第一编　集合论

第一章　集　　合

1.1　预备知识

本书将数理逻辑部分作为第五编。由于前 4 编也用到相关的基本知识，所以，本书开头先介绍数理逻辑中最基本的逻辑符号、基本的等值式、重要的推理定律（即重要的重言蕴涵式），以及一阶谓词逻辑中的个体、谓词、量词等基本概念和几个重要的等值式与推理定律.

一、命题公式（或命题形式）

1. 联结词

用 $p,q,r,\cdots$ 表示原子命题（或称简单命题），用“1”表示命题的真值为真，用“0”表示命题的真值为假，用 5 种联结词给出最基本的复合命题.

(1) $\neg p$ 是“p 的否定”的符号化形式，称为 p 的**否定式**，“$\neg$”称为否定联结词. $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

(2) $p\wedge q$ 是“p 与 q”的符号化形式，称为 p 与 q 的**合取式**，“$\wedge$”称为合取联结词. $p\wedge q$ 为真当且仅当 p,q 同时为真.

(3) $p\vee q$ 是“p 或 q”的符号化形式，称为 p 与 q 的**析取式**，“$\vee$”称为析取联结词. $p\vee q$ 为假当且仅当 p,q 同时为假.

(4) $p\rightarrow q$ 是“如果 p，则 q”的符号化形式，称为前件为 p，后件为 q 的**蕴涵式**，“$\rightarrow$”称为蕴涵联结词. $p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真而 q 为假.

(5) $p\leftrightarrow q$ 是“p 当且仅当 q”的符号化形式，称为 p 与 q 的**等价式**，“$\leftrightarrow$”称为等价联结词. $p\leftrightarrow q$为真当且仅当 p 与 q 的真值相同（即 p,q 同为真或同为假）.

2. 命题公式

$p,q,r,\cdots$既可以表示命题（命题常元），也可以表示命题变元.

命题公式的形成规则如下：

(1) 单个命题变元（或常元）是命题公式；

(2) 若 A 是命题公式，则 $(\neg A)$ 也是命题公式；

(3) 若 A,B 是命题公式，则 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$ 也是命题公式；

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)形成的符号串才是**命题公式**. 命题公式也称为**命题形式**或简称为**公式**.

设命题公式 A 中含有 n 个命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，给 p_i 指定一个值 α_i（α_i 为 0 或 1，$i=1$，

$2,\cdots,n$)，所得字符串 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 称为 A 的一个**赋值**，A 共有 2^n 个赋值. 若在 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 下 A 的真值为 1，则称它为 A 的**成真赋值**，否则，即 A 的真值为 0，则称它为 A 的**成假赋值**.

若公式 A 没有成假赋值，则称 A 为**重言式或永真式**；若 A 没有成真赋值，则称 A 为**矛盾式或永假式**；若 A 至少存在一个成真赋值，则称 A 是**可满足式**.

二、等值演算

1. 等值式

若 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是等值的，记为 $A\Leftrightarrow B$，并称 $A\Leftrightarrow B$ 为**等值式**.

2. 基本的等值式

(1) **幂等律** $A\Leftrightarrow A\vee A$，$A\Leftrightarrow A\wedge A$；

(2) **交换律** $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$；

(3) **结合律** $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$，$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$；

(4) **分配律** $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$，$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$；

(5) **德·摩根律** $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$，$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$；

(6) **吸收律** $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$，$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$；

(7) **零律** $A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$；

(8) **同一律** $A\vee 0\Leftrightarrow A$，$A\wedge 1\Leftrightarrow A$；

(9) **排中律** $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$；

(10) **矛盾律** $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$；

(11) **双重否定律** $\neg\neg A\Leftrightarrow A$；

(12) **蕴涵等值式** $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$；

(13) **等价等值式** $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$；

(14) **等价否定等值式** $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$；

(15) **假言易位** $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$；

(16) **归谬论** $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$.

3. 等值演算

(1) **置换规则** 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的公式，用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中的 A，得公式 $\Phi(B)$，如果 $B\Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$.

(2) **等值演算** 由已知的等值式，应用置换规则推演出新的等值式的过程称为等值演算.

等值演算就是应用已知的等值式的置换过程. 下面以证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 等值来说明等值演算的过程.

$p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow p\rightarrow(\neg q\vee r)$ （应用蕴涵等值式和置换规则）

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ （应用蕴涵等值式和置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （应用结合律和置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ （应用德·摩根律和置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$ （应用蕴涵等值式和置换规则）

由以上的演算可知，应用了一些基本的等值式和置换规则，推演出了新的等值式

$$p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r.$$

三、命题逻辑推理

1. 推理的形式结构

称蕴涵式

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to B \qquad (*)$$

为**推理的形式结构**，$A_1, A_2, \cdots A_k$ 为推理的**前提**，B 为**结论**. 若推理的形式结构（$*$）为重言式，则称推理正确，否则称推理不正确.

一般用“$A \Rightarrow B$”表示“$A \to B$”是重言式，所以，当推理正确时，记（$*$）为

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \Rightarrow B.$$

2. 重要的推理定律

在推理过程中经常使用等值式和下面 8 条推理定律（称重言蕴涵式为推理定律）.

(1) **附加律**　$A \Rightarrow (A \lor B)$；

(2) **化简律**　$(A \land B) \Rightarrow A$，$(A \land B) \Rightarrow B$；

(3) **假言推理定律**（简称**假言推理**）　$(A \to B) \land A \Rightarrow B$；

(4) **拒取式推理定律**（简称**拒取式**）　$(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$；

(5) **析取三段论推理定律**（简称**析取三段论**）　$(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$，$(A \lor B) \land \neg A \Rightarrow B$；

(6) **假言三段论推理定律**（简称**假言三段论**）　$(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$；

(7) **等价三段论推理定律**（简称**等价三段论**）　$(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$；

(8) **构造性二难推理定律**（简称**构造性二难**）　$(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$.

3. 判断正确推理的方法

判断推理是否正确，就是判断推理的形式结构

$$(A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k) \to B \qquad (*)$$

是否为重言式. 判断一个蕴涵式是否为重言式的方法很多，比如真值表法、等值演算法等都可以证明（$*$）是否为重言式，但直接证明这个蕴涵式为重言式往往是很麻烦的.

像证 $A \leftrightarrow B$ 为重言式一样，不直接证明 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 1$，而是利用基本等值式，从 A 出发证. $A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow B$，所以 $A \Leftrightarrow B$（等值关系有传递性）. 在证明（$*$）为重言式（即推理正确）时，也可以利用基本等值式和重要推理定律，从前提出发证 $A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_k \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$. 中间有些“$\Rightarrow$”可能是“$\Leftrightarrow$”，这样证明比直接证（$*$）等值于 1 方便.

例如，证明从前提 $p \to (q \to r)$，p，q，推出结论 r 的推理是正确的.

推理的形式结构为

$$(p \to (q \to r)) \land p \land q \to r \qquad (*)$$

方法一　直接证（$*$）等值于 1. 演算过程如下：

$$
\begin{aligned}
& (p \to (q \to r)) \land p \land q \to r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \lor \neg q \lor r) \land p \land q \to r \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg p \land p) \lor (\neg q \lor r) \land p) \land q \to r \\
\Leftrightarrow\ & (\neg q \lor r) \land q \land p \to r \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg q \land q) \lor (r \land q)) \land p \to r \\
\Leftrightarrow\ & (r \land q \land p) \to r \\
\Leftrightarrow\ & \neg (r \land q \land p) \lor r
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg r \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee 1$

$\Leftrightarrow 1.$

请读者填出以上演算过程中每一步所用的基本等值式.这个演算是相当麻烦的.

方法二 由前提推演出结论

$(p\to(q\to r))\wedge p\wedge q$

$\Leftrightarrow ((p\to(q\to r))\wedge p)\wedge q$ （结合律）

$\Rightarrow (q\to r)\wedge q$ （假言推理）

$\Rightarrow r.$ （假言推理）

显然方法二比方法一简单多了.值得注意的是演算中的每一步所用的是"$\Leftrightarrow$"还是"$\Rightarrow$",特别地,不能将"$\Rightarrow$"当成"$\Leftrightarrow$".

像方法二这样的证明方法在数学中,比如在集合论中是常用的方法.

在数理逻辑中常用的方法是构造证明法,这里就不介绍了.

四、一阶谓词逻辑基本概念与命题符号化

1. 个体、谓词与量词

在一阶谓词逻辑中,将原子命题再细分成主语与谓语,因而引入了个体(或个体词)与谓词的概念.

将可以独立存在的客体(具体事物或抽象概念)称为**个体**或**个体词**,并用 $a,b,c,\cdots$ 表示个体常元,$x,y,z,\cdots$ 表示个体变元.将个体变元的取值范围称为**个体域**,个体域可以是有穷或无穷集合,人们称由宇宙间一切事物组成的个体域为**全总个体域**.

将表示个体性质或彼此之间关系的词称为**谓词**,常用 $F,G,H,\cdots$ 表示谓词常元或变元.用 $F(x)$ 表示 x 具有性质 F.例如,F 表示"…是黑色的",则 $F(x)$ 表示"x 是黑色的",如果取 x 为黑板,并用常元 a 表示黑板,则 $F(a)$ 表示黑板是黑色的.个体变元多于两个的谓词,如 $F(x,y)$ 表示 x 与 y 具有关系 F.例如 $F(x,y)$ 表示"x 大于 y",则 $F(5,2)$ 表示"5 大于 2".

称表示数量的词为**量词**.在数理逻辑中使用的量词有两个:

(1) **全量量词** 全称量词是自然语言中的"所有的"、"一切的"、"任意的"、"每一个"、"都"等的统称,并用符号"$\forall$"表示.而用 $\forall x$ 表示个体域里的所有 x,用 $\forall xF(x)$ 表示个体域里所有 x 都有性质 F.

(2) **存在量词** 存在量词是自然语言中的"有一个"、"至少有一个"、"存在着"、"有的"等的统称,并用"$\exists$"表示.而用 $\exists x$ 表示存在个体域里的 x,用 $\exists xF(x)$ 表示在个体域里存在 x 具有性质 F.

2. 命题符号化

在一阶谓词逻辑中命题符号化应注意以下两个"基本公式".

(1) 个体域中所有有性质 F 的个体都有性质 G,应符号化为

$$\forall x(F(x)\to G(x)).$$

其中,$F(x)$:x 具有性质 F,$G(x)$:x 具有性质 G.

(2) 个体域中存在有性质 F 同时有性质 G 的个体,应符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

其中，$F(x)$：x 具有性质 F，$G(x)$：x 具有性质 G.

例 将下面命题符号化.

(1) 人都吃饭；

(2) 有人喜欢吃糖；

(3) 男人都比女人跑得快(这是假命题).

这里没有指明个体域，因而使用全总个体域. 用以上两个"基本公式"，容易将这 3 个命题符号化.

(1) 令 $F(x)$：x 为人，$G(x)$：x 吃饭. 命题符号化为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$；

(2) 令 $F(x)$：x 为人，$G(x)$：x 喜欢吃糖. 命题符号化为 $\exists x(F(x) \land G(x))$；

(3) 令 $F(x)$：x 为男人，$G(y)$：y 为女人，$H(x,y)$：x 比 y 跑得快. 命题符号化为

$$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x,y))).$$

(3)中公式还有一些等值形式，也可符号化为

$$\forall x \forall y(F(x) \land G(y) \rightarrow H(x,y)).$$

五、一阶谓词逻辑公式及其分类

一阶谓词逻辑公式也简称为公式，它的形成规则类似于命题逻辑公式，只需加上一条，即若 A 是公式，则 $\forall xA$ 及 $\exists xA$ 也都是公式.

在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称 x 为**指导变元**，称 A 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中，x 的所有出现都称为**是约束出现的**，A 中不是约束出现的变元称为**自由出现的**. 例如在公式

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \land H(x,y,z)))$$

中，$\forall x$ 的辖域为$(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \land H(x,y,z)))$，而 $\exists y$ 的辖域为$(G(y) \land H(x,y,z))$. 除 z 是自由出现的变元外，都是约束出现的.

对于给定的公式 A，如果指定 A 的个体域为已知的 D，并用特定的个体常元取代 A 中的个体常元，用特定函数取代 A 中的函数变元，用特定的谓词取代 A 中的谓词变元，则就构成了 A 的一个**解释**.

给定公式 A 为 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$. 可以给 A 多种解释，例如：

(1) 取个体域 D 为实数集合，$F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 能表示成分数，则 A 被解释成为"有理数都能表示成分数"，这是真命题.

(2) 取个体域 D 为全总个体域，$F(x)$：x 为人，$G(x)$：x 长着黑头发，则 A 又被解释成"人都长着黑头发"，这是假命题.

一阶谓词逻辑公式也分成 3 类：

(1) 若 A 在任何解释下都为真，则称 A 为**永真式**；

(2) 若 A 在任何解释下均为假，则称 A 为**永假式**；

(3) 若 A 至少存在一个成真的解释，则称 A 为**可满足式**.

六、一阶谓词逻辑等值式与基本等值式

设 A，B 为二公式，若 $A \leftrightarrow B$ 为永真式，则称 A 与 B 等值，记为 $A \Leftrightarrow B$，并称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式.

人们已经证明的基本等值式有以下 4 组：

1. **在有限个体域 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中消去量词等值式**：

(1) $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$；

(2) $\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$.

2. **量词否定等值式**：

(1) $\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)$；

(2) $\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)$.

3. **量词辖域收缩与扩张等值式（B 中不含 x）**：

(1) $\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$；　(2) $\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$；

(3) $\forall x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\to B$；　(4) $\forall x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\forall xA(x)$；

(5) $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$；　(6) $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$；

(7) $\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$；　(8) $\exists x(B\to A(x))\Leftrightarrow B\to\exists xA(x)$.

以上 8 个公式成立的条件是 B 中不含 x 的出现.

4. **量词分配等值式**：

(1) $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$；

(2) $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$.

(1)说明，全称量词对“$\wedge$”有分配律. 注意，全称量词对“$\vee$”不适合分配律. (2)说明，存在量词对“$\vee$”有分配律，而对“$\wedge$”不适合分配律. 以上两点说明，在应用中要特别注意.

还应该指出的是，命题逻辑中的基本等值式在一阶谓词逻辑中也均成立，只是其中的公式均为一阶谓词逻辑公式罢了.

七、前束范式

若公式 A 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB,$$

则称 A 为**前束范式**. 其中 $Q_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 为 $\forall$ 或 $\exists$，B 中不含量词.

将公式 A 化成与之等值的前束范式时，除了利用基本的等值式外，有时还用到换名规则.

换名规则　将公式 A 中某量词辖域中出现的某个约束出现的个体变元及相应的指导变元 x_i，都改成公式 A 中没出现过的 x_j，所得公式 $A'\Leftrightarrow A$.

例如，$\forall x(F(x)\to G(x,y))\Leftrightarrow\forall z(F(z)\to G(z,y))$.

下面以求 $\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x,y)$ 的前束范式为例，说明求前束范式的过程.

$$\begin{aligned}
&\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x,y)\\
\Leftrightarrow\ &\forall xF(x)\vee\forall x\neg G(x,y) &&\text{（量词否定等值式）}\\
\Leftrightarrow\ &\forall xF(x)\vee\forall z\neg G(z,y) &&\text{（换名规则）}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x(F(x)\vee\forall z\neg G(z,y)) &&\text{（辖域扩张等值式）}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\forall z(F(x)\vee\neg G(z,y)) &&\text{（辖域扩张等值式）}\\
\Leftrightarrow\ &\forall x\forall z(G(z,y)\to F(x)) &&\text{（蕴涵等值式）}
\end{aligned}$$

最后两步都是原公式的前束范式.

八、重要的推理定律

同在命题逻辑中一样，在一阶谓词逻辑中仍称永真的蕴涵式为推理定律. 常用的推理定律

有下面 4 条：

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$；

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$；

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$；

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$.

在使用以上 4 条推理定律时，千万注意，别将它们当成等值式用，这样会犯错误的.

1.2 集合的概念及集合之间的关系

自从 19 世纪末著名的德国数学家康托(G. Cantor 1845—1918)为集合论做奠基工作以来，集合论在一百多年的时间里，已经成为数学中不可缺少的基本的描述工具，集合已成了数学中最为基本的概念.

集合论分为两种体系，一种是朴素集合论体系，也称为康托集合论体系；另一种是公理集合论体系. 本书不讨论公理集合论体系，在前 6 章介绍的是朴素集合论体系中的主要内容. 在朴素集合论体系中，有些概念，特别是关于集合的概念是不能精确定义的. 我们不给集合下严格定义，这丝毫不会影响对集合的理解.

一般地，人们用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 用 $a\in A$ 表示 a 为 A 的元素，读作 a 属于 A，而用 $a\notin A$ 表示 a 不是 A 中的元素，读作 a 不属于 A. 一般用两种方法表示集合.

列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来. 设 A 是由 a,b,c,d 为元素的集合，B 是正偶数集合，则 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{2,4,6,\cdots\}$.

描述法：用谓词 $P(x)$ 表示 x 具有性质 P，用 $\{x\mid P(x)\}$ 表示具有性质 P 的集合，例如，$P_1(x)$：x 是英文字母，$P_2(y)$：y 是十进制数字，则 $C=\{x\mid P_1(x)\}$，$D=\{y\mid P_2(y)\}$ 分别表示 26 个英文字母集合和 10 个十进制数字集合.

对于集合的表示法应该注意以下几点：

(1) 集合中的元素是各不相同的.

(2) 集合中的元素不规定顺序.

(3) 集合的两种表示法有时是可以互相转化的. 例如列举法中的 B 可用描述法表示为 $B=\{x\mid x>0$ 且 x 为偶数$\}$ 或 $\{x\mid x=2(k+1)$，k 为非负整数$\}$.

为方便起见，本书中指定 N,Z,Q,R,C 分别表示自然数集合(含 0)，整数集合，有理数集合，实数集合和复数集合. 有了这个规定之后，列举法中的 B 又可表示为 $\{x\mid x\in N$ 且 x 为非 0 偶数$\}$，或 $\{x\mid x=2(k+1)$ 且 $k\in N\}$. 由此可见，表示一个集合的方法是很灵活多变的，当然要注意准确性和简洁性. 下面讨论集合之间的关系.

定义 1.1 设 A,B 为二集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的**子集**，也称 A 包含 B 或 B 含于 A，记作 $B\subseteq A$. 其符号化形式为 $B\subseteq A\Leftrightarrow\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$.

若 B 不是 A 的子集，则记作 $B\nsubseteq A$，其符号化形式为 $B\nsubseteq A\Leftrightarrow\exists x(x\in B\wedge x\notin A)$.

设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{a,b\}$，则 $A\subseteq B$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$.

定义 1.2 设 A,B 为二集合，若 A 包含 B 且 B 包含 A，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$. 即

$$A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B).$$