MOPEC-2010-001图论习题课讲义

图论(2) 图的连通度

魏恒峰

2011 年 5 月 17 日

1 图论专题

1.1 图的连通度

上一讲中，我们介绍了图的连通性。图的连通性主要关注一个图(我们这里只关注无向图,下同)是否是连通的.但是，我们可以很直观地感到有些图“很连通”,而有些图就显得那么脆弱，“不够连通”. 要更准确地表达我们这种感觉，就需要引入“连通度” 的概念。“连通度”就是度量图有“多连通”的指标.

Definition 1.1. 图的点连通度

图G的点连通度$\kappa(G) = \min\{\,|T| \mid T$ 为G 的点割集$\}$.

Definition 1.2. 图的边连通度

图G的边连通度$\lambda(G) = \min\{\,|S| \mid S$ 为G 的边割集$\}$.

Remark 1.3. 连通度

$\kappa(G)(\lambda(G))$是为产生一个不连通图或平凡图所需要移去的点*(*边*)*的最少 数目.

一般而言，这种方式的定义都不太好处理，它对于求解和分析都会带来一定困难.一方面，它要求最优化*(*最少*)*，另一方面，它处理的又是离散的对象. 这便会带来组合问题.这与对某个连续函数求极值有着很大不同.

那么为什么要考虑“图的连通度”呢*?*实际上，它在计算机科学中有着很重要的应用.比如，我们要铺设计算机网络，使用图论的语言，我们可以将单台计算机建模为图的顶点，将两台计算机之间的连接建模为图的边.那么，我们就想知道该网络有多健壮. 如果一台计算机失效了，整个网络会不会断成几个“孤岛”*?*如果是一条连接出现通讯故障，又会怎么样呢*?*为了增加网络的健壮性，我们需要做些什么*?*

Theorem 1.4. **完全图的边连通度**

证明*:* $\lambda(K_n) = n - 1$.

Proof. 完全图的边连通度

1. 根据定义，$\lambda(K_1) = 0$. 下面仅考虑$n \geq 2$的情况.
2. K_n每个顶点度数均为$n-1$，删除v的这$n-1$条邻接边可以导致图不连通.故，$\lambda(K_n) \leq n-1$.
3. 记X为G的最小边割集.$G-X$恰有两个连通分支,分别记为G_1, G_2.记G_1的阶为k,则G_2的阶为$n-k$. 因为G是完全图,所以$|X| = k(n-k)$.又，$k \geq 1, n-k \geq 1, \Rightarrow (k-1)(n-k-1) \geq 0 \Rightarrow (k-1)(n-k-1) = k(n-k) - n + 1 \geq 0 \Rightarrow \lambda(G) = |X| = k(n-k) \geq n-1$.

□

Theorem 1.5. $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$**之间的数量关系***(Whitney(1932))*

对于任意图，下式成立*:*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$$

其中，m, n分别为图G的边数和顶点数.

Proof. $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$之间的数量关系

课堂上已经给出了$\kappa(G) \leq \lambda(G)$的归纳法证明.下面我们给出另外一种更直观的证明.

1. 若图为非连通图或为平凡图,则$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$.
2. 若图为K_n,则$\kappa(G) = \lambda(G) = n-1$.
3. 下面假设G为阶大于等于3的连通、非完全图.

   我们打算从边割集X(显然，$|X| = \lambda(G) \leq n-2$)构造出点割集$U$. 一个很直观的想法是，对于边割集$X$中的每一条边$e$，需要选择$e$的一个顶点作为点割集的一个元素. 问题在于，如何才能保证$|X|$次选择能够构成点割集?

$G-X$恰有两个连通分支,记为G_1, G_2，其中G_1阶为k，则G_2阶为$n-k$.

- *在G中,G_1中的每个顶点均与G_2中的每个顶点相邻接.*

  若为该种情况，则根据定理1.4的推理，可以得出$\lambda(G) \geq n-1$.*矛盾.*

- *在G中，$\exists u \in G_1, \exists v \in G_2, u, v$不邻接.*

  下面我们构造点割集U:主要思想是，我们要破坏u, v之间的通路.现在，我们已经说明了，u, v 不邻接.那么下一个目标就是破坏u, v之间的间接连通通路.那么这些通路是如何构成的呢? 一共有三种情况：*a)* $u \rightsquigarrow u' \to v' \rightsquigarrow v$(取$u'$) *b)* $u \rightsquigarrow u' \to v$(取$u'$) *c)* $u \to v' \rightsquigarrow v$(取$v'$) (其中,$u' \in G_1, v' \in G_2, \rightsquigarrow$ 表示通路,$\to$ 表示有边相连)

  显然,$|U| \leq |X|$，且$u, v \notin U$.根据U的构造方法，$G-U$中不存在$u-v$通路.故,$\kappa(G) \leq |U| \leq |X| = \lambda(G)$.

$\square$

Remark 1.6. *$\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$之间的数量关系*

关于$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$的证明，在课堂上已经给出.而$\frac{2m}{n}$实际上为图的平均度数，故有$\delta(G) \leq \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$.

习题2.3要求你分别给出满足该定理公式不同特例的图例.

下面我们看一道关于具体类型图的点连通度和边连通度关系的定理，主要目的是为了让大家体会图论中的证明方法.

Theorem 1.7. *3正则图的点连通度和边连通度*

如果G是3正则图,请证明,$\kappa(G) = \lambda(G)$.

Proof. **3正则图的点连通度和边连通度**

假设U是最小点割集，即$|U| = \kappa(G)$.因为$\lambda(G) \geq \kappa(G)$，故只需证明$\lambda(G) \leq \kappa(G)$，要证明该结论，我们又只需构造一个边割集$X$，$|X| = |U|$。这提醒我们需要根据点割集来构造边割集，最好的情况就是在这种构造方法中，点割集中的一个点能对应边割集中的一条边.(注意，在定理1.5的证明中我们也使用了这种技巧，只不是是从边割集构造点割集.)

取G_1, G_2为$G-U$的两个连通分支.因为U是最小点割集，所以U中的每一个顶点u在G_1与G_2中都有邻接顶点. 又因为G是3正则图,所以u不可能在G_1, G_2中都有两个邻接顶点.取边us，如果s是G_1, G_2中与u邻接的唯一顶点.

思考:但是，这里存在一种特殊情况，你能找到它吗?

这样，我们就构造了大小为U的边集,且为边割集.得证. □

2 习题集

Problem 2.1. 图的连通度

计算下列类型的$\kappa(G), \lambda(G)$参数值:

$$K_{m,n}, Petersen, C_n, W_n, S_n, P_n, K_n.$$

Solution 2.2. 解答:图的连通度

Problem 2.3. $\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$之间的数量关系

1. 请给出满足$\kappa(G) < \lambda(G)$的例子.
2. 请给出满足$\kappa(G) = \lambda(G)$的例子.
3. 请给出满足$\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$的例子.
4. 请给出满足$\kappa(G) = \delta(G)$的例子.
5. 请给出满足$\lambda(G) = \delta(G)$的例子.

Solution 2.4. 解答:$\kappa(G), \lambda(G), \delta(G)$之间的数量关系

1.
2.
3.
4. 课堂上给出了一个例子$\delta(G) \geq n-2 \Rightarrow \kappa(G) = \delta(G)$.(请证明该结论)

5. 课堂上给出了一个例子$\delta(G) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow \lambda(G) = \delta(G)$.(该命题由*Chartrand*于*1966*年给出.该命题的证明是通过数量关系完成的，其关键的数量关系为“G_1中顶点的次数之和不大于$|G_1|$阶完全图的次数之和加上被删除的边数X”.)

\- -

Problem 2.5. 非割点的存在性

如果G为非平凡连通图，$u \in V(G)$,v是距离u最远的点，请证明v不是G的割点.

Solution 2.6. 解答:非割点的存在性

Remark 2.7. 非割点的存在性

习题*2.5*实际上说明了在非平凡连通图中至少存在两个割点(讨论:请思考为什么?).反过来说，不存在某个非平凡连通图，所有的点都是割点。但是，对于割边来说，该情况是可能出现的。也就说，存在某个非平凡连通图，它的所有边都是割边(讨论:请举出这样的图例).

\- -

Problem 2.8. 对*2*连通图的等价刻画

设G为阶不小于*3*的连通图，请证明以下各点等价:

1. G无割点.

2. 图是*2*点连通的.

3. $\kappa(G) \geq 2$.

4. 任意两点总在某个圈上.

Solution 2.9. 解答:对*2*连通图的等价刻画

前三点的等价证明是很容易的。我们着重证明下面的定理:

Theorem 2.10. 对2连通图的等价刻画

图G是不含割点的阶大于3的连通图$\Leftrightarrow$ G中任意两点总在某个圈上.

Proof. 对2连通图的等价刻画

1. "$\Leftarrow$:"该证明请自行完成.

2. "$\Rightarrow$:"反设存在顶点对不在某个共同圈上.**取所有这样的顶点对中满足$d(u,v)$最小的顶点对**. 如果$d(u,v)=1$，则u,v必在同一个圈上(否则，图G含有割点).故可假设$d(u,v)=k\geq 2$.

   $P: u=v_0,v_1,\cdots,v_{k-1},v_k=v$是长度为$k$的$u,v$路径.因为$d(u,v_{k-1})=k-1<k$，所以，存在圈$C$包含$u$和$v_{k-1}$,而不包含$v$.又，$v_{k-1}$不是割点，所以，存在不包含$v_{k-1}$ 的$v-u$路径Q.u在C上，记x为Q与C相交的第一个顶点.那么$v_k=v\rightarrow v_{k-1}\rightsquigarrow u\rightsquigarrow x\rightsquigarrow v_k=v$构成圈.矛盾.

□

\- -

3 应用与扩展

3.1 无

✍由魏恒峰(hengxin0912@gmail.com)编辑.

若发现错误或者有任何建议，请与我联系.谢谢.

联系方式：QQ : 245552163(蚂蚁蚂蚁), $Phone$: 13905194610