcal{B}}$, die Tupel in Elemente (als Linearkombination der Basisvektoren $\mathcal{B}$) des Vektorraums übersetzt. $\phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ übersetzt demnach eine Linearkombination in ein Tupel.
Körper	Tripel $(K, +, \cdot)$, das die folgenden Axiome erfüllt • (K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe • (K2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe • (K3, Distributivgesetz) $\forall a, b, c \in K$ gilt $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$ $$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
Leere Menge	Menge, die kein Element enthält $$\varnothing := \{\}$$
linear abhängig	Eine Familie von Vektoren $v_1, ..., v_r$ heißt linear abhängig, wenn $$\exists \lambda_1, ..., \lambda_r \in K \text{nicht alle 0 s.d. } \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = \vec{0}$$
linear unabhängig	Eine Familie von Vektoren $v_1, ..., v_r \in V$ heißt linear unabhängig, wenn $$\lambda_1, ..., \lambda_r \in K \wedge \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$
lineare Abbildung	Abbildung $F : V \to W$ von einem Vektorraum auf einen anderen s.d. $\forall v, w \in V \wedge \forall \mu, \lambda \in K$ gilt • (L1) $F(v + w) = F(v) + F(w)$

	• (L2) $F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$ oder in einem $F(\lambda \cdot v + \mu \cdot w) = \lambda \cdot F(v) + \lambda \cdot F(w)$
lineares Gleichungssystem	Menge linearer Gleichungen (= Unbekannte kommen nur als Lin.komb. vor) mit einer oder mehreren Unbekannten, die alle gleichzeitig erfüllt sein sollen
Linearkombination (einer Familie von Vektoren)	Ein Vektor $v \in V$ (eines Vektorraums V über dem Körper K) heißt Linearkombination einer Familie von Vektoren $v_1, ..., v_r \in V$, falls $$\exists \lambda_1, ..., \lambda_r \in K \text{ s.d. } v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$$
Mächtigkeit (einer Menge)	Anzahl der Elemente in einer Menge A $\|A\|$
Matrixdarstellung einer linearen Funktion	Matrix A, die eine lineare Abbildung $F : V \to W$, $v \mapsto F(v) = A \cdot v$ beschreibt
Monomorphismus	injektive lineare Abbildung $$\ker W = \{\vec{0}_V\}$$
nilpotent	Eine Funktion F bzw. Matrix A heißt nipotent (vom Grad k), wenn die k-te Wiederholung der Funktion bzw. Matrix die Nullabbildung bzw. Nullmatrix ergibt, die $k-1$-te Wiederholung jedoch noch nicht. $$F^k \equiv F \circ ... \circ F = \vec{0}_{\mathrm{End}_k(V)} \quad \text{bzw.} \quad A^k \equiv A \cdot ... \cdot A = 0_{n \times n}$$
Pivot	Erstes von Null verschiedene Element einer Matrixzeile in der Zeilenstufenform
positiv definit	Eine Abbildung mit zwei Argumenten ist positiv definit, wenn $$\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \wedge \quad (\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0})$$
Rang	Dimension des Bildes einer linearen Abbildung F $$\mathrm{rang} F := \dim \mathrm{Im} F$$ Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen in der Zeilenstufenform.
Ring	Tripel $(R, +, \cdot)$, das die folgenden Axiome erfüllt • (R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe • (R2) $\cdot$ ist assoziativ

	• (R3, Distributivgesetz) $\forall a, b, c \in K$ gilt $$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$ $$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
Ring, kommutativ	Ring mit der Eigenschaft $$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$$
Schnitt (zweier Mengen)	Der Schnitt zweier Mengen A, B ist die Menge, bestehend aus den Elementen, die in sowohl in A als auch in B liegen. $$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
sesquilinear	Eine Abbildung $\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist sesquilinear, wenn semilinear im 1. und linear im 2. Argument ist. Eselsbrücke: halblinear und linear = anderthalb (=sesqui) linear • $\langle \lambda z + \mu v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle z, w \rangle + \overline{\mu} \langle v, w \rangle$ • $\langle z, \lambda w + \mu v \rangle = \lambda \langle z, w \rangle + \mu \langle z, v \rangle$
Sesquilinearform	sesquilineare Abbildung, die in die komplexen Zahlen abbildet
Signum	Funktion, die einer Permutation σ je nach Fehlstand $F(\sigma)$ den Wert +1 oder −1 zuordnet $$\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma) := \begin{cases} +1, F(\sigma) \text{ gerade} \\ -1, F(\sigma) \text{ ungerade} \end{cases}$$
Skalarprodukt	Auf einem $\mathbb{R}$-VR: • Bilinearform s • symmetrisch $$s(v,w) = s(w,v)\ quad \forall v, w \in V$$ • positiv-definit $$s(v,v) > 0 \quad \forall v \neq \vec{0}$$ Auf einem $\mathbb{C}$-VR: • Sesquilinearform S • positiv-definit $$S(v,v) > 0 \quad \forall v \neq \vec{0}$$

	• hermitesch $$S(v,w) = \overline{S(v,w)} \quad \forall v,w \in V$$
Spann (einer Familie von Vektoren)	Menge aller möglichen Linearkombinationen der Familie von Vektoren $$\text{span}_K(v_1,...,v_r) := \{v \in V \mid \exists \lambda_1,...,\lambda_r \in K,\ v = \lambda_1 v_1,...,\lambda_r v_r\}$$
Summe (von Vektorräumen)	[Am Beispiel von zwei Summanden] Die Summe von V und W ist die Menge aller Vektoren, die als Summe eines Vektors aus V und eines Vektors aus W dargestellt werden können. [Allgemein] Die Summe von W_1 W_2, die UVR von V sind, ist $$W_1 + ... + W_r := \{v \in V \mid \forall j \in \{1,...,r\}\ \exists v_j \in W_j \text{ s.d. } v = v_1 + ... + v_r\}$$
surjektiv(e Abbildung)	Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist surjektiv, wenn jedes Element der Zielmenge Y mindestens einmal getroffen wird $$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ y = f(x)$$
Teilmenge	A ist eine Teilmenge von B, wenn alle Elemente von A auch in B liegen. $$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x\ x \in A \Rightarrow x \in B$$
Transformationsmatrix	Matrix, die durch Matrixmultiplikation Koordinaten bzgl. Basis $\mathcal{A}$ in Koordinaten bzgl. einer anderen Basis $\mathcal{B}$ umrechnet Anschaulich: $\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}_{\mathcal{A}}$
Transposition	Matrix, in der die Rolle von Spalten und Zeilen vertauscht ist
trigonalisierbar	Eine Funktion F ist trigonalisierbar, wenn es eine Basis gibt, in der $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Eine Matrix ist trigonalisierbar, wenn es eine ähnliche Matrix ($T = SAS^{-1}$) in obere Dreiecksform gibt.
unitärer Vektorraum	$\mathbb{C}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist $(V, \langle\rangle)$
Untervektorraum (eines Vektorraums)	W ist ein Untervektorraum von V, falls • (UVR1) $W \neq \emptyset$ • (UVR2) $v,w \in W \Rightarrow v + w \in W$ • (UVR3) $v \in W,\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in W$

Untervektorraum, affin (AUR)	X ist ein AUR von V, falls $\exists v \in V \wedge \exists$ UVR $W \subset V$ s.d. $X = v + W := \{u \in V \mid \exists w \in W,\ u = v + w\}$
Urbild	Das Urbild einer Menge $f^{-1}(N) \subset Y$ unter einer Funktion $f : X \to Y$ ist die Menge aller Elemente $x \in M$, die in sie abbilden. $$f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\}$$
Urbildabbildung	Abbildung f^{-1}, die jedem Element der Zielmenge eindeutig sein Urbildelement zuordnet. Geht nur, wenn f bijektiv ist. $$f^{-1} : Y \to X,\ \ x = f^{-1}(y)\ \ y = f(x)$$
Vektorraum (über einem Körper)	Sei V eine Menge und die Verknüpfungen $\oplus, \odot$ $$\oplus : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v \oplus w$$ $$\odot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \odot v$$ $(V, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum über dem Körper $(K, +, \cdot)$, falls • (V1, Vektoraddition) - $(V, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe - Existenz eines neutralen Elements $\vec{0}$ s.d. $\forall v \in V\ \ v \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus v = v$ - Existenz eines zu $v \in V$ inversen Elements $-v \in V$ s.d. $\forall v \in V\ \ -v \oplus v = v \oplus (-v) = \vec{0}$ • (V2) $\forall \lambda, \mu \in K$ und $\forall v, w \in V$ a) $(\lambda + \mu) \odot v = \lambda \odot v \oplus \mu \odot v$ b) $\lambda \odot (v \oplus w) = \lambda \odot v \oplus \lambda \odot w$ c) $\lambda \odot (\mu \odot v) = (\lambda \cdot \mu) \odot v$ d) $1 \odot v = v$
Vereinigung (zweier Mengen)	Die Vereinigung zweier Mengen A, B ist eine Menge, die alle Elemente aus beiden Mengen enthält. $$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
Verknüpfung (auf einer Menge G)	Abbildung $\star$ mit $$\star : G \to G,\ \ (a, b) \mapsto \star((a, b)) =: a \star b$$

Vielfachheit (Nullstelle)	Anzahl, wie oft die Nullstelle λ in der Lösung des char. Polynoms $P_F(\lambda)$ bzw. $P_A(\lambda)$ auftaucht $$\mu(P_F;\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \mu(P_A(\lambda))$$