Escalonamento de Tarefas

Prova de NP-completude por redução do problema de emparelhamento 3D

Procedimento

Parte 1

- Escalonamento de Tarefas
- Partição
- Partição ⩽□ Escalonamento de Tarefas

Parte 2

- Emparelhamento 3D
- Emparelhamento 3D ⩽□ Partição

Parte 1

Parte 1

- Escalonamento de Tarefas
- Partição
- Partição ⩽□ Escalonamento de Tarefas

Parte 2

- Emparelhamento 3D
- Emparelhamento 3D ⩽□ Partição

Escalonamento de Tarefas

Instância (T,k,t)

T: Conjunto de tarefas com duração cada.

k: nº trabalhadores

t: tempo ‘prazo’

Escalonamento de Tarefas

Instância (T,k,t)

T: Conjunto de tarefas com duração cada.

k: nº trabalhadores

t: tempo ‘prazo’

Pergunta:

É possível distribuir as tarefas aos k trabalhadores de forma que todos os trabalhos finalizem até um tempo t?

Partição

Instância (A, s)

A: Conjunto finito

s: A -> Z^+

s(a) é o “tamanho” de a

Partição

Instância (A, s)

A: Conjunto finito

s: $A \rightarrow Z^{+}$

s(a) é o “tamanho” de a

Pergunta:

Existe $A' \subseteq A$ tal que

$$\sum_{(a \in A')} s(a) = \sum_{(a \in A-A')} s(a) \ ?$$

Partição $\leqslant$□ Escalonamento de Tarefas

Escalonamento de Tarefas é NP

Verificador polinomial:

```
verif (E,t) =
   para cada e∈E
      se tempoTotal(e) > t
         Rejeita
   Aceita.
```

Partição ⩽□ Escalonamento de Tarefas

```
Temos: (A, s)
Queremos: (T,k,t)

Transformando a instância:
    k = 2
    T = { Para cada a∈A crie uma tarefa com duração s(a) }
    t = 0.5 * ∑ s(a)
             (a∈A)
```

Parte 2

Parte 1

- Escalonamento de Tarefas
- Partição
- Partição $\leqslant$ Escalonamento de Tarefas

Parte 2

- Emparelhamento 3D
- Emparelhamento 3D $\leqslant$ Partição

Emparelhamento 3D (3DM)

Instância

W,**X**,**Y**: Conjunto

M$\subseteq${**W**x**X**x**Y**}

|**W**| = |**X**| = |**Y**| = q

W,X,Y são disjuntos

Emparelhamento 3D (3DM)

Instância

W,**X**,**Y**: Conjunto

M$\subseteq$\{**W**x**X**x**Y**\}

|**W**| = |**X**| = |**Y**| = q

W,X,Y são disjuntos

Pergunta:

Existe **M'**$\subseteq$**M** com |**M'**| = q

$\forall$ **a**,**b**$\in$**M'** nenhuma coordenada de **a** coincide com uma de **b**

Um 'Emparelhamento' é um M' que satisfaça essa condição

Emparelhamento 3D $\leqslant$ Partição

Para provar que partição é NP-completo temos que provar o seguinte:

Partição é NP

Mostrar redução de 3DM para Partição

Emparelhamento 3D $\leqslant$ Partição

Partição é NP

```
Verificador é simples:
    recebe dois conjuntos (A,B)
    verifica que eles tem somas iguais (tempo linear)
```

Redução de 3DM para Partição

Partimos de uma instância qualquer de 3DM:

$W = \{w1, w2, ... wq\}$

$X = \{x1, x2, ... xq\}$

$Y = \{y1, y2, ... yq\}$

$M = \{m1, m2, ... mk\}$, com $|M| = k$

Queremos construir um conjunto A e um $s(a) \in Z$□ para cada $a \in A$ tal que exista $A' \subseteq A$ satisfazendo

$$\sum_{(a \in A')} s(a) = \sum_{(a \in A-A')} s(a) \text{ ?}$$

se e somente se M contem um emparelhamento.

A conterá k+2 elementos, criaremos ele em duas partes.

Primeiros k elementos de A:

$\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$ $a_i = m_i$

$m_i = (w_{r(i)}, x_{u(i)}, y_{v(i)})$, funções r,u,v definem os índices para cada m_i

Definiremos $s(a_i)$ em binário da seguinte forma:

w1	**...**	**wq**	**x1**	**...**	**xq**	**y1**	**...**	**yq**

Possui 3q ‘zonas’

Cada zona possui p bits, $p = \lceil \log_2(k+1) \rceil$

Total de 3qp bits

A conterá k+2 elementos, criaremos ele em duas partes.

Primeiros k elementos de A:

$\{a_i: 1 \leq i \leq k\}$ $a_i = m_i$

$m_i = (w_{r(i)}, x_{u(i)}, y_{v(i)})$, funções r,u,v definem os índices para cada m_i

Definiremos $s(a_i)$ em binário da seguinte forma:

w1	**...**	**wq**	**x1**	**...**	**xq**	**y1**	**...**	**yq**

Possui 3q ‘zonas’

Cada zona possui p bits, $p = \lceil \log_2(k+1) \rceil$

Total de 3qp bits

Que também pode ser escrito como:

$$s(a_i) = 2^{p(3q - r(i))} + 2^{p(2q - u(i))} + 2^{p(q - v(i))}$$

Como cada $s(a_i)$ tem 3pq bits, então ele pode ser construído a partir de uma instância de 3DM em tempo polinomial.

Definimos

$$B = \sum_{j=0}^{3q-1} 2^{pj} =$$

w1	...	wq	x1	...	xq	y1	...	yq
0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01

Definimos

$$B = \sum_{j=0}^{3q-1} 2^{pj} =$$

w1	...	wq	x1	...	xq	y1	...	yq
0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01	0...01

Daí temos que um subconjunto $A' \subseteq \{a_i : 1 \le i \le k\}$ satisfaz

$$\sum_{(a \in A')} s(a) = \mathbf{B}$$

Se e somente se $M' = \{m_i : a_i \in A'\}$ é um emparelhamento de M

Emparelhamento 3D $\leqslant$ Partição

O ultimo passo é construir os elementos k+1 e k+2 de A:

$$\mathbf{a_{k+1} = b_1}$$

$$\mathbf{a_{k+1} = b_2}$$

$$\mathbf{s(b1) = 2}\sum_{i=1..k} s(a_i) \ \mathbf{- B}$$

$$\mathbf{s(b2) =}\ \sum_{i=1..k} s(a_i) \ \mathbf{+ B}$$

Ambos podem ser representados com (3pq+1) bits, portanto podem ser construídos em tempo polinomial em relação a instância de 3DM.

Emparelhamento 3D $\leqslant$□ Partição

Se eu tiver um subconjunto $A' \subseteq A$ que satisfaça

$$\sum_{(a \in A')} s(a) = \sum_{(a \in A-A')} s(a)$$

então eu sei que eu tenho

um conjunto que contém b2 e não contém b1

um conjunto que:

contém b1

contém subconjunto $C \subseteq \{a_i : 1 \leq i \leq k\}$ tal que

$s(c \in C) = B$, e portanto corresponde a um M' que é

um emparelhamento.

Emparelhamento 3D ⩽□ Partição

Se eu tiver um emparelhamento $M' \subseteq M$

então terei $\{b1\} \cup \{a_i : m_i \in M'\}$ na instância de partição.

Emparelhamento 3D $\leqslant$□ Partição

Provado:

- Partição é NP-completo.
- Escalonamento de Tarefas é NP-completo.

Referências

Computers and intractability: A guide to theory of NP-Completeness. (Livro do Garey and Johnson)