NJUCS 第八周(群论(3),正规子群，同态与置换群)

离散数学习题解析

魏恒峰　2011 年 4 月 25 日

1　补充习题　群论(3) 正规子群，同态与置换群

1. 假设f是群G到G'的映射，$H \subseteq G$,证明:

   (a) $H \subseteq f^{-1}(f(H))$,但是$H = f^{-1}(f(H))$不一定成立。

   (b) 若$Kerf \subseteq H$，则$H = f^{-1}(f(H))$。

   解答:
   (该题似有差错，待我们弄清楚之后，再在习题课上讲解。若各位对该题有什么看法，欢迎讨论。)

2. 设f是群G到群G'的满同态。证明,$H \triangleleft G \Leftrightarrow f(H) \triangleleft G'$
   解答:
   (该题似有差错，待我们弄清楚之后，再在习题课上讲解。若各位对该题有什么看法，欢迎讨论。)

3. $\phi : G \rightarrow G'$, 为同态映射, $H \leq G, K \leq G'$,试证明如下与群同态相关的结论:
   解答:

   (a) **$\phi(H)$是G'的子群.**
   $e' \in \phi(H) \Rightarrow \phi(H) \neq \emptyset$.
   $\forall h_1, h_2 \in H, h_1h_2^{-1} \in H$.
   $\phi(h_1)(\phi(h_2))^{-1} = \phi(h_1)\phi(h_2^{-1}) = \phi(h_1h_2^{-1} \in \phi(H)$.

   (b) **$\phi^{-1}(K)$是G的子群.**
   $e \in \phi^{-1}(K) \Rightarrow \phi^{-1}(K) \neq \emptyset$.
   $\forall a, b \in \phi^{-1}(K), \phi(a), \phi(b) \in K$.
   $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)^{-1} \in K. \Rightarrow ab^{-1} \in \phi^{-1}(K)$

(c) **如果H是G的正规子群，则$\phi(H)$是$\phi(G)$的正规子群.**
$\phi(H) \leq \phi(G) \Rightarrow \forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H.$
$\phi(g)\phi(h)(\phi(g))^{-1} = \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) = \phi(ghg^{-1}) \in \phi(H).$

(d) **如果K是G'的正规子群，则$\phi^{-1}(K)$是G的正规子群.**
$\phi^{-1}(K) \leq G, \forall g \in G, h \in \phi^{-1}(K) \Rightarrow \phi(h) \in K.$
$K \triangleleft G' \Rightarrow \phi(ghg^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1} \in K \Rightarrow ghg^{-1} \in \phi^{-}(K).$

(e) **$Ker\phi$是G的正规子群.**
$\{e'\} \triangleleft G' \Rightarrow \mathrm{Ker}\phi \triangleleft G.$

4. **第二同构定理.** 设$H \triangleleft G, K \triangleleft G$，则$HK \triangleleft G, H \cap K \triangleleft G$, 且$HK/K \cong H/(H \cap K)$
解答:
该题的证明对于初学者来说是有一定难度的，要想给出严谨的证明过程，需要对相关知识点很熟悉才有可能。请大家放松心情，耐心体会该题的证明过程。从这一道题的证明中，我们也顺带可以复习许多知识点。
对于该类复杂定理的证明，建议大家采用分层证明的策略。所谓分层证明，就是自顶向下，逐步精化的过程。比如，要证明某群H 是群G的正规子群，就要先证明$H \leq G$，再证明$H \triangleleft G$;而要证明$H \leq G$，又要先说明$H \neq \emptyset$。大家在证明的时候，可以将以上关于层次的思考书写下来，分出一二三点，再分一二三小点，依次逐步证明。这样，就不至于感到无从下手。
根据群同态基本定理，要证明$HK/K \cong H/(H \cap K)$，我们有两种选择，

(a) 寻找满同态$f : HK \to H/(H \cap K)$,并证明$\mathrm{Ker}f = K$；

(b) 寻找满同态$f : H \to HK/K$，并证明$\mathrm{Ker}f = H/(H \cap K)$。

有选择，就会产生困惑。到底采取哪一条途径呢？我们不妨都试试看。实际上，这两条途径都是行得通的。
在开始考虑使用哪种途径来应用(apply)群同态基本定理之前，我们还要先做些准备工作。也就是，我们要先证明一些相关的辅助证明，这些证明看上去不像使用群同态基本定理那样重要，但对于本题来讲却是不可或缺的。这包括:

(a) 证明$HK \triangleleft G, H \cap K \triangleleft G$;

(b) 证明$K \triangleleft HK, H \cap K \triangleleft H.$

第一条大家一般不会忽略，但是第二条却少有人注意。之所以要证明第二条，是因为我们要保证$HK/K \cong H/(H\cap K)$ 的合法性。文字$HK/K \cong H/(H\cap K)$本身是不能证明自身的合法性的。

(a) **一证:**$HK \lhd G$

- $HK \leq G$.
  $e \in HK, HK \neq \emptyset$.
  $\forall hk \in HK, h_1k_1 \in HK,$其中$, h, h_1 \in H, k, k_1 \in K$.
  $(hk)(h_1k_1)^{-1} = hkk_1^{-1}h_1^{-1}$
  $K \lhd G \Rightarrow Kh_1^{-1} = h_1^{-1}K \Rightarrow \exists k_2 \in K, k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}k_2$
  故，$(hk)(h_1k_1)^{-1} = hkk_1^{-1}h_1^{-1} = hkh_1^{-1}k_2 = hh_1k_3k_2(\exists_3 \in K) \in HK$.
  由子群判定定理得,$HK \leq G$成立。
- $HK \lhd G$
  $\forall g \in G, hk \in HK(h \in H, k \in K)$.
  $H \lhd G \Rightarrow ghg^{-1} \in H; K \lhd G \Rightarrow gkg^{-1} \in K$.
  故，$g(hk)g^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1} \in HK$.
  由正规子群判定定理得,$HK \lhd G$成立。

(b) **二证:**$H \cap K \lhd G$

- $H \cap K \leq G$.
  $e \in H \cap K \Rightarrow H \cap K \neq \emptyset$.
  $\forall a \in H \cap K, b \in H \cap K \Rightarrow ab^{-1} \in H(\because H \leq G) \wedge ab^{-1} \in K(\because K \leq G.) \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K$.
- $H \cap K \lhd G$.
  $\forall n \in H \cap K, \forall g \in G$.
  $gng^{-1} \in H, gng^{-1} \in K \Rightarrow gng^{-1} \in H \cap K$.

(c) **验证**HK/K**的合法性，即需证明**$K \lhd HK$**.**
$K = eK \subseteq HK, K \lhd G \Rightarrow K \lhd HK$.

(d) **验证**$H/(H \cap K)$**的合法性，即需证明**$H \cap K \lhd H$**.**
$H \cap K \subseteq H, H \cap K \lhd G \Rightarrow H \cap K \lhd H$.

到此为止，我们完成了准备工作。接下来，我们将要使用群同态基本定理来证明商群之间的同构关系。在前面，我们已经分析过，对于如何使用群同态基本定理我们有两条途径可选，而两条途径又都是可行的，所以接下来我们分别来分析每一条途径。

(a) **方法一:寻找满同态$f : H \to HK/K$，并证明$\mathbf{Ker}f = H/(H \cap K)$.**

i. **构造映射.**

构造映射

$$\phi : H \to HK/K.$$

$$h \mapsto hkK = hK.(h \in H, k \in K.)$$

ii. **证明你所构造的确实是映射.**

即证明：$\forall h \in H, \exists! hK \in HK/K, \phi(h) = hK.$

存在性，显然;

唯一性: $h = h_1 \Rightarrow \phi(h) = \phi(h_1)$. 得证.

iii. **证明该映射为满射.**

$\forall hkK \in HK/K, \exists h, \phi(h) = hK = hkK$. 得证.

iv. **证明该映射为群之间的满同态映射.**

$\forall h_1, h_2 \in H, \phi(h_1h_2) = h_1h_2K = (h_1K)(h_2K) = \phi(h_1)\phi(h_2).$

v. **求解同态核.**

$\mathrm{Ker}\phi = \{h \in H \mid \phi(h) = eK = K\} = \{h \in H \mid hK = K\}$

$= \{h \in H \mid h \in K\} = H \cap K.$

vi. **应用同态基本定理.**

故，$H/(H \cap K) \cong HK/K$.得证。$\square$

(b) **方法二:寻找满同态$f : HK \to H/(H \cap K)$,并证明$\mathbf{Ker}f = K$.**

i. **构造映射.**

$$\phi : HK \to H/(H \cap K).$$

$$hk \mapsto h(H \cap K).$$

ii. **证明你所构造的确实是映射.**
即证明：$\forall hk \in HK, \exists! h(H\cap K) \in H/(H\cap K), \phi(hk) = h(H\cap K)$.
存在性，显然;
唯一性，即证明,$hk = h'k' \Rightarrow \phi(hk) = \phi(h'k')$。
$hk = h'k' \Rightarrow h^{-1}hk(k')^{-1} = h^{-1}h'k'(k')^{-1} \Rightarrow k(k')^{-1} = h^{-1}h'$
$\Rightarrow h^{-1}h' \in K, h^{-1}h' \in H \Rightarrow h^{-1}h' \in H\cap K \Rightarrow h(H\cap K) = h'(H\cap K) \Rightarrow \phi(hk) = \phi(h'k')$.

iii. **证明该映射为满射.**
$e \in K.\forall h(H\cap K), \exists h = he \in HK, \phi(he) = h(H\cap K)$.

iv. **证明该映射为群之间的满同态映射.**
即需证明,$\phi((hk)(h'k')) = (h(H\cap K))(h'(H\cap K))$.
$\phi((hk)(h'k')) = \phi(hkh'k') = \phi(hh'k''k')(\exists k'', kh' = h'k''$,请思考，为什么?)
$= hh'(H\cap K) = (h(H\cap K))(h'(H\cap K))$.

v. **求解同态核.**
$\mathrm{Ker}\phi = \{hk \in HK \mid \phi(hk) = e(H\cap K) = H\cap K\}$
$= \{hk \in HK \mid h(H\cap K) = H\cap K\} = \{hk \in HK \mid h \in H\cap K\}$
$= (H\cap K)K = K(\because, H\cap K \subseteq K, K \leq G \Rightarrow \forall a \in H\cap K, aK = K.)$.

vi. **应用同态基本定理.**
由同态基本定理,$H/(H\cap K) \cong HK/K$.得证。□

群同态基本定理经常被用来证明与商群相关的同构关系。由群同态基本定理的形式可知，有时我们不知道该构造哪些群之间的满同态映射，同样也不清楚该把哪个正规子群当作同态核来看待并计算。这时，我们可以尝试这些不同途径，试着构造不同的满同态映射。

对于简单的商群等价，基本可以根据陪集的形式来构造满同态映射，大家可以先尝试一下，就像该例所构造的那些满同态映射一样。

构造好映射以后，需要先验证你所构造的确实是映射，也就是满足函数的“存在唯一”条件，然后再证明其为满射和满同态。

在计算同态核的时候，要时刻牢记与子群、子群陪集等价($Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H, a \in H \Leftrightarrow Ha = H$) 以及正规子群相关的性质。

验证题目中商群记号的合法性也是必不可少的。

顺带说一句，当证明不知该如何进行时，再回过头来想想哪些是已知条件，现在需要证明的是什么，要想达到目标还差什么条件，然后可以从已知条件

和目标分别出发，一步步填补证明的过程。

5. **第三同构定理：** 已知$H \lhd G, K \lhd G, H \subseteq K$,证明，$G/K \cong (G/H)/(K/H)$. 本定理在课堂上已介绍过，其证明在老版教科书上也已给出。但是，该证明不够详尽，我们再按照上一题的步骤给出详细证明过程。同学们可以再借此机会熟悉一下群同态基本定理及其应用和相关知识点。

   (a) **验证K/H的合法性，即证明$H \lhd K$.**
   $H \lhd G, H \subseteq K \Rightarrow H \lhd K.$

   (b) **验证$(G/H)/(K/H)$的合法性，即证明$K/H \lhd G/H$.**

   - $K/H \leq G/H.$
     $eH \in K/H \Rightarrow K/H \neq \emptyset.$
     $\forall kH, k_1H \in K/H, k, k_1 \in K,$
     $(kH)(k_1H)^{-1} = kHH^{-1}k_1 = kHHk_1 = kHk_1 = kk_1H \in KH.$
   - $K/H \lhd G/H.$
     $\forall kH \in K/H, \forall gH \in G/H.$
     $(gH)(kH)(gH)^{-1} = gHkHH^{-1}g^{-1} = gHkHg^{-1} = gkg^{-1}H \in K/H.$

   (c) **构造映射.**

$$\phi : G/H \to G/K.$$
$$gH \to gK$$

   (d) **证明你所构造的确实是映射.**
   即证明,$\forall gH \in G/H, \exists! gK \in G/K, \phi(gH) = gK.$
   存在性，显然;
   唯一性：$gH = g_1H \Rightarrow gg^{-1} \in H \gg^{-1} \in K(H \subseteq K) \Rightarrow gK = g_1K$
   即$gH = g_1H \Rightarrow \phi(gH) = \phi(g_1H).$

   (e) **证明该映射为满射.**
   $\forall gK \in G/K, \exists gH \in G/H, \phi(gH) = gK.$

   (f) **证明该映射为群之间的满同态映射.**
   $\phi((gH)(g_1H)) = \phi(gg_1H) = gg_1K = (gK)(g_1K) = \phi(gK)\phi(g_1K).$

(g) **求解同态核.**
$\mathrm{Ker}\phi = \{gH \mid \phi(gH) = K\} = \{gH \mid gK = K\} = \{gH \mid g \in K\} = K/H.$

(h) **应用同态基本定理.**
由群同态基本定理，$G/K \cong (G/H)/(K/H)$.成立。$\square$