第11卷 第1期 1996年2月
天中学刊(自然科学版) Journal of Tianzhong
Vol.11 No.1 Feb. 1996

余树为树的充分必要条件

钟铭 刘永熙 傅手

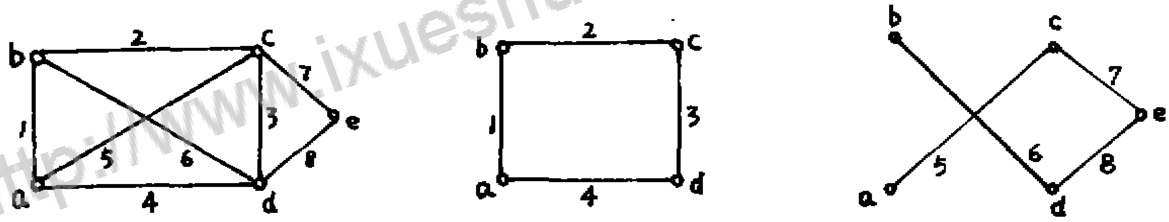
给出一个连通图 $G=\langle V,E\rangle$，若 G 没有回路，则 G 本身就是生成树. 若 G 有回路，取定一个回路，删去任一条边，若 G 中仍有回路，则逐个地对每个回路重复上述过程，直到得到一棵生成树为止. 从图 G 中得到生成树 T 所去掉的边称为 T 的弦. T 的所有弦加上 G 的各顶点构成的图 T' 称为余树. 很明显，连通图 G 的生成树有许多个，其对应的余树可能是树，也可能不是树. 下面给出余树为树的必要条件.

定理1 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是连通图，$|V|=n$，$|E|=m$，若余树是树，则 $m=2n-2$.

证明 设 T' 是 G 的余树，则 T' 的边数为 $m-n+1$. 又因为 T' 是树，则其边数为 $n-1$. 从而 $m-n+1=n-1$，故 $m=2n-2$. 证毕.

显然，若连通图 G 的生成树 T 所对应的余树 T' 是一棵树，则 T 与 T' 的边数相同，都是 $n-1$. 此时，余树 T' 也是图 G 的一棵生成树，它的余树是 T，即 T 与 T' 互为余树和生成树.

定理1仅指出了余树是树的必要条件，但不是充分条件. 例如，给出连通图 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|=5$，$|E|=2\times5-2=8$. 如图1. 在图1(a)中，相继删去边1、2、3和4，就得到生成树T，如图1(c)，余树T′如图1(b)不是一棵树.



(a) (b) (c)

图1

除要求连通图 G 的顶点数 n 和边数 m 满足关系 $m=2n-2$ 之外，还有下面

定理2 若连通图 G 的生成树所对应的余树为树，则 G 无悬挂.

证明 反证法 假设 G 有悬挂，则 G 的悬挂边是 G 的生成树的一个树枝. 在对应的余树中，悬挂点是余树的孤立点，从而余树不是树. 这与定理条件矛盾. 故 G 无悬挂.

由定理2立即得到

定理3 若连通图 G 的余树为树，则 G 的各顶点的度至少为2.

定理1和定理2的结论合并一起，也不是余树为树的充分条件，上面的图例可以说明.

下面给出余树为树的充分条件.

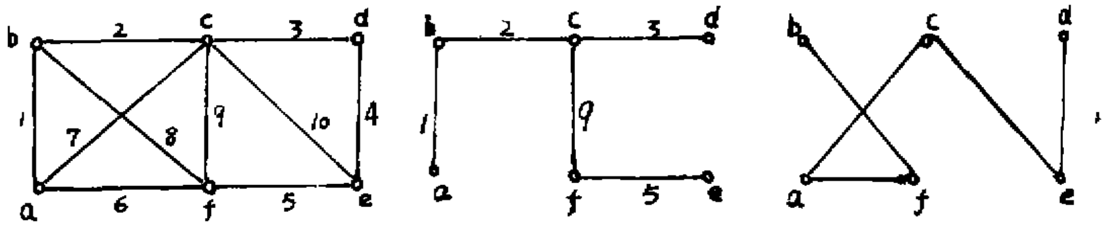
定理4 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是连通图，$|V|=n$，$|E|=m$，如果1) $m=2n-2$，2) 余树是连通图，则余树必为树.

(下转第33页)

证明　根据公式及条件 1) 知，余树边数是 $m-n+1=(2n-2)-n+1=n-1$. 又因余树是连通的，由树的定义知，余树必为树. 结论成立.

说明　1) 当定理 4 的条件满足时，图 G 的生成树和余树的不仅个数相同，而且生成树集和余树集完全一样.

2) 当定理 4 的条件满足时，尽管图 G 的生成树和余树具有相同的顶点数和边数并且都是树，但两者并不一定同构. 例如图 2，$|V|=6$，$|E|=2\times 6-2=10$. 在图 2(b) 和图 2(c) 中，两者互为余树和生成树，它们的度序列分别是(3,2,2,1,1,1) 和(2,2,2,2,1,1) 故两者不同构.



(a)　　(b)　　(c)

图 2

3) 当定理 4 的条件满足时，如果图 G 是连通带权图，T 是 G 的最小生成树，则 T 对应的余树 T' 作为 G 的生成树是最大生成树. 但是应当注意，带权图 G 的最小生成树按照 Kruskal 算法寻求出来后，可能保证不了定理 4 条件 2)，即最小生成树不一定是树.

(文稿收到日期：1995-10-10)〔责任编辑 蔡国梁〕