

MOPEC-2010-001 第五周(集合的基数+代数系统)

离散数学习题解析

魏恒峰

2011 年 4 月 1 日

1 习题八 函数

1. (P_{164} 第34题 :)

设 A, B, C, D 是集合, $A \approx C, B \approx D$, 证明: $A \times B \approx C \times D$.

提示:

存在双射函数 $f: A \rightarrow C, g: B \rightarrow D$,

构造 $h: A \times B \rightarrow C \times D, h(\langle a, b \rangle) = \langle f(a), g(b) \rangle$.

只需证明 h 为双射函数。

2. (P_{164} 第39题(1) :)

设 A, B 为可数集。证明, $A \cup B$ 是可数集。

解答:

假设 $A \cap B = \emptyset$.

(a) A, B 均为有穷集。 $\text{card}(A \cup B) = n + m \leq \aleph_0$.

(b) $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}, \text{card}(B) = \aleph_0$.

构造双射函数 $h: A \cup B \rightarrow N$.

$$h(x) = \begin{cases} i & x \in A, x = a_i \\ j + n & x \in B, x = b_j \end{cases}$$

(c) $\text{card}(A) = \text{card}(B) = \aleph_0$.

存在双射函数 $f: A \rightarrow N, g: B \rightarrow N$, 构造双射函数

$$h(x) = \begin{cases} 2i & x \in A \wedge f(x) = i \\ 2j + 1 & x \in B \wedge g(x) = j \end{cases}$$

3. (P_{164} 第39题(2) :)

设 A, B 为可数集。证明, $A \times B$ 是可数集。

(a) A, B 均为有穷集。 $\text{card}(A \times B) = mn \leq \aleph_0$.

(b) $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}, \text{card}(B) = \aleph_0$.

构造双射函数 $h: A \times B \rightarrow N. h(\langle a_i, b_j \rangle) = i + jn$.

(c) $\text{card}(A) = \text{card}(B) = \aleph_0$.

存在双射函数 $f: A \rightarrow N, g: B \rightarrow N$, 构造双射函数:

$$h(\langle x, y \rangle) = \frac{(i+j+1)(i+j)}{2} + i. \text{ 其中 } f(x) = i, g(y) = j.$$

2 习题九 代数系统

本章习题较为简单。故略去。若有疑问，请单独询问。