MOPEC-2010-001离散数学习题解析(第十五周)

图论(4) 连通度,欧拉图与哈密顿图

魏恒峰 2011 年 5 月 30 日

1 第十五章欧拉图与哈密顿图

Problem 1.1. P_{305}*(1(b))*

*(b)*图不是欧拉图.只需要添加*2*条边*(*左边上下对应顶点添加两条重边即可*)*便可使其成为欧拉图，而不是有些同学要求的添加*4*条边.

Problem 1.2. P_{306}*(9)*

设G是无向连通图,证明:若G中有桥或者割点,则G不是哈密顿图.

Solution 1.3. P_{306}*(9)*

1. 若G中有割点v,则$p(G-\{v\}) \geq 2 > 1 = |\{v\}|$.
2. 设G中有桥$e = (u, v)$.若u, v都是悬挂顶点,则$G = K_2$，不是哈密顿图;否则,u, v必有一点度数大于等于*2*，则该点为割点.故G亦不是哈密顿图.

Remark 1.4. P_{306}*(9)*

有同学在第二问中忘记了讨论K_2这一特殊情况.

该定理说明,哈密顿图一定是*2*-边连通图和*2*-点连通图.这也可看作哈密顿图的一个必要条件.

Problem 1.5. P_{14}*(14* 应用题*)*

今有n个人,已知他们中的任何二人合起来认识其余的$n-2$个人.证明$n \geq 3$时，这n个人能排成一列，使得任何两个相邻的人都相互认识.而当$n \geq 4$时，这n个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识两旁的人.

Solution 1.6. P_{14}*(14 应用题)*

使用图论语言建模.顶点表示人,边(u,v)表示u与v相识且$u \neq v$.则,$\forall u,v \in V, d(u)+d(v) \geq n-2$.能否排成一列则对应哈密顿通路问题，能否排成一个圆圈则对应哈密顿回路问题.观察该条件，是关于顶点度数之和的，所以可以考虑使用哈密顿图的充分条件.但是需要注意的是,在哈密顿图的充分条件中,u,v是两个不相邻的顶点. 所以，我们要对u,v是否相邻做讨论,也就是对u,v是否相识做讨论.

1. u,v相识.$d(u)+d(v) \geq n-2+2 = n$.
2. u,v不相识.则$\forall w \in V, w \neq u, w \neq v \Rightarrow (u,w) \in E, (v,w) \in E$(否则$u,v$合起来至多认识$n-2$个人).所以,$d(u)+d(v) \geq 2(n-2)$.

$$n \geq 3 \Rightarrow d(u)+d(v) \geq 2(n-2) \geq n-1$$
$$n \geq 4 \Rightarrow d(u)+d(v) \geq 2(n-2) \geq n$$

使用哈密顿图的充分条件即可.

2 补充习题

Problem 2.1. 点连通度

证明:图G中,若$\delta \geq n-2$，则$\kappa(G)=\delta$.找出一个图例,满足$\delta = n-3, \kappa(G) < \delta$.

Solution 2.2. 点连通度

$\delta = n-1$: 此种情况下,$G=K_n$.显然成立.

$\delta = n-2$: 可使用归纳法.

基本步: $n=3$.

归纳假设: $n = k$成立.

归纳证明: $n = k+1.\exists v \in V, deg(v) = n-2 \Rightarrow \exists w, (vw) \notin E, \forall u \neq w, (vu) \in G$.任意删除$n-3$个顶点，剩余的顶点有如下情况:

- v,w,其他点(表示非v非w)
- v,其他点，其他点
- 其他点，其他点，其他点

前两种情况,剩余的3个点仍是连通的;对于第三种情况,可以使用归纳假设.

"两个K_3共享一个顶点"是满足$\delta = n-3, \kappa(G) < \delta$的图.

Remark 2.3. **点连通度**

有同学使用反证法这样写道:

"假设$\kappa(G) = t < \delta(G) \Rightarrow \exists V' \subseteq V, G - V'$包含两个连通分支".之后在此基础上对度数做数量分析.

对于点割集来说，删去点,得到的不一定就是两个连通分支,有可能会是任意多个连通分支.这一点与边割集来说是不同的.切记.

Problem 2.4. **2-边连通图**

证明:G是2-边连通图 $\iff$ G中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路.

Solution 2.5. **2-边连通图**

$\Leftarrow$: 易见.

$\Rightarrow$: 归纳法.对$d(u,v)$做归纳.

基本步: $d(u,v) = 1.(u,v) \in E$，G是2-边连通图,故除(u,v)外,u,v见还有通路.

归纳假设: 假设命题对$d(u,v) = k$成立.

归纳证明: $d(u,v)=k+1$.设此最短路径为$u=v_0,v_1,\cdots,v_k,v$.$d(u,v_k)=k$，由归纳假设,u,v_k之间至少有两条不含公共边的通路P,Q.这两条通路构成一个圈C. (v_kv)不是割边,所以其必在某个圈中,该圈若与C只相交于v_k，则得证;若该圈与C相交与其他点，假设w是相交的第一点，则$u\rightsquigarrow w\rightsquigarrow v$与$u\rightsquigarrow v_k\rightsquigarrow v$构成$u,v$间两条不含公共边的通路.

Problem 2.6. ***k*-边连通图**

证明: 设G是k边连通图,从G中任意删除k条边,最多的到2个连通分支.

Solution 2.7. ***k*-边连通图**

G是k-边连通图,则删除$k-1$边，图仍连通;再删除一条边，最多得到2个连通分支.得证.

本题亦可用反证法证明.假设得到了3个或更多个连通分支,则可以说明图G的边割集大小小于k.

Remark 2.8. ***k*-边连通图**

注意这与点连通图的不同.