Analysis I Zusammenfassung

613348

Inhaltsverzeichnis

1 Beweise

1.1 Beweismethoden

- **Beidseitige Implikation**
  Die logische Äquivalenz ist definiert als Relation zweier Aussagen, die dieselben Einträge in der Wahrheitstabelle haben. Es gilt die folgende, sehr nützliche Beziehung, mit der eine Äquivalenz durch zwei Implikationen gezeigt werden kann.

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{1}$$

- **Widerspruchsbeweis**
  Die Implikation $A \Rightarrow B$ kann gezeigt werden, indem A und die Verneinung von B (meist kreativ) über logische Schritte auf einen Widerspruch geführt werden

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow \text{Widerspruch}) \tag{2}$$

- **Kontraposition**
  Die folgenden Aussagen sind äquivalent, d.h. $\neg B \Rightarrow \neg A$ zu zeigen, zeigt $A \Rightarrow B$, was unter Umständen leichter zu beweisen ist.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \tag{3}$$

- **Vollständige Induktion**
  siehe entsprechendes Kapitel

1.2 Beweise Mengenlehre

Tabelle 1: Ausformulierungen der Mengennotation

Mengennotation	Ausformuliert
$x \in A$	$x \in A$
$x \in A^c$	$x \notin A$
$x \in (A \cup B)$	$x \in A$ oder $x \in B$
$x \in (A \cap B)$	$x \in A$ und $x \in B$
$x \in (A \setminus B)$	$x \in A$ und $x \notin B$
$\neg(x \in ...)$	$x \notin ...$
$(x, y) \in (A \times B)$	$x \in A \wedge y \in B$

- **Äquivalenz**
  Eine Äquivalenz zeigt man durch Implikation in beide Richtungen gezeigt. Dabei wird für den Hinweg $\boxed{\Rightarrow}$ zunächst die linke Seite als wahr angenommen und daraus die rechte Seite abgeleitet. Dann wird auf dem Rückweg $\boxed{\Leftarrow}$ die rechte Seite als wahr angeommen und die linke Seite gefolgert.

  Beispiel

  zz: $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow ((A \cup B) \subseteq C)$

  $\boxed{\Rightarrow}$ Es gelte $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.
  Sei $x \in A \cup B$ beliebig. Dann ist entweder $x \in A \vee x \in B$.
  Aus der Annahme der linken Seite folgt: $A \subseteq C \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$ und $B \subseteq C \Rightarrow (x \in B \Rightarrow x \in C)$.
  Daher folgt $(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$, weil in beiden Fällen das Element in C liegt.
  Zurück in Mengennotation wurde gezeigt, dass $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow ((A \cup B) \subseteq C)$ ✓

  $\boxed{\Leftarrow}$ Es gelte $(A \cup B) \subseteq C$.
  Sei $a \in A$ beliebig.
  Eingesetzt in die linke Annahme folgt dann: $a \in A \cup B$ und somit $a \in C$.
  Analog für $b \in B$. $b \in A \cup B$ und somit $b \in C$.
  Es gilt also $a \in A \Rightarrow a \in C$ und $b \in B \Rightarrow b \in C$.
  Zurück in Mengennotation wurde gezeigt, dass $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftarrow ((A \cup B) \subseteq C)$ ✓

  Es wurde also gezeigt, dass $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow ((A \cup B) \subseteq C)$ ■

- **Teilmenge einer Menge**
  Um zu zeigen, dass A eine Teilmenge von B ist, muss gezeigt werden, dass

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \tag{4}$$

- **Gleichheit zweier Mengen**
  Um zu zeigen, dass zwei Mengen gleich sind, muss gezeigt werden, dass die erste Menge eine Teilmenge der zweiten und umgekehrt ist.

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \tag{5}$$

Beispiel

zz: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (eine De Morgan'sche Regel)

$\boxed{\subseteq}$ Zeige, dass $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

$$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$$

Es wurde gezeigt, dass $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \Leftrightarrow (A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ ✓.

$\boxed{\supseteq}$ Zeige, dass $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$.

Es kann derselbe Weg aus $\boxed{\subset}$, nur rückwärts genommen werden. In diesem Fall werden die Folgepfeile zu Äquivalenzpfeilen umgeschrieben und der Beweis ist vollendet. ■

- **Kontraposition bei Komplement**
  Für Beweise mit Komplementen (A^c, B^c) kann es nützlich sein, die Kontraposition zu nutzen

$$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)) \tag{6}$$

Beispiel

zz: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$

$\boxed{\subseteq}$ Zeige $(A \subseteq B) \Rightarrow (B \subseteq A^c)$

$$\begin{aligned} &(x \in A \Rightarrow x \in B) \overset{\text{Kontraposition}}{\Rightarrow} (\neg(x \in B) \Rightarrow \neg(x \in A)) \Rightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Rightarrow \\ \Rightarrow &(x \in B^c \Rightarrow x \in A^c) \end{aligned}$$

Zurück in Mengennotation: $(A \subseteq B) \Rightarrow (B^c \subseteq A^c)$ ✓.

$\boxed{\supseteq}$ Zeige $\subseteq$ Rückwärts. ■

- **Verneinung Kartesisches Produkt**
  Bei der Verneinung des kartesischen Produkts entsteht gemäß De-Morgan

$$\neg(x \in A \wedge y \in B) = x \notin A \vee y \notin B \tag{7}$$

1.3 Beweise Funktionen

Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

- **Surjektiv**, **Injektiv**, **Bijektiv**
  f ist surjektiv, wenn jedes Element der Zielmenge B mindestens einmal getroffen wird.

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b \tag{8}$$

  f ist injektiv, wenn jedes Element der Zielmenge B höchstens einmal getroffen wird.

$$\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a' \tag{9}$$

  f ist bijektiv, wenn jedes Element der Zielmenge B genau einmal getroffen wird.
  Alt.: f ist surjektiv und injektiv.

$$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b \tag{10}$$

  In Beweisen wird das $\forall b$ bzw. $\forall a, a'$ dadurch gewährleistet, dass $b \in B$ bzw. $a, a' \in A$ beliebig gewählt wird.
  Für den Injektivitätsbeweis wird $f(a) = f(a')$ als wahr angenommen und die Implikation $a = a'$ gezeigt.

  Beispiel

  geg: A, B, C Mengen, $i : A \to B, s : B \to C$ Funktionen; zz: s, i sind injektiv $\Rightarrow s \circ i$ ist injektiv

  Es gelte s, i sind injektiv.
  Zeige, dass $\forall a, a' \in A : (s \circ i)(a) = (s \circ i)(a') \Rightarrow a = a'$.
  Sei $a, a' \in A$ beliebig.
  Es gelte $(s \circ i)(a) = (s \circ i)(a') \Leftrightarrow s(i(a)) = s(i(a')) \Rightarrow i(a) = i(a') \Rightarrow a = a'$.
  Da $a, a' \in A$ beliebig, wurde gezeigt, dass s, i inj. $\Rightarrow \forall a, a' \in A : (s \circ i)(a) = (s \circ i)(a') \Rightarrow a = a'$ ■

- **Bild**
  Nutze die Definition. Liegt ein Element im Bild $y \in f(M)$, dann folgt aus der Definition von f, dass

$$\exists x \in M : f(x) = y \tag{11}$$

  Ist M z.B. ein Schnitt oder eine Vereinigung, können dann wie in Mengenbeweisen üblich logische Operationen durchgeführt werden.

- **Urbild**
  Nutze die Definition des Urbildes. Analog zum Bild folgt aus der Definition des Urbilds.

$$x \in f^{-1}(M) \Leftrightarrow f(x) \in M \tag{12}$$

2 Vollständige Induktion

Die Aussage (**Induktionsvoraussetzung**) $A(n)$ gilt für alle $n \geq n_0$ (wobei $n \in \mathbb{N}$), wenn gezeigt wird, dass

1. $A(n_0)$ ist wahr (**Induktionsanfang**)
2. Für ein beliebiges n folgt, dass $A(n+1)$ richtig ist, wenn $A(n)$ richtig ist (**Induktionsschritt**)

Beispiel

zz: $A(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \geq 1$

1. Induktionsanfang

$$A(1) : \sum_{i=1}^{1} i = 1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(2) = 1 \qquad \checkmark$$

2. Induktionsschritt

$$\text{IB: } \sum_{i=1}^{n+1} i \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &\stackrel{1}{=} \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2+n)(n+1)}{2} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Strategie: Induktionsschritt so umformen, dass die Induktionsvoraussetzung eingesetzt werden kann.

2.1 Elementare Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R} \tag{16}$$

3 Betrag und Dreiecksungleichung

Um Ungleichungen mit Beträgen zu zeigen, nutze die Dreiecksungleichung

$$|x+y| \leq |x| + |y| \tag{17}$$

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y| \tag{18}$$

- Umformen zu **wahren Aussage**
  Um zu zeigen, dass eine Ungl. gilt, muss sie nicht vollständig von einer Seite zur anderen umgeformt werden. Es kann z.B. argumentiert werden, dass alle Terme einer Seite positiv oder negativ sind und es sich daher um eine wahre Aussage handelt (Baum ÜB 4 10b).

- **Fallunterscheidung**
  Um bspw. abzuschätzen, für welche Werte einer Variable die Ungleichung gilt, können Abschätzungen für die Beträge gemacht werden.

  Beispiel

  ges: Werte für $x \in \mathbb{R}\ \{3\}$, für die $\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{1+|x-1|}$ gilt.

  Umformen der Ungleichung zu $1 + |x-1| > |x-3|$

  1. Fall: $x < 1$

  $$1 + |x-1| = 1 - (x-1) = 2 - x \overset{!}{>} |x-3| = -(x-3) = 3 - x$$
  $$\Leftrightarrow 2 > 3$$

  Die Ungl. gilt also nicht für $x < 1$.

  2. Fall: $1 \leq x < 3$

  $$1 + |x-1| = 1 + x - 1 = x \overset{!}{>} |x-3| = -(x-3) = 3 - x$$
  $$\Leftrightarrow x > 3/2$$

  Die Ungl. gilt somit für $\underline{\frac{3}{2} < x < 3}$

  3. Fall: $x < 3$

  $$1 + |x-1| = 1 + x - 1 = x \overset{!}{>} |x-3| = x - 3$$
  $$\Leftrightarrow 0 > -3$$

  Die Ungl. gilt somit für $x > 3$.
  Insgesamt gilt die Ungl. somit für $x > 3/2$ und $x \neq 3$.

4 Beschränktheit, sup, inf, max, min

Definition max, min, sup, inf.

$$\exists y_0 \in Y : \forall y \in Y : y \leq y_0 \equiv \max(Y) \tag{19}$$
$$\exists y_0 \in Y : \forall y \in Y : y \geq y_0 \equiv \min(Y) \tag{20}$$
$$\forall y \in Y : y \leq \sup(Y) \tag{21}$$
$$\forall y \in Y : y \geq \inf(Y) \tag{22}$$

- **Gegebene Mengen**
  Für gegebene Mengen lässt sich durch Ausrechenen der ersten Elemente und Grenzwertbetrachtung, sowie ggf. Nutzen anderer Bedingungen feststellen, ob die Menge beschränkt ist und ob sup, inf, max, min existieren und wie sie lauten.

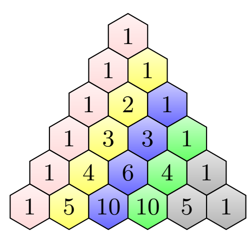
  Beispiel
  geg: $M = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2x + 3 > 6, x < 0\}$
  Lös: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -3, 1$. Da die Funktion positiv sein muss, sind alle Elemente unterhalb -3 und alles überhalb 1 erlaubt. Die zweite Bedingung verbietet aber alle Elemente größer 1, weshalb die Menge $M = (-\infty, -3]$ ist.
  Die Menge ist demnach nicht nach unten beschränkt, es existieren kein inf und min. Die Funktion ist nach oben beschränkt, sup = max = -3.

- **Beweise**
  Ist eine Menge A beschränkt, so existieren sup, inf.

5 Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{23}$$

Die **Binomialkoeffizienten** lassen sich am Pascal'schen Dreieck ablesen (Zeile $\hat{=}\ n = 0, 1, 2, \ldots$, Diagonale von links nach rechts $\hat{=}\ k = 0, 1, 2, \ldots$).



Sie sind dabei die Anzahl der k-elementigen Teilmengen, die man aus einer n-elementigen Menge bilden kann, wobei $0 < k \leq n$ gilt. Dabei gilt Ziehen ohne Zurücklegen.

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{24}$$

mit $\binom{n}{0} := 1$.

6 Komplexe Zahlen

- **Algebraische Form**
  Um eine komplexe Zahl in Bruchform in die algebraische Form
  $$z = a + ib \tag{25}$$
  zu bringen, erweitere mit dem komplex konjugierten des Nenners.
  Bei komplexen Zahlen mit Potenz lohnt es sich zunächst das Innere darzustellen und dann erst die Potenz anzuwenden. Im letzten Schritt hilft der binomische Lehrsatz.

- **Trigonometrische-/Polardarstellung**
  Um eine komplexe Zahl in die trigonometrische- bzw. Polardarstellung
  $$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{26}$$
  $$z = |z| \cdot e^{i\theta} \tag{27}$$
  zu bringen, müssen Betrag $|z|$ und Argument θ über die bzw. eine der folgenden Gleichungen berechnet werden.
  $$|z| = \sqrt{z \cdot z^\star} \tag{28}$$
  $$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a} \tag{29}$$

- **Gauß'sche Zahlenebene**
  Um eine Menge in der Gauß'schen Zahlenebene (= Koordinantesystem mit $\Im$ auf der y-Achse und $\Re$ auf der x-Achse) darzustellen, müssen die Bedingungen umformuliert werden, um interpretierbar gemacht zu werden. Dabei helfen
  $$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1^\star + z_2^\star) \tag{30}$$
  $$z + z^\star \Rightarrow \Im = 0 \tag{31}$$
  $$z - z^\star \Rightarrow \Re = 0 \tag{32}$$
  $$1 \leq |z - i| \leq 2 \Rightarrow \text{Abstand zw. Zahl zum Punkt } i \text{ ist} \geq 1 \text{ und} \leq 2 \tag{33}$$

6.1 Elementare Ungleichungen

$$1 + x \leq e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{34}$$
$$\ln(1+x) \leq x, \qquad \text{falls } x > -1 \tag{35}$$
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{36}$$
$$\sin(x) \leq x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{37}$$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{38}$$
$$1 + x \leq \frac{1}{1-x}, \qquad \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \tag{39}$$

7 Konvergenz von Folgen

Es gelten die Grenzwertsätze

$$\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n \tag{40}$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n \tag{41}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n} \qquad \text{falls } \lim_{n\to\infty} v_n \neq 0 \tag{42}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{u_n} = \exp(\lim_{n\to\infty} u_n) \tag{43}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = \ln(\lim_{n\to\infty} u_n) \qquad \text{falls } \lim_{n\to\infty} u_n > 0 \tag{44}$$

7.1 Reelle Folgen

- **Brüche/Wurzelterme/Induktionsformel**
  - Bei Brüchen ist es sinnvoll Potenzen von n auszuklammern, um vor allem Nullfolgen zu erkennen
  Bsp: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2+3n+1}{6n^4+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4} \frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{6+\frac{3}{n^4}} = \frac{1+0+0+0}{6+0} = \frac{1}{6}$

  - Bei einer Summe von mehreren Wurzeltermen kann es sinnvoll mit dem Term, aber einem umgekehrten Vorzeichen zu erweitern und dann wie mit Brüchen zu verfahren.
  Bsp: $\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3n} = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3n}} = ... = \frac{\frac{2}{n}-3}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$

  - Lässt sich das Folgenglied über eine Summe beschreiben, ist es sinnvoll, eine mittels Induktion gezeigte Formel einzusetzen.
  Bsp: $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

- **Einschnürungssatz**
  Seien $(x_n)_n, (y_n)_n, (w_n)_n$ Folgen, es gelte $x_n \leq w_n \leq y_n$ und $(x_n)_n, (y_n)_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Dann ist der Grenzwert von w_n auch a.

- **Vergleich** mit kleinerer/größerer Folge

$$u_n \leq v_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n \tag{45}$$

  Dann insbesondere:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty \tag{46}$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \tag{47}$$

- **ε-n_0 bzw. M-n_0-Kriterium** Eine Folge $(u_n)_n$ konvergiert dann gegen einen Grenzwert a, also $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \; n \geq n_0 : |u_n - a| \leq \varepsilon \tag{48}$$

Beispiel

zz: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+4} = 0$

Nebenrechnung

$$\left|\frac{1}{n^2+4} - 0\right| = \frac{1}{n^2+4} \leq \frac{1}{n^2} \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

Stelle die Ungl. nach n um. Dieses wird im Beweis als n_0 gewählt.

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Gemäß dem archimedischem Axiom kann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden s.d. $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
Dann folgt $\forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n^2+4} - 0\right| = \frac{1}{n^2+4} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Somit wurde gezeigt, dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 > 0$ (nämlich $n_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$): $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 : |\frac{1}{n^2+4} - 0| \leq \varepsilon$.

- Zeige **Divergenz durch Teilfolgen Beispiele**
  Wenn nicht alle Teilfolgen gegen a konv., konv. die Folge $(u_n)_n$ nicht gegen a.
  Kontraposition von: $(u_n)_n$ konv. gegen a gdw. alle TF gegen a konv.

7.2 Komplexe Folgen

Komplexe Folgen konvergieren dann, wenn Realteil und Imaginärteil konvergieren. Der Grenzwert der Folge ergibt sich dann aus der algebraischen Form.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \Re(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \Im(z_n) \tag{49}$$

- **Trigonometrische Form**
  Dargestellt in der trigonometrischen Form lässt sich direkt der Betrag des Folgenglieds ablesen und einen Schluss auf z.B. Nullfolgen- oder Divergenzverhalten zu.

7.3 Elementare Grenzwerte von Folgen

Sei $a, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$\lim_{n\to\infty} n! = +\infty \tag{50}$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a \in (0,1) \\ +\infty, & a > 1 \end{cases} \tag{51}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \tag{52}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} = 0 \tag{53}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty \tag{54}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{55}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab} \tag{56}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e \tag{57}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{58}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \tag{59}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{60}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \frac{1}{e} \tag{61}$$

Für $n \to \infty$ gilt

$$\ln(n) \ll n^p \ll b^n \ll n! \ll n^n$$

mit $p > 0$ und $b > 1$.

8 Konvergenz von Reihen

- **Elementare Reihen**
  Die Grenzwerte bzw. Konvergenzverhalten der geometrischen, harmonischen und Teleskopreihe sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \begin{cases} = \frac{1}{1-a}, & \text{falls } |a| < 1 \\ \text{divergiert}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{62}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} \text{konvergiert}, & \text{falls } s > 1 \\ \text{divergiert}, & \text{sonst} \end{cases} \tag{63}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1} = a_0 - a_{n+1} \tag{64}$$

- **Divergenz falls keine Nullfolge**

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\geq n_0}^{\infty} u_k = +\infty \tag{65}$$

- **Quotientenkriterium (QK)**

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \begin{cases} < 1, & \text{absolut konvergent} \\ > 1, & \text{divergent} \\ = 1, & \text{keine Aussage} \end{cases} \tag{66}$$

  Nützlich bei Fakultäten.

- **Wurzelkriterium (WK)**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \begin{cases} < 1, & \text{konvergent} \\ > 1, & \text{divergent} \\ = 1, & \text{keine Aussage} \end{cases} \tag{67}$$

- **Satz der alternierenden Reihen (Leibniz-Kriterium)**
  Wird eine alternierende Reihe $\sum_{k\geq n_0} (-1)^k a_k$ untersucht, gilt das Kriterium

$$a_k \quad \text{positive Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\geq n_0} (-1)^k a_k \quad \text{konvergent} \tag{68}$$

- **Verdichtungskriterium**
  Sei $(u_n)_n$ eine positive fallende Folge, dann gilt

$$\sum_{n\geq n_0} u_n \quad \text{konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq n_0} 2^k u_{2^k} \quad \text{konvergiert} \tag{69}$$

- **Majorantenkriterium (Maj.)**
  Konvergiert eine größere Reihe, so konvergiert auch die zu untersuchende Reihe.
  Sei $|a_n| \leq b_n$, so folgt

$$\sum_{n=1} b_n \quad \text{konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1} a_n \quad \text{absolut konvergent} \tag{70}$$

- **Minorantenkriterium (Min.)**
  Divergiert eine kleinere Reihe, so divert auch die zu untersuchende Reihe.
  Sei $a_n \geq b_n$, so folgt

$$\sum_{n=1} b_n \quad \text{divergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1} a_n \quad \text{divergent} \tag{71}$$

- **Absolute Konvergenz**
  Eine Reihe $(a_n)_n$ konvergiert absolut (und ist somit konvergent), wenn

$$\sum_{n=1} |a_n| \quad \text{konv.} \tag{72}$$

  Nützlich für z.B. sin, da dieser im Betrag mit ≤ 1 weggenähert werden kann.

Beispiele

geg: $\sum_{k=2} \frac{k+2}{4^k}$ (QK)

$$\left| \frac{(k+1)+2}{4^{k+1}} \cdot \frac{4^k}{k+2} \right| = \frac{k+3}{4} \cdot \frac{1}{k+2} = \frac{k}{k} \frac{(1+\frac{3}{k})}{4(1+\frac{2}{k})} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{4} < 1 \quad \text{konvergiert}$$

geg: $\sum_{k=0} \frac{k}{2^k}$ (WK)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{2} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{konvergiert}$$

geg: $\sum_{n=1} \frac{n+1+\sqrt{n}}{2n^3-n}$ (Majorantenkriterium)

$$\sum_{n=1} \frac{n+1+\sqrt{n}}{2n^3-n} \leq \sum_{n=1} \frac{n+n+n}{2n^3-n^3} = \sum_{n=1} \frac{3n}{n^3} = 3 \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} \qquad \text{konvergiert}$$

8.1 Grenzwert von Reihen

Der Grenzwert einer Reihe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n_0}^{n} a_k \equiv \sum_{k\geq n_0}^{\infty} a_k \tag{73}$$

bestimmt sich dadurch, dass die zu untersuchende Reihe in eine der elementare Reihen umgeformt wird, dessen Grenzwert bereits bekannt ist.

- **Aufspalten der Summe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$$

- **Indexverschiebung**
  Was in Folgengliedindex addiert wird, wird in Start und Endwert der Summe subtrahiert.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(n-2)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n!}$$

8.2 Konvergenzradius

Der Konvergenzradius KR ist das größte z, für das eine Potenzreihe absolut konvergiert.

$$\sum_{k\geq n_0} a_k \cdot z^k \begin{cases} \text{absolut konvergent}, & |z| < \text{KR} \\ \text{divergiert}, & |z| > \text{KR} \end{cases} \tag{74}$$

z^k kann dabei auch in der Form $(z-z_0)^k$ sein.

- Bestimmung über **Hadamand-Formel**

$$\frac{1}{\text{KR}} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \in [0, +\infty] \tag{75}$$

- Bestimmung über **QK für Potenzreihen**
  Seien $(a_n)_{n\geq n_0}$ s.d. $a_n \neq 0$ für n groß genug.

$$\frac{1}{\text{KR}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty] \tag{76}$$

$\boxed{\text{Beispiel}}$

geg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot z^n$ (QK für Potenzreihen)

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1}\right| \cdot \left|\frac{n}{(-1)^n}\right| = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \Rightarrow \text{KR} = \frac{1}{1} = 1$$

geg: $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot 4^n \cdot (z-1)^n$ (Hadamand)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^4 \cdot 4 \xrightarrow{n\to\infty} 4 \quad \Rightarrow \text{KR} = \frac{1}{4}$$

---

9 Stetigkeit

Anschaulich bedeutet Stetigkeit in einem Punkt, dass die betrachtete Funktion in einer kleinen Umgebung davon keinen plätzlichen Sprung im Funktionswert macht.

- **Elementare stetige Fkt./stetige Verknüpfungen**
  - Konstante Funktionen sind stetig
  - Die Identitätsfunktion $x \mapsto x$ ist stetig
  - Polynomiale Funktionen sind stetig
  - Rationale Funktionen in $\mathbb{C} \setminus P$ sind stetig (wobei P die Menge der NSn des Nenners)

  Sind $f, g : A \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ stetige Funktionen, so ist
  - die Addition $f + g$ stetig
  - die Multiplikation $f \cdot g$ stetig
  - das Verhältnis $\frac{f}{g}$ stetig, falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$
  - $\max(f, g), \ \min(f, g)$ stetig für $\mathbb{K}' = \mathbb{R}$
  - $\Re(f), \ \Im(f), \ |f|$ stetig für $\mathbb{K}' = \mathbb{C}$

- **ε-δ-Kriterium**
  Eine Funktion f ist im Punkt a stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \tag{77}$$

Beispiel

zz: x^2 stetig in $\mathbb{R}$

Lös: Zeige $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq \delta \Rightarrow \left|x^2 - a^2\right| \leq \varepsilon$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned} |x^2 - a^2| &= |(x + a) \cdot (x - a)| = |x + a| \cdot |x - a| \leq |x + a| \cdot \delta = |x - a + 2a| \cdot \delta \\ &\leq (|x - a| + |2a|) \cdot \delta \leq (\delta + |2a|) \cdot \delta \overset{\delta \leq 1}{\leq} (1 + |2a|) \cdot \delta \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \left(\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + |2a|} \wedge \delta \leq 1\right) \Leftrightarrow \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + |2a|}\right) \end{aligned}$$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1+|2a|}\right)$.

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| \leq \delta$.

$$|x^2 - a^2| = ... \leq (1 + |2a|) \cdot \delta \leq (1 + |2a|) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + |2a|} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

- **Beidseitiger Grenzwert Kriterium**
  f ist stetig im Punkt a, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{78}$$

d.h. $f(a)$ existiert, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und beide sind gleich.

Beispiel

geg: $f(x) = \begin{cases} 3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ ges: Stetigkeit in $x = 0$

$$f(0) = 0 \overset{!}{=} \lim_{x\to 0}\big(3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)\big) = 0 - 0 = 0 \checkmark$$

- **Folgenkriterium**
  $\forall (u_n)_n \in A$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a) \tag{79}$$

Beispiel

zz: x^2 stetig in $a = 2$
Lös: Sei $\forall (u_n)_n$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$.

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty}(u_n)^2 = \lim_{n\to\infty} = (u_n \cdot u_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} u_n = 2 \cdot 2 = 4$$
$$f(a) = f(2) = 2^2 = 4$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a) \qquad \blacksquare$$

Beispiel

zz: f(x) $= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ist unstetig in 0.
Lös: Betrachte die Folge $(u_n)_n = (1/n)_n$

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(0) = 0 \qquad \blacksquare$$

10 Grenzwert von Funktionen

10.1 Formales Bestimmen von Grenzwerten

Eine Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvegiert gegen l bzw. divergiert (=konv. gegen $\pm\infty$), wenn

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(a)}_{=l}| \leq \varepsilon \tag{80}$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 > 0 \text{ s.d. } \forall x \in \mathbb{R} \; x \geq x_0 : |f(x) - \underbrace{f(a)}_{=l}| \leq \varepsilon \tag{81}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists \delta \gtrless 0 \text{ s.d. } \forall x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \gtrless M \tag{82}$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \; \exists x_0 \gtrless 0 \text{ s.d. } \forall x \in \mathbb{R} \; x \overset{\geq}{\leq} x_0 : f(x) \gtrless M \tag{83}$$

Beispiel ε-δ-Beweis

zz: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x}{x-2} = 3$

Lös: Zeige $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| \leq \delta \Rightarrow |\frac{x}{x-2} - 3| \leq \varepsilon$

$$\left|\frac{x}{x-2} - 3\right| = \left|\frac{x-(3x-2)}{x-2}\right| = \frac{|-2||x-3|}{|x-2|} = 2\delta\frac{1}{|x-2|}$$

Wähle $\delta \leq \frac{1}{2}$ (Nicht $\delta = 1$, da der linke äußere Rand des δ-Schlachs dort eine Def.lücke hat: $3 - \delta = 3 - 1 = 2$, $f(2)$ undefiniert).

$$|x-3| \leq \delta \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x - 3 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x - 2 \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} \leq 2$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\left|\frac{x}{x-2} - 3\right| = \left|\frac{x-(3x-2)}{x-2}\right| = \frac{|-2||x-3|}{|x-2|} = 2\delta\frac{1}{|x-2|} \leq 4\delta \leq 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Beispiel ε-x_0-Beweis

zz: $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$

Lös: Zeige $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R} \; x \geq x_0 : |\frac{x^2}{3x^2+1} - \frac{1}{3}| \leq \varepsilon$

$$\left|\frac{x^2}{3x+1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x^2 - (3x^2+1)}{3(3x^2+1)}\right| = \frac{|-1|}{9x^2+1} \leq \frac{1}{9x^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x_0^2} \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $x_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq x_0$ folgt

$$\left|\frac{x^2}{3x+1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3x^2 - (3x^2+1)}{3(3x^2+1)}\right| = \frac{|-1|}{9x^2+1} \leq \frac{1}{9x^2} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x_0^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Beispiel } M\text{-}\delta\text{-Beweis}}$

zz: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{2x-2} = \infty$

Lös: Zeige $\forall M > 0\ \exists\delta > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \delta \Rightarrow \frac{x}{2x-2} > M$

Da $x \to 1^+$, ist $x > 1$ und somit $|x-1| = x-1 \leq \delta$.

$$\frac{x}{2x-2} = \frac{x}{2(x-1)} \geq \frac{x}{2\delta} \geq \frac{1}{2\delta} \overset{!}{>} M$$

Sei $M > 0$. Wähle $\delta < \frac{1}{2M}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\frac{x}{2x-2} = \frac{x}{2(x-1)} \geq \frac{x}{2\delta} \geq \frac{1}{2\delta} > \frac{1}{2\frac{1}{2M}} = M \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Beispiel } M\text{-}x_0\text{-Beweis}}$

zz: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty$

Lös: Zeige $\forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 > 0$ s.d. $\forall x \in \mathbb{R}\ x \geq x_0 : \frac{x^2}{x+1} > M$

$$\frac{x^2}{x+1} \overset{x\geq x_0\geq 1}{\geq} \frac{x^2}{x+x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \geq \frac{x_0}{2} \overset{!}{>} M \quad \Rightarrow \quad x_0 > 2M$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $x_0 = \max(1, 2M)$. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq x_0$ gilt:

$$\frac{x^2}{x+1} \overset{x\geq x_0\geq 1}{\geq} \frac{x^2}{x+x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \geq \frac{x_0}{2} \geq \frac{2M}{2} = M \qquad \blacksquare$$

- Um z.B. $|x+2|$ abzuschätzen, wähle δ kleiner einer Zahl (typisch: 1) und stelle die Ungl. um.

$$|x-2| \leq \delta \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq x-2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 3 \leq x+2 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad |x+2| \leq 5$$

Schreibe dann $\delta = \min\{1, ...\}$ wobei ... eine weitere Bedingung für δ ist, die i.d.R. später gefunden wird.
- Für z.B. $x \to 1^+$ folgt die Bedingung $x > 1$, da es sich von rechts annähert.
- Für mehrere Abschätzungen z.B. $x_0 \geq 1,\ x_0 \geq ...$, schreibe $x_0 = \max(1, ...)$

10.2 Praktisches Bestimmen der Grenzwerte

Es gelten die Grenzwertsätze

$$\lim_{x\to\infty}(f+g) = \lim_{x\to\infty} f + \lim_{x\to\infty} g \tag{84}$$

$$\lim_{x\to\infty}(f\cdot g) = \lim_{x\to\infty} f \cdot \lim_{x\to\infty} g \tag{85}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to\infty} f}{\lim_{x\to\infty} g} \qquad \text{falls } \lim_{x\to\infty} g \neq 0 \tag{86}$$

- **Einsetzen**
$$\lim_{x\to 1}(3x^2+4) = 3\cdot 1^2+4 = 7$$
Außerdem gilt:
$$\infty+\infty,\ -\infty-\infty=-\infty,\ a\pm\infty=\pm\infty,\ \infty\cdot\infty=\infty,\ b\cdot\infty=\operatorname{sgn}(b)\cdot\infty$$
$$\frac{b}{\pm\infty}=0,\ e^{\infty}=\infty,\ e^{-\infty}=0,\ \ln(\infty)=\infty,\ \ln(0)=-\infty$$
Wichtige Umstelltricks für das Einsetzen sind
  - **Faktorisieren**
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}} = 12$$
  - **Rationalisierung des Zählers** für Wurzeln
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \stackrel{1}{=} \lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x+5-9}}{\cancel{(x-4)}\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{6}$$
  - **Doppelbrüche mittels Hauptnenner lösen**
$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x}{x+2}-\frac{3}{5}}{x-3} \stackrel{1}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\frac{x}{x+2}-\frac{3}{5}}{x-3}\cdot\frac{5(x+2)}{5(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{5x-3(x+2)}{5(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}}{5\cancel{(x-3)}(x+2)} = \frac{2}{25}$$
- **Einschnürungssatz**
Wenn $g(x)\le f(x)\le h(x)$, dann folgt aus
$$\lim_{x\to a}g(x) = \lim_{x\to a}h(x) = l \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}f(x) = l \tag{87}$$
- **L'Hopital**
De l'Hopitals Regel kann in den Fällen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ angewendet werden. Dann gilt
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{88}$$
wobei a auch $\pm\infty$ sein kann.

Beispiel

ges: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{1+x(1-x)^{1/4}}$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{1+x(1-x)^{1/4}} \stackrel{\text{Typ "0/0"}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{2+x}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}}{1+\frac{1}{4}(1-x)^{-3/4}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Die anderen pathologischen Fälle lassen sich wie folgt auf die L'Hopital Fälle umformen.

- "$0 \cdot \infty$"
  Falls bereits ein Bruch vorhanden, können die Faktoren einfach "zusammengeschoben" werden:
  $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\right) \overset{"0\cdot\infty"}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \ldots$$
  Falls kein Bruch vorhanden, erzeuge einen Doppelbruch:
  $$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x)) \overset{"0\cdot\infty"}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{=} \ldots$$
- "0^0", "∞^0", "1^∞"
  Diese Pathologien werden mittels dem e-ln-Trick in "$0\cdot\infty$" umgeformt
  $$\lim_{x\to 0^+} x^{2x} \overset{"0^0"}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(x^{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x\cdot\ln(x)} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}(2x\cdot\ln(x))\right) \overset{"0\cdot\infty"}{=} \ldots$$
- "$\infty - \infty$"
  $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\ln(x)\right) \overset{"\infty-\infty"}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x)-(1-x)}{(1-x)\ln(x)} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \ldots$$

- **Potenzreihe**
  Teile der Funktion können durch ihre Potenzreihen genähert werden (z.B. bis Grad 3).

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \qquad \text{KR} = \infty \tag{89}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots \qquad \text{KR} = \infty \tag{90}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \qquad \text{KR} = \infty \tag{91}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad \text{KR} = 1 \tag{92}$$

$$\sqrt{1+x} = \quad = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots \qquad \text{KR} = 1 \tag{93}$$

Beispiel

ges: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}$ mit Näherungen bis Grad 3 um $x = 0$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}$$
$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad \Rightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \approx \ln\left(1 + (-\frac{x^2}{6})\right) \approx -\frac{x^2}{6}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2} \approx \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/6}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

---

11 Differenzierbarkeit

Eine Funktion f ist am Punkt a differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotients, genannt Ableitung, existiert.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv f'(a) \tag{94}$$

Eine Funktion f ist stetig differenzierbar, wenn ihre Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Beispiel

zz: $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ diff.bar, stetig diff.bar

Lös: Untersuche Diffbar.keit.
f ist für $x \neq 0$ als Verkettung und Produkt von diff.baren Funktionen diff.bar.
Es bleibt zu zeigen, dass f in 0 diff.bar ist.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Denn $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$ und dann Einschnürungssatz.

Untersuche stetige Diff.barkeit.
Stetig Diff.bar bedeutet, dass die Ableitung f' stetig ist.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f' ist als Verkettung, Summe und Produkt von stetigen Fktn. stetig. Es bleibt zu zeigen, dass f' in 0 stetig ist. Dazu muss gelten:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x)$$
$$f'(0) = 0 \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 0} \left[3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 - 0 = 0 \checkmark$$

11.1 Tangentengleichung

Die Tangentengleichung für eine Tangente, die die Funktion am Punkt x_0 schneidet, lautet

$$T_{f,x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \tag{95}$$

12 Ableitungen

Die Ableitung der Funktion f im Punkt a ist der Grenzwert der Steigungsrate

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{96}$$

Die folgenden Regeln gelten für zwei differenzierbare Funktionen f, g

- **Additionsregel**

$$(f + g)' = f' + g' \tag{97}$$

- **Produktregel**

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{98}$$

- **Quotientenregel** Für $g \neq 0$ gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \tag{99}$$

- **Potenzregel** Sei $n \in \mathbb{N}^\star$

$$(f^n)' = nf' \cdot f^{n-1} \tag{100}$$

- **Kettenregel**

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{101}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{102}$$

  mit $z = g(y),\ y = f(x)$.

12.1 Kurvendiskussion

Die kritischen Punkte einer Funktion f sind die Nullstellen ihrer Ableitung f'.

$$f'(x_0) = 0 \tag{103}$$

mit einem kritischen Punkt x_0.
Handelt es sich bei $f(x_0)$ um ein lokales Extremum, gilt

$$f''(x_0) \begin{cases} < 0, & \text{lokales Maximum} \\ > 0, & \text{lokales Minimum} \end{cases} \tag{104}$$

Sind alle Punkte $\leq$ bzw. $\geq$ des Funktionswerts des lokalen Maximums (Minimums), handelt es sich um ein **globales** Maximum (Minimum).

Die Funktion ist **monoton wachsend** falls $f'(x) \geq 0$ (streng: $>$) bzw. **monoton fallend** falls $f'(x) \leq 0$ (streng: $<$) und **konstant** falls $f'(x) = 0$.

12.2 Elementare Ableitungen

$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= e^x \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \\
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin \\
\tan' &= 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \equiv \sec^2(x) \\
\cot' &= -\frac{1}{\sin^2} \equiv -\csc^2(x) = -1 - \cot^2 \\
\sec' &= \sec x \tan x \\
\csc' &= -\cot x \csc x \\
\arccos' &= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
\arcsin' &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
\arctan' &= \frac{1}{1+y^2} \\
\operatorname{arccot}' &= -\frac{1}{1+y^2} \\
\sinh' &= \cosh \\
\cosh' &= \sinh \\
\tanh' &= \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \\
\coth' &= -\frac{1}{\sinh^2} = 1 - \coth^2 \\
\operatorname{arcsinh}' &= \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \\
\operatorname{arccosh}' &= \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}
\end{aligned}
$$

Herleitung

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen stammen aus dem Satz der diff.baren Umkehrfunktionen, der unter gewissen Voraussetzungen besagt: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$.

$$
\begin{aligned}
(\sin^{-1})'(x) \equiv (\arcsin)'(x) &= \frac{1}{((\sin)' \circ \arcsin)(x)} = \frac{1}{(\cos \circ \arcsin)(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

13 Integration

- **Partielle Integration**

$$\int^x f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int^x f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \tag{105}$$

  Vor allem bei ln und dann $f(x) = \ln(...)$.

- **Variablentransformation**

$$\int^y f(y)\,\mathrm{d}y \overset{y=\psi(x)}{=} \int^{x=\psi^{-1}(y)} f(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{106}$$

- **Trigonometrische Funktionen**, um den Integrand zu vereinfachen

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \tag{107}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \tag{108}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \tag{109}$$

- **Linearisierung** von trig. Fktn. , um den Integrand zu vereinfachen

$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \tag{110}$$

$$\sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n = \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ixk} \cdot (-e^{ix})^{n-k} \tag{111}$$

- **Substitutionen für trig./hyperb. Fktn. mit Symmetrien**

Tabelle 2: Trigonometrische Funktionen $f(x) = R(\cos x, \sin x)$

f ungerade	$u = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$
$f(x) = -f(-\pi - x)$	$u = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$
$f(x) = f(x + \pi)$	$u = \tan x \Rightarrow \mathrm{d}u = 1 + \tan^2 x = (1 + u^2)\,\mathrm{d}u$
keine Symmetrie	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$ $\Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Tabelle 3: Hyperbelfunktionen $f(x) = R(\cosh x, \sinh x)$

Im Allgemeinen	$u = e^x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{e^x} = \frac{\mathrm{d}t}{u}$
$f(x) = -f(-x)$	$u = \cosh x$
$f(x) = -f(i\pi - x)$	$u = \sinh x$
$f(x) = f(i\pi + x)$	$u = \tanh x$
keine Symmetrie	$t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$ $\Rightarrow \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2},\ \tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$

13.1 Riemann-Summe zu Integral

Um eine Riemann-Summe in ein Integral umzuschreiben, werden zunächst a, b, f durch Vergleichen mit der allgemeinen Form der Riemann-Summe ermittelt und dann einfach in das Integral eingesetzt.

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\Delta x} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \equiv \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{112}$$

Beispiel

ges: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$

Am Faktor vor der Summe liest man ab, dass $b-a=3$. Aus dem Argument der Wurzel folgt, dass $a=1$ ist. Somit ist $b=4$. Die Wurzel ist die Funktion f.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}} = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$$

14 Taylor-Reihe mit Rest

Die Formel für die Taylor-Reihe mit Resttermabschätzung ist

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + R_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(}k)(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{113}$$

mit dem Entwicklungspunkt a.

Beispiel

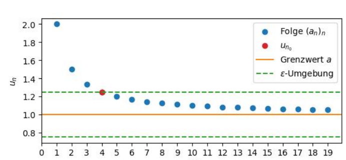
ges: Näherung für $f(x) = \sqrt{1+x}$ mit $n=2$, $a=0$ und $|x| < \frac{1}{2}$

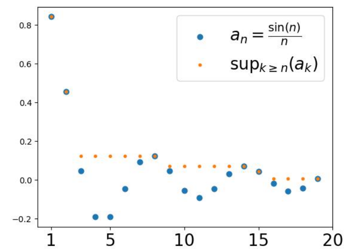
$$\begin{aligned} f(x) &= T_2(f,0)(x) + R_2(f,0)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) + \left(\frac{1}{16}|x|^3|1+\xi|^{-5/2}\right) \end{aligned}$$

Da $|\xi| < |x| < \frac{1}{2}$, folgt $-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1+\xi \Leftrightarrow |1+\xi|^{-1} < 2 \Leftrightarrow |1+\xi|^{-5/2} < 2^{2/5} < 2^3 < 8$.

$$= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) + \left(\frac{1}{2}|x|^3\right)$$

Tabelle 4: Glossar

Tautologie	Aussage, die aus mehreren Bestandteilen zusammengesetzt ist und immer wahr ist, unabhängig von dem Wahrheitswert ihrer Bestandteile. Bsp: $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
Äquivalenz	Tautologie der Form $A \Leftrightarrow B$
Prädikat	Aussage, die von einer Variablen abhängt
Axiom	Aussage, der man den Wahrheitswert "wahr" zuordnet
Potenzmenge	Menge aller Teilmengen einer Grundmenge A. Dabei sind $\emptyset := \{\}$ und A immer Elemente der Potenzmenge. Bsp: Sei $A = \{1, 2\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$
Funktion	Beziehung zwischen 2 Mengen, die jedem Element der 1. Menge genau einem Element in der 2. Menge zuordnet.
Graph	Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$ aus den Elementen x der Definitionsmenge und den zugehörigen Funktionswerten $f(x)$.
Bild	Das Bild einer Teilmenge A ist die Menge aller Funktionswerte $f(a)$.
Urbild	
Obere Schranke der Menge M	Wert in einer Menge $X \supseteq M$, für den gilt, dass alle Werte in der Teilmenge M kleiner gleich als er sind.
Untere Schranke der Menge M	Wert in einer Menge $X \supseteq M$, für den gilt, dass alle Werte in der Teilmenge M größer gleich als er sind.
Beschränkt	Eine Menge M ist beschränkt, wenn eine obere und untere Schranke existieren.
Supremum	Kleinste obere Schranke $\forall y \in Y : y \leq \sup(Y)$
Infimum	Größte untere Schranke $\forall y \in Y : y \geq \sup(Y)$
Maximum	Größter Wert einer Menge. Alt.: Obere Schranke, die zu der Menge gehört.
Minimum	Kleinster Wert einer Menge. Alt.: Untere Schranke, die zu der Menge gehört.
Konvergenz	Eine Folge ist konvergent, wenn für alle Abstände $\varepsilon > 0$ um den Grenzwert a ein bestimmtes Folgenglied u_{n_0} gefunden werden kann, s.d. alle Folgenglieder danach im ε-Bereich um den Grenzwert a liegen. $$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \lvert u_n - a \rvert < \varepsilon \quad \Leftrightarrow: \quad \lim_{n \to \infty} u_n = a$$ 

Teilfolge	Folge der Form $v_n = u_{\varphi(n)}$ wobei $\varphi(n)$ eine steigende Fkt. ist
Limes superior	Grenzwert der Folge $\sup_{k\geq n} u_k$. Ein Folgenglied dieser Folge $\sup_{k\geq n} u_k$ ist dabei das Maximum aller Glieder u_k mit $k \geq n$. Die Glieder davor werden ignoriert.  $$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} u_k)$$
Limes inferior	$\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} u_k)$
Häufungspunkt	Grenzwert einer konvergenten Teilfolge
Satz von Bolzano-Weierstraß	Ist eine Folge beschränkt, existiert eine konvergente Teilfolge
Cauchy-Folge	Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, wenn für alle Abstände $\varepsilon > 0$ ein Folgenglied u_{n_0} gefunden werden kann, s.d. für alle Folgenglieder danach gilt, dass der Abstand zweier beliebiger Folgenglieder kleiner ε ist. $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : \lvert u_m - u_n \rvert \leq \varepsilon$
Potenzreihe	Reihe der Form $\sum_{k\geq n_0} a_k \cdot z^k$, wobei $(a_k)_k$ eine Folge ist.
Konvergenzradius	Grenze für das z in einer Potenzreihe, s.d. diese mit $\lvert z \rvert <$ KR absolut konvergenz und mit $\lvert z \rvert >$ KR divergiert.

Offen	Ein Menge A ist offen, wenn für jedes Element der Menge eine offene Kreisscheibe existiert, die wieder in der Menge liegt. $\boxed{A \subseteq \mathbb{R}}$ $\forall a \in A\ \exists \eta > 0 : (a - \eta, a + \eta) \subseteq A$ $\boxed{A \subseteq \mathbb{C}}$ $\forall a \in A\ \exists \eta > 0 : D(a, \eta) \subseteq A$ Bsp: $(a, b), (a, +\infty), (-\infty, a)$
Abgeschlossen	Eine Menge A ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement A^c offen ist. Bsp: $\{a\}, [a, b,], [a, +\infty), (-\infty, a]$
Charaktersisierung von abgeschl. Mengen durch Folgen	A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Alle konv. Folgen $(u_n)_n$, deren Folgenglieder in A liegen, haben auch einen Grenzwert in A.
A offen (abg.) in B	A ist offen (abg.) in B, wenn $A = B \cup \Omega$ mit Ω offene (abg.) Menge.
Stetig in A	Eine Funktion f ist **stetig in einer Menge** A, falls eine der Bedingungen S1, S2, S3, S4 (siehe VL) gilt

Stetig im Punkt a	Eine Funktion f ist **stetig im Punkt** a, falls eines der Kriterien gilt: • ε-δ-Kriterium $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : \forall x \in \mathbb{A} : \lvert x - a \rvert \leq \eta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a) \rvert \leq \varepsilon$$ • Grenzwert-Kriterium $$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$ • Folgenkriterium $\forall (u_n)_n \in A$, die gegen a konv. gilt: $$\lim_{n \to a} f(u_n) = f(a)$$
Kompaktum bzw. A ist kompakt	A ist ein Kompaktum, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.
Gleichmäßig stetig	Stetigkeit, aber η hängt nur noch von ε und nicht mehr, wie bei der Stetigkeit, vom betrachteten Punkt a ab.
Zwischenwertsatz	Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f jeden beliebigen Wert zwischen $f(a), f(b)$ an mindestens einer Stelle $c \in [a, b]$ an.
Abschluss	
Ausdehnung (stetige Ergänzung)	Erweiterung einer Funktion $f : A \to \mathbb{K}$ an einer unstetigen Stelle a mit $f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$, wodurch die Funktion dort stetig wird.
Umgebung von a in A	Offene Menge $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A$ mit $\varepsilon > 0$.
"In der Nähe von a"	In einer gewissen Umgebung von a. D.h. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap A$ für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$.
Landau-Symbole	f ist von g in der Nähe von a **dominiert**. $$f(x) \overset{x \to a}{=} O(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{x \to a} \left\lvert \frac{f(x)}{g(x)} \right\rvert < \infty$$ f ist in der Nähe von a **vernachlässigbar** gegenüber g. $$f(x) \overset{x \to a}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \left\lvert \frac{f(x)}{g(x)} \right\rvert = 0$$ f ist in der Nähe von a **äquivalent** zu g. $$f(x) \overset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) \overset{x \to a}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

differenzierbar im Punkt c	f ist differenzierbar in c, wenn die **Ableitung**, also der Grenzwert der Steigungsrate $$\lim_{x\to a,\ x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$ in diesem Punkt existiert und f auf $[a,b]$ stetig und auf $[a,b]\setminus\{c\}$ diff.bar ist.
Satz der diff.baren Umkehrfktn.	Ist die Funktion $f : A \to B$ diff.bar und ihre Ableitung f' in A stetig und ohne NS, so gilt für die Ableitung ihrer Umkehrfkt. f^{-1} $$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$
lokales Maximum	Im Punkt c existiert ein lokales Maximum, wenn $$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leq f(c)\ \forall x \in A \cap (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$
lokales Minimum	Im Punkt c existiert ein lokales Minimum, wenn $$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \geq f(c)\ \forall x \in A \cap (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$
lokales Extremum	Lokales Maximum oder lokales Minimum
globales Maximum	Im Punkt c existiert ein globales Maximum, wenn $$\forall x \in A : f(x) \leq f(c)$$
globales Minimum	Im Punkt c existiert ein globales Maximum, wenn $$\forall x \in A : f(x) \geq f(c)$$
globales Extremum	Globales Maximum oder gloables Minimum
kritischer Punkt	Ein kritischer Punkt einer diff.baren Fkt. f ist eine NS von f'.
Satz von Rolle	Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff.bar auf (a,b) und $f(a) = f(b)$, dann $\exists x_0 \in [a,b]$ s.d. $$f'(x_0) = 0$$
Mittelwertsatz	Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < b$, dann existiert <u>mindestens</u> ein $c \in (a,b)$, s.d. die Ableitung an diesem c der Sekantensteigung entspricht $$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
Regel von De l'Hopital	

Differentiationsklasse C^k	Die Differntiationsklasse, genauer das k, gibt an, wie oft die Funktion, die dieser Klasse angehört, stetig diff.bar ist. C^0 ist eine stetige, nicht diff.bare Fkt., C^∞ eine **glatte**, also unendlich oft stetig diff.bare Fkt.
Polstelle	Definitionslücke mit der Eigentschaft $\lim\limits_{x\to a} \lvert f(x)\rvert = +\infty$
konvex	Eine Funktion f ist konvex, wenn • ihr Graph <u>unterhalb</u> einer beliebigen Verbindungslinie zweier Funktionspunkte liegt. $$\forall x, y \in I : \forall t \in [0,1] f((1-t)x + t \cdot y) \leq (1-t)f(x) + t \cdot f(y)$$ Falls f (2mal) diff.bar: • f' steigend ist • $\forall x \in I$ der Graph von f <u>oberhalb</u> seiner <u>Tangente</u> in x liegt. $$\forall x, y \in I : f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x)$$ • $f''(x) \geq 0$ ist
konkav	Eine Funktion ist konkav, wenn • ihr Graph <u>oberhalb</u> einer beliebigen Verbindungslinie zweier Funktionspunkte liegt. $$\forall x, y \in I : \forall t \in [0,1] f((1-t)x + t \cdot y) \geq (1-t)f(x) + t \cdot f(y)$$ Falls f (2mal) diff.bar: • f' fallend ist • $\forall x \in I$ der Graph von f <u>unterhalb</u> seiner <u>Tangente</u> in x liegt. $$\forall x, y \in I : f(y) \leq f(x) + (y-x)f'(x)$$ • $f''(x) \leq 0$ ist
streng konvex (konkav)	Ungl. wie bei konvex (konkav), jedoch mit $t \in (0,1)$ in den Ungl. und streng steigend statt nur steigend und $>$ statt $\geq$.
arithm., geom. harm. Mittel	$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
Satz d. Riemann'schen Integrale	Seien $a, b \in \mathbb{R}$ s.d. $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
Länge eines Graphen	Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_i = \frac{(b-a)i}{n}$ $$\lim_{n\to\infty} L_n,\ L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Stammfunktion	Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Stammfunktion von $f : A \to \mathbb{R}$ ist eine diff.bare Funktion $F : A \to \mathbb{R}$ s.d. $f = F'$.
Fundamentalsatz der Analysis	Seien $a, b \in \mathbb{R}$ s.d. $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, gilt $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \equiv [F]_a^b$$ Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und int.bar und $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ s.d $a < b$ $$[F]_a^b = \left(\lim_{x\to b} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a} F(x)\right)$$
Variablentransformation	$$\int^y f(y)\,\mathrm{d}y \overset{y=\psi(x)}{=} \int^{\psi^{-1}(y)} f(\psi(x)) \cdot \psi'(x)\,\mathrm{d}x$$
Partielle Integration	$$\int^x f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int^x f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$
integrierbar	Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{C}$. Dann ist f integrierbar falls $$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x < +\infty$$
in der Nähe eines Punkts integrierbar	Eine Funktion f ist in der Nähe des Punktes a int.bar, wenn $\exists c \in (a, b)$ s.d. f auf $(a, c]$ int.bar (Analog für b).
Konvergenz von Reihen mittels Integrabilität	Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}_>$ eine stetige, fallende Fkt., dann konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ gdw. f in der Nähe von $+\infty$ int.bar ist.