

离散数学习题课

二元关系与函数

杨海滨

南京大学 计算机科学与技术系

2011 年4 月1 日

目录

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

1 知识点回顾

- 等价关系
- 函数

2 作业批改情况反馈

- 综合情况
- 具体问题分析

3 习题

4 结束语

等价关系

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 等价关系

定义

设 R 为非空集合 A 上的关系，若 R 是自反的，对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

等价关系

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 等价关系

定义

设 R 为非空集合 A 上的关系，若 R 是自反的，对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

定义

设 R 为非空集合 A 上的等价关系，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，则称 x 等价于 y ，记作 $x \sim y$ 。

等价关系

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 等价关系

定义

设 R 为非空集合 A 上的关系, 若 R 是自反的, 对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的等价关系。

定义

设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则称 x 等价于 y , 记作 $x \sim y$ 。

● 相关概念

- 等价类
- 商集
- 划分

证明等价关系

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系
函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 证明框架1(定义证明)

† 试证明关系 R 为非空集合 A 上的等价关系.

证明: 要证 R 为 A 上的等价关系, 只需证明 R 满足自反性, 对称性和传递性.

1. 自反性, 即证明 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$

任取 $x \in A$, $\dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R$

所以, R 是自反的.

2. 对称性, 即证明 $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$

任取 $x, y \in A$, $\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

所以, R 是对称的.

3. 传递性, 即证明 $\forall x \forall y \forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$

任取 $x, y, z \in A$, $\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

所以, R 是传递的. 所以, R 是 A 上的等价关系□

证明等价关系

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 证明框架2(定理证明)

† 试证明关系 R 为非空集合 A 上的等价关系.

证明: 要证 R 为 A 上的等价关系, 只需证明 R 满足自反性, 对称性和传递性.

1. 自反性, 即证明 $I_A \subseteq R$

任取 $\langle x, y \rangle \in I_A, \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$

所以, R 是自反的.

2. 对称性, 即证明 $R = R^{-1}$

任取 $\langle x, y \rangle \in R, \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R^{-1}$

所以, R 是对称的.

3. 传递性, 即证明 $R^2 \subseteq R$

任取 $\langle x, y \rangle \in R^2, \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R$

所以, R 是传递的. 所以, R 是 A 上的等价关系. \square

函数

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 函数

定义

设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \text{dom}F$, 都存在唯一的 $y \in \text{ran}F$, 使得 xFy 成立, 则称 F 为一个函数或者映射.

函数

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 函数

定义

设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \text{dom}F$, 都存在唯一的 $y \in \text{ran}F$, 使得 xFy 成立, 则称 F 为一个函数或者映射.

函数是一种特殊的关系

● 函数

定义

设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \text{dom}F$, 都存在唯一的 $y \in \text{ran}F$, 使得 xFy 成立, 则称 F 为一个函数或者映射.

函数是一种特殊的关系

● 相关定义

- $f: A \rightarrow B$
- B^A , 为什么集合的幂集有着相似的形式 $P(A) \equiv 2^A$
- 像
- 完全原像
- 单射
- 满射
- 双射
- 函数的阶, Warshall算法和一般矩阵幂和算法的复杂度的阶?

函数

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 函数也可以视为一个原始的概念

注

在不同的数学流派下，逻辑，集合，函数分别被作为原始概念，用来构建近乎相同的数学大厦。

函数

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 函数也可以视为一个原始的概念

注

在不同的数学流派下，逻辑，集合，函数分别被作为原始概念，用来构建近乎相同的数学大厦.

- 思考

如何用函数来定义逻辑，集合？

函数

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 函数也可以视为一个原始的概念

注

在不同的数学流派下，逻辑，集合，函数分别被作为原始概念，用来构建近乎相同的数学大厦.

- 思考

如何用函数来定义逻辑，集合？

- 特征函数

- 1.集合的特征函数
- 2.谓词的特征函数

证明函数是单射的

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 证明框架(定义证明)

† 试证明函数 $f: A \rightarrow B$ 是单射的

证明: 要证 f 是单射的, 即证明 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in A \wedge x_2 \in A \wedge f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$

任取 $x_1, x_2 \in A$,

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = x_2$

所以, f 是单射的. \square

证明函数是满射的

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 证明框架(定义证明)

† 试证明函数 $f: A \rightarrow B$ 是满射的

证明：要证 f 是单射的，即证明 $\forall y(y \in B \rightarrow \exists x(x \in A \wedge f(x) = y))$

任取 $y \in B$,

$\dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \exists x(x \in A \wedge f(x) = y)$

所以， f 是满射的. \square

证明函数是双射的

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 证明框架(定义证明)

† 试证明函数 $f: A \rightarrow B$ 是双射的
证明：你应该学会了！

函数的运算

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

● 函数的复合

注

函数的复合就是关系的右复合.

函数的运算

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

• 函数的复合

注

函数的复合就是关系的右复合.

• 逆函数

函数的逆不一定是函数!

函数的运算

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

• 函数的复合

注

函数的复合就是关系的右复合.

• 逆函数

函数的逆不一定是函数!

• 函数运算对性质的保持

1. 函数的单射, 满射和双射性质分别被复合运算保持.
2. 双射函数的逆仍然是双射函数.

集合的势与基数

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 集合的势
 - 集合的势定义的是集合之间关于元素多寡的一种关系
 - 通过函数定义

集合的势与基数

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 集合的势
 - 集合的势定义的是集合之间关于元素多寡的一种关系
 - 通过函数定义
- 集合的基数
 - 集合的基数是对集合元素多少的一种度量
 - 通过集合的势来定义

集合的势与基数

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 集合的势
 - 集合的势定义的是集合之间关于元素多寡的一种关系
 - 通过函数定义
- 集合的基数
 - 集合的基数是对集合元素多少的一种度量
 - 通过集合的势来定义
- 有穷集
- 可数（可列）集，包括可数有穷集和可数无穷集

数学的三次危机

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 一切皆可用数来表示的毕达哥拉斯学派

这里的数指的是整数，更严格的说是自然数.

数学的三次危机

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 一切皆可用数来表示的毕达哥拉斯学派

这里的数指的是整数，更严格的说是自然数.

- 无穷的悖论

阿基里斯跑不过乌龟！

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

数学的三次危机

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 一切皆可用数来表示的毕达哥拉斯学派

这里的数指的是整数，更严格的说是自然数.

- 无穷的悖论

阿基里斯跑不过乌龟！

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

- 集合悖论

数学公理化！

数学的三次危机

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

等价关系

函数

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 一切皆可用数来表示的毕达哥拉斯学派

这里的数指的是整数，更严格的说是自然数.

- 无穷的悖论

阿基里斯跑不过乌龟！

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

- 集合悖论

数学公理化！

作业批改情况与主要问题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

综合情况

具体问题分析

习题

结束语

● 作业批改情况

- ① 作业质量较前面有进步
- ② 当简则简，但丢了前提：把问题说清楚！
- ③ 证明题仍然存在一些小问题

● 主要问题

- ① 概念，运算的定义不能善加使用，在证明题上体现尤为明显
- ② 逻辑推理与逻辑连接词“蕴含”混用
- ③ 逻辑公式中的量词的使用比较随意（可以参照教材的简便用法）
- ④ 证明没有到达结论！

具体问题分析

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

综合情况

具体问题分析

习题

结束语

- 习题七第32题(P133)
 - ① 问题1 没有给出判断过程，在并不“易见”的情况下.
 - ② 问题2 第(5)小题的证明，对照前面的证明框架.
- 习题七第37题(P133)
 - ① 问题1 漏掉了一个元素 $\{d\}$
- 习题七第39题(P134)
 - ① 问题1 充要条件的方向搞错了
- 习题七第42题(P134)
 - ① 问题1 同前面一样，没有明确证明的各个小步骤的目标.

具体问题分析

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

综合情况

具体问题分析

习题

结束语

- 习题八第3题(P160)

- ① 问题1 第(4)小题, 部分同学误判为双射

- 习题八第6题(P161)

- ① 问题1 第(5)小题, 有同学误判为非单射, 非满射, 非双射
- ② 问题2 大部分同学都没有回答完全三个问题, 有同学列表来解答, 很好

- 习题八第8题(P161)

- ① 问题1 构造的函数不是 N 到 N 的
- ② 问题2 第(2)题, 构造满射非单射的函数, 很多同学使用了平方, 这样的函数一般不会是满射的.

具体问题分析

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

综合情况
具体分析

习题

结束语

- 习题八第12题(P162)

- ① 问题1 第(1)小题, 这是一个集合表达式, 但部分同学却错误的使用了运算的定义, 如:任取 $x \in A \cap B \dots$

- 习题八第23题(P163)

- ① 问题1 第(2)小题, $\{R\}$
- ② 问题2 第(4)小题, R

- 习题八第24题(P163)

- ① 问题1 第(4)小题, 部分同学构造的函数非双射, 如, 包含取绝对值等操作

具体问题分析

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

综合情况

具体问题分析

习题

结束语

● 习题八第37题(P164)

- ① 问题1 第(4) 小题中 2^2 存在歧义, 理解为2上2, 和2的幂集是不同的.

● 习题八第38题(P164)

- ① 问题1 第(4) 小题, 有同学的结果为2
- ② 问题2 有部分同学没有做第(6) 小题

● 证明题

- ① $=, \subseteq$ 是集合运算符, 而 $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ 是逻辑推理符号, $\rightarrow, \leftrightarrow$ 是命题连接符, 适用于不同的环境形如, $\{x|P_1(x)\} \Leftrightarrow \{x|P_2(x)\}$ 等都是错误的
- ② 量词 \forall, \exists 要注意其作用域和语义
- ③ 证明要给出结论才算完成

习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 设 R 是 A 上的关系，试求关系 R 的等价闭包.

习题

离散数学习题
课

杨海深

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 回忆编程习题要求，设计两个函数，分别根据字符返回其位置，和根据位置返回字符，并分析算法复杂度函数的阶。

习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 参见习题八第39题, 设 A, B 是可数集, 试证明: $A \cup B$ 是可数集.

习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 参见习题八第39题, 设 A, B 是可数集, 试证明: $A \times B$ 是可数集.

习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 试证明代数数是可数的.

习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

- 试用函数构造集合及集合的运算.

Q&A

离散数学习题
课

杨海滨

目录

知识点回顾

作业批改情况
反馈

习题

结束语

Thanks!