MOPEC-2010-001离散数学习题解析(第十四周)

图论(3) 连通图,欧拉图与哈密顿图

魏恒峰 2011 年 5 月 30 日

1 Problem Set

Problem 1.1. 连通图补充习题

设G是$n(n \geq 3)$阶无向简单图,G是连通图,但G不是n阶完全图.试证明G中存在三个不同的顶点u, v, w, 使得$(u, v), (v, w) \in E(G), (u, w) \notin E(G)$.

Solution 1.2. 连通图补充习题

在作业中,大家给出了四种不同的证明方法.

最短路径法: G是非完全图的连通图,故必存在两不相邻的顶点v_i, v_j,图G中存在v_i到v_j的路径,所以必存在最短路径. 设$P = v_i v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k} v_j (k \geq 1)$为其最短路径.

1. 若$k = 1$,则v_i, v_{i_1}, v_j则为所求.
2. 若$k \geq 2$, 则v_i, v_{i_1}, v_{i_2}则为所求(注意,$v_i, v_{i_2} \notin E(G)$,否则与最短路径的假设相矛盾).

反证法: 反设情况如以下三种情况之一:

1. $\forall u, v, w, (u, v), (v, w) \in E(G) \Rightarrow (u, w) \in E(G)$.
2. $\forall u, v, w, \exists!(u, v) \in E(G)$.
3. $\forall u, v, w, \neg\exists(u, v) \in E(G)$.

第一种情况1可通过这种边之间的传递性证明该图G是完全图. 对于第二种情况2和第三种情况3可证明该图G是非连通图. 从而产生矛盾.

数学归纳法: 略.

Remark 1.3. 连通图补充习题

对于反证法*1.2*,很多同学只考虑了反设情况的第一种，而忽略了另外两种.在反设时，大家可以借助逻辑里所学习的逻辑演算来判断反设情况有没有考虑完全.所谓完全，即应该满足：反设情况与题设情况的条件之并应该为永真.

Problem 1.4. $P_{293}(41)$极大路径法

设G是无向简单图,$\delta(G) \geq 2$,证明G中存在长度大于或等于$\delta(G)+1$的圈.

Solution 1.5. $P_{293}(41)$极大路径法

该题可使用极大路径法来证明.具体证明过程参见教材$P_{286}(14,8)$或者习题课讲义第一讲.此处不再赘述.

Remark 1.6. $P_{293}(41)$极大路径法

有的同学对该题理解错误.本题的$\delta(G) \geq 2$中的*2*只是最基本的条件,不是对度数的具体要求.问题也不是要求证明存在≥ 3的圈.这里,$\delta(G)$是一个可变参数.