

# 3. Entwicklung der Quantenphysik

## Hinweise zur Veranstaltung

- Skript online verfügbar:  
<https://hendrikmattern.github.io/teaching/>
- Skript basiert auf *Demtröder, W. (2016). Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper. Springer-Verlag.*  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-49094-5> (frei verfügbar über UB)

## Historie & Motivation

- Im 19. Jahrhundert fehlende Theorie für experimentelle Beobachtungen, z.B.:
  - Spektralverteilung der Hohlraumstrahlung,
  - Photoelektrischer Effekt,
  - Compton-Effekt
- Kritische Revision des „klassischen“ Ansatzes nötig für den „Mikrobereich“ (Atome, Moleküle, etc.)
- Geburtsstunde der Quantenphysik

## 3.1. Experimentelle Hinweise auf den Teilchencharakter elektromagnetischer Strahlung

- 18. Jahrhundert: Disput ob Licht ein Teilchen oder eine Welle ist
- Heute wissen wir:
  - Beide Modelle widersprechen sich nicht, sondern sind komplementär
  - Wellenmodell für Interferenz und Beugung
  - Teilchenmodell Absorption und Emission
  - Licht elektromagnetische Welle mit  $\lambda \approx 400-700 \text{ nm}$

### 3.1.1. Schwarzkörperstrahlung

Erhitzt man einen Körper aus Metall so beginnt dieser Körper erst rötlich zu glühen. Mit steigender Temperatur wird das Glühen stärker und das Licht gelblicher und schließlich weiß. Daher, die Intensität des emittierten Spektrums nimmt zu und das Spektrum verschiebt sich. Interessanterweise sind dabei die Form und das Material des heißen Körpers für das emittierte Spektrum nahe zu irrelevant. Daher ist das Spektrum scheinbar nur abhängig von der Temperatur des Körpers. Die Erklärung dieses Phänomens stellte die Physik im 19. Jahrhundert vor Rätsel und bedarf einer kritischen Revision der bis dahin, aus heutiger Sicht, klassischen Ansätze und war Geburtsstunde der Quantenphysik.

### Schwarzer Körper

Um die beobachteten Phänomene zu erklären ist es hilfreich sich einen Körper vorzustellen, der alle Strahlung die auf ihn trifft absorbiert. Dies ist ein so genannter schwarzer Körper der experimentell durch einen Hohlraumstrahler realisiert werden kann. Dafür wird in einen Würfel aus elektrisch leitendem

Material eine kleine Öffnung geschnitten  $\Delta F$  (die Öffnung muss deutlich kleiner sein als die Fläche des Innenraums). Einfallende Wellen werden im Würfel nach mehrfacher Reflexion an den Wandinnenseiten vollständig absorbiert. Daher ist das Absorptionsvermögen  $A$  der Öffnung  $\Delta F$   $A \approx 1$ . In die Wände kann eine Heizung eingebaut werden. Dies realisiert die Experimente von glühendem Metall sehr gut und die Öffnung  $\Delta F$  wirkt als Strahlungsquelle. Das Emissionsvermögen  $E^*$  dieses Hohlraumstrahlers ist maximal im Vergleich zu anderen Körpern mit gleicher Temperatur da  $A \approx 1$ . Begründet ist dies durch folgende Überlegung: Im stationären Zustand ist die emittierte und absorbierte Leistung gleich

$$\frac{W_A(\nu)}{dt} = \frac{W_E(\nu)}{dt}$$

Außerdem ist die Hohlraumstrahlung isotrop und homogen, daher, die Strahlungsdichte ist unabhängig von Position/Orientierung im und Form/Art des Würfels.

## Kirchhoff'sches Gesetz

Platziert man ein Körper im Hohlraumstrahler würde folgende Leistung absorbiert werden

$$\frac{W_A(\nu)}{dt} = A_\nu S_\nu dF d\Omega d\nu$$

und folgende Leistung emittieren werden

$$\frac{W_E(\nu)}{dt} = E_\nu dF d\Omega d\nu$$

mit der Flächenelement  $dF$  seiner Oberfläche aus dem Raumwinkel  $d\Omega$  sowie im Intervall von  $\nu + d\nu$ .  $A_\nu$  und  $E_\nu$  sind dabei das *spektrale Absorptions* bzw. *Emissionsvermögen*. Wie bereits erwähnt wird im thermischen Gleichgewicht wird gleich viel Leistung absorbiert wie emittiert. Das **Kirchhoff'sche Gesetz** besagt für Hohlraumstrahlung, dass im thermischen Gleichgewicht die spektrale Strahlungsdichte  $S_\nu$  gleich dem Verhältnis der spektralen Emissions- zu Absorptionsvermögen ist

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = S_\nu$$

Für Schwarzen Körper gilt wieder rum  $A \equiv 1$ . Ergo muss damit das spektrale Emissionsvermögen  $E_\nu$  gleich der spektralen Strahlungsdichte  $S_\nu$  der Hohlraumstrahlung sein. Dies erklärt warum schwarze Körper die Modellierung der Experimente erleichtert. Durch die Annahme einer vollständigen Absorption muss nur die spektrale Strahlungsdichte beschrieben werden um die emittierte Strahlung zu erklären.

## Strategie zur Bestimmung der Schwarzkörperstrahlung

- Schwarzer Körper als Würfel annehmen
- Stehende elektromagnetische Wellen im Würfel
- Spektrale Strahlungsdichte bestimmen:
  - Modendichte im Würfel inneren bestimmen
  - Mittlere Energie pro Mode bestimmen

## Stehende Wellen im Hohlraumresonator

Für einen elektrisch leitenden Würfel beginnend im Koordinatenursprung und Kantenlänge  $a$  gelten folgende Randbedingungen für die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}$ :

$$E_x = 0, \text{ für } z = 0, a \text{ und } y = 0, a$$

$$E_y = 0, \text{ für } x = 0, a \text{ und } z = 0, a$$

$$E_z = 0, \text{ für } x = 0, a \text{ und } y = 0, a$$

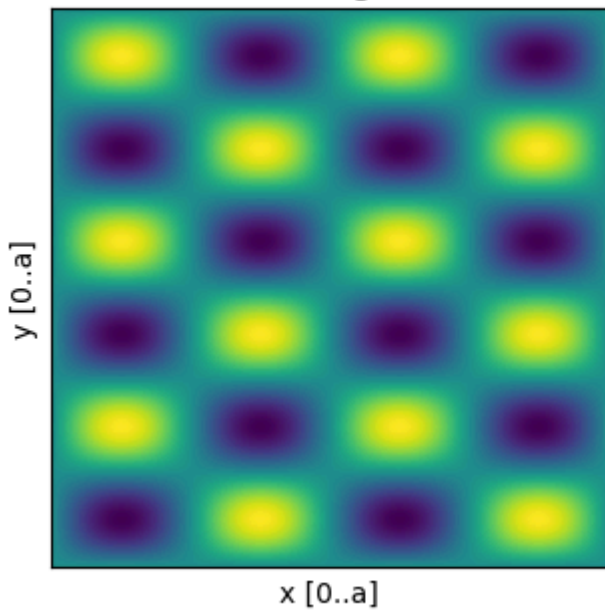
Daher sind die Tangentialkomponenten des E-Feldes null auf den Wänden. Als Konsequenz der Randbedingungen bilden sich stehende Wellen im Hohlraumresonator mit Wellenvektor  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$  und ganzzahligen Vielfachen der Gitterkonstante  $\frac{\pi}{a}$ :

$$k_x = n \frac{\pi}{a}; k_y = m \frac{\pi}{a}; k_z = q \frac{\pi}{a}$$

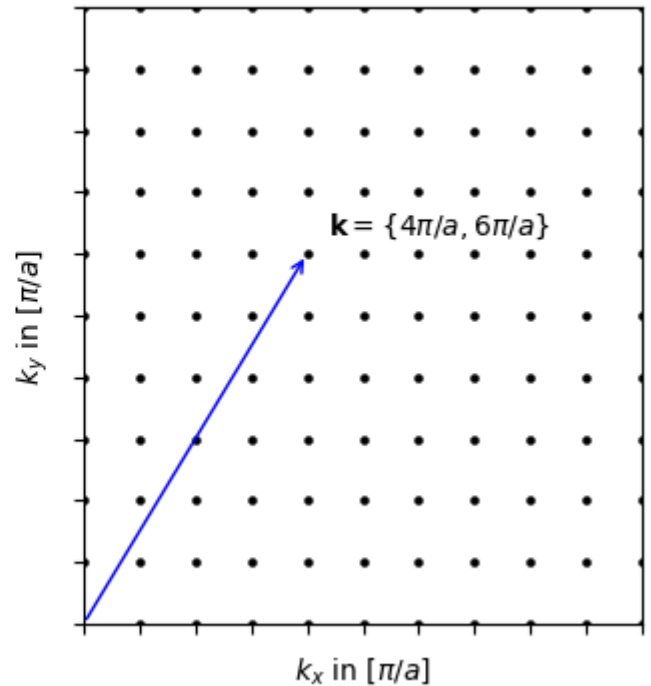
In [1]:

n  4.00  
m  6.00

2D standing waves



k-space



Out[1]:

```
<function __main__.comp_and_plot_e(order_x, order_y)>
```

## Modendichte des Hohlraumresonators

Zur Bestimmung der spektrale Strahlungsdichte ist es nötig zu wissen wie hoch die Modendichte im Hohlraumstrahler ist. Dazu wird die Anzahl der stehenden Wellen in einem Hohlraumresonator approximiert. Aus dem Betrag des Wellenvektors sowie den Randbedingungen folgt:

$$|\mathbf{k}| = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2}$$

Daher kann  $k$  als Radius einer Kugel im k-Raum verstanden werden. Gilt  $n^2 + m^2 + q^2 \gg 1$  bzw.  $\lambda \ll 2a$ , so lässt sich die Anzahl der Moden in einer Kugel mit Radius  $k_G$  nähern durch das Verhältnis des Volumens des Kugeloktanten  $V_k$  zur Einheitszelle  $V_E = (\frac{\pi}{a})^3$

$$N_G = \frac{V_k}{V_E} = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k_G^3 \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{a k_G}{\pi}\right)^3$$

Die Verwendung eines Kugeloktanten begründet sich aufgrund der vorliegenden Symmetrie sowie das  $n, m, q$  natürliche Zahlen sind.

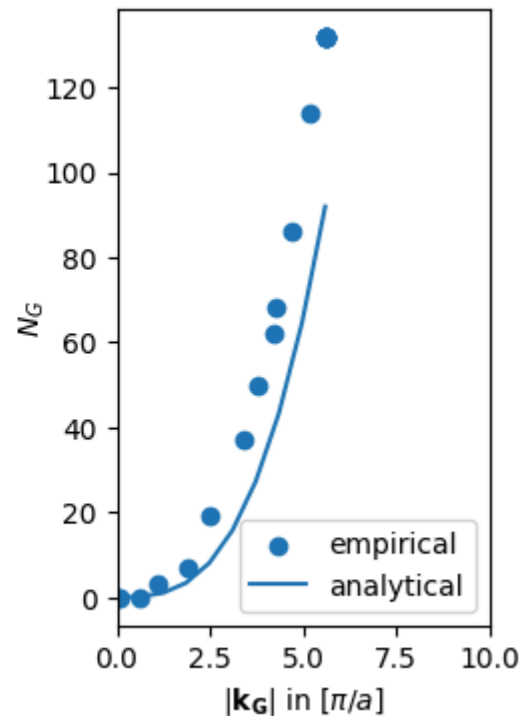
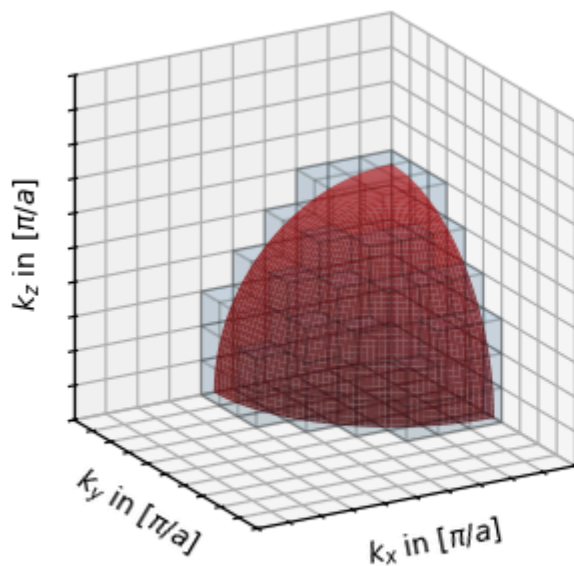
In [2]:

|k\_G| in [pi/a]  5.60

elev  20.00

azim  60.00

☒ Analytical solution



Out[2]:  
<function \_\_main\_\_.plot\_modes(k, elev, azim, show\_analytical)>

## Fortsetzung Modendichte des Hohlraumresonators

Stehende Wellen können allerdings beliebige Polarisationsrichtungen haben und werden als Linearkombination zwei zueinander senkrecht polarisierten Wellen dargestellt, z.B. in x-Richtung als  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$  mit  $\mathbf{E}_0 = E_0 y \hat{\mathbf{e}}_y + E_0 z \hat{\mathbf{e}}_z$ . Daher sind tatsächlich zweimal so viele Eigenschwingung möglich wie bisher beschrieben. Unter Nutzung von  $\omega = kc = 2\pi\nu$  ist damit die Zahl der Moden kleiner als die Grenzfrequenz  $\nu_G$  ist (nach Korrektur um Faktor 2 für Polarisationsrichtungen):

$$N(\nu \leq \nu_G) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{k_G a}{\pi} \right)^3 = \frac{\pi}{3} \left( \frac{2\pi\nu_G a}{\pi c} \right)^3 = \frac{8\pi\nu_G^3 a^3}{3c^3}$$

Um die Moden pro Volumeneinheit  $n$  zu erhalten dividieren wir durch das Volumen des Ortsraum  $V = a^3$ , also dem Würfelvolumen, und erhalten

$$n(\nu \leq \nu_G) = \frac{8\pi\nu_G^3}{3c^3}$$

Für die Schwarzkörperstrahlung benötigen wir die spektrale Modendichte  $n(\nu)d\nu$  (siehe Kirchhoff'sches Gesetz/spektrale Strahlungsdichte). Diese erhalten wir durch Ableiten von  $n$  nach  $d\nu$  und könnten so die möglichen Eigenschwingungen pro Volumen innerhalb des Frequenzintervalls  $d\nu$  angeben

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

## Rayleigh-Jeans-Modell der Schwarzkörperstrahlung

Für die Schwarzkörperstrahlung verwendeten Rayleigh 1900 den Ansatz (Korrektur des Vorfaktor durch Jeans 1905), dass die spektrale Energiedichte  $\rho(\nu)d\nu$  sich aus dem Produkt der spektralen Modendichte und der mittleren Energie pro Eigenschwingung  $\bar{E}_\nu(T)$  ergibt

$$\rho(\nu)d\nu = n(\nu)\bar{E}_\nu(T)d\nu$$

Für die mittlere Energie pro Eigenschwingung wurden die Erkenntnisse von Boltzmann verwendet (Idee aus Thermodynamik, siehe Gleichverteilungssatz/Äquipartitionstheorem/harmonischer Schwinger): Im thermischen Gleichgewicht ist der Erwartungswert der gesamten Energie  $\bar{E} = \frac{f}{2}k_bT$  mit  $f$  als Anzahl der Freiheitsgrad und  $k_b$  der Boltzmann Konstante ( $k_b = 1,38 \times 10^{-23} \text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$ ). Diese Idee wurde von Thermodynamik auf elektromagnetische Wellen übertragen. Pro stehende Welle/Mode verwenden Rayleigh & Jeans  $\bar{E} = k_bT$  ( $f = 2$ , da E und B Feld, siehe harm. Schwinger) Daraus ergibt sich das **Rayleigh-Jeans Strahlungsgesetz** für die räumliche Energiedichte

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_bTd\nu$$

Für die Öffnung in einem Hohlraumstrahler lässt sich die emittierte Strahlungsdichte für  $\Delta\Omega = 1$  Steradian bestimmen über den Zusammenhang  $S_\nu(\nu)d\nu = \frac{c}{4\pi}\rho(\nu)d\nu$

$$S_\nu(\nu)d\nu = \frac{2\nu^2}{c^2}k_bTd\nu$$

Alternativ können die räumliche Energiedichte und Strahlungsdichte auch in Abhängigkeit von der Wellenlänge angegeben werden unter Nutzung von  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , d.h.  $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}k_bTd\lambda$$

$$S_\lambda(\lambda)d\lambda = \frac{2c}{\lambda^4}k_bTd\lambda$$

## Ultraviolett Katastrophe

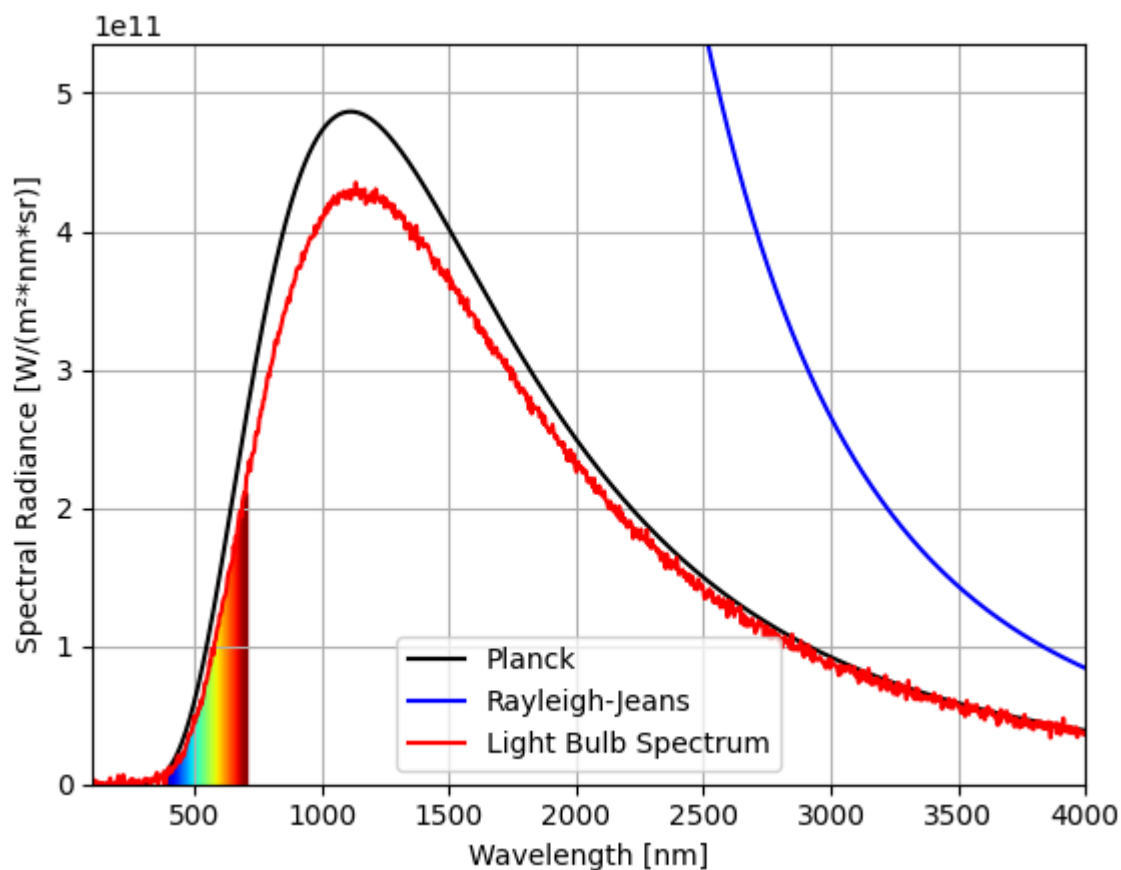
In [3]:

temperature  2600.00

max\_wavele...  4000.00

☒ Rayleigh-Jeans

☒ Planck



Out[3]:

```
<function __main__.plot_spectra(temperature, max_wavelength, plot_rayleigh_jeans, plot_planck)>
```

Die Vorhersagen von Rayleigh und Jeans beschreiben nur für sehr große Wellenlänge adäquat die Ergebnisse der Experimente. Für kürzere Wellen weicht das gemessene Spektrum deutlich ab und, daher auch der Name Ultraviolett Katastrophe, für kurze Wellenlängen sagt das Rayleigh-Jeans Gesetz eine gegen Unendlich strebende spektrale Strahlungsdichte voraus.

### 3.1.2. Das Planck'sche Strahlungsgesetz

- Verwendet auch Eigenmodendichte des Hohlraumstrahlers
- Energie aber nicht kontinuierlich, sondern nur in disreten, quantisierten Energiepaketen / Energiequanten
- Planck'sches Wirkungsquantum  $h = 6.626069310^{-34} Js$
- kleinstmöglichen Energiequanten  $h\nu$  der Eigenschwingungen des elektromagnetischen Feldes heißen Photonen
- Energie pro Eigenschwingung ist dann  $W_\nu = nh\nu$
- räumliche Energiedichte

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/k_bT} - 1}$$

- emittierte Strahlungsdichte

$$S_\nu(\nu)d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{d\nu d\Omega}{e^{h\nu/k_bT} - 1}$$

### 3.1.3. Wien'sches Verschiebungsgesetz

### 3.1.4. Das Stefan-Boltzmann'sche Strahlungsgesetz

### 3.1.5. Photoelektrischer Effekt

### 3.1.6. Compton-Effekt

### 3.1.7. Eigenschaften des Photons

## Cheat Sheet

Wellenzahl  $k$ , Wellenlänge  $\lambda$ , Kreis-/Winkelfrequenz  $\omega$ , Ortsfrequenz  $\nu$

$$\text{Dispersionsverhältnis } c = \lambda \nu = \frac{\omega}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ analog zu } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\lambda = \frac{1}{\nu}, \text{ analog zu } T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \text{ bzw. } \omega = 2\pi f$$

Stehende Wellen in Würfel mit Kantenlänge  $a$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{a}, \text{ mit } a = \frac{1}{2}\lambda$$

Wellengleichung:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Wellengleichung für stehende Welle:

$$y(x, t) = y_R + y_L = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{Flußdichte E-Feld prop. zu eingeschl. Ladung} \mid \text{Ladung} == \text{Quelle}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Keine Quellen / mag. Monopole}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Änderung B-Feld} \rightarrow \text{Änderung E-Feld}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Änderung E-Feld} \rightarrow \text{Änderung B-Feld}$$

Einheiten

$$[\rho] = \frac{W}{m^3}$$

$$[S] = \frac{W}{m^2 n m s r}$$