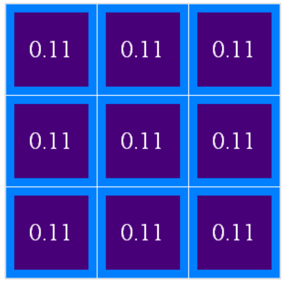
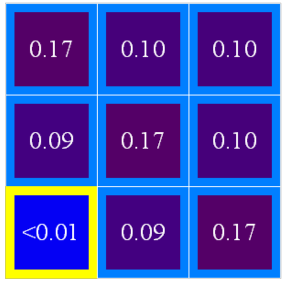
Resumo

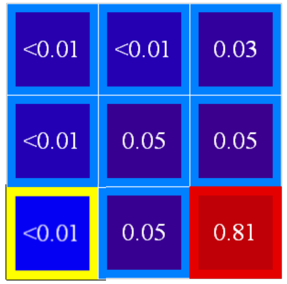
- Parte I: Busca e Planejamento
- Parte II: Conhecimento e raciocínio
  - *Noções de incerteza*
  - *Cadeias de Markov*
  - *HMM*
  - *Redes Bayesianas*
  - *Raciocínio preciso*

Incerteza

- Situação geral:
  - **Variáveis observadas (evidência):** agente sabe algumas coisas do mundo (ex: sintomas, valor de sensores, etc.)
  - **Variáveis não observadas**: agente precisa raciocinar sobre outros aspectos (ex: onde o fantasma deve estar ou que doença o paciente tem, etc.)
  - **Modelo**: agente sabe algo sobre como as variáveis observadas se relacionam com as não observadas.
- **Raciocínio probabilístico** nos fornece um framework para lidar com nossas crenças (*beliefs*) e nosso conhecimento (*knowledge*).







Variáveis Aleatórias

- Um aspecto do mundo sobre o qual pode existir incerteza
  - R = Está chovendo?
  - T = Quente ou frio?
  - D = Distância até o trabalho?
  - L = Onde está o fantasma?

- Domínios
  - R : {true, false}   (usualmente, {+r, -r})
  - T : {hot, cold}
  - D : $[0, \infty)$
  - L : posições possíveis, {(0,0), (0,1), …}

Distribuição de probabilidade

- Temperatura:

$$P(T)$$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

- Tempo (clima):

$$P(W)$$

W	P
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

Distribuição de probabilidade

- Variáveis aleatórias não observadas possuem distribuição

$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0

Notação compacta:

$$P(hot) = P(T = hot),$$
$$P(cold) = P(T = cold),$$
$$P(rain) = P(W = rain),$$
$$\ldots$$

- Uma distribuição é uma TABELA de probabilidade de valores

- Uma probabilidade (letra minúscula por conveção) é um valor

$$P(W = rain) = 0.1$$

$$\forall x \;\; P(X = x) \geq 0 \qquad \sum_x P(X = x) = 1$$

Resumo sobre probabilidade

- Probabilidade condicional $$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$
- Regra do produto $$P(x,y) = P(x|y)P(y)$$
- Regra da cadeia $$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \ldots X_n) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1,X_2)\ldots \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}) \end{aligned}$$
- X, Y são **independentes** se e somente se: $\forall x, y : P(x,y) = P(x)P(y)$
  $$X \perp\!\!\!\perp Y$$
- X e Y são **condicionalmente independentes** dado Z se somente se:
  $$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$
  $$\forall x, y, z : P(x,y|z) = P(x|z)P(y|z)$$
  $$\forall x, y, z : P(x|z,y) = P(x|z)$$

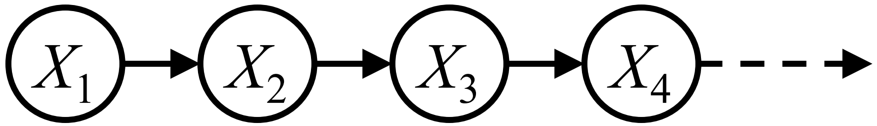
Raciocinando no tempo (ou espaço)

- Frequentemente, queremos raciocinar sobre uma sequência de observações
  - Reconhecimento de fala
  - Reconhecimento de sentença em linguagem natural
  - Localização de robôs
  - Monitoramento médico
  - Etc…

- Necessidade de introduzir conceito de tempo (ou espaço) nos modelos

Modelos de Markov

- Estado = valor de X em um tempo t



$P(X_1) \qquad P(X_t|X_{t-1})$

- Probabilidade de transição (dinâmica): especifica como o estado evolui no tempo
- Suposição de estacionaridade: probabilidades de transição são as mesmas para todo tempo t
- Semelhante à MDP, mas sem escolha de ações.

Distribuição conjunta de um Modelo de Markov

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$$

$$P(X_1) \qquad P(X_t|X_{t-1})$$

$$X_3 \perp\!\!\!\perp X_1 \mid X_2$$
$$X_4 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2 \mid X_3$$

- Distribuição conjunta:

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)$$

- De forma mais geral:

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \ldots, X_T) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)\ldots P(X_T|X_{T-1}) \\ &= P(X_1)\prod_{t=2}^{T} P(X_t|X_{t-1}) \end{aligned}$$

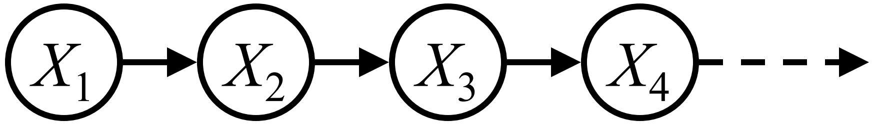
Independências condicionais implícitas

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$$

- $X_3 \perp\!\!\!\perp X_1 \mid X_2$ e $X_4 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2 \mid X_3$ é verdade!
- $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3, X_4 \mid X_2$ também é verdade ?

Raciocínio pra frente

- Qual é a P(X) em um tempo t?



$$\color{red}{P(x_1)} = \text{conhecida}$$

$$P(x_t) = \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, x_t)$$

$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_t \mid x_{t-1}) P(x_{t-1})$$

Simulação pra frente (forward)

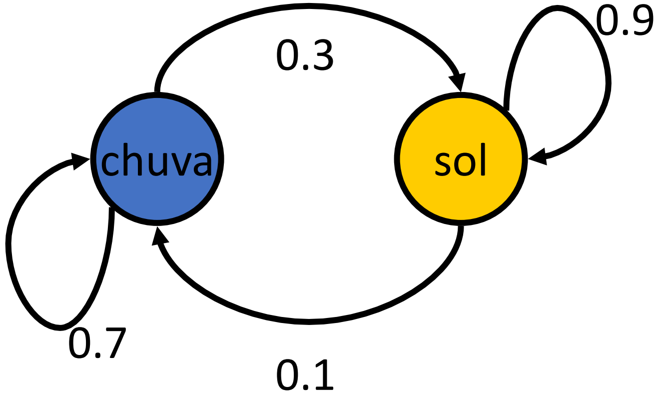
Raciocínio pra frente

$$P(x_1) = \text{conhecida}$$

$$P(x_t) = \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, x_t)$$

$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_t \mid x_{t-1}) P(x_{t-1})$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sol	sol	0.9
sol	chuva	0.1
chuva	sol	0.3
chuva	chuva	0.7



1. Qual é a probabilidade de que no tempo t=4 esteja ensolarado considerando que agora (t=1) está ensolarad

Texto

P(x4=sol | x1=sol) = 0.804

P(x4=sol) = $\sum_{x3}$ P(x4=sol|x3)P(x3) → P(x4=sol|x3=sol)P(x3=sol) + P(x4=sol|x3=chuva)P(x3=chuva)

0.9 0.84 0.3 0.16

P(x3=sol) = $\sum_{x2}$ P(x3=sol|x2)P(x2) → P(x3=sol|x2=sol)P(x2=sol) + P(x3=sol|x2=chuva)P(x2=chuva)

0.9 0.9 0.3 0.1

P(x3=chuva) = $\sum_{x2}$ P(x3=chuva|x2)P(x2) → P(x3=chuva|x2=sol)P(x2=sol) + P(x3=chuva|x2=chuva)P(x2=chuva)

0.1 0.9 0.7 0.1

P(x2=sol) = $\sum_{x1}$ P(x2=sol|x1)P(x1) → P(x2=sol|x1=sol)P(x1=sol)

0.9 1

P(x2=chuva) = $\sum_{x1}$ P(x2=chuva|x1)P(x1) → P(x2=chuva|x1=sol)P(x1=sol)

0.1 1

P(x1=sol) = conhecida

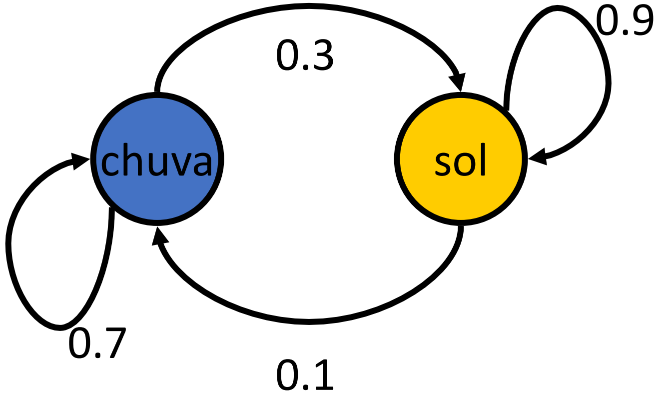
Raciocínio pra frente

$$P(x_1) = \text{conhecida}$$

$$P(x_t) = \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, x_t)$$

$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_t \mid x_{t-1}) P(x_{t-1})$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sol	sol	0.9
sol	chuva	0.1
chuva	sol	0.3
chuva	chuva	0.7



2. Qual é a probabilidade de que no tempo t=4 esteja ensolarado considerando que agora (t=1) está chovendo
P(x4=sol | x1=chuva) = 0.588

P(x4=sol) = $\sum_{x3}$ P(x4=sol|x3)P(x3) → P(x4=sol|x3=sol)P(x3=sol) + P(x4=sol|x3=chuva)P(x3=chuva)

0.9 0.48 0.3 0.52

P(x3=sol) = $\sum_{x2}$ P(x3=sol|x2)P(x2) → P(x3=sol|x2=sol)P(x2=sol) + P(x3=sol|x2=chuva)P(x2=chuva)

0.9 0.3 0.3 0.7

P(x3=chuva) = $\sum_{x2}$ P(x3=chuva|x2)P(x2) → P(x3=chuva|x2=sol)P(x2=sol) + P(x3=chuva|x2=chuva)P(x2=chuva)

0.1 0.3 0.7 0.7

P(x2=sol) = $\sum_{x1}$ P(x2=sol|x1)P(x1) → P(x2=sol|x1=chuva)P(x1=chuva)

0.3 1

P(x2=chuva) = $\sum_{x1}$ P(x2=chuva|x1)P(x1) → P(x2=chuva|x1=chuva)P(x1=chuva)

0.7 1

P(x1=chuva) = conhecida

Distribuição Estacionária P_∞

- Para a maioria das cadeias:
  - Influência da distribuição inicial diminui com o passar do tempo
  - A distribuição final é **então independente da inicial** e é chamada de **Estacionária**

$$P_\infty(X) = P_{\infty+1}(X) = \sum_x P(X|x)P_\infty(x)$$

Distribuição Estacionária

3. Qual a chance de estar ensolarado em $t = \infty$

$$P_\infty(X) = P_{\infty+1}(X) = \sum_x P(X|x)P_\infty(x)$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sol	sol	0.9
sol	chuva	0.1
chuva	sol	0.3
chuva	chuva	0.7

P(x∞ =sol) = ?

P(x∞ =sol) = P(sol|sol)P(x∞=sol)+ P(sol|chuva)P(x∞=chuva)

P(x∞ =sol) = 0.9 P(x∞=sol)+ 0.3 P(x∞=chuva)

P(x∞ =sol) - 0.9 P(x∞=sol) = 0.3 P(x∞=chuva)

0.1 P(x∞=sol) = 0.3 P(x∞=chuva)

P(x∞=sol) = 3 P(x∞=chuva)

Sabendo-se que: P(x∞ =sol) + P(x∞=chuva) = 1

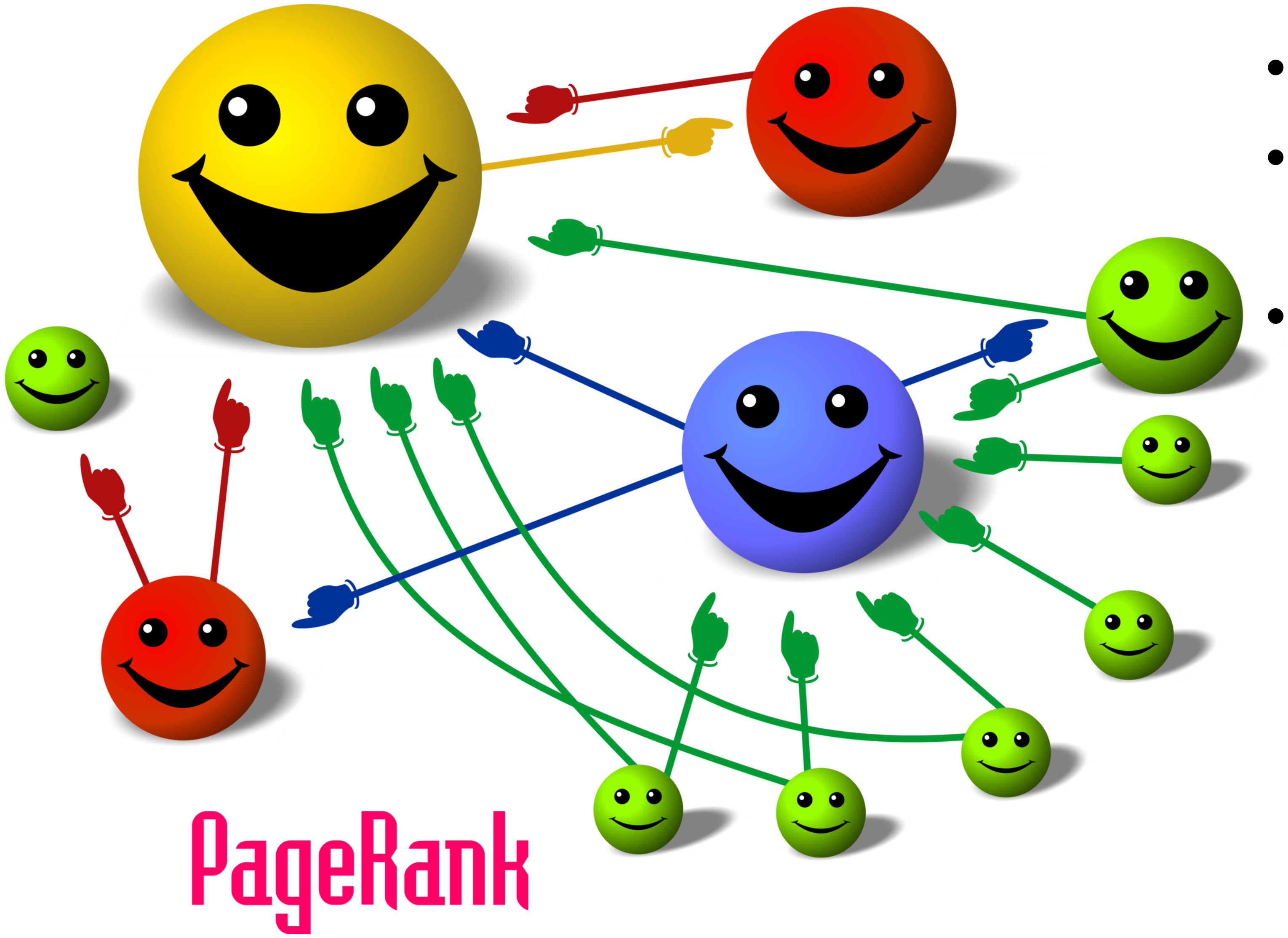
P(x∞=sol) = 3 (1 - P(x∞=sol))
4 P(x∞=sol) = 3

P(x∞=sol) = 0.75

P(x∞=chuva) = 0.25

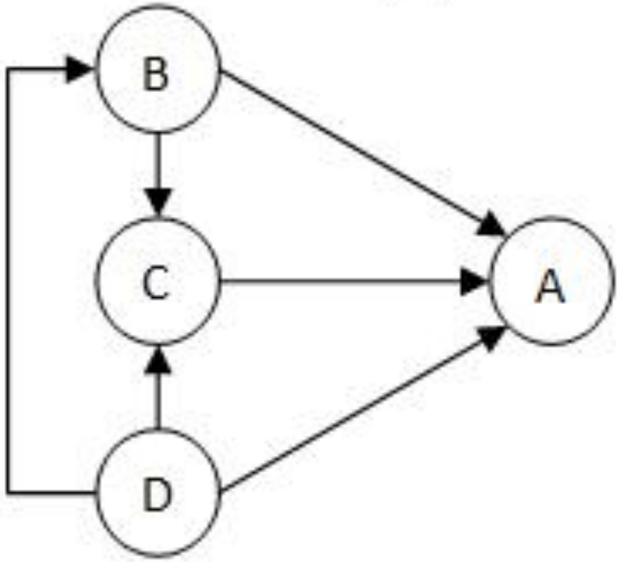
Aplicação da distribuição estacionária: PageRank™

- Algoritmo que mede a importância de uma página contabilizando a quantidade e qualidade de links que apontam para ela.
- Simula a navegação aleatória de alguém na Web de modo a aferir a importância de cada página no infinito
- O processo do PageRank foi patenteado pela Universidade de Stanford.
- Google detém os direitos de licença exclusivos: cedeu 1,8 milhão de ações (em 2005, U$336 milhões)



- Esfera = página
- Volume = importância (PageRank)
- Qtde e Origem dos hiperlinks importa bastante
  - Prestígio da página é proporcional à soma do prestígio das páginas que a citam.

Algoritmo do PageRank™

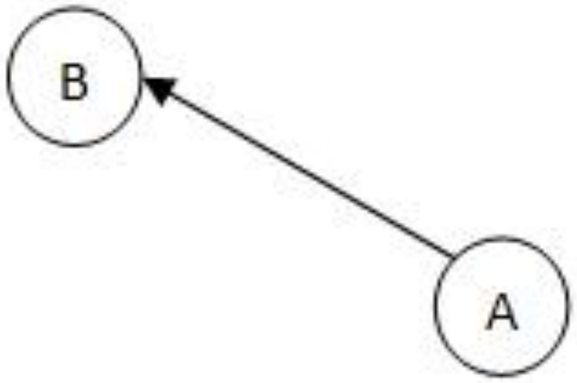


- $\sum_{X=\{A,B,C,D,\dots\}} PageRank(X) = 1$
- Iteração 1:
  - $PageRank(X) = {}^{1}/_{N} \quad (N = \#páginas)$
- Iteração 2:
  - $PageRank(A) = \frac{PageRank(B)}{2} + \frac{PageRank(C)}{1} + \frac{PageRank(D)}{3}$
  - $PageRank(B) = \ \dots, \ PageRank(C) = \ \dots, \ PageRank(D) = \ \dots$
  - $PageRank(u) = \sum_{v \in B_u} \frac{PageRank(v)}{L(v)}$

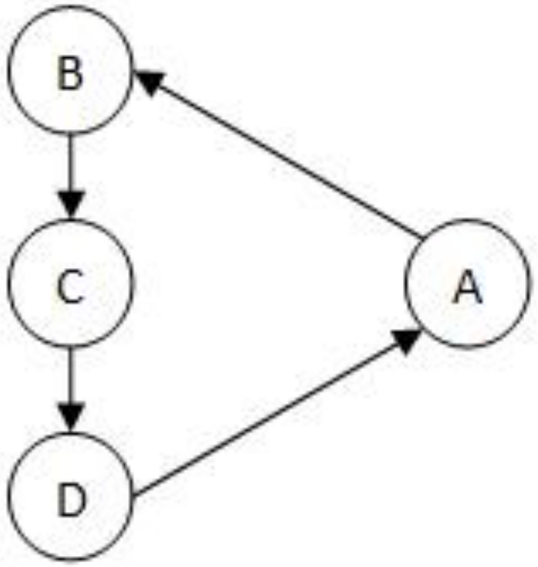
$L(v) = hiperlinks\ da\ página\ v$
$B_u = conjunto\ de\ todas\ as\ páginas\ que\ referenciam\ u$

Algoritmo do PageRank™

- Problemas: *páginas sem ligações* e *ciclos*



...drenagem do PageRank para fora da rede.

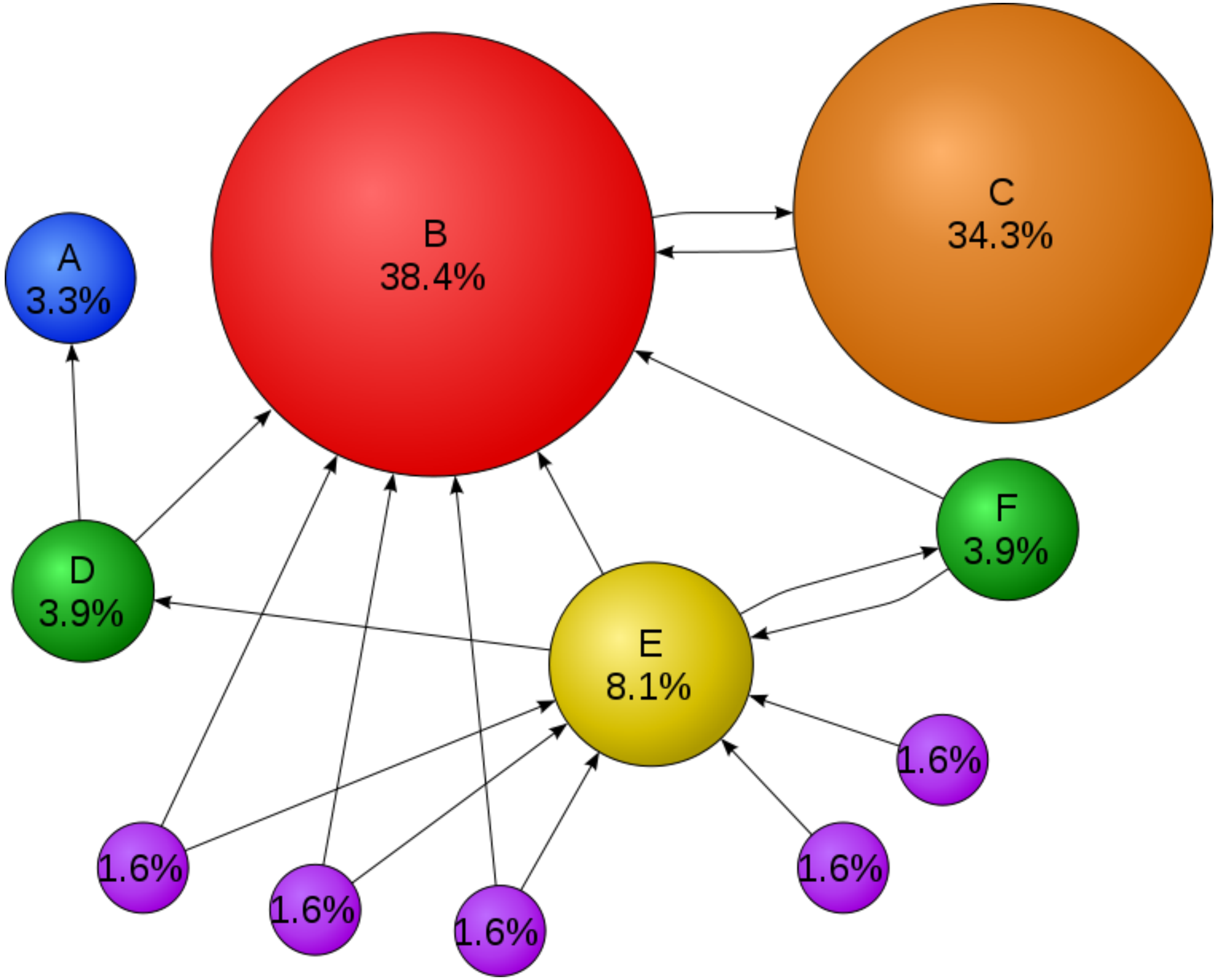


PageRank fica "preso" no ciclo infinito ...
....e valores não converjem para valores estacionários.

Algoritmo do PageRank™

- A teoria de PageRank considera que um usuário imaginário que siga os hiperlinks entre as páginas aleatoriamente, acabará por se aborrecer e parar de seguir.
- A probabilidade, em cada passo, de o utilizador continuar a seguir os hiperlinks é o fator de amortecimento d
- $PageRank(A) = \frac{1-d}{N} + d\left(\frac{PageRank(B)}{2} + \frac{PageRank(C)}{1} + \frac{PageRank(D)}{3}\right)$
  - $Com\ d = 1, peso\ completo\ à\ estrutura\ de\ hiperlinks$
  - $Com\ d = 0, aleatoriedade\ pura\ na\ navegação$

Estacionaridade do PageRank™



- No **infinito**, a **probabilidade** de se atingir qualquer página é **estacionária**
  → modelado via *Cadeia de Markov*
- Se um usuário começar numa página aleatória com uma **probabilidade de 85% (fator de amortecimento) de escolher um hiperlink aleatório** dessa página e uma **probabilidade de 15% de saltar para uma página qualquer** de toda a rede,
  → esse usuário irá chegar ao nó E em 8,1% das vezes.
- Se fator = 100% ?
  → qualquer utilizador acabaria nos nós A, B, ou C.