2010级计算机《离散数学》期中考试试卷

南京大学计算机科学与技术系

May. 05, 2010

1 集合论

集合S是“transitive”的，当且仅当

$$\forall A, B. A \in B \wedge B \in S \Rightarrow A \in S.$$

证明，以下四个命题等价:

1. S是“transitive”的.
2. $\cup S \subseteq S$.
3. $\forall A, A \in S \Rightarrow A \subseteq S$.
4. $S \subseteq P(S)$.

2 群论

给定集合S，$P(S)$表示集合S的幂集.

定义$G = \langle P(S), * \rangle$,其中$*$为二元运算，其定义为

$$A * B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

1. 请证明$G = (P(S), *)$构成群.
2. 考虑自然数的幂集，即当$S = N$，解如下方程

$$\{1, 2, 4\} * X = \{3, 4\}$$

   (其中X为未知数.)

3 等价类，置换群

设σ为一个n阶置换,集合$X = \{1, 2, \cdots, n\}$.在X中，定义关系$\sim$为

$$k \sim l \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{Z}, \sigma^r(k) = l.$$

1. 证明: $\sim$是X上的等价关系.
2. 证明: $k \sim l$的充分必要条件是k与l属于σ的同一个轮换.
3. 对于置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 9 & 1 & 7 & 10 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

   试确定集合$X = \{1, 2, \cdots, 10\}$的所有等价类.

4 置换群

设按顺序排列的13张扑克牌(只考虑点值，不考虑花色)

经2次同样方式的洗牌后牌的顺序变成

$$6, 10, A, Q, 9, K, J, 7, 4, 8, 3, 2, 5$$

求第一次洗牌后的顺序.

5 置换群

试求正三角形的对称变换群.这个群即为氨分子NH_3的对称变换群.(如图所示)

6 正规子群,商群

7 容斥原理

给定集合$\{1, 2, \cdots, 2n\}$ $(n \in N^+)$(N^+表示正整数集合)，如果它的某个排列$\pi = \{x_1, x_2, \cdots, x_{2n}\}$满足条件

$$\exists i \in \{1, 2, \cdots, 2n-1\}.(|x_i - x_{i+1}| = n),$$

则称该排列具有性质P.

1. 试使用容斥原理给出具有性质P的排列的个数($($可以不给出最简式)).
2. 若已知有关容斥原理的命题1成立，请证明对于任意n，具有性质P的排列的个数比不具有性质P的排列的个数要多。

$$\text{对于有限集合} S_1, S_2, \cdots, S_n, |\cup_{1 \le i \le n} S_i| \ge \Sigma_{1 \le i \le n}|S_i| - \Sigma_{1 \le i < j \le n}|S_i \cap S_j|. \tag{1}$$

8 格