MOPEC-2010-001图论习题课讲义

图论(4) 哈密顿图(Hamiltonian Graph)

魏恒峰 2011 年 6 月 11 日

1 Special Topics

1.1 Hamiltonian Graph

Definition 1.1. 哈密顿图

经过图G中所有点恰一次的通路称为G的哈密顿通路.

经过图G中所有点恰一次的回路称为G的哈密顿回路.

和欧拉图的情况不同,对于哈密顿图,人们至今仍未找到便于判断的充要条件.在这种现状下,我们主要研究以下三点:

1. 研究某些特殊类型的图是否是哈密顿图.
2. 给出哈密顿图的某些必要条件.必要条件可以用来确定某个图不是哈密顿图.
3. 给出哈密顿图的某些充分条件.充分条件可以用来确定某个图是哈密顿图.

Remark 1.2. *哈密顿回路的一些特点 若某图G是哈密顿图,则其哈密顿回路是原图G的一个生成子图.*

在哈密顿回路中,原图的每个顶点都用去了两度.所以,如果图G 中存在顶点$v, deg(v) = 2$,那么该顶点的两条边必然在哈密顿回路中.使用该条件, 我们可以判断某些简单的图不是哈密顿图1.3.

哈密顿回路不含有比其小的圈作为子图.

Example 1.3. 非哈密顿图

请说明图1不是哈密顿图.

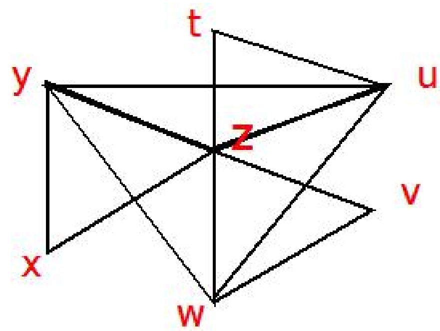

图 1: 非哈密顿图

Theorem 1.4. *Petersen图不是哈密顿图*

Peterson图不是哈密顿图.

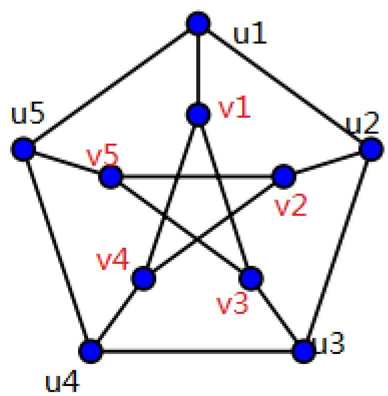

图 2: Peterson图不是哈密顿图

Proof. Petersen图不是哈密顿图

使用反证法.

我们先给Petersen图一些记号.我们采用如图2所示的方式标记Petersen图的顶点. 用C'表示外部的圈u_1, u_2, u_3, u_4, u_5,用C''表示内部的圈v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. 当然,连接外部和内部圈相应顶点的边为u_iv_i.

反设Petersen图是哈密顿图，则其有哈密顿回路C.回路C包含10条边.u_iv_i边共有5条.所以,至少还有5条边属于C'或C''.根据鸽笼原理,不妨设C中至少包含C'中

的3条边.又因为C中不可能含有C'中的全部的5条边(C不应当包含子圈),所以C中只可能包含C'中的3条边或者4条边.

Case 1: 如果C中恰包含C'中的4条边.根据对称性,不妨设这四条边为$u_4u_5, u_5u_1, u_1u_2, u_2u_3$,.则连接外部和内部圈的边$u_5v_5, u_1v_1, u_2v_2$不属于$C$(因为每个顶点只能有两条边属于$C$), 如图3. 则边$u_4v_4, u_3v_3, v_1v_3, v_1v_4$属于$C$(因为每个顶点必有两条边属于$C$),如图4.但是,这意味着$C$包含了一个大小为8的圈.矛盾(哈密顿回路不可能包含子圈).

Case 2: 如果C中恰包含C'中的3条边.

Subcase 1: 这3条边在C'中相邻. 如图5 所示,C包含C'中的3条边u_4u_5, u_3u_4, u_2u_3. 这导致最多只有一条边(u_1v_1)与顶点u_1关联.矛盾.

Subcase 2: 这3条边在C'中不相邻. 如图6 所示,C包含C'中的3条边u_5u_1, u_1u_2, u_3u_4.则$u_4v_4, u_3v_3,$ 包含于C,但是这四条边构成了一个大小为4的圈. 矛盾.

□

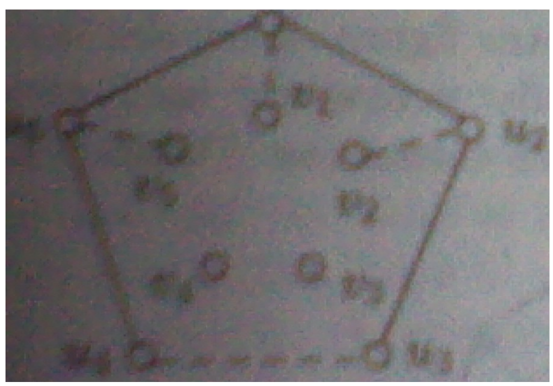

图 3: Case 1(a)

1.2 Tournaments

Definition 1.5. 竞赛图*(tournament)*

底图是完全图的有向图是竞赛图.

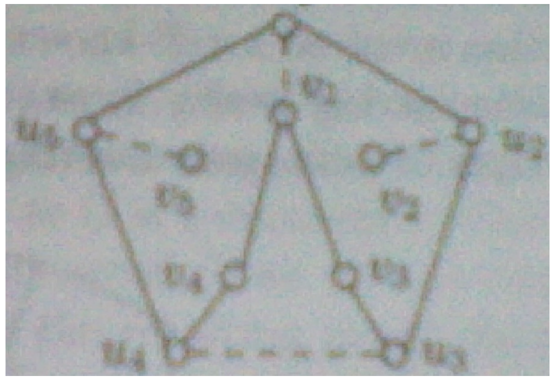

图 4: Case 1(b)

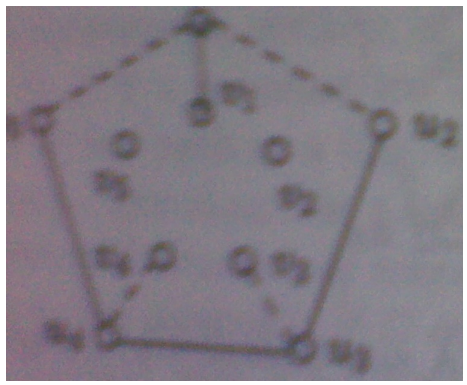

图 5: Case 2(a)

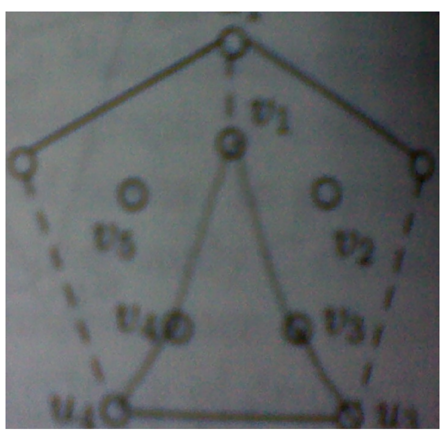

图 6: Case 2(b)

Remark 1.6. 竞赛图*(tournament)*

之所以称为竞赛题,是因为我们可以用比赛的术语来描述该类图.竞赛图建模了循环赛*(round-robin)*,在该种赛制中,每两个参赛队员之间都要进行一场且仅一场比赛.底图是完全图K_n是显然的.如果队员x赢得了与队员y的比赛,则有向边$(x, y) \in E(K_n)$.

在课堂上,我们学习了根据竞赛图给各个队员排名.最简单的一种排名方式是按照队员相对应的顶点的出度*(outdegree)*的大小排名. 由于具有最大出度的顶点很可能不止一个,如图*7*所示,所以可能没有明显的第一名.但是,尽管如此,我们却可以找到这样的一个队员x: 对于其他所有队员z,要么x赢得了与z的比赛,要么x赢得了与y的比赛而y赢得了与z的比赛. 我们把这样的队员称为*"king"*!

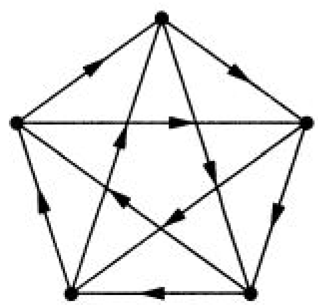

图 7: tournament with many vertices holding maximum outdegree

Definition 1.7. *king*

在有向图中*(*该定义不局限于竞赛图*)*,*king* 指的是顶点x,如果其它所有的顶点都可从x通过长度不大于*2*的路径*(path)*可达.

我们以习题的形式给出关于"竞赛图中必定含有king"的定理.

2 Problem Set

Problem 2.1. P_{306}***(15)***

某工厂生产由*6*种颜色的纱织成的双色布.已知在一批双色布中,每种颜色至少与

其他3种颜色相搭配.证明可以从这批双色布中挑出3种,它们由6种不同颜色的纱织成.

****

Problem 2.2. 竞赛图中必有*king*

证明:竞赛图中必有*king*.

Solution 2.3. 竞赛图中必有*king*

证明过程可以使用图来说明.

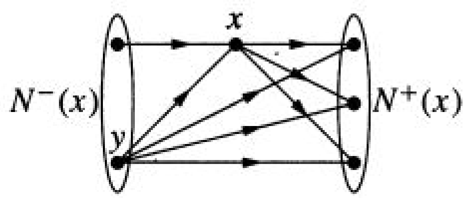

图 8: proof of king

Remark 2.4. 竞赛图中必有*king*

该定理的证明过程实际上隐含了"求竞赛图中的*king*"的算法.请仔细体会.

该定理的证明过程在图论中是比较有代表性的,即以某种方式将问题推到"绝境","迫使"具有某种特性的对象出现.也请仔细体会.

3 Application and Extension