Analiza danych eksperymentalnych
Laboratorium 3: MNK i Regresja liniowa c.d.

Jan Zemło 259194
Juliusz Sarna 259506

16 października 2024

1 Wstęp

Aproksymacja wielomianowa to technika wykorzystywana w analizie numerycznej i statystyce, mająca na celu przybliżenie funkcji za pomocą wielomianów. Celem tej metody jest uproszczenie złożonych funkcji, co ułatwia ich analizę, obliczenia oraz przewidywanie wartości. Aproksymacja wielomianowa polega na znalezieniu odpowiednich współczynników wielomianu, który w najlepszy sposób dopasowuje się do zestawu danych lub do konkretnej funkcji na zadanym przedziale.

2 Wygenerowane dane

Kodem znajdującym się w instrukcji wygenerowano dane:

x	y
0.000000	−0.031701
0.050505	0.154023
0.101010	0.152168
0.151515	0.361020
0.202020	0.401355
⋮	⋮
4.797980	2.566249
4.848485	2.486512
4.898990	2.503166
4.949495	2.427559
5.000000	2.563289

Cała tabela zawiera 100 wierszy stąd w raporcie umieszczono skróconą wersje.

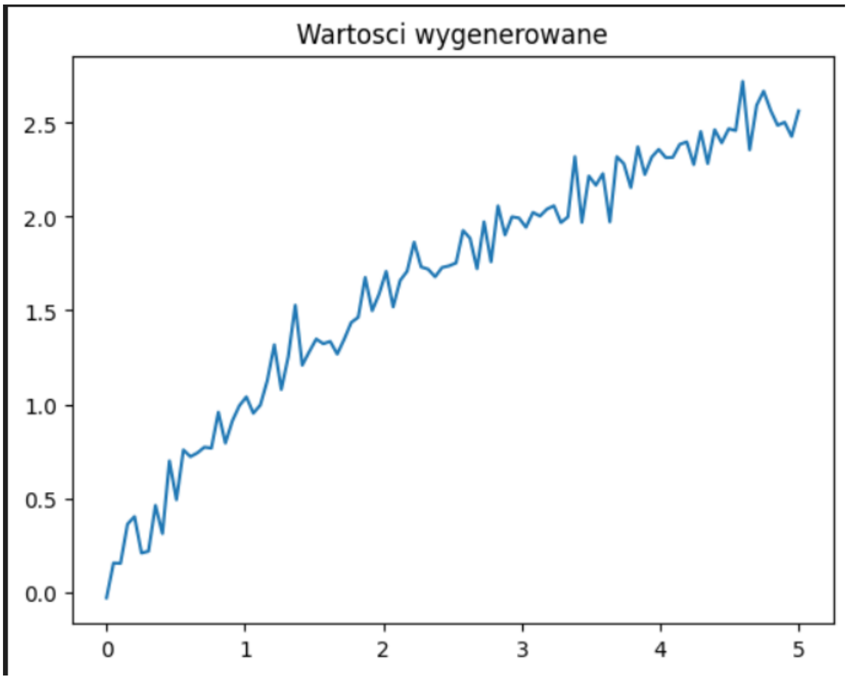

Figure 1: Wykres wygenerowanych danych

3 Macierze układu normlanego

Macierz układu normalnego przedstawia się wzorem

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}$$

Macierz X jest macierzą projektującą, która zawiera wartości zmiennych niezależnych (wejściowych) w modelu regresji. W kontekście regresji wielomianowej, macierz X przyjmuje różne formy w zależności od stopnia wielomianu.

3.1 Macierz X dla regresji 1-stopnia

Dla regresji liniowej (1-stopnia), macierz X ma następujący kształt:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

gdzie x_i to obserwowane wartości zmiennej niezależnej.

3.2 Macierz X dla regresji 2-stopnia

Dla regresji kwadratowej (2-stopnia), macierz X przyjmuje postać:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

Tutaj dodajemy kolumnę dla x^2.

3.3 Macierz X dla regresji 3-stopnia

Dla regresji sześciennej (3-stopnia), macierz X wygląda następująco:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 \end{pmatrix}$$

W tym przypadku dodajemy dodatkową kolumnę dla x^3.

3.4 Znalezenie współczynników

Mając powyższe macierze oraz wartości y możemy rozwiązać równanie:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}\,\mathbf{a} = \mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

gdzie: - $\mathbf{X}$ to macierz projektu, - $\mathbf{X}^T$ to transponowana macierz $\mathbf{X}$, - $\mathbf{a}$ to wektor współczynników wielomianu, - $\mathbf{y}$ to wektor wartości y.

Po przekształceniu i obliczeniu dostajemy następujące wartości a:

Stopień wielomianu	**Współczynnik** a_0	**Współczynnik** a_1	**Współczynnik** a_2	**Współczynnik** a_3
1	0.4801	0.4745	-	-
2	0.1927	0.8229	-0.0697	-
3	0.0956	1.0618	-0.1898	0.0160

Table 1: Współczynniki wielomianów 1-go, 2-go i 3-go stopnia

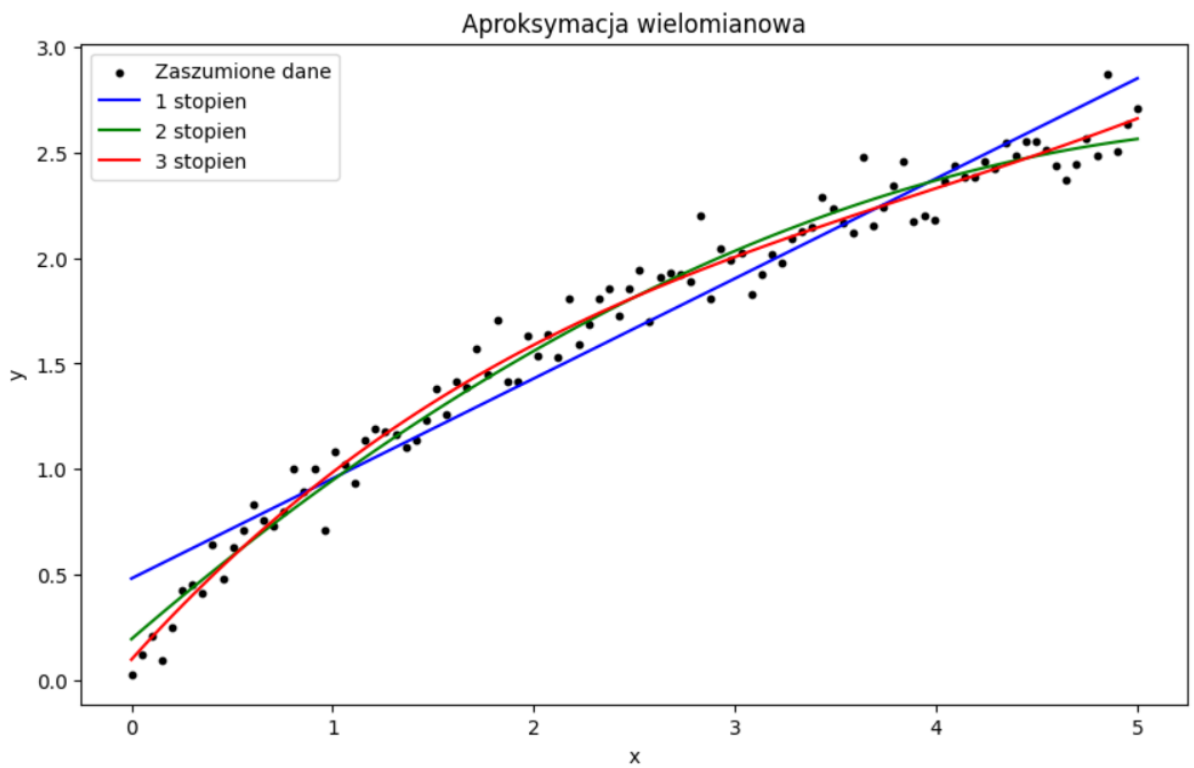

Figure 2: Wykres wygenerowanych danych wraz z aproksymacją wielomianową

Metoda, którą wykorzystano do wyznaczenia współczynników wielomianów bazuje na rozwiązaniu układu równań normalnych za pomocą macierzy odwrotnej, co jest jedną z metod stosowanych w regresji liniowej do dopasowania modelu. W tej metodzie współczynniki są obliczane poprzez rozwiązanie układu równań normalnych, który minimalizuje błąd średniokwadratowy między obserwacjami a wartościami przewidywanymi przez model.

4 Wnioski

W zadaniu dotyczącym aproksymacji wielomianowej 1., 2. i 3. stopnia wykorzystano metodę najmniejszych kwadratów, aby znaleźć wielomiany, które najlepiej opisują zadanwartości. Metoda ta pozwala na uzyskanie równań opisujących dane w sposób możliwie najbardziej zbliżony do rzeczywistego, przy minimalizacji błędu średniokwadratowego.

- Wielomian 1. stopnia (liniowy) jest najprostszy i charakteryzuje się prostą zależnością liniową między zmiennymi. Nadaje się do opisu danych z prostą, liniową zależnością, ale może nie oddać bardziej skomplikowanych wzorców.
- Wielomian 2. stopnia (kwadratowy) umożliwia uchwycenie prostych nieliniowości w danych, co może być użyteczne, gdy zależność zmiennych ma kształt paraboliczny.
- Wielomian 3. stopnia (sześcienny) oferuje jeszcze większą elastyczność i lepiej odwzorowuje bardziej złożone zależności nieliniowe.

Metoda pozwala na elastyczne dopasowanie krzywej, zwiększając stopień wielomianu w zależności od poziomu złożoności danych. Metoda jest prosta do wdrożenia i zastosowania. Metoda najmniejszych kwadratów minimalizuje błąd między modelowanymi a rzeczywistymi wartościami. Wielomiany niskiego stopnia często oferują dobre predykcje dla relatywnie prostych i gładkich zależności.

Metoda aproksymacji wielomianowej pozwala skutecznie opisać relację między zmiennymi w zadanym zbiorze danych. Jest to szybkie i efektywne podejście do aproksymacji danych oraz użyteczne narzędzie w analizie regresji i modelowaniu, szczególnie dla danych wykazujących zależności nieliniowe.