离散数学

Discrete Mathematical Structures

Lecture on Exercises

魏 恒 峰

hengxin0912@gmail.com

2011 年 3 月 21 日

目录

第一章　习题7 二元关系

1.1　习题解析

1. **3(2)：该等式是否成立？**

$$(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$$

解答:
该等式不成立。以下集合可以用于证伪该命题：

$$A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{2\},D=\{3\}.$$

常见错误: 有些同学试图通过如下过程证明该等式的正确性:

$$\begin{gathered}\forall\langle x,y\rangle\in(A-B)\times(C-D)\\ \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in C\wedge y\notin D\\ \Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\notin B\wedge y\notin D)\\ \Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\wedge\neg(\langle x,y\rangle\in(B\times D))\\ \Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)-(B\times D)\end{gathered}$$

该证明的错误部分已经用红色高亮显示。

$$\langle x,y\rangle\in(B\times D)\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D.$$

的否定形式应为:

$$\begin{gathered}\langle x,y\rangle\notin(B\times D)\\ \Leftrightarrow(x\notin B\wedge y\notin D)\vee(x\in B\wedge y\notin D)\vee(x\notin B\wedge y\in D)\end{gathered}$$

□

2. **10(1): $\langle 0,0\rangle$也满足条件.**
说明:

$$\langle 0,0\rangle \in S.$$

□

3. **18: 证明定理7.4(4).**

$$(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F.$$

解答: 我们以课本P_{109}定理7.4(3)的证明为例加以说明。7.4(4)的证明与其如出一辙，此处不再赘述。

我们注意到$\circ$运算对于$\cap$运算不具有分配率，其根本原因可以从7.4(3)的证明过程中得出。证明过程第四行的$\Rightarrow$表明:

$$\exists t(\langle x,t\rangle \in F\wedge \langle t,y\rangle \in G)\wedge \exists t(\langle x,t\rangle \in F\wedge t,y\in H)$$

推导不出

$$\exists t((\langle x,t\rangle \in F\wedge \langle t,y\rangle \in G)\wedge (\langle x,t\rangle \in F\wedge t,y\in H))$$

这是因为当两个$\exists t$不是同一个t值时，就不能将$\exists t$提取出来(就像提取共因式那样)。而对于定理7.4的前两个命题则不存在该问题，因为对于$\cup$而言，类似的上述两式是等价的。当两个$\exists t$不相同时，我们可以任选其中之一，而保证推导是等价的。请同学们仔细体会其间的区别。另外，大家也可以尝试举出反例，进一步加深理解。

□

4. **20: 规范而严谨的证明风格**

说明: 本题的证明并不困难，但是有些同学的证明过程不够严谨和规范。这通常并不意味着你的证明有误，但一个糟糕的证明过程却可能说明你对基本概念的理解不够深刻。

作业中表现出来的不太好的证明通常具有以下特征：

(a) $\because,\therefore$与$\Leftrightarrow$混用。

(b) 自然语言与符号推理混用。

(c) $\Leftrightarrow$与$\Rightarrow$使用错误。

建议：

(a) 在证明充要条件时，若对于充分条件和必要条件的证明类似(步步可逆)，则建议使用$\Leftrightarrow$来统一这两个方向的证明。

$\square$

5. **32(3): 判断R是否为A上等价关系.**

解答:
$xRy \Leftrightarrow xy$ 是奇数 该关系不是正整数集上的等价关系。它不满足自反性。

$\square$

6. **32(5): 判断R是否为A上等价关系.**

解答:

$$A = P(X), C \subseteq X, \forall x, y \in A, xRy \Leftrightarrow x \oplus y \subseteq C.$$

是等价关系。

自反性和对称性易见，下证传递性。
$\forall xRyRz, x \oplus z = x \oplus (y \oplus y) \oplus z = (x \oplus y) \oplus (y \oplus z) \subseteq C.$ $\square$

7. **39: 证明**

解答:

(a) 充分性

i. 自反性。已知。

ii. 对称性。$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, x\rangle \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$(本证明过程使用了自反性和已知条件)

iii. 传递性。$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$(本证明过程中使用了对称性和已知条件)

(b) 必要性$\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle a, c\rangle R \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R \wedge \langle a, c\rangle \in R \Rightarrow \langle b, c\rangle \in R$.(对称性和传递性)

在本题的证明过程中，要分清哪些是已知条件，哪些是待证命题。

$\square$