MOPEC-2010-001图论习题课讲义

图论(6) 平面图(Planar Graphs)

魏恒峰 2011 年 6 月 12 日

1 Special Topics

1.1 Planar Graphs

Definition 1.1. 平面图

存在平面嵌入的无向图称为平面图.

$K_5, K_{3,3}$均为非平面图,参见习题2.1.

Definition 1.2. 对偶图

Remark 1.3. 对偶图

我们知道某平面图可能有几种不同的平面嵌入.同一平面图的不同平面嵌入可能会产生不同构的对偶图, 如所示(教材中亦有类似图例).但是,如果平面图G是连通的,则$(G^{\star})^{\star} \cong G$.

Theorem 1.4. 对偶图的对偶图

如果平面图G是连通的,则$(G^{\star})^{\star} \cong G$.

Proof. 对偶图的对偶图

我们只给出证明的思路和证明的要点提示.

1. 平面图G(不论是否为连通图)的对偶图$G^{\star}$是连通图.(提示:考虑$G^{\star}$中顶点的构造.)
2. 如果G是连通图,则$G^{\star}$的每一个面(face)都包含且仅包含G的一个顶点.

3. 综合以上两点,即可证明$(G^{\star})^{\star} \cong G \iff G$ is connected.

$\square$

Remark 1.5. 对偶图的对偶图

如果将"求对偶"看作一种运算,那么定理1.4 则说明连续进行两次该操作会得到原对象. 这便是对偶一词的由来.G与其对偶图$G^{\star}$之间存在多处对偶关系,比如

1. *环(loop) $\leftrightarrow$ 桥(bridge)*
2. $n^{\star} = r; m^{\star} = m; r^{\star} = n$
3. *圈(cycle) $\leftrightarrow$ 极小边割集(minimal edge cut), 见习题2.4.*

下面直接给出平面图的判定定理,其证明比较复杂,不做介绍.有兴趣的同学可以查看Douglas B.West 所著"Introduction to Graph Theory".

Theorem 1.6. 平面图判定定理*(Kuratowski theorem)*

图G是平面图 $\iff$ G中既不含与K_5同胚的子图,也不含与$K_{3,3}$同胚的子图 $\iff$ G中既没有可以收缩到K_5的子图,也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图.

Remark 1.7. 平面图判定定理*(Kuratowski theorem)*

Kasimir Kuratowski 有一次问Frank Harary(图论先驱) $K_5, K_{3,3}$ 记号的由来,Harary回答说,K_5中的K表示Kasimir, $K_{3,3}$中的K表示Kuratowski.

1.2 Euler's Formula

Theorem 1.8. 欧拉公式*(Euler's formula)*

n顶点,e条边,f个面的连通平面图G满足公式:

$$n - e + f = 2.$$

Remark 1.9. 欧拉公式*(Euler's formula)*

欧拉公式是平面图中计数的基本工具.

欧拉公式在多面体上的示例如图1所示.

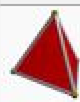
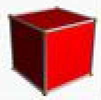
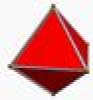
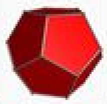
Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V-E+F$
Tetrahedron		4	6	4	2
Hexahedron or cube		8	12	6	2
Octahedron		6	12	8	2
Dodecahedron		20	30	12	2
Icosahedron		12	30	20	2

图 1: Euler's formula

根据欧拉公式可以推导出极大平面图的一些特征.教材中已经给出,这里只是整理出这些结论.

Proposition 1.10. ***极大平面图(maximal planar graph)***

对于n阶的简单平面图G,以下三点等价:

1. $m=3n-6$;
2. G 的每个面f的长度都为3(该特点也称为triangulation);
3. G 是极大平面图.

由欧拉公式推导的一个重要结论是,正多面体(regular polyhedra)有且仅有五种!所谓正多面体,是指它的所有面都是边数相等的正多边形,而且每个顶点所我们将该定理留作习题,见习题.

2 Problem Set

Problem 2.1. $K_5, K_{3,3}$**均为非平面图**

证明:$K_5, K_{3,3}$均为非平面图.

Solution 2.2. $K_5, K_{3,3}$**均为非平面图**

对于$K_5, K_{3,3}$的非平面性,可以直接证明.也可以按照教材上的做法由欧拉公式推导出来. 以K_5为例,见图*2*.

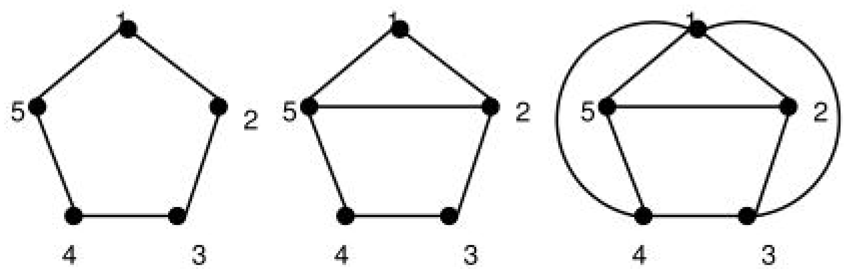


图 2: K_5 is not planar graph

****

Problem 2.3. 对偶图

分别给出K_4和Q_3的对偶图,并指出它们各自是什么图?

****

Problem 2.4. 圈与极小边割集对偶

平面图G中$E(G)$的子集D构成圈 $\Longleftrightarrow$ $G^\star$中D所对应的对偶边构成极小边割集.

Solution 2.5. 圈与极小边割集对偶

****

Problem 2.6. 正多面体*(regular polyhedra)*

请使用欧拉公式证明: 正多面体有且仅有五种.

Solution 2.7. 正多面体*(regular polyhedra)*

正多面体可以投影到平面上,形成正则平面图.设顶点度数为k,所有的面由l条边组成,n个顶点,e条边,f个面. 联立握手定理$kn = 2e = lf$和欧拉公式$n + f - e = 2$,推导过程如下:

$e(\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l}) = 2 \Rightarrow \frac{2}{k} + \frac{2}{l} > 1 \Rightarrow 2l + 2k > kl \Rightarrow (k-2)(l-2) < 4$

符合条件的(k, l)对只可能有$(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$.对应的正多面体见图*3*.

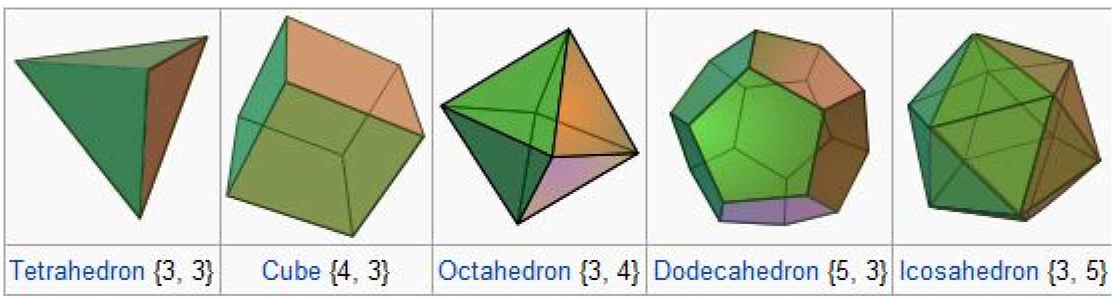


图 3: regular polyhedra with values of k and l

****

3 Application and Extension