



离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

# 离散数学习题课

## 二元关系

杨海滨

南京大学 计算机科学与技术系

2011 年3 月18 日



# 目录

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## 1 二元关系知识点回顾

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系的运算与性质

## 2 作业批改情况反馈

- 综合情况
- 具体问题分析

## 3 习题

## 4 结束语



# 有序对

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 有序对

### 定义

由两个元素 $x, y$ 按照一定顺序排列成的二元组叫做有序对。



# 有序对

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 有序对

### 定义

由两个元素 $x, y$ 按照一定顺序排列成的二元组叫做有序对。

## ● 思考

1. 两个元素: 什么是元素?
2. 按照一定顺序: 什么样的顺序? 什么叫有序?



# 有序对

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## • 有序对

### 定义

由两个元素 $x, y$ 按照一定顺序排列成的二元组叫做有序对。

## • 思考

1. 两个元素: 什么是元素?
2. 按照一定顺序: 什么样的顺序? 什么叫有序?

## • 形式描述

### 定义

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$



# 有序对

离散数学学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

● 集合是更原始的概念，用集合构造一切

$$\textcircled{1} \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\textcircled{2} \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$

$$\textcircled{3} \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\textcircled{4} \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{a, \{a, b\}\}$$

$$\textcircled{5} \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$$



# 有序对

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

● 集合是更原始的概念，用集合构造一切

①  $\langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$

②  $\langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$

③  $\langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{b\}, \{a, b\}\}$

④  $\langle a, b \rangle \equiv_{def} \{a, \{a, b\}\}$

⑤  $\langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$

● 思考

如何证明这些构造是合理的？



# 有序对

离散数学学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 集合是更原始的概念，用集合构造一切

$$① \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$② \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$$

$$③ \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{b\}, \{a, b\}\}$$

$$④ \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{a, \{a, b\}\}$$

$$⑤ \quad \langle a, b \rangle \equiv_{def} \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$$

- 思考

如何证明这些构造是合理的？

- 配对公理

公理

$$\forall x \forall y \exists A \forall z (z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$





# 笛卡尔积

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 笛卡尔积

### 定义

设 $A, B$ 为集合，用 $A$ 中的元素为第一元素，用 $B$ 中的元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对的集合称为 $A$ 和 $B$ 的笛卡尔积，也成直积。

### 定义

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$



# 笛卡尔积

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 笛卡尔积

### 定义

设 $A, B$ 为集合, 用 $A$ 中的元素为第一元素, 用 $B$ 中的元素为第二元素构成有序对, 所有这样的有序对的集合称为 $A$ 和 $B$ 的笛卡尔积, 也成直积。

### 定义

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

## ● 思考

设 $A = \{A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2\}$ ,  $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ , 求 $A \times B$ .



# 笛卡尔

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 笛卡尔



勒奈·笛卡尔（Rene Descartes），1596年3月31日生于法国都兰城。笛卡尔是伟大的哲学家、物理学家、数学家、生理学家。解析几何的创始人。笛卡儿是欧洲近代资产阶级哲学的奠基人之一，黑格尔称他为“现代哲学之父”。他自成体系，熔唯物主义与唯心主义于一炉，在哲学史上产生了深远的影响。同时，他又是一位勇于探索的科学家，他所建立的解析几何在数学史上具有划时代的意义。笛卡儿堪称17世纪的欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一，被誉为“近代科学的始祖”。



# 关系

离散数学学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 二元关系

### 定义

一个集合如果满足：(1)空集；(2)元素为有序对其中之一，则称其为开一个二元关系



# 关系

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 二元关系

### 定义

一个集合如果满足：(1)空集；(2)元素为有序对其中之一，则称其为开一个二元关系

### 定义

$R \subseteq A \times B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 到 $B$ 的一个关系。



# 关系

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 二元关系

### 定义

一个集合如果满足：(1)空集；(2)元素为有序对其中之一，则称其为开一个二元关系

### 定义

$R \subseteq A \times B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 到 $B$ 的一个关系。

## ● 思考

关系是一种普遍的现象！

还记得那副扑克吧，如何描述”争上游“的游戏规则呢？  
 $A$ 到 $B$ 共有多少个关系？



# 关系

离散数学习题  
课

杨海深

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 二元关系

### 定义

一个集合如果满足：(1)空集；(2)元素为有序对其中之一，则称其为开一个二元关系

### 定义

$R \subseteq A \times B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 到 $B$ 的一个关系。

## ● 思考

关系是一种普遍的现象！

还记得那副扑克吧，如何描述”争上游“的游戏规则呢？  
 $A$ 到 $B$ 共有多少个关系？

## ● 关系的表示

- 集合
- 矩阵
- 有向图第一个绘制关系图的是谁？



# 关系的运算

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## • 逆关系

### 定义

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$$

## • 复合

### 定义

$$F \circ G = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \}$$

## • 幂

### 定义

$R$  为  $A$  上的关系,  $n$  为自然数

$$R^0 = I_A R^{n+1} = R^n \circ R$$





# 关系的性质与闭包

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 关系的性质

### 定义

$$(1) \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$$

$$(2) \forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$$

$$(3) \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$



# 关系的性质与闭包

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

## ● 关系的性质

### 定义

$$(1) \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$$

$$(2) \forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$$

$$(3) \forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$

## ● 关系的闭包

- $r(R)$
- $s(R)$
- $t(R)$



# 关系的运算对性质的保持

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

有序对与笛卡尔积

二元关系

关系的运算与性质

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 关系的性质  
见课本P118表7.2



# 作业批改情况与主要问题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

综合情况  
具体问题分析

习题

结束语

- 作业批改情况

- ① 非证明题完成的非常出色
- ② 证明题仍然存在一些小问题

- 主要问题

- ① 概念及概念之间的关系不够清晰
- ② 集合运算与逻辑推理混用
- ③ 逻辑公式中的量词的使用比较随意
- ④ 证明没有到达结论就结束



# 具体问题分析

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

综合情况  
具体分析

习题

结束语

## ● 习题七第1题(P130)

- ❶ 错误1  $P(A)$ 没有计算完全
- ❷ 错误2 只计算 $P(A)$

## ● 习题七第3题(P130)

- ❶ 错误1 第(1)题只推到了一个方向,事实上只得到了 $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$
- ❷ 错误2 第(2)题第二个等式有如下证明:

任取 $\langle x, y \rangle$ ,

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in (A - B) \times (C - D) \\ \Leftrightarrow & x \in (A - B) \wedge y \in (C - D) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \wedge y \notin D \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \wedge y \notin D) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in (A \times C) \wedge \langle x, y \rangle \notin (B \times D) \\ \Leftrightarrow & \langle x, y \rangle \in (A \times C) - (B \times D) \end{aligned}$$

所以有,  $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) - (B \times D)$



# 具体问题分析

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

综合情况  
具体问题分析

习题

结束语

- 习题七第6题(P130)
  - ❶ 错误1 只给出了  $A \times B$
- 习题七第7题(P130)
  - ❶ 错误1  $L_A$  只给出了小于关系
- 习题七第10题(P131)
  - ❶ 错误1 第(1)题漏了  $\langle 0, 0 \rangle$
- 习题七第16题(P131)
  - ❶ 错误1  $R_1 \circ R_2$  的结果中  $\langle a, d \rangle$  重复出现



# 具体问题分析

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

综合情况  
具体分析

习题

结束语

## ● 证明题

- ①  $=, \subseteq$  是集合运算符, 而  $\Rightarrow, \Leftrightarrow$  是逻辑推理符号,  $\rightarrow, \leftrightarrow$  是命题连接符, 适用于不同的环境形如,  $\{x|P_1(x)\} \Leftrightarrow \{x|P_2(x)\}$  等都是错误的
- ② 量词  $\forall, \exists$  要注意其作用域和语义
- ③ 证明要给出结论才算完成



# 习题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 如何定义有序多元组？





# 习题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 参见习题七第18题，试证明定理7.4的(2)和(4)，并思考量词分配等值式.



# 习题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 参见习题七第17题, 设  $A = \{1, 2, 3\}$ , 求所有  $A$  上的满足  $R^2 = R$  的关系.



# 习题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 运算对关系性质保持之证明.



# 习题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{< 1, 2 >, < 2, 3 >\}$ , 试求R的自反  
对称传递闭包.



# 习题

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

- 将上一题推广到一般情况.



# Q&A

离散数学习题  
课

杨海滨

目录

二元关系知识  
点回顾

作业批改情况  
反馈

习题

结束语

Thanks!