M2 - Probabilités et statistiques des nouvelles données

Projet 3 : METH DISCR GRADIENT DES APPLI EN MODEL STOCHASTIQUE FINANCE

Auteurs :

Confiac Hendrick

Janvier 2022

Préface

Ce mémoire fait l'objet de l'étude sur la théorie de la ruine. En effet, nous évaluerons la probabilité de réalisations d'évènements défavorables chez une compagnie d'assurance. Concrètement, la compagnie se doit d'être solvable à tout moment avec une réserve qui ne doit jamais être en-dessous de 0. Dans un premier temps nous mettrons en évidence deux lois de probabilités, permettant de modéliser cette réserve ; puis à l'aide de méthodes de simulations, nous déterminerons la probabilité de ruine de la compagnie à divers horizons (horizon finie, horizon infinie).

Table des matières

1 Modélisation des réserves de la compagnie : 3

1.1 Lois des sinistres : 4

1.2 Probabilité de ruine : 5

2 Simulations : 6

2.1 Méthode de Monte-Carlo 6

2.2 Autres méthodes 7

Bibliographie 9

Chapitre 1

Modélisation des réserves de la compagnie :

Nous allons modéliser l' évolution de la richesse R_t définit comme suit :

$$R_t = x + ct - \sum_{i=0}^{N_t} X_i$$

- x étant la réserve initiale de la compagnie
- $c > 0$ étant le taux de prime reçues continuement dans le temps.
- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} > 0$ suite de variables aléatoires, $i.i.d$ correspondant aux tarifs des sinistres.
- N_t, le procesus de poisson homogène (λ), tel que $N_t = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\tau_{k<t}}$, avec $\tau_k = \sum_{n=0} T_n$, où (T_n) est une variable aléatoire suit une loi exponentielle correspondant au temps entre 2 sinistres.

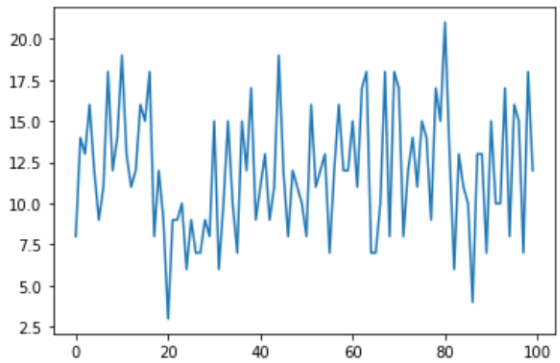


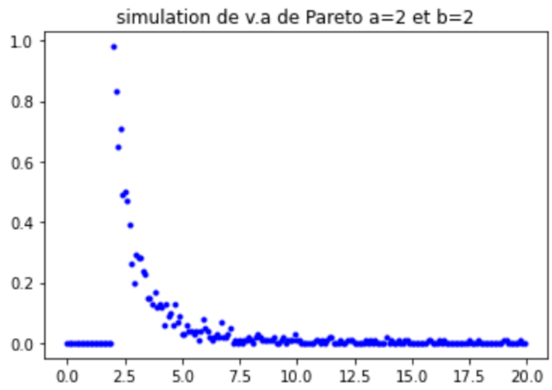
FIGURE 1.1 – Trajectoire du procesus de comptage N_t avec, $\lambda = 2, t = 6$

1.1 Lois des sinistres :

Nous allons faire intervenir deux lois eligibiles que nous avons simulées.

Loi de Pareto : Notons la densité d'une variable aléatoire X de loi de Pareto :

$$f_X(x; a, b) = a\frac{b^a}{x^{a+1}}\mathbb{1}_{x>b}$$



Loi Gamma : Notons la densité d'une variable aléatoire X de loi de Gamma :

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\mathbb{1}_{x\geq 0}$$

Ainsi, en fixant un jeu de données, nous allons pouvoir modéliser les réserves R_t de la compagnie d'assurance au cours du temps.

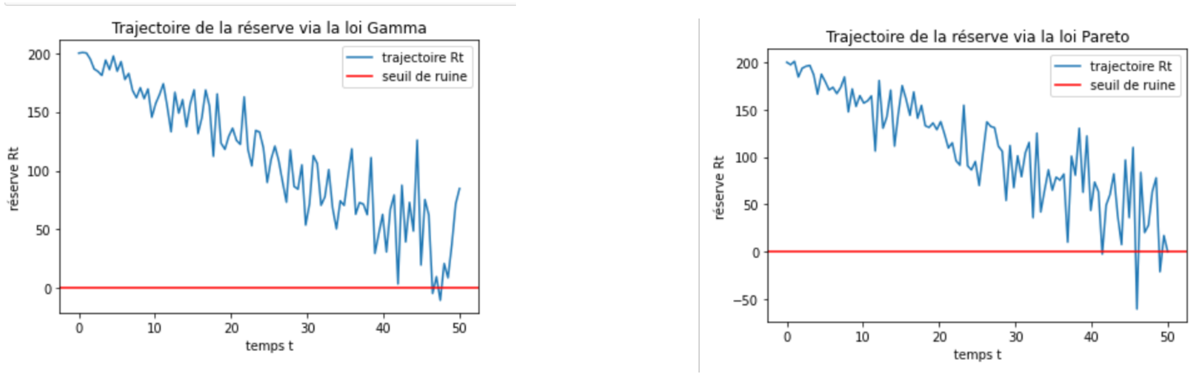


FIGURE 1.2 – paramètres : $(x = 100, c = 1, a = \alpha = 2, \lambda = 0.5, b = \beta = 2)$

Le but est de déterminer la probabilité de ruine ϕ telle que $R_t < 0$ en ayant connaissance du capitale de départ $R(0)$.

1.2 Probabilité de ruine :

Deux évènements sont à relevés :

— "La ruine arrive avant un temps fixé"
On note ainsi la probabilité de ruine "à horizon finie" associé comme suit

$$\mathbf{P}(R_t < 0 | R(0) = x)$$

.

— "La ruine arrive "
On note ainsi la probabilité de ruine "à horizon infinie" associé comme suit

$$\mathbf{P}(inf_{t \geq 0} R_t < 0 | R(0) = x)$$

et on note l'instant de ruine $T_x = inf(t \geq 0, R(t) < 0)$, plus petit instant pour lequel la ruine est atteinte.

Chapitre 2

Simulations :

2.1 Méthode de Monte-Carlo

Nous allons travailler dans le cadre d'horizon fini. Par la methode de Monte-carlo, nous allons pouvoir traver des graphes représentants la probabilité de ruine par rapport :

à l'horizon T (en année)

aux primes c reçues

On pose $Z_t = \sum_{i=0}^{N_t} X_i$. Notons que

$$\mathbf{P}(R_t < 0) = \mathbf{P}(Z_t > x + ct) = \mathbf{E}[\mathbb{1}_{Z_t > x+ct}] \approx \sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_{Z_t(k) > x+ct}$$

par Monte-Carlo. Et on obtient ainsi :

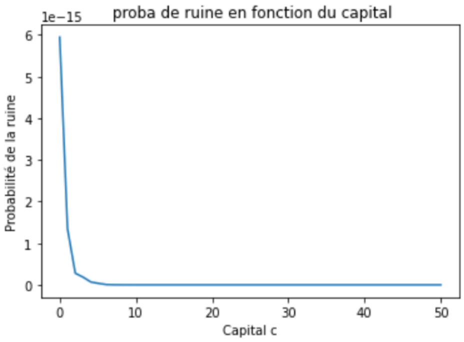


FIGURE 2.1 – Horizon T = 1

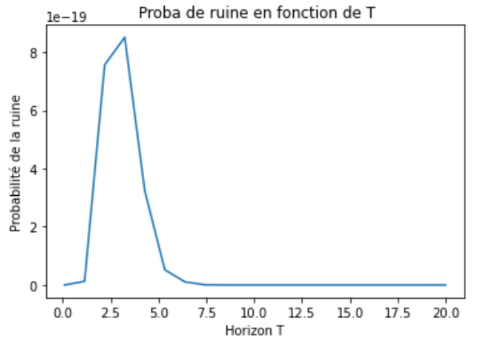


FIGURE 2.2 – c=14

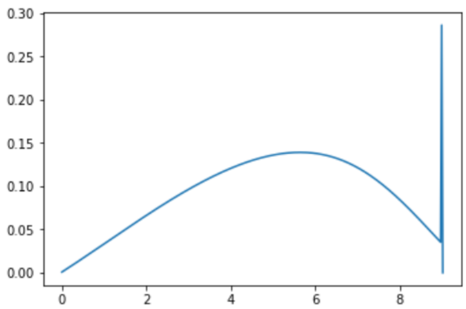
FIGURE 2.3 – paramètres : $(x = 50, \alpha = 2, \lambda = 5, b = \beta = 1.75)$

Dans ces deux représentations, la probabilité de ruine est rare au vue de sa faible valeur. Notons $c \to \infty \Longrightarrow \phi \to 0$. Par ailleurs $\mathbf{P}(T_{x=50} = 2.5ans) = 8e^{-19}$

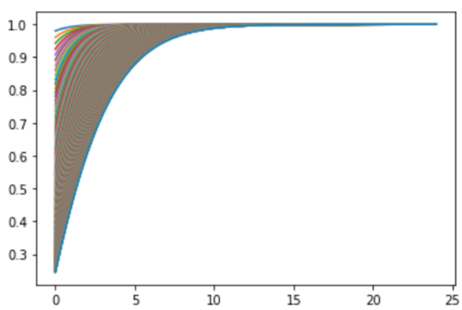
2.2 Autres méthodes

Dans cette dernière section, nous allons nous intéresser à la probabilité de survie de la compagnie, qui n'est autre que la probabilité de l'évènement contraire de notre étude. Nous allons comparer le temps de simulation des méthodes vu en cours :

— Méthode d'approximation de la loi marginale



— Méthode des différences finies



On note pour la première méthode :

```
proba de survie  0.8288862064205926
time 2.0810210704803467
```

Et pour la deuxième méthode :

```
proba de survie  0.8159008271102182
time 51.02347779273987
```

CONCLUSION :

Nous avons pu modéliser les réserves d'une compagnie d'assurance (à temps fini et infini) et déterminer la probabilité de ruine de cette dernière. Ces résultats sont variables en fonction du choix du jeu de paramètres que l'on aura choisi. Ainsi la compagnie est en capacité de modeler le tarif de ses primes ainsi que ses dûs en cas de sinistre afin de conserver une rentabilité suffisante pour éviter la ruine.

Bibliographie

[1] R.EYMARD et J.PRINTEMPS, METH DISCR GRADIENT DES APPLI EN MODEL STOCHASTIQUE FINANCE, *Université Gustave Eiffel*(2021)