MOPEC-2010-001第四周(二元关系+函数)

离散数学习题解析

魏恒峰 2011 年 3 月 27 日

1 习题七 二元关系

1. **(P_{134}第45题) 根据Hasse图写出偏序关系。**
   常见错误:
   有些作业丢失了部分有序对，比如，$\langle a, d\rangle$, $\langle a, e\rangle$等。这主要是因为遗忘了偏序关系的传递性。
   Hasse diagram是对偏序关系的一种简化表达方式，它根据偏序关系的自反性省略了环，根据对称性省略了边的方向，根据传递性省略了间接边。在根据Hasse图反推偏序关系时，就要恢复这些被省略的有序对。

2. **(P_{135}第48题) 证明偏序关系。**
   解析:
   大家对于自反性和传递性的掌握都很到位，但是对于反对称性的理解就有点薄弱了。
   $\langle a_1, b_1\rangle T\langle a_2, b_2\rangle \wedge \langle a_2, b_2\rangle T\langle a_1, b_1\rangle \Rightarrow a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_1 \wedge b_1Sb_2 \wedge b_2Sb_1$.
   $\because R, S$是反对称的，$\therefore$上式错误。$\therefore T$不是对称的，$\therefore T$是反对称的。
   上述证明的错误在于: 某二元关系可能既是对称的，又是反对称的。所以，我们不能根据某关系不是对称的，就推断它是反对称的。这涉及到类似$\langle a, a\rangle$等有序对。具体到该题目而言，就是有可能$a_1 = a_2$。如果要使用上面的证明，就需要排除该情况。但是我们推荐另外一种叙述方式，这对于反对称性的证明(以及其后的函数单射性质的证明)都是通用的。
   $\langle a_1, b_1\rangle T\langle a_2, b_2\rangle \wedge \langle a_2, b_2\rangle T\langle a_1, b_1\rangle \Rightarrow a_1Ra_2 \wedge a_2Ra_1 \wedge b_1Sb_2 \wedge b_2Sb_1 \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \Rightarrow \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$.

2 习题八 函数

1. **(P_{161}第7(4)题) 存在单射、满射和双射函数的充要条件。**
   解析:
   存在单射、满射和双射函数的充要条件分别为:
   $m \le n; m \ge n; m = n.$
   常见错误:
   有同学在上述条件下添加了相应于单射、满射和双射的条件，而这是不必要的。因为本题只要求存在性。

2. **P_{163}第23题 商集:**
   解析:
   商集分别为:

   (a) $R/E_1 = \{R^{-1}, R - R^{-1}\}.$

   (b) $R/E_2 = \{\{x\} | x \in R\}.$

   (c) $R/E_3 = \{z, R - z\}.$

   (d) $R/E_4 = \{R\}.$

   常见问题:
   表述方式不够简洁。比如$R/E_4 = \{\{x|x \in R\}.$

3. **(P_{163}第25题)**
   $f : R \times R \to R \times R, f(\langle x, y\rangle) = \langle \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\rangle$.试证明: f是双射的。
   解答:

   - **单射性:**
     $f(\langle x, y\rangle) = f(\langle u, v\rangle) \Rightarrow \langle \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\rangle = \langle \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\rangle \Rightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{u+v}{2} \wedge \frac{x-y}{2} = \frac{u-v}{2}$
     $\Rightarrow x = u \wedge y = v \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle.$

   - **满射性:**
     $\forall \langle u, v\rangle \in R \times R, \exists (u + v, u - v) \in R \times R,\ f(\langle u + v, u - v\rangle) = \langle u, v\rangle$