2010级计算机《离散数学》期中考试试卷

南京大学计算机科学与技术系

May. 05, 2010

1 集合代数

试给出集合等式$(A-C)\cup B=A\cup B$成立的充分必要条件并证明之.

1 解答:

$$
\begin{aligned}
&(A-C)\cup B=A\cup B\\
\Leftrightarrow\ &(A-C)\cup B=((A-C)\cup(A\cap C))\cup B\\
\Leftrightarrow\ &(A-C)\cup B=((A-C)\cup B)\cup(A\cap C)\\
\Leftrightarrow\ &A\cap C\subseteq(A-C)\cup B\\
\Rightarrow\ &A\cap C\cap C\subseteq((A-C)\cup B)\cap C\\
\Leftrightarrow\ &A\cap C\subseteq B\cap C\\
\Rightarrow\ &A\cap C\subseteq B
\end{aligned}
$$

2 格

试证明: 有界分配格L中所有存在补元的元素之集合构成L的子格.

2 解答: 记有界分配格L为$< L,\vee,\wedge,0,1 >$,其中$0,1$分别表示全下界和全上界，S为L中所有存在补元的元素之集合.要证S为L之子格，只需要证明S为L之非空子集且S关于运算$\vee,\wedge$封闭.

1. $0\vee 1=1,0\wedge 1=0\Rightarrow 0\in S\Rightarrow S$非空.

2. S为L中所有存在补元的元素之集合,显然$S\subseteq L$.

3. 任取$x,y\in S$，x,y必存在补元$x',y'\in L$，所以$x'\wedge y'\in L$. 由分配律有，

$$(x\vee y)\vee(x'\wedge y')=(x\vee y\vee x')\wedge(x\vee y\vee y')=1\vee 1=1$$

$$(x\vee y)\wedge(x'\wedge y')=(x\wedge x'\wedge y')\vee(y\wedge x'\wedge y')=0\wedge 0=0$$

   所以，$x\vee y\in S$，即S关于$\vee$运算封闭.同理可证S关于$\wedge$运算封闭.

所以S为L之子格.证毕.

3 布尔代数

三人裁判小组，A有否决权; 在A不行使否决权时则按简单多数决定结果.试设计该表决器的逻辑电路并简化之.

3

4 集合开放问题

4 解答:

5 置换群

设按升序排列的13张扑克牌(只考虑点值，不考虑花色)

$$A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$$

经2次同样方式的洗牌后，牌的顺序变成

$$6, 10, A, Q, 9, K, J, 7, 4, 8, 3, 2, 5$$

1. 请给出第一次洗牌后的顺序.
2. 按照同样的方式洗牌若干次，能否洗回最初的升序排列?

5 解答:

1. $$\sigma^2 = (1, 6, 13, 5, 9, 4, 12, 2, 10, 8, 7, 11, 3)$$
   $$\sigma = (\sigma^2)^7 = (1, 2, 6, 10, 13, 8, 5, 7, 9, 11, 4, 3, 12)$$
   故,第一次洗牌后顺序为
   $$2, 6, \mathbf{Q}, 3, 7, 10, 9, 5, \mathbf{J}, \mathbf{K}, 4, 1, 8.$$
2. 该洗牌方式为13阶轮换，故按照同样方式洗牌13次即可回到初始状态.

6 集合的基数 设A, B, C为集合,$A \cap B = A \cap C = \emptyset \wedge B \approx C$. 试证明: $A \cup B \approx A \cup C$.

6 解答:

$B \approx C \Rightarrow \exists f : B \to C, f$为双射函数.构造$g : A \cup B \to A \cup C$:

1. **证明g是函数.** $A \cap B = \emptyset$.得证.
2. **证明g是单射函数.** 假设$g(x_1) = g(x_2)$,
   (a) 若$g(x_1) \in C$,则由于$A \cap C = \emptyset, g(x_1) \notin A \Rightarrow f(x_1) = g(x_1) = g(x_2) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$(因为$f$是双射函数.)
   (b) 若$g(x_1) \in A$,则由于$A \cap C = \emptyset$,则$g(x) = x \Rightarrow x_1 = g(x_1) = g(x_2) = x_2$.
3. **证明g是满射函数.**$\forall y \in A \cup C \Rightarrow y \in A \vee y \in C$:
   (a) 若$y \in A$,则$y \in A \cup B \wedge g(y) = y$.
   (b) 若$y \in C$,则$\exists x \in B, f^{-1}(y) = x, \Rightarrow x \in A \cup B \wedge g(x) = g(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$.

7 群论

给定集合S，$P(S)$表示集合S的幂集.

定义$G = \langle P(S), * \rangle$,其中$*$为二元运算，其定义为

$$A * B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

1. 请证明$G = (P(S), *)$构成群.
2. 考虑自然数的幂集，即当$S = N$，解如下方程

$$\{1, 2, 4\} * X = \{3, 4\}$$

7 解答:

1. (a) 运算封闭
   (b) 结合律
   (c) 单位元
   (d) 逆元
2. $\{1,2,4\}^{-1}\oplus\{1,2,4\}\oplus X=\{1,2,4\}^{-1}\oplus\{3,4\}\Rightarrow X=\{1,2,3\}$.

8 等价关系

设σ为一个n阶置换,集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$.在X中，定义关系$\sim$为

$$k\sim l\Leftrightarrow\exists r\in\mathbf{Z},\sigma^r(k)=l.$$

1. 证明: $\sim$是X上的等价关系.
2. 证明: $k\sim l$的充分必要条件是k与l属于σ的同一个轮换.

8 解答:

1. "$\Rightarrow$:"反证法.
2. "$\Leftarrow$:" 记轮换为$\sigma=\{i_1,\cdots,i_s,\cdots,i_t,\cdots,i_r\}$,其中$i_s=k,i_t=l$，则$\sigma^{t-s}(k)=l$.

9 附加题:容斥原理

给定集合$\{1,2,\cdots,2n\}\,(n\in N^+)$($N^+$表示正整数集合)，如果它的某个排列$\pi=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\}$满足条件

$$\exists i\in\{1,2,\cdots,2n-1\}.(|x_i-x_{i+1}|=n),$$

则称该排列具有性质P.

1. 试使用容斥原理给出具有性质P的排列的个数(($可以不给出最简式)).
2. 若已知有关容斥原理的命题1成立，请证明对于任意n，具有性质P的排列的个数比不具有性质P的排列的个数要多。

$$\text{对于有限集合}S_1,S_2,\cdots,S_n,|\cup_{1\le i\le n}S_i|\ge\Sigma_{1\le i\le n}|S_i|-\Sigma_{1\le i<j\le n}|S_i\cap S_j|.\tag{1}$$