MOPEC-2010-001图论习题课讲义

图论(1) 图论基本概念(Degrees & Connectivity)

魏恒峰 2011 年 5 月 10 日

1 Special Topics

1.1 常见图总结

下面是一些常见类型的图.

1. 空图N_n: 有n个顶点，但是无边.

2. 路径P_n.

3. 圈C_n.

4. 轮W_n: 见图1.

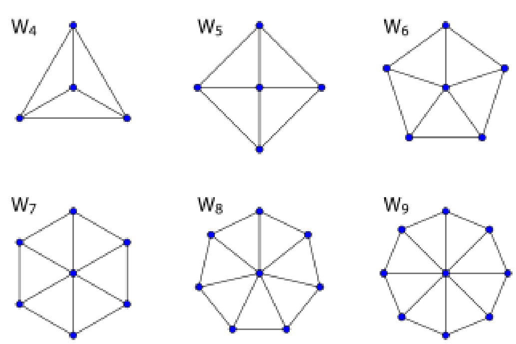

图 1: Wheel

5. 树$tree$:见图2.

6. 完全图K_n: 见图3.

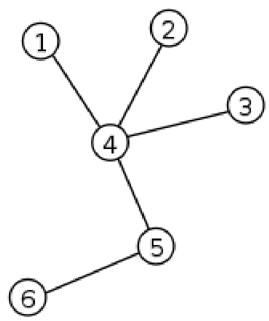

图 2: Tree

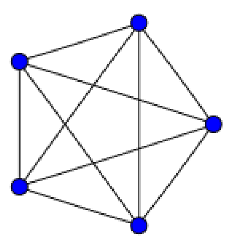

图 3: K_5

7. 完全二部图$K_{m,n}$: 见图9.

8. 正则图$k-\text{regular}$: 见图5.

9. 立方体Q_3: 见图4.

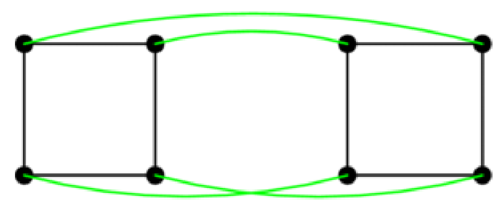

图 4: Cube

10. 超立方体$Q_n = Q_{n-1} \times K_2$:

下面给出一些在图论中占有重要地位的有名的图.

1. *Peterson* 图: 见图5,图6,图7以及图8.

   “Peterson 图是许多关于一般图的性质的乐观猜测的重要反例.”

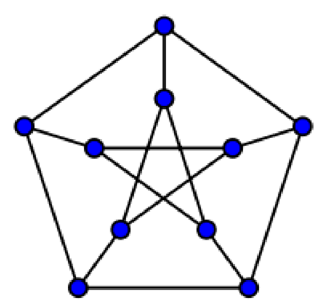

图 5: Petersen graph

2. *Harary* 图:

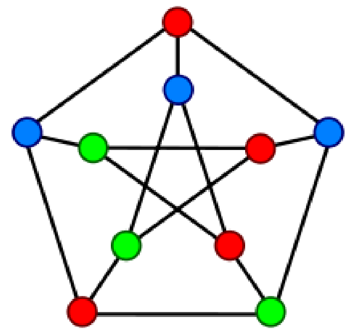

图 6: Petersen graph

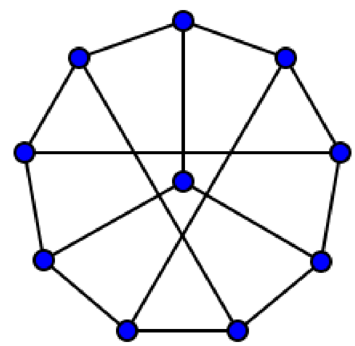

图 7: Petersen graph

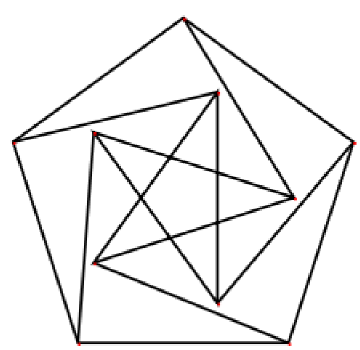

图 8: Petersen graph

3. *David* 图:

4. *Utility*图: 见图9和图.(gas, water, and electricity)

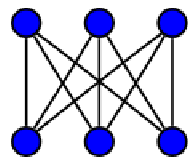

图 9: $K_{3,3}$(Utility graph)

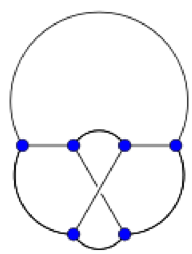

图 10: $K_{3,3}$(Utility graph)

5. *Friendship*图: 见图11.

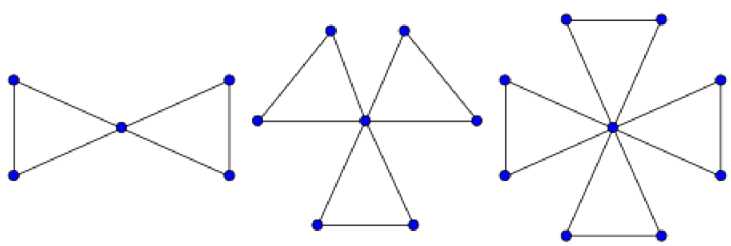

图 11: Friendship graph

更多"named graphs"请看这里:`http://en.wikipedia.org/wiki/Gallery_of_named_graphs`.

1.2 顶点度数专题

注:若非特别说明,G仅表示简单无向图.

我们使用$d(v)$表示顶点v的度数,分别使用$\delta(G)$和$\Delta(G)$表示G的最小度和最大度.

Observation 1.1.

$$\forall v \in G.0 \leq \delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G) \leq n-1.$$

Theorem 1.2. *(The First Theorem of Graph Theory)*

如果图G有m条边，则

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Corollary 1.3. 任何图中,奇度顶点的个数是偶数.

对于有着m条边的二部图G，点集的划分为$U = \{ u_1, u_2, \cdots, u_s \}, W = \{ w_1, w_2, \cdots, w_s \}$，每一条边关联着$U$和$W$中的各一个点,所以我们有,

Corollary 1.4. $\sum_{i=1}^{s} d(u_i) = \sum_{j=1}^{t} d(w_j) = m.$

图的顶点的度数可以为我们了解图的特性提供很多信息.比如，从直觉上来讲，每个点的度数越大，达到一定程度，就可以保证(迫使) 图是连通的。这涉及到图的连通性，我们放到专题1.3中再做介绍.下面我们重点介绍度序列和可图化的度序列的概念.

给出某图G的度序列是件不必费神的事。现在，我们的问题是，给定某度序列s，如何判断s是否是某个图的度序列，也就是问s是否是可简单图化*(graphical)*的?

如果将可简单图化的条件放松，仅仅要求可图化，那么我们会得到定理1.5.

Theorem 1.5. 非负度序列$s: d_1, d_2, \cdots, d_n$是可图化的当且仅当$\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.

Remark 1.6. 构造性证明

定理*1.5*的证明虽然简单，但是却使用了一种图论中经常使用的证明方法，也就是构造性证明.在涉及对“可行性”, ”存在性”等证明时,一般可采用三种方法: *a*

) 构造性证明.即显式地将符合条件的对象构造出来. b) 反证法. 即假设该类对象不存在，然后找出矛盾来. c) 概率法. 即通过概率分析，计算出某类对象存在的概率大于*0*. 对于本课程内容而言，前两种方法会经常碰到.

对于可简单图化,我们有定理1.7.

Theorem 1.7. $Havel - Hakimi$定理

非负整数、非递增度序列$s: d_1, d_2, \cdots, d_n (n \geq 2)$是可简单图化的当且仅当度序列

$$s_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n$$

是可简单图化的.

Proof.
- **⇐方向:** 该证明简单.只需为s_1所对应的图G添加顶点v_1和d_1条边$(v_1 v_i, \forall i, 2 \leq i \leq d_1 + 1)$即可.

- **⇒方向:** 该证明稍有困难，其中使用了图论证明中又会经常用到的方法.

  受⇐方向证明的启发(或者说是诱惑),我们希望s图化所对应的图G具有如下特性: 顶点度数为d_1的顶点(注:也就是拥有最大度的顶点,记为u)所邻接(adjacent)的顶点恰好具有度序列$d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$.如果上述特性成立，那么$G - \{ u \}$所对应的度序列即为$s_1$.得证.

  但是，上述特性看起来好像要求太强，但是，因为当判定某度序列是否可简单图化的时候，我们仅需要考虑存在性.所以，我们只需要能证明s所对应的图(s是可简单图化的)中必存在某图H，H是满足上述特性的.下面，我们用反证法来说明H的存在性.

  假设不存在这样的图.在所有具有度序列s的图中，取G为$V(G) = \{ v_1, v_2, \cdots, v_n \}$,$d(v_i) = d_i, \forall 1 \leq i \leq n$, 并且与$v_1$相邻的那些顶点的度数之和尽可能大(在所有图中).$v_1$的邻接顶点不全包含于$v_2, v_3, \cdots, v_{d_1+1}$(因为$G$不具有上述特性),则$v_1$必与$v_s$相邻，不与$d_r$相邻，而$d_r < d_s$.又因为$d_r > d_s$，所以必存在点$v_t$,$v_r$与$v_t$邻接，但是$v_s$不与$v_t$邻接.我们考虑图$G' = G - \{ v_1 v_s \} + \{ v_1 v_r \} - \{ v_r v_t \} + \{ v_s v_t \}$.该图$G'$是由图$G$变换而来，重要的一点是，该变换保持了原图的度序列，也就是说图G'也具有度序列s.然而，图G'中与v_1邻接的顶点的度数之和大于图G中与v_1邻接的顶点的度数之和.矛盾.

$\square$

Remark 1.8. *定理1.7的证明过程使用了两种图论中常见的方法.一种是在前面1.6中提到的用反证法来证明存在性的技巧. 另外一种就是这里要说明的，就是图的转换.图的转化可以涉及边的删除与添加(如本定理证明过程)，顶点的删除与添加.在图的转换中，重要的一点是，转换过程一般需要在保持某种不变量(比如本定理证明过程中的度序列)的同时,在其它某变量上有所变化(一般又是朝着某种优化的方向转变,比如本定理中的度数之和变大).有时，该转换可以一直持续下去，这就相当于一个迭代过程，直到达到某个不动点(比如最大，最小等).如此，可以用来证明某一类图(也就是符合不变量的所有图.比如本题证明过程中，即为所有具有度序列s的图集合)具有某种特殊的性质或者存在某图具有某种特殊性质.*

Remark 1.9. *定理1.7实际上提供了一种判断某度序列s是否可简单图化的算法，并且在可简单图化的情况下提供了如何构造符合条件的图的算法.有兴趣的同学可以考虑将其实现出来.*

1.3 图的连通性专题

图的连通性所涉及到的关于各种“路径”的定义在术语方面有着不同的版本.我们与教材保持一致.

请大家回顾这些术语: 通路，简单通路(边各异),初级通路或路径(顶点各异).相对应的有，回路，简单回路，初级回路或圈.

关于图的通路有一条基本的定理，我们简单罗列如下.

Theorem 1.10. *若图G中含长度为l的$u-v$通路，则G中必含长度不大于l的$u-v$初级通路(路径).*

“在涉及路径和圈的构造性证明中”，极大路径法是常用的一种证明技巧.书中提供了这样的一道例题1.11.

Example 1.11. 极大路径法

设G为$n(n \geq 4)$阶无向简单图,$\delta(G) \geq 3$，证明G中存在长度大于或等于4的圈.

Remark 1.12. *本题的证明关键在于选择一条极大路径$u-v$，也就是无法再向两侧延伸的路径。然后再根据$\delta(G)$的要求可知该路径的端点u(或v) 必和该路径上的$\delta(G)-1$个点相邻，从而构成长度$l \geq \delta(G)$的圈.*

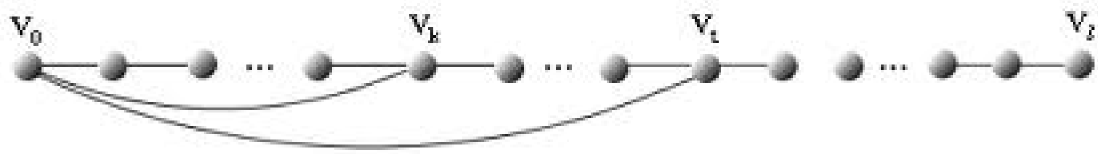

图 12: 极大路径法图示

该类题目的证明可以使用图12来说明.

图的连通分支可以从集合的等价关系的角度来理解,即可达关系：

$$uRv \iff \exists u-v \text{ path}.$$

关于图G与其补图$\bar{G}$，我们有定理.

Theorem 1.13. *某图G与其补图$\bar{G}$中，至少有一个是连通图.*

Remark 1.14. *该题的证明参见课件.本命题要证明的形式为$A \cup B$成立,我们可以采取的证明策略为$A \cup B, \neg A \Rightarrow B$. 大家可以回忆一下，这正是我们在逻辑中所介绍的析取三段论.*

在习题2和习题3中我们实际上给出了3阶或更高阶图为连通图的一个充要条件*(necessary and sufficient condition).*

在顶点度数专题1.2中，我们提到了一个和图的连通性相关的一个问题，那就是，当图的顶点的度数大到怎样的程度时，就可以保证(迫使)该图是连通的? 显然的一点是，当所有顶点都具有$n-1$度时，图是连通的。然而，我们更关心的是界限.即，当一旦超过这个界限，图就是连通的；低于这个界限，图就不一定是连通的。换言之，我们对涉及“extremal”的命题更感兴趣.

下面所给出的定理1.15虽不能说是“extremal graph”的例子，但是还是有一点“extremal”的含义的.

Theorem 1.15. *度数与图的连通性*

G为n阶图.证明如果

$$\forall u, v \in V(G).(u, v) \notin E(G) \wedge d(u) + d(v) \geq n-1.$$

成立，则G是连通图，并且

$$\forall s,t \in V(G).(u-v) \Rightarrow d(u-v) \leq 2.$$

Proof. □

习题4让你说明$n-1$这个“bound”是紧的(sharp).

1.4 正则图专题

常见的3正则图包括$K_4, K_{3,3}, Q_3$, Peterson graph.

本专题主要考虑正则图的存在性问题.

根据握手定理(即图论第一定理)1.2,易知命题1.16成立.

Corollary 1.16. *如果n和r都为奇数(odd),不存在n阶r正则图G.*

现在的问题是，如果将此情况n, r are odd排除，也就是说r, n至少有一个为偶数(even)的时候，又是什么情况呢?定理1.17表明在这种条件下，必存在n阶r正则图.

Theorem 1.17. *正则图的存在性*

$0 \leq r \leq n-1 \wedge r, n$ 至少一个为偶数，则必存在n阶r正则图.

Proof. **构造性证明.** 我们构造n阶正则图$H_{r,n}$.

如果r是偶数$r=2k \leq n-1$.对于每个顶点i，我们添加v_i到$v_{i+1}, v_{i+2}, \cdots, v_{i+k}$

和$v_{i-1}, v_{i-2}, \cdots, v_{i-k}$(可以将各顶点想象成按照圈排列)的共计$2k$条边.如此构造得到的$H_{r,n}$为符合条件的正则图.

如果r是奇数$r=2k+1 \leq n-1$,那么n必为偶数.我们仍然先按照r为偶数的情况为每个顶点v_i添加$2k$条边.因为n为偶数，所以我们可以再为每个顶点v_i添加到$v_{i+\frac{n}{2}}$的边(你仍然可以将各顶点想象成按照圈排列,则v_i与$v_{i+\frac{n}{2}}$互为opposite vetex).如此构造得到的$H_{r,n}$为符合条件的正则图. □

Remark 1.18. *本定理证明过程中所构造的图即为Harary graph,见2.它是以FrankHarary命名的.*

关于正则图的存在性，我们还要考虑这样一个问题，即给定一个非正则图G，是否存在r正则图H，而G是H的诱导子图(即,导出的子图). 很显然的一点是，H存在的一个显见的必要条件是$r \geq \Delta(G)$.那么，这个必要条件是否是充分条件呢?回答是肯定的，大家可以停下来试着自己构造这样的图H.

Theorem 1.19. *对于任意的图G和整数$r \geq \Delta(G)$，必存在r正则图H，而G是H的诱导子图.*

Proof. 我们仍然采用**构造性证明方法**.

假设非正则图G的阶为n，顶点集合为$V(G) = \{ v_1, v_2, \cdots, v_n \}$.$G'$是$G$的一个拷贝，只是将其顶点重新标定(与$G$中顶点相对应) 为$\{ v'_1, v'_2, \cdots, v'_n \}$.现在，我们构造图$G_1$:对于每个顶点$v_i$,$d(v_i) < r$,则连接$v_i$与$v'_i$形成一条边.显然,$G$ 是图G_1的诱导子图,并且$\delta(G_1) = \delta(G) + 1$.如果$G_1$为$r$正则图，则$H = G_1$即为所求.否则，继续上述过程.经过$k = r - \delta(G)$ 次上述操作，便会得到G_k，而G_k即为所求. □

Remark 1.20. *该证明由$DenésKönig$给出.他写了第一本图论专著.*

2 Problem Set

1 可简单图化

$S = \{ 2, 6, 7 \}$，定义$S^k = 2, 2, \cdots, 2, 6, 6, \cdots, 6, 7, 7, \cdots, 7$,其中元素重复次数均为$k$.证明存在整数$k$，使得以$S^k$ 为度序列的序列是可简单图化的，给出最小的符合条件的k值.

2 图的连通性(充分条件)

G是阶为3或更高阶的图.如果G中包含两个相异顶点u, v,使得$G - \{ u \}, G - \{ v \}$都是连通图，请证明G本身也是连通图.

3 图的连通性(必要条件)

G是阶为3或更高阶的连通图.请证明,G中必存在两个相异顶点u, v，使得$G - \{ u \}, G - \{ v \}$都是连通图.

4 顶点度数与图的连通性 请说明定理1.15中的$n-1$的bound 是紧的(sharpness).也就是说，当我们放松该条件,比如改为$n-2$时，请给出满足度数条件但是不连通的图的例子.

5 正则图

1. 请证明:如果G是n阶图,则$\delta(G)+\delta(\bar{G})\leq n-1$.
2. 请证明:如果G是n阶图,则G是正则图 $\Longleftrightarrow$ $\delta(G)+\delta(\bar{G})=n-1$.

3 Application and Extension

3.1 与“聚会”有关的图论知识

图论应用广泛,在下次聚会中，你可以验证下面的定理.

Theorem 3.1. *The Party Theorem*

在任何一次聚会中，总存在两个人，他们拥有相同数量的朋友(聚会中的人).

Remark 3.2. *注意:这里所说的朋友是双向的。比如，A是B的朋友，那么B也一定是A的朋友.反之亦然.我们不考虑A对B 无话不谈而B却对A无话可说的情况.下同.*

Proof. 用顶点表示人,用边表示朋友关系.所谓相同数量，即使顶点度数相同.反设 不存在度数相同的点,那么顶点度数只能分别是$0,1,2,\cdots,n-1$.而$n-1$表示与所有其他顶点都相邻，那么就不可能存在度数为0的顶点.矛盾. □

Theorem 3.3. *Ramsey Theorem*

六个人的聚会中，必存在三个人彼此认识或者彼此不相识.

Proof. 关于该定理的证明请参见这里: `http://en.wikipedia.org/wiki/Theorem_on_friends_and_strangers`. □

下面我们不加证明地给出另一个有关聚会的定理.

Theorem 3.4. *Friendship Theorem*

在任何一次聚会中*(*人数任意但是是有限的，这和现实生活相吻合*),*如果任意两个人都有且仅有一个共同好友*(*想想人人网站吧*),*那么必存在一个人，他和其他所有人都是好友*.*

Remark 3.5. 是的，你猜对了。这就是上文所提到的*friendship graph,* 见图*11.*