M2 - Probabilités et statistiques des nouvelles données

Projet n°1 : Méthodes numériques pour les produits structurés en actuariat

Auteur :

Confiac Hendrick

Wague Yakhoub

Janvier 2022

Préface

Ce projet aura pour but d'étudier le taux de mortalité et ses différentes relations (estimateurs, liens avec la fonction de survie, propriétés assymptotiques...) sous un regard probabiliste dans le cadre mathématique de modèle de durée ; le but étant pour l'assureur, de modéliser le risque de mortalité d'individus en fonction de leur âge selon le contexte qu'il aura défini afin de concevoir les contrats d'assurance.

Table des matières

Chapitre 1

Taux de mortalité

Dans notre cas nous allons considérer $T : \Omega \to \mathbb{N}$ variable aléatoire représentant la date $t = T$ du décès d'un individu d'âge x. On définit alors la fonction de survie conditionnelle d'une variable aléatoire T :

$$S(t) = P(T > t)$$

Afin d'appliquer les notions vues en cours, nous allons nous placer dans le cadre d'un contrat d'assurance temporaire décès d'1an. Aisni on a les données suivantes :

- T est la durée de vie totale de l'individu
- x est l'âge de l'individu à l'instant $t = 0$
- $x + 1$ est l'âge de l'individu a la fin de l'année ($t = 1$) si il a survécu

Rappel

On rappel que la fonction de survie conditionnelle de T sachant $T > x$ (autrement dit, la probabilité que l'individu survie à l'âge $t + x$ sachant qu'il a survécu jusqu'à l'âge x) est :

$$_tp_x = P(T > t|T > x) \tag{1.1}$$

$$_tq_x = 1 -_t p_x \tag{1.2}$$

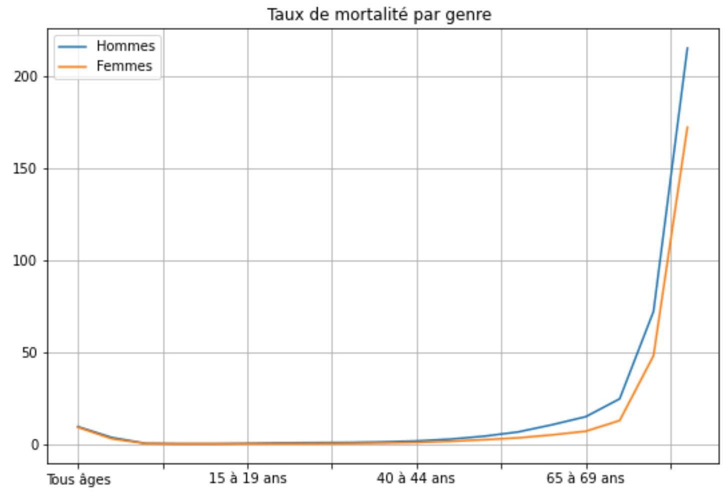

FIGURE 1.1 – q_x : Taux de mortalité H/F en 2019 pour pour 1 000 nés vivants (Données INED)

On constate sans surprise un taux de mortalité d'autant plus élevé à mesure que l'individu est âgé.

On peut également faire une étude sur le taux de mortalité des jeunes (individus de moins de 30ans), au fil des années. (Axe des orddonées en pourcentage)

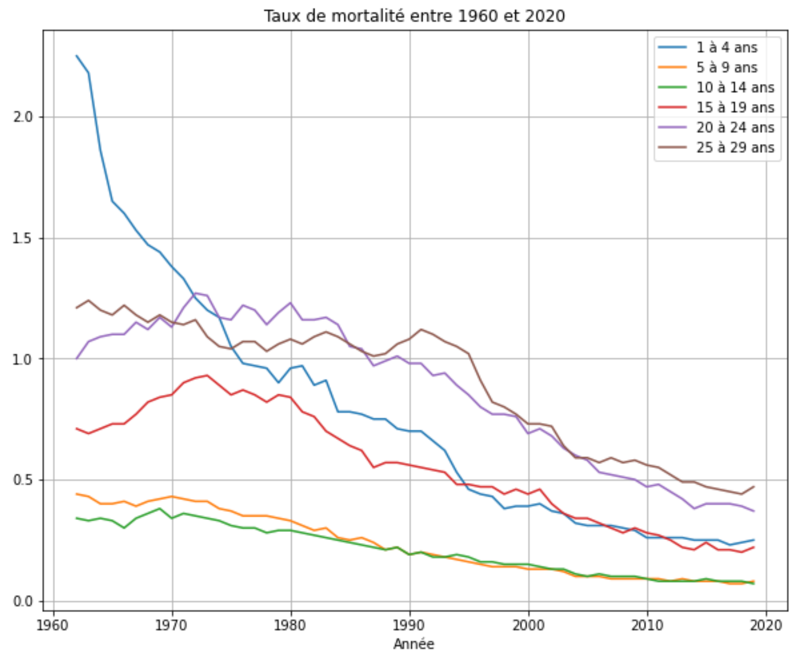

FIGURE 1.2 – Taux de mortalité genre confondu (Données INED)

On observe en chaque tranche d'âge un taux de mortalité de plus en plus faible au fil des années.

Remarque

On peut réfléchir sur la prime que devra payer l'assuré dans notre cadre énoncé ci-dessus.En effet, en déterminant la probabilité que l'individu d'âge n'atteigne pas l'âge $x+1$, on peut poser : $Prime = cP(x \leq T < x+1 | T \geq x) = cq_x$, c étant une constante, capital que l'assuré désire obtenir si décès.

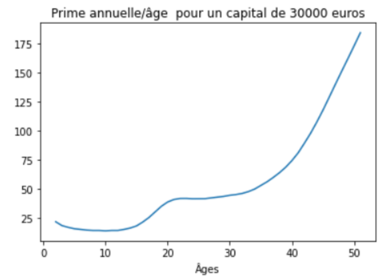

FIGURE 1.3 – Prime annuelle exigée de l'assureur pour un capital désiré à 30000 € en fonction de lâge(Données TH-00-02)

Afin de vérifier être dans le vrai, nous avons comparé nos résulats avec la prime temporaire d'une assurance décès de la Maïf (lien en annexe). Plus l'individu est âgé, et plus la prime demandée par l'assureur sera importante. (Exemple : vers 40 ans, le montant annuel des primes à verser serait de l'ordre de 70/80 €)

Pour les grands âges (+ 60/70 ans), le contrat en question peut connaître des taxes supplémentaires ou peut leur être refusé.

Chapitre 2

Relations et propriétés

lien entre l_x et q_x

Remarquons tout d'abord que par la formule de Bayes sur ${}_xp_t$, on développe (1.2) comme suit :

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{P(T > t, T > x)}{P(T > x)} = \frac{P(T > t)}{P(T > x)} = \frac{S(t)}{S(x)} $$

avec $t > x$. En particulier,

$$ q_x = \frac{S(x+1)}{S(x)} $$

En considérant l_x comme étant le nombre d'individu vivant moyen à l'âge x, nous obtenons la relation suivante :

$$ l_x = l_0 S(x) \Rightarrow S(x) = \frac{l_x}{l_0} $$

où l_0 est le nombre de naissance considéré au début de notre observation.

On déduit la relation suivante :

$$ q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} $$

Cette relation nous permet ainsi de construire une table de mortalité à partir des l_x.

lien entre l'espérance de vie résiduelle e et S

On définit l'espérance résiduelle à l'âge x comme étant le temps moyen qui reste à vivre sachant que l'individu a vécu jusqu'à x ans :

$$ e(x) = \mathbf{E}[T - x | T \geq x] = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(t)dt $$

lien entre ${}_tp_x$ et la fonction de hasard μ

Par définition, on note :

$$\mu_x(t) = \frac{-\partial}{\partial t} ln({}_tp_x) \Rightarrow {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_0(x+s)ds}$$

avec $\mu_0(x+t) = \mu_x(t)$

En pratique, il est mieux d'utiliser l'interprétation de la fonction de hasard vue en cours dans laquelle nous avons vu que $\mu_x = \lim\limits_{h \to 0}(\frac{{}_hq_x}{h})$

Remarque : on a

$$\frac{\partial}{\partial x} e(x) = \frac{-S^2(x) - (\frac{\partial}{\partial x} S(x)) \int_x^{+\infty} S(u)du}{S^2(x)} \Rightarrow \frac{\partial e_x}{\partial x} = -1 + \mu_x e_x$$

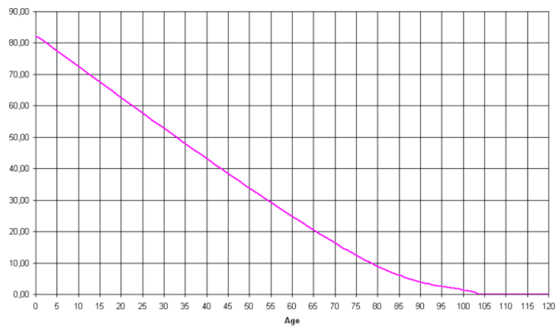

Figure 2.1 – Espérance de vie résiduelle en fonction de l'âge)

(Exemple : On estime pour un individu âgé de 55 ans, environ 29 année à vivre.

Un estiamteur de q_x

Notons $d_x = \sum_{i=1}^{n_x} \mathbb{1}_{i\ meurt}$.
n$_x$ correspondant au nombre de personne d'âge x en début d'année. Ainsi d_x correspond au nombre de décès durant l'année parmi ces individus d'âge x. S'ensuit alors $d_x \sim \mathbf{B}(n_x, q_x)$. La recherche de L'EMV de q_x conduit à l'estimateur $\overline{q_x} = \frac{d_x}{n_x}$, sans biais et consistant. Par le TCL on a

$$\sqrt{n}(\overline{q_x} - q_x) \longrightarrow \mathcal{N}(0, q_x(1-q_x))$$

Remarque

Cet estimateur est très util dans le cas où nous étudions des observations complètes : les phénomènes de censures (assurés chez qui on a pas pu observer le décès pour une certaine raison) et de troncatures (assurés n'ayant pas survécu suffisement longtemps pour rentrer dans la période d'observation) sont négligeables.

Nous terminerons se projet en évoquant l'existence de technique de lissage afin de palier aux "problème de régularité" de notre estimateur. L'une d'entre elle est la moyenne mobile. On introduit h, un paramètre de lissage tel que :

$$q'_x(h) = \frac{1}{(2h+1)^2} \sum_{i=-h}^{h} \overline{q_{x+i}}$$

Si l'on suppose que q_x varie peu au voisinage de x, il s'agira de trouver un compromis entre biais et variance afin d'avoir un risuqe quadrtaique faible.

CONCLUSION

L'assureur confronter au risque de mortalité doit être en capacité de respecter ses engagements tout en y trouvant un bénéfice. Les causes de mortalités sont nombreuses et peuvent complexifier l'élaboration de contrat dans le cadre de contrat temporaire décès. À l'échelle probabiliste, différentes modélisations peuvent palier ce problème. Partant de tables de mortalités, il est possible de modéliser l'espérance de vie résiduelle d'un individu, la probabilité de son décès à une date fixée... Le but étant de chercher une prédiction optimale à l'instar du modèle de Lee-carter (d'un point de vue stochastique), pour un bénéfice optimal.

Bibliographie

[1] J.Printemps, Méthodes numériques pour les produits structurés en actuariat, *Université Gustave Eiffel*(2021)

[2] https://www.maif.fr/famille-vie-quotidienne/guide-assurance-deces/prime-temporaire#:~:text=L%E2%80%99assurance%20d%C3%A9c%C3%A8s%20%C3%A0%20prime%20temporaire%20court%20sur%20une,d%C3%A9c%C3%A8s%20a-t-elle%20sur%20le%20contrat%20d%E2%80%99assurance%20d%C3%A9c%C3%A8s%20%3F.

[3] https://elearning.univ-eiffel.fr/pluginfile.php/145137/mod_resource/content/1/poly_table_mortalite.pdf

[4] https://lms.fun-mooc.fr/courses/course-v1:ensae+53001+session06/courseware/cb1fe48c47f04abaa7bcc2688ad7ec4d/a90e78a634e145fba5c8cd924369c1c0/