离散数学习题解析

集合论(2)

魏恒峰
hengxin0912@gmail.com

Department of Computer Science and Technology, NJU

April 1, 2011

1. Review
   - Binary Relation
     - Closure
     - Partial Order Set
   - Function
     - Function
     - Cardinality of Set
   - Abstract Algebra
     - Algebraic Structure
2. Problem Set
     - Homework
     - Closure
     - Function
   - Abstract Algebra
     - Algebraic Structure
3. Application and Extension(Optional)
   - Inside the Warshall's algorithm(Wait Until Code Exercise)
   - Modeling of Concurrency

Outline

1. Review
   - Binary Relation
     - Closure
     - Partial Order Set
   - Function
     - Function
     - Cardinality of Set
   - Abstract Algebra
     - Algebraic Structure
2. Problem Set
     - Homework
     - Closure
     - Function
   - Abstract Algebra
     - Algebraic Structure
3. Application and Extension(Optional)
   - Inside the Warshall's algorithm(Wait Until Code Exercise)
   - Modeling of Concurrency

Closure

闭包是一个很重要也很常见的概念。

集合	有序对集合，即二元关系
性质	传递性
闭包	添加有序对，扩充集合使其满足传递性

集合	整数
运算	除法
闭包	扩充为有理数，使其对于除法操作封闭

Closure

R为关系，R的自反(对称或传递)闭包是关系R' [a]:

1. R'是自反的(对称或传递的)
2. $R \subseteq R'$.
3. R'具有最小性

[a] The way to prove...

1. $r(R) = R \cup R^0$
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

Computing Closure

也可以通过关系矩阵和关系图求取闭包:

关系矩阵求取法:

自反 $M_r = M + E$

对称 $M_s = M + M'$

传递 $M_t = M + M^2 + M^3 + \cdots$

关系图求取法:

自反 添加环

对称 添加反向边

传递 添加间接路径

Property of Closure

1. $R[ref] \Leftrightarrow R = r(R)$
2. $R[sym] \Leftrightarrow R = s(R)$
3. $R[tra] \Leftrightarrow R = t(R)$

$R_1 \subseteq R_2$,

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

Property of Closure

闭包运算对于关系性质的保持:

1. $R[ref] \Rightarrow s(R)[ref]\&t(R)[ref]$
2. $R[sym] \Rightarrow r(R)[sym]\&R^n[sym]\&t(R)[sym]$
3. $R[tra] \Rightarrow r(R)[ref]$

复合闭包:

1. $rs(R) = sr(R)$
2. $st(R) \subseteq ts(R)$
3. $rt(R) = tr(R)$

Note:
前两个命题的证明参见陶老师课件,第三个命题的证明以及第二个命题的另一种证明留待Problem Set部分介绍。

Partial Order Relation

如果集合A上的非空关系R具有自反性，反对称性和传递性，则称R为偏序关系，记作$\preceq$。$\langle A, \preceq \rangle$为偏序集(poset)。

偏序集的表示：哈斯图(Hasse Diagram).

偏序集中的特殊元素：

1. 最大元，最小元，极大元，极小元。
2. 上界，下界，最小上界，最大下界。
3. 有穷集合一定有极大元和极小元且不一定唯一。某元素可能既是极大元又是极小元。
4. 最大元和最小元不一定存在。若存在则必唯一。若存在，则最元同时也是极元。

Outline

Function

函数是一种特殊的二元关系。

定义：二元关系F可被称为函数，如果$\forall x \in dom(F), \exists! y \in ran(F) \wedge xFy$.

函数也是集合: $Function \rightarrow$ Binary Relation $\rightarrow$ Ordered Pair $\rightarrow$ Set.

Function

函数的性质: $f : A \to B$,

单射(Injective) $(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2)$

满射(Surjective) $(\forall y \in B)(\exists x \in A, f(x) = y)$

双射(Bijective) Injective + Surjective

函数的复合: 设F, G, H为函数，则

- $(F \circ G) \circ H)$ 与$F \circ (G \circ H)$都是函数。
- $(F \circ G) \circ H) = F \circ (G \circ H)$

反函数:

对于双射函数$f : A \to B$, $f^{-1} : B \to A$是它的反函数。

Cardinality of Set

有限集合与大数

1. 据不少非洲探险家证实，在某些原始部落里，不存在比**3**大的数词。
2. 国际象棋。$2^{64}-1=$ 全世界在2000年内所生产的全部小麦.
3. 汉诺塔问题。$2^{64}-1=5800$亿年.
4. 莎士比亚作品自动印刷机。

如何比较无穷集合的大小?

集合等势:
$A \approx B \Leftrightarrow \exists f : A \to B, f$ is bijective.

集合优势:
$A \preceq \cdot B \Leftrightarrow \exists f : A \to B, f$ is injective.

$A \preceq \cdot B \wedge B \preceq \cdot A \Rightarrow A \approx B.$

Cardinality of Set

重要的等势集合的例子:

与自然数集合**N**等势的集合都是可数集(Countable)[$\aleph_0$]。

$N \approx N^{(2)}$

$$f(x) = x^2.$$

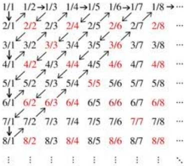
$Z \approx N$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$N \times N \approx N$ Cantor Pairing Function(coding):

$$f\langle m, n\rangle = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m.$$

$Q \approx N$ Cantor:



Cardinality of Set

重要的等势集合的例子:

与实数集合**R**等势的集合[ℵ]。

$(0,1) \approx R$

$$f(x) = \tan \pi \frac{2x-1}{2}.$$

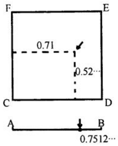
$[0,1] \approx (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{2^2}, & x = 1 \\ \frac{1}{2^{n+2}}, & x = \frac{1}{2^n} \\ x, & \text{o.w} \end{cases}$$

$[0,1] \approx [a,b]$

$$f(x) = (b-a)x + a.$$

$[0,1] \approx \square$ (Note:)



Cardinality of Set

重要的等势集合的例子:

与实数集合**R**等势的集合[ℵ]。

$\{0,1\}^N \approx [0,1\rfloor$ $f:[0,1\rfloor \to \{0,1\}^N$:

$\forall x \in [0,1\rfloor, x = 0.x_1x_2\cdots$

$$f(x) = t_x, t_x : N \to \{0,1\}, t_x(n) = x_{n+1}, n = 0,1,2,\cdots)$$

$g:\{0,1\}^N \to [0,1\rfloor$:

$$(\forall t \in \{0,1\}^N, t : N \to \{0,1\}, g(t) = 0.x_1x_2\cdots, x_{n+1} = t(n).)$$

$\{0,1\}^N \approx P(N)$ More generally,

$$f : P(A) \to \{0,1\}^A, f(A') = \chi_{A'}, \forall A' \in P(A).$$

Cardinality of Set(Optional)

重要成果:

Cantor Theorem $N \asymp R$ Cantor's Diagonal:

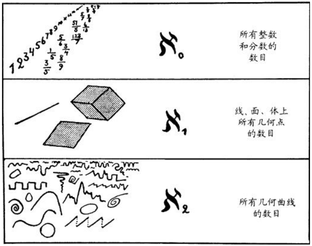
$A \asymp P(A)$

$$g : A \to P(A).$$

$$B = \{x | x \in A \wedge x \notin g(x)\}.$$

Cardinality of Set

连续统假设:



$$\mathrm{card}N = \aleph_0, \mathrm{card}R = \aleph = \mathrm{card}2^N = 2^{\aleph_0} = \mathbf{C}.$$

是否存在某个无限势λ,使得$\aleph_0 < \lambda < \aleph$?

Cantor猜想: 不存在。

Outline

Binary Operations and Properties

二元运算:
$f : S \times S \to S$.

Note:

- f为函数
- closed.

Examples:

- $(P(S), \cap)$.
- $(S^S, \circ)$.

二元运算的性质:

1. 交换律
2. 结合律
3. 幂等律
4. 分配律
5. 吸收律
6. 消去律

特殊元素:

1. 单位元($e_l = e_r = e$)
2. 零元($\theta_l = \theta_r = \theta$)
3. 逆元($\circ$ is associative, $\Rightarrow$ $y_l = y_r = y$)

Algebra

代数系统:

$$\langle S, f_1, f_2, \cdots, f_k \rangle.$$

重要的代数系统:

$$\langle P(B), \cup, \cap, \sim, \emptyset, B \rangle.$$

$$\langle \mathbf{Z_n}, \bigoplus, \bigotimes \rangle.$$

$$\langle R, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle.$$

“从代数系统的构成成分和遵从的算律出发，将代数系统分类，然后研究每一类代数系统的基本方法，并将研究的结果运用到具体的代数系统中去。这种方法就是抽象代数的基本方法，也是代数结构课程的主要内容。”

Homomorphism and Isomorphism

同态(Homomorphism):

设$V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和$V_2 = \langle B, * \rangle$是同类型的代数系统，
$f : A \to B$,

$$\forall x, y \in A, f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

称f为V_1到V_2的同态映射。

"运算之像等于像之运算。"

- 单同态
- 满同态
- **同构(Isomorphism)**
- 自同态，单自同态，满自同态，自同构

Homomorphism and Isomorphism

满同态对运算性质的保持:

1. 交换律，结合律，幂等律
2. 单位元($f(e_1)=e_2$.); 零元($f(\theta_1)=\theta_2$.)
3. 逆元($f(x^{-1})=f(x)^{-1}$.)

Homework(3)

本次习题解析参见文件《离散数学习题解析第三周(二元关系)》。
该文件已上传至教学网站。

Homework(4)

本次习题解析参见文件《离散数学习题解析第四周(二元关系+函数)》。
该文件已上传至教学网站。

Homework(5)

本次习题解析参见文件《离散数学习题解析第五周(集合基数+代数系统)》。
该文件已上传至教学网站。

Closure

复合闭包:

证明: A is finite set,$R \subseteq A \times A \Rightarrow rt(R) = tr(R)$.

提示:

$(I_A \cup R)^n = I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n = I_A \cup (\cup_{i=1}^{n} R^i)$

解答:

Closure

复合闭包:

证明: A is finite set,$R \subseteq A \times A \Rightarrow rt(R) = tr(R)$.

提示:
$(I_A \cup R)^n = I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n = I_A \cup (\cup_{i=1}^n R^i)$

解答:

$$
\begin{aligned}
tr(R) &= t(I_A \cup R) \\
&= \cup_{i=1}^n (I_A \cup R)^i \\
&= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^2 \cup \cdots \cup (I_A \cup R)^n \\
&= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup (\cup_{i=1}^2 R^i)) \cup \cdots \cup (I_A \cup (\cup_{i=1}^n R^i)) \\
&= I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \\
&= I_A \cup (\cup_{i=1}^n R^i) \\
&= I_A \cup t(R) \\
&= r(t(R)) \\
&= rt(R)
\end{aligned}
$$

Closure

复合闭包:

证明: $R \subseteq A \times A \Rightarrow st(R) \subseteq ts(R)$.

解答:

$$\begin{aligned} R \subseteq s(R) &\Rightarrow t(R) \subseteq t(s(R)) \\ &\Rightarrow st(R) \subseteq sts(R) = ts(R) \end{aligned}$$

$s(R)[sym] \Rightarrow ts(R)[sym] \Rightarrow sts(R) = ts(R)$.

Function

概念辨析:

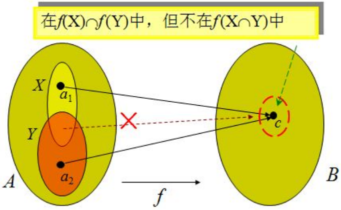
1. $A = \emptyset, B = \emptyset \Rightarrow B^A = \emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
2. $A = \emptyset, B \neq \emptyset \Rightarrow B^A = B^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
3. $A \neq \emptyset, B = \emptyset \Rightarrow B^A = \emptyset^A = \emptyset$

Function

交集与并集的函数像:

1. P_{162} 第12题
说明$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$不是永远为真的。

2. 设$f:A\to B, B_1\subseteq B$.试证明:
$f(A\cap f^{-1}(B_1))=f(A)\cap B_1$.



Function

企图证明$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$:
$y\in f(A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\in B\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge xfy\wedge x\in B\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge xfy)\wedge(x\in B\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\wedge y\in f(B)$

$\Leftrightarrow y\in(f(A)\cap f(B))$

$f(A\cap f^{-1}(B_1))=f(A)\cap B_1$.

任取y,

$y\in f(A\cap f^{-1}(B_1))\Leftrightarrow \exists x(x\in A\cap f^{-1}(B_1)\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge \underline{x\in f^{-1}(B_1)}\wedge xfy)\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge \underline{f(x)\in B_1}\wedge xfy)$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y\in B_1\wedge xfy)\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge xfy)\wedge y\in B_1$

$\Leftrightarrow y\in f(A)\wedge y\in B_1\Leftrightarrow y\in f(A)\cap B_1$ □

Outline

Homomorphism and Isomorphism

P_{180} **第18题**

$V_1 = \langle Z, +, \cdot \rangle, V_2 = \langle Z_n, \oplus, \otimes \rangle.$

令$f : Z \to Z_n, f(x) = (x) \bmod n.$

证明,f为V_1到V_2的满同态映射。

Outline

Inside the Warshall's algorithm

我们以二元关系的传递闭包为例。
问题驱动: 给定某有向图，问存在从u到v的可达路径吗?

{For pair of edges S_iS_j and S_jS_k, we add S_iS_j.}
while Any new edges are added **do**
  for all $i = 1 \to n$ **do**
    for all $j = 1 \to n$ **do**
      for all $k = 1 \to n$ **do**
        $R_{ij} = R_{ij} \vee (R_{ik} \wedge R_{kj})$
      end for
    end for
  end for
end while

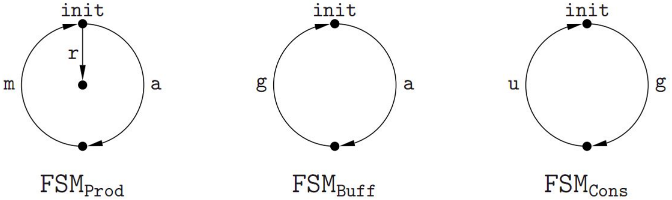
{Warshall's Algorithm}
for all $k = 1 \to n$ **do**
  for all $i = 1 \to n$ **do**
    for all $j = 1 \to n$ **do**
      $R_{ij} = R_{ij} \vee (R_{ik} \wedge R_{kj})$
    end for
  end for
end for

Inside the Warshall's algorithm(Wait Until Code Exercise))

具体的例子以及分析参见*PPT*.

Outline

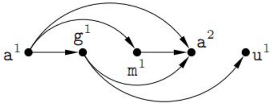
Modeling of Concurrency

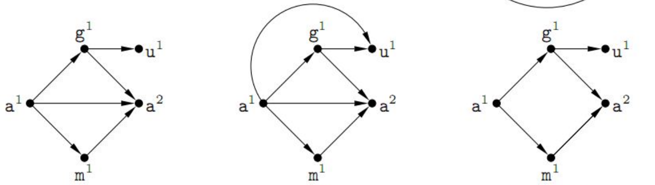


$$\mathtt{Ind} = \{(\mathtt{r},\mathtt{g}),(\mathtt{g},\mathtt{r}),(\mathtt{r},\mathtt{u}),(\mathtt{u},\mathtt{r}),(\mathtt{m},\mathtt{g}),(\mathtt{g},\mathtt{m}),(\mathtt{m},\mathtt{u}),(\mathtt{u},\mathtt{m}),(\mathtt{a},\mathtt{u}),(\mathtt{u},\mathtt{a})\}$$

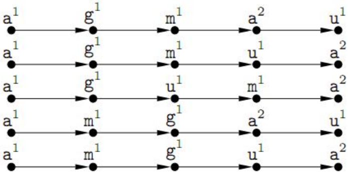
Modeling of Concurrency

$$G = candepgraph_{\mathrm{Ind}}(\mathrm{agmau})$$





G $\quad$ G^+ $\quad$ $hasse(G^+)$



$= cantotalposet(\mathrm{agmau})$

$= cantotalposet(\mathrm{agmua})$

$= cantotalposet(\mathrm{aguma})$

$= cantotalposet(\mathrm{amgau})$

$= cantotalposet(\mathrm{amgua})$

The Next Week

Part of the Plan for the Next Week:

1. Dilworth's Theorem
2. 复习集合论(?)
3. 群论

That’s the end. Thank you.

Figure: Bring Up a Question