

第1次离散数学习题课

绪论与逻辑基础

魏恒峰

hengxin0912@gmail.com

Department of Computer Science & Technology, NJU
February 27, 2011

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

开篇之句

“数理逻辑是研究推理的数学分支...”

- ① Request: 请问还有去南京的T7800次火车的坐票吗?
- ② Reply: 对不起, T7800次的所有车票都卖完了。
- ③ Request: 那还有站票吗?
- ④ Reply(☹): 抱歉。
T7800次的所有车票都卖完了;
站票是火车票的一种;
所以, 站票也卖完了。

开篇之句

“数理逻辑是研究推理的数学分支...”

But, the dialog is like this with high probability.

- 1 Request: 请问还有去南京的 T7800 次火车的坐票吗?
- 2 Reply: 对不起, T7800 次的所有车票都卖完了。
- 3 Request: 那还有站票吗?
- 4 Reply(☹): 下一个。

开篇之句

“...推理是由一系列**有关联**的陈述句组成的。”

下面的陈述句序列是推理吗？

- ① 海水是咸的。
- ② 中国的首都是北京。

开篇之句

“数理逻辑是研究推理的数学分支，推理由一系列有关联的陈述句组成。”

Five Problems:

- ① 为什么需要推理？
- ② 推理的基础是什么？
- ③ 推理的规则是什么？
- ④ 推理有正确与错误之分吗？
- ⑤ 若有，如何保证推理是正确的呢？

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

Propositional Logic—Proposition(命题)

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。——罗素

Notice: 排中律。有的逻辑学家并不承认这一规律。

Propositional Logic—Proposition(命题)

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。——罗素

Notice: 排中律。有的逻辑学家并不承认这一规律。

- 原子命题: $p, q, r, s \dots$ (\because 我们不太关心具体的命题内容)
- 复合命题: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 命题公式及其解释(interpretation)
- 重言式(tautology), 矛盾式(contradiction)

Propositional Logic—命题逻辑等值演算

Question: 如何判断两个命题公式是等值的?

- 1 真值表
- 2 等值式

Propositional Logic—命题逻辑等值演算

Question: 如何判断两个命题公式是等值的?

- ① 真值表
- ② 等值式

重要等值式:

德摩根律 De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

Propositional Logic—推理的形式结构

推理的形式结构

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$$

推理正确当且仅当

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots A_n \rightarrow B$$

为重言式。(等值演算)

Propositional Logic—自然推理系统

Q: 如何保证推理的正确性?

A: 推理规则集 R

“证明”是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论(中间结论或推理中的结论)。

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

Predicate Logic—符号化

① 个体词

- ① 个体常项
- ② 个体变项

② 谓词(predicate)

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \{\top, \perp\}$$

③ 量词

- ① 全称量词: $\forall xP(x)$
- ② 存在量词: $\exists xP(x)$

Predicate Logic—等值演算

只要求了解，会进行简单推理即可

- ① $\forall xP(x) \vdash P(c)$ if $c \in U$
- ② $\{P(c) \text{ 对任意 } c \in U\} \vdash \forall xP(x)$
- ③ $\exists xP(x) \vdash P(c)$ 对某个 $c \in U$
- ④ $\{\text{对某个 } c \in U, P(c)\} \vdash \exists xP(x)$

Predicate Logic—等值演算

只要求了解，会进行简单推理即可

$$\textcircled{1} \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\textcircled{2} \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

Proposition

1: 请把下列命题符号化。

- ① 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。

Proposition

1: 请把下列命题符号化。

- ① 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。
- ② 我想证明我自己的清白无辜，只有以下三个途径：
 - ① 队长家不存在一只母狗；
 - ② 该母狗天生没有左眼；
 - ③ 我是无手之人，不能持枪射击。

— 王小波《黄金时代》

Proposition

1: 请把下列命题符号化。

- ① 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。
- ② 我想证明我自己的清白无辜(p), 只有以下三个途径(q):
 - ① 队长家不存在一只母狗(p_1);
 - ② 该母狗天生没有左眼(p_2);
 - ③ 我是无手之人, 不能持枪射击(p_3)。

— 王小波 《黄金时代》

Proposition

1: 请把下列命题符号化。

- ① 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。
- ② 我想证明我自己的清白无辜，只有以下三个途径：
 - ① 队长家不存在一只母狗；
 - ② 该母狗天生没有左眼；
 - ③ 我是无手之人，不能持枪射击。——王小波《黄金时代》
- ③ 我只给不给自己理发的人理发。——(罗素悖论)

Proposition

- 1 Slogan: 如果你爱她, 就请她吃哈根达斯。
- 2 One man: 我请他吃哈根达斯。
- 3 A girl's wish: 他一定很爱我。

Proposition

- ① Slogan: 如果你爱她, 就请她吃哈根达斯。
- ② One man: 我请他吃哈根达斯。
- ③ A girl's wish: 他一定很爱我。

Question:

- 女孩的推理正确吗?
- 怎样才算正确的推理呢?
- 假设这位女孩学习过数理逻辑, 你能教男孩该怎么做吗?

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- **Propositional Calculus**
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

命题逻辑等值演算

2: 请利用等值演算法证明公式为重言式。

① $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

② $\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q))$

命题逻辑等值演算

3: 请利用等值演算证明等值式。

$$\textcircled{1} \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p$$

命题逻辑等值演算

休息一下。翻卡片，验证规则。

抽象任务	A	D	4	7
现实世界任务	苏打水	啤酒	23	17

- 1 Rule: 如果卡片的一面是元音字母，那么它的另一面是偶数数字。
- 2 Rule: 如果一位消费者要喝酒精饮料，那么她必须年满18岁。

命题逻辑等值演算

4(1): 等值演算应用题

① 对错参半问题: 课本 P_{40} 第29题(不得兼任)

Answer:

命题逻辑等值演算

4(1): 等值演算应用题

① 对错参半问题: 课本 P_{40} 第29题(不得兼任)

Answer:

	王小红	李强	丁金生
班长	p	q	r
学习委员	p_1	q_1	r_1
生活委员	p_2	q_2	r_2

命题逻辑等值演算

4(1): 等值演算应用题

① 对错参半问题: 课本 P_{40} 第29题(不得兼任)

Answer:

	王小红	李强	丁金生
班长	p	q	r
学习委员	p_1	q_1	r_1
生活委员	p_2	q_2	r_2

即求

$$((p \wedge \neg q_1) \vee (\neg p \wedge q_1))$$

命题逻辑等值演算

4(1): 等值演算应用题

① 对错参半问题: 课本 P_{40} 第29题(不得兼任)

Answer:

	王小红	李强	丁金生
班长	p	q	r
学习委员	p_1	q_1	r_1
生活委员	p_2	q_2	r_2

即求

$$((p \wedge \neg q_1) \vee (\neg p \wedge q_1)) \wedge ((r \wedge \neg p_1) \vee (\neg r \wedge p_1)) \wedge ((q \wedge \neg p_2) \vee (\neg q \wedge p_2))$$

的成真赋值。

命题逻辑等值演算

4(2): 等值演算应用题

① 约束分配问题: 课本 P_{40} 第30题

Answer:

命题逻辑等值演算

4(2): 等值演算应用题

① 约束分配问题: 课本 P_{40} 第30题

Answer: p : 赵; q : 钱; r : 孙; s : 李; t : 周

① $p \rightarrow q$

② $s \vee t$

③ $(\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

④ $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$

⑤ $t \rightarrow (p \wedge q)$

命题逻辑等值演算

4(2): 等值演算应用题

① 约束分配问题: 课本 P_{40} 第30题

Answer: p : 赵; q : 钱; r : 孙; s : 李; t : 周

① $p \rightarrow q$

② $s \vee t$

③ $(\neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

④ $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$

⑤ $t \rightarrow (p \wedge q)$

**The student who solves the problem using “calculus”
deserves credit(★★★).**

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

命题逻辑的推理理论

5: 在自然推理系统 P 中构造下述推理的证明。

① 课本 P_{53} 第14(2)题。

前提: $\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q$

结论: $t \rightarrow (r \wedge s)$

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

一阶逻辑基本概念

6: 在一阶逻辑中将命题符号化

① 课本 P_{65} 第4(1)题: 没有不能表示成分数的有理数。

② 极限的定义:

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 , 指的是, 对于任意的正实数 ϵ , 存在自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_0| < \epsilon$.

一阶逻辑简单推理

7: Philosophy: Who am I?



Figure: How lovely the dog is when it thinks.

- 所有的猫都有四条腿;
- 我有四条腿;
- 因此, 我是一只猫。

一阶逻辑简单推理

7: Philosophy: Who am I?



Figure: How lovely the dog is when it thinks.

- 所有的猫都有四条腿;
- 我有四条腿;
- 因此, 我是一只猫。

Identity:认清自我。

$$\forall x P(x) \vdash P(c) \text{ if } c \in U$$

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

Theorem Prover

Example of a Proof		
Number	Formula	Reason
1	A	premise
2	$A \vee A$	From (1) by disjunction introduction
3	$(A \vee A) \wedge A$	From (1) and (2) by conjunction introduction
4	A	From (3) by conjunction elimination
5	$A \vdash A$	Summary of (1) through (4)
6	$\vdash A \rightarrow A$	From (5) by conditional proof

Figure: Proof of $A \vdash A$

① So intelligent & So tedious.

② 机械证明与定理证明器

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

第1次离散数学习题课

Program Verification

If the input x is a positive number, compute a number y whose square is less than x .

formalize:

$$\{x > 0\}P\{y^2 < x\}$$

Hoare triples

$$\phi P \psi$$

Outline

1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

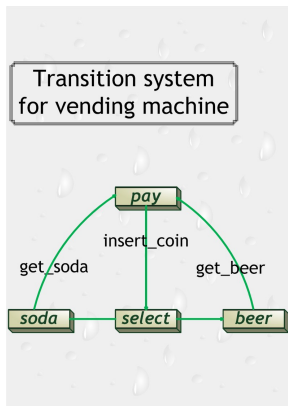
2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

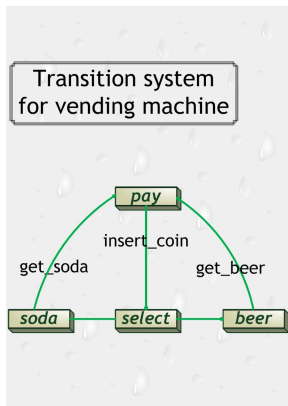
3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

Model Checking



Model Checking



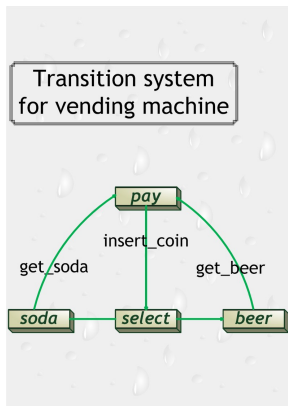
厂家提出要求(需求分析):

A 'pay' action must be preceded immediately by a 'drink' action.

Not the case:

$\{\}\{drink\}$

Model Checking



厂家提出要求(需求分析):

A 'pay' action must be preceded immediately by a 'drink' action.

Not the case:

$\{\}\{drink\}$

如何保证该自动售货机的模型能满足厂家要求?

That's the end. Thank you.



Figure: Bring Up a Question