

NJUCS 第七周(群论(2))

离散数学习题解析

魏恒峰

2011 年 4 月 24 日

1 习题十 群与环(2)

1. $P_{204}(26)$, 证明循环群一定是Abel群, 并说明Abel群是否一定是循环群.

解答:

因为循环群 $G = [a]$ 的元素均可表为 a^k 的形式, 故根据幂运算的性质即可证明循环群是Abel群。

是Abel群但是为非循环群的典型例子是Klein四元群。

作业中出现的错误:

在举反例的时候, 有同学以 $(Z, +)$ 为例, 其实, $(Z, +)$ 是循环群。对于循环群, 同学们要始终记住 $(Z, +)$ 和 (Z_n, \oplus) 群, 因为循环群在同构意义下有且仅有这两种形态。

还有的同学认为 (Z, \times) 是Abel群, 不是循环群。对, 它的确不是循环群, 因为它不构成群!所以, 我们在习题课上才多次强调只有特殊元素的集合关于模乘法才构成群, 即 (U_n, \otimes) , 此处的集合元素是所有小于 n 且与 n 互素的元素。

2. $P_{204}(27)$, 证明循环群 G 的同态像 $f(G)$ 也是循环群.

解答:

本题的证明并不困难。只需要证明 $f(a)$ 是 $f(G)$ 的生成元即可。

但是很多同学都忽略了一点, 那就是需要先说明 $f(G)$ 构成群。