

2010级计算机《离散数学》期中考试试卷

南京大学计算机科学与技术系

May. 05, 2010

1 集合代数

试给出集合等式 $(A - C) \cup B = A \cup B$ 成立的充分必要条件并证明之.

1

2 格

试证明: 有界分配格 L 中所有存在补元的元素之集合构成 L 的子格.

2

3 布尔代数

三人裁判小组, A 有否决权; 在 A 不行使否决权时则按简单多数决定结果. 试设计该表决器的逻辑电路并简化之.

3

4 集合开放问题

请构思一道有关容斥原理的计算题, 并给出解答.

4

5 置换群

设按升序排列的13张扑克牌(只考虑点值, 不考虑花色)

$$A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$$

经2次同样方式的洗牌后, 牌的顺序变成

$$6, 10, A, Q, 9, K, J, 7, 4, 8, 3, 2, 5$$

1. 请给出第一次洗牌后的顺序.
2. 按照同样的方式洗牌若干次, 能否洗回最初的升序排列?

5

6 集合的基数 设 A, B, C 为集合, $A \cap B = A \cap C = \emptyset \wedge B \approx C$. 试证明: $A \cup B \approx A \cup C$.

6

7 群论

给定集合 S , $P(S)$ 表示集合 S 的幂集.

定义 $G = \langle P(S), * \rangle$, 其中 $*$ 为二元运算, 其定义为

1. 请证明 $G = (P(S), *)$ 构成群.
2. 考虑自然数的幂集, 即当 $S = N$, 解如下方程

$$\{1, 2, 4\} * X = \{3, 4\}$$

(其中 X 为未知数.)

7

8 等价关系

设 σ 为一个 n 阶置换, 集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$. 在 X 中, 定义关系 \sim 为

$$k \sim l \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{Z}, \sigma^r(k) = l.$$

1. 证明: \sim 是 X 上的等价关系.
2. 证明: $k \sim l$ 的充分必要条件是 k 与 l 属于 σ 的同一个轮换.

8

9 容斥原理

给定集合 $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ($n \in N^+$) (N^+ 表示正整数集合), 如果它的某个排列 $\pi = \{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ 满足条件

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\} . (|x_i - x_{i+1}| = n),$$

则称该排列具有性质 P .

1. 试使用容斥原理给出具有性质 P 的排列的个数 (可以不给出最简式).
2. 若已知有关容斥原理的命题1成立, 请证明对于任意 n , 具有性质 P 的排列的个数比不具有性质 P 的排列的个数要多。

$$\text{对于有限集合 } S_1, S_2, \dots, S_n, |\cup_{1 \leq i \leq n} S_i| \geq \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j|. \quad (1)$$