

# 第1次离散数学习题课

## 绪论与逻辑基础

魏恒峰

hengxin0912@gmail.com

Department of Computer Science & Technology, NJU  
February 27, 2011

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# 开篇之句

“数理逻辑是研究推理的数学分支...”

- ① Request: 请问还有去南京的T7800次火车的坐票吗?
- ② Reply: 对不起, T7800次的所有车票都卖完了。
- ③ Request: 那还有站票吗?
- ④ Reply(☹): 抱歉。  
T7800次的所有车票都卖完了;  
站票是火车票的一种;  
所以, 站票也卖完了。

# 开篇之句

“数理逻辑是研究推理的数学分支...”

The dialog is more probably like this:

- 1 Request: 请问还有去南京的 T7800 次火车的坐票吗?
- 2 Reply: 对不起, T7800 次的所有车票都卖完了。
- 3 Request: 那还有站票吗?
- 4 Reply(☹): 下一个。

# 开篇之句

“...推理是由一系列**有关联**的陈述句组成的。”

下面的陈述句序列是推理吗？

- ① 海水是咸的。
- ② 中国的首都是北京。

# 开篇之句

“数理逻辑是研究推理的数学分支，推理由一系列有关联的陈述句组成。”

## Five Problems:

- ① 为什么需要推理？
- ② 推理的基础是什么？
- ③ 推理的规则是什么？
- ④ 推理有正确与错误之分吗？
- ⑤ 若有，如何保证推理是正确的呢？

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking



# Propositional Logic—Proposition(命题)

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。——罗素

Notice: 排中律。有的逻辑学家并不承认这一规律。

# Propositional Logic—Proposition(命题)

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。——罗素

Notice: 排中律。有的逻辑学家并不承认这一规律。

- 原子命题:  $p, q, r, s \dots$  ( $\because$ 我们不太关心具体的命题内容)
- 复合命题:  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 命题公式及其解释(interpretation)
- 重言式(tautology), 矛盾式(contradiction)

# Propositional Logic—命题逻辑等值演算

Question: 如何判断两个命题公式是等值的?

- ① 真值表
- ② 等值式

# Propositional Logic—命题逻辑等值演算

Question: 如何判断两个命题公式是等值的?

① 真值表

② 等值式

重要等值式:

德摩根律 De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

蕴涵等值式  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

假言易位  $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

归谬论  $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

# Propositional Logic—推理的形式结构

## 推理的形式结构

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \vdash B$$

**推理正确**当且仅当

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots A_n \rightarrow B$$

为重言式。(等值演算)

# Propositional Logic—自然推理系统

Q: 如何保证推理的正确性?

A: 推理规则集  $R$

“证明”是一个描述推理过程的命题公式序列，其中的每个公式或者是已知前提，或者是由前面的公式应用推理规则得到的结论(中间结论或推理中的结论)。

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# Predicate Logic—符号化

## ① 个体词

- ① 个体常项
- ② 个体变项

## ② 谓词(predicate)

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \{\top, \perp\}$$

## ③ 量词

- ① 全称量词:  $\forall xP(x)$
- ② 存在量词:  $\exists xP(x)$



# Predicate Logic—等值演算

只要求了解，会进行简单推理即可

- ①  $\forall xP(x) \vdash P(c)$  if  $c \in U$
- ②  $\{P(c) \text{ 对任意 } c \in U\} \vdash \forall xP(x)$
- ③  $\exists xP(x) \vdash P(c)$  对某个  $c \in U$
- ④  $\{\text{对某个 } c \in U, P(c)\} \vdash \exists xP(x)$

# Predicate Logic—等值演算

只要求了解，会进行简单推理即可

$$\textcircled{1} \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\textcircled{2} \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# Proposition

1: 请把下列命题符号化。

- 1 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。

# Proposition

## 1: 请把下列命题符号化。

① 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。

② 我想证明我自己的清白无辜，只有以下三个途径：

① 队长家不存在一只母狗；

② 该母狗天生没有左眼；

③ 我是无手之人，不能持枪射击。

— 王小波《黄金时代》

# Proposition

## 1: 请把下列命题符号化。

- ① 说逻辑枯燥无味或毫无价值都是不对的。
- ② 我想证明我自己的清白无辜，只有以下三个途径：
  - ① 队长家不存在一只母狗；
  - ② 该母狗天生没有左眼；
  - ③ 我是无手之人，不能持枪射击。——王小波《黄金时代》
- ③ 我只给不给自己理发的人理发。——(罗素悖论)

# Proposition

- 1 Slogan: 如果你爱她, 就请她吃哈根达斯。
- 2 One man: 我请他吃哈根达斯。
- 3 A girl's wish: 他一定很爱我。

# Proposition

- ① Slogan: 如果你爱她, 就请她吃哈根达斯。
- ② One man: 我请他吃哈根达斯。
- ③ A girl's wish: 他一定很爱我。

## Question:

- 女孩的推理正确吗?
- 怎样才算正确的推理呢?
- 假设这位女孩学习过数理逻辑, 你能教男孩该怎么做吗?



# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- **Propositional Calculus**
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# 命题逻辑等值演算

2: 请利用等值演算法证明公式为重言式。

①  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

②  $\neg((p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q))$

# 命题逻辑等值演算

3: 请利用等值演算证明等值式。

$$\textcircled{1} \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p$$

# 命题逻辑等值演算

休息一下

抽象任务	A	D	4	7
现实世界任务	啤酒	苏打水	23	17

- ① Rule: 如果卡片的一面是元音字母，那么它的另一面是偶数数字。
- ② Rule: 如果一位消费者要喝酒精饮料，那么她必须年满18岁。

# 命题逻辑等值演算

## 4: 等值演算应用题

① 对错参半问题: 课本  $P_{40}$  第29题

② 约束分配问题: 课本  $P_{40}$  第30题

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# 命题逻辑的推理理论

5: 在自然推理系统 $P$ 中构造下述推理的证明。

① 课本 $P_{53}$ 第14(2)题。

前提:  $\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q$

结论:  $t \rightarrow (r \wedge s)$

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking



# 一阶逻辑基本概念

## 6: 在一阶逻辑中将命题符号化

① 课本  $P_{65}$  第4(1)题: 没有不能表示成分数的有理数。

② 极限的定义:

数列  $\{x_n\}$  收敛于  $x_0$ , 指的是, 对于任意的正实数  $\epsilon$ , 存在自然数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|x_n - x_0| < \epsilon$ .

# 一阶逻辑简单推理



**Figure:** How lovely the dog is when it thinks.

- 所有的猫都有四条腿;
- 我有四条腿;
- 因此, 我是一只猫。

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

# Theorem Prover

Example of a Proof		
Number	Formula	Reason
1	$A$	premise
2	$A \vee A$	From (1) by disjunction introduction
3	$(A \vee A) \wedge A$	From (1) and (2) by conjunction introduction
4	$A$	From (3) by conjunction elimination
5	$A \vdash A$	Summary of (1) through (4)
6	$\vdash A \rightarrow A$	From (5) by conditional proof

Figure: Proof of  $A \vdash A$

① So intelligent & So tedious.

② 机械证明与定理证明器

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

- 1 程序规模大，复杂度高。
- 2 safety-critical,  
commercially critical,  
mission critical
- 3 如何保证程序的正确性？



```

declare
    .....
    horizontal_veloc_sensor: float;
    .....
begin
    sensor_get(vertical_veloc_sensor);
    sensor_get(horizontal_veloc_sensor);
    vertical_veloc_bias := integer(vertical_veloc_sensor);
    horizontal_veloc_bias := integer(horizontal_veloc_sensor);
    .....
exception
    when numeric_error => calculate_vertical_veloc();
    when others => use_irs1();
end;
```



**Figure:** 法国Ariane-5运载火箭发射失败(1996-06-04)

# Program Verification

*If the input  $x$  is a positive number, compute a number  $y$  whose square is less than  $x$ .*

**formalize:**

$$\{x > 0\}P\{y^2 < x\}$$

Hoare triples

$$\phi P \psi$$

# Outline

## 1 Review

- What does mathematical logic concern about?
- Propositional Logic
- Predicate Logic

## 2 Problem Set

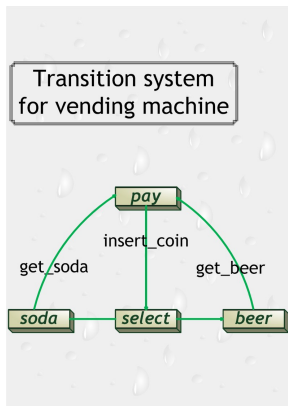
- Proposition
- Propositional Calculus
- Natural Deduction System
- First Order Logic

## 3 Extension

- Theorem Prover
- Program Verification
- Model Checking

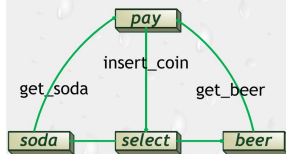


# Model Checking



# Model Checking

Transition system  
for vending machine



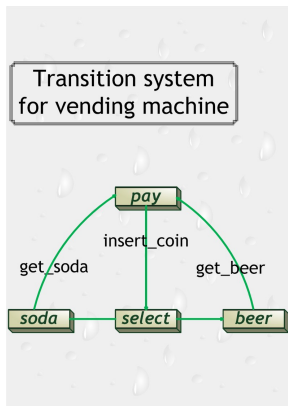
厂家提出要求(需求分析):

*A 'pay' action must be preceded immediately by a 'drink' action.*

*Not the case:*

$\{\}\{\text{drink}\}$

# Model Checking



厂家提出要求(需求分析):

*A 'pay' action must be preceded immediately by a 'drink' action.*

*Not the case:*

$\{\}\{drink\}$

如何保证该自动售货机的模型能满足厂家要求?

# That's the end. Thank you.



Figure: Bring Up a Question