MOPEC-2010-001第六周(群论(1))

离散数学习题解析

魏恒峰 2011 年 4 月 10 日

1 习题十 群与环(1)

1. $P_{202}(2.4, 2.5, 2.6)$

   (a) (2.4),**一元实系数多项式的集合关于多项式的加法.**
   解答:
   此为群。结合律显然成立; 单位元是$f(x) = 0$; 逆元即为实系数取反所得到的多项式.

   (b) (2.5),**一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法.**
   解答:
   此为半群和独异点，但是不构成群。结合律显然成立; 单位元为$f(x) = 1$; $f(x) = 0$的逆元不存在.

   (c) (2.6),n**元单位根集合**U_n**关于复数乘法.**
   解答:
   此为群。具体讲解见"第四次习题课群论(1)"中"Cyclic Group"部分的习题.

2. $P_{202}(4.2)$, **通过增加最少的元素使得**S**扩张为一个独异点.**
   解答:
   添加单位元e即可。感觉该题没什么意义，不必太在意。

3. $P_{203}(17)$,**证明**$|abc| = |bca| = |cab|$
   解答:
   该类关于元素阶相等的题目，可以通过数论中的整除性质来证明。即，若要证明$m = |a| = |b| = n$, 可以分别证明$m|n$和$n|m$，而这两点又可以通过$|a| = n, a^m = e \to n \mid m$ 来说明.

另外，借助于教科书P_{184}(10.6)例题的结论，$|ab| = |ba|$, 可以更方便证明该题命题。
例如，$|abc| = |a(bc)| = |(bc)a|$.

4. **$P_{203}(19)$,证明非Abel群G中必存在非单位元$a, b.a \neq b, ab = ba$.**
   解答:
   本题解答简略叙述如下:
   非Abel群G中必存在阶大于或等于3的元素，否则，G将为Abel群，与题设矛盾。
   取$a \neq e, |a| \geq 3, b = a^{-1} \neq a$即可。

5. **$P_{204}(21, 22)$,子群判定.**
   解答:
   这两题都是比较正规的子群判定问题，按部就班地证明即可，没有太大困难。
   有两点需要说明:
   一是，需要首先证明子集合非空,许多同学都忘记了这一点，请以后留意。
   二是，有同学按照群的定义依次检查给子集合的运算封闭性，结合律，单位元和逆元。这本身没有错误，但是不够简洁。建议直接直接使用子群判定定理。

6. **$P_{204}(24)$,设H和K分别为群G的r, s阶子群，若$(r, s) = 1$,证明$H \cap K = \{e\}$.**
   解答:
   使用Lagrange定理解决群的阶与其子群的阶的关系问题。本题要点如下：

   - $H \cap K \leq H \wedge H \cap K \leq K$..注意，书中$P_{187}$(10.10)证明了$H \cap K \leq G$, 实际上，该结论可以更进一步。如上式。
   - 由Lagrange定理有，$|H \cap K| \mid r \wedge |H \cap K| \mid s$.
   - $(r, s) = 1$.
   - $e \in H \cap K$. 该点虽然简单，但是不可缺少。以上三点仅说明$|H \cap K| = 1$.

   需要说明的是，有同学使用反证法，假设$\exists a \neq e \in H \cap K$, 然后考察$\langle a \rangle \leq H, \langle a \rangle \leq K$, 并使用Lagrange定理证明$|\langle a \rangle| = 1$,这与$a \neq e$产生矛盾。我认为该方法也是正确的。