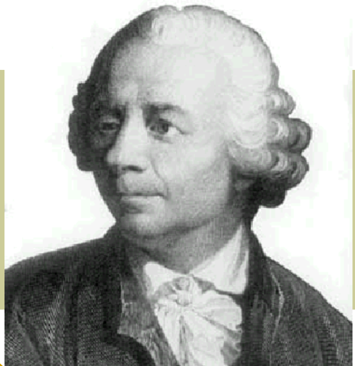
NANJING UNIVERSITY



离散数学·习题课
Discrete Mathematics

第三次：二元关系(3)、函数

南京大学计算机科学与技术系

2010年3月26日

本周课程主要内容回顾

- 偏序关系：
  - 非空集合A上的关系R若为自反、反对称和传递的，则称R为A上的偏序关系，记作$\preccurlyeq$；
  - 集合A和A上的偏序关系可构成偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$；
  - 覆盖与哈斯图。

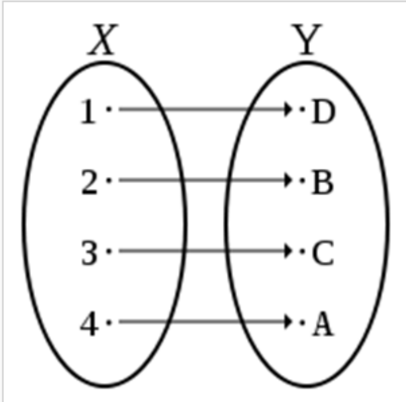
本周课程主要内容回顾

- 函数的概念：
  - 设F为二元关系，若$\forall x \in \operatorname{dom} F$皆有唯一的$y \in \operatorname{ran} F$使得$xFy$成立，则称$F$为函数，记作$y = F(x)$；
  - $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$；
  - 设A, B为集合，f为函数，且$\operatorname{dom} f = A, \operatorname{ran} f \subseteq B$，称$f$为从$A$到$B$的函数，记作$f: A \to B$；
  - 从A到B的全体函数的集合称为“B上A”，记为$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$，若$|B| = m, |A| = n$，则$|B^A| = m^n$。

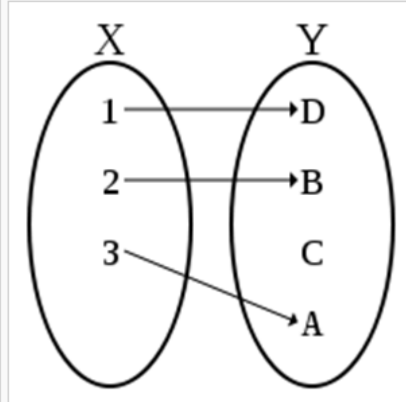
本周课程主要内容回顾（续）

- 函数的性质
  - $f: A \to B$是满射的$\Leftrightarrow \operatorname{ran} f = B$
  - $f: A \to B$是单射的
    $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 (x_1, x_2 \in A \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$
    $\Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 (x_1, x_2 \in A \wedge f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$
  - $f: A \to B$是双射的$\Leftrightarrow f$是单射的且是满射的
- 函数的复合
- 反函数

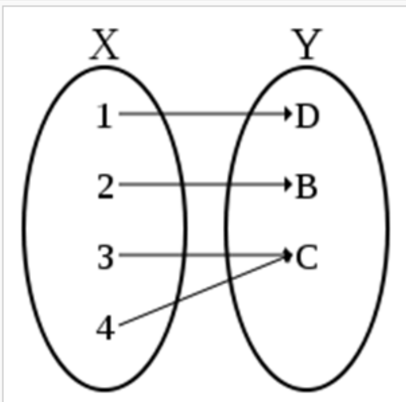
本周课程主要内容回顾（续）



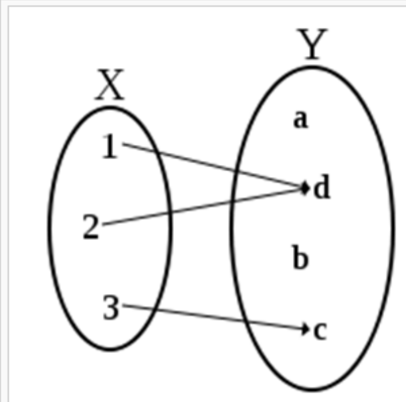
Injective and surjective (bijective).



Injective and non-surjective.



Non-injective and surjective.



Non-injective and non-surjective.

集合论课堂练习题（续）

- 1、课本165页第6题。（5分钟）

解：

(1) $f: A \to B$不是单射，也不是满射；

(2) 不是从A到B的函数，因为$\mathrm{dom}\, f \neq \mathbf{N}$；

(3) $f: A \to B$不是单射，因为$f(\langle 0,1\rangle) = f(\langle 0,2\rangle) = 0$，但是满射；

(4) $f: A \to B$不是单射，也不是满射；

(5) $f: A \to B$是单射，但不是满射；

(6) $f: A \to B$是单射、满射、双射；

(7) $f: A \to B$不是单射，也不是满射；

(8) 不是从A到B的函数，因为$\mathrm{dom}\, f \neq \mathbf{R}$；

(9) 不是从A到B的函数，因为$\mathrm{ran}\, f \not\subseteq \mathbf{R}$；

集合论课堂练习题（续）

- 2、课本165页第7题。（4分钟）

解：

(1) 结果不唯一：$f=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle,\langle d,0\rangle\}$

(2) 结果不唯一：$f=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle d,2\rangle\}$

(3) 不可以。

(4) 存在单射函数$\Leftrightarrow m\le n$，存在满射函数$\Leftrightarrow m\ge n$，

存在双射函数$\Leftrightarrow m=n$

集合论课堂练习题（续）

- 3、课本166页第22题。（5分钟）

解：

(1) $f(\mathbf{Z})$事实上是比n小的所有自然数，故$f(\mathbf{Z}) = \{0,1,\cdots,\mathrm{n}-1\}$;

(2) 等价关系R诱导的商集$\mathbf{Z}/R$实际上是模n同余关系:

$xRy \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\, n)$，故:

$\mathbf{Z}/R = \{\{nk+i|\mathrm{k} \in \mathbf{Z}\}|i = 0,1,\cdots,n-1\}$

集合论课堂练习题（续）

- 4、课本166页第25题。（5分钟）

证明：

先证明f为单射。设存在$\langle x,y\rangle$，$\langle u,v\rangle$使得

$$f(\langle x,y\rangle)=f(\langle u,v\rangle)\Rightarrow\langle\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\rangle=\langle\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\rangle$$

$$\Rightarrow\frac{x+y}{2}=\frac{u+v}{2}\wedge\frac{x-y}{2}=\frac{u-v}{2}\Rightarrow x=u\wedge y=v$$

$$\Rightarrow\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$$

再证明f为满射。任取$\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，存在$\langle u+v,u-v\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，且

$f(\langle u+v,u-y\rangle)=\langle u,v\rangle$。故$f$是双射的。 □

集合论课堂练习题（续）

- 5、设$f: A \to B$，$B_1 \subseteq B$，证明：

$$f\left(A \cap f^{-1}(B_1)\right) = f(A) \cap B_1$$ （4分钟）

证明：任取y，

$$y \in f\left(A \cap f^{-1}(B_1)\right) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \cap f^{-1}(B_1) \wedge xfy)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \in f^{-1}(B_1) \wedge xfy) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge f(x) \in B_1 \wedge xfy)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge y \in B_1 \wedge xfy) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xfy) \wedge y \in B_1$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in B_1 \Leftrightarrow y \in f(A) \cap B_1 \qquad \square$$

集合论课堂练习题（续）

- 6、设$f{:}\,A\to B$，$g{:}\,B\to A$，$h{:}\,B\to A$，且满足 $g\circ f=h\circ f=I_B$ 及 $f\circ g=f\circ h=I_A$，证明：$g=h$。（3分钟）

证明：

因有：$g=I_B\circ g=(h\circ f)\circ g=h\circ(f\circ g)=h\circ I_A=h$

故 $g=h$。 □

本周课后作业

- pp. 165-167
  - 8，9，10
  - 12，23，24

- 本次作业大概需要30分钟，下周五交。

集合论课堂练习题（续）

- 7、设 R 是集合 A 上的等价关系，$|A| = n, |R| = r, |A/R| = t$，*试证明：* $r \cdot t \geq n^2$ （清华大学1996年研究生入学考试） （8分钟）

证明：

设 $A/R = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$，$|A_i| = n_i$，下证明 $\cup_{i=1}^{t}(A_i \times A_i) = R$：

任取$\langle x, y\rangle$，$\langle x, y\rangle \in \cup_{i=1}^{t}(A_i \times A_i) \Leftrightarrow \exists i(i \in \{1,2, \cdots t\} \wedge \langle x, y\rangle \in A_i \times A_i)$

$$\Leftrightarrow \exists i(i \in \{1,2, \cdots, t\} \wedge x, y \in A_i) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R$$

由于各等价类$A_1, A_2, \cdots, A_t$互不相交，故有$\sum_{i=1}^{t} n_i^2 = r$。由于商集中各子集的元素数目最大为r（此时其划分对应于恒等关系I_A）故有：$\frac{(\sum_{i=1}^{t} n_i)^2}{t} \leq r$，又 $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$，故有 $r \cdot t \geq n^2$。 □