



离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

离散数学习题课

绪论与集合代数

杨海滨

南京大学 计算机科学与技术系

2011年3月4日



目录

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

1 数理逻辑知识点回顾

- 认识数理逻辑
- 命题逻辑
- 一阶谓词逻辑

2 集合代数知识点回顾

- 基本概念
- 集合的运算
- 集合恒等式

3 习题

4 思考



数理逻辑

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

● 什么是数理逻辑

数理逻辑是数学的一个分支，其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统。数理逻辑是数学基础的一个不可缺少的组成部分。



数理逻辑

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑
命题逻辑
一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

● 什么是数理逻辑

数理逻辑是数学的一个分支，其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统。数理逻辑是数学基础的一个不可缺少的组成部分。

● 注意

数理逻辑的研究范围是逻辑中可被数学模式化的部分。以前称为符号逻辑（相对于哲学逻辑），又称元数学。

数理逻辑的主要分支包括：模型论、证明论、递归论和公理化集合论。

数理逻辑和计算机科学有许多重合之处，这是因为许多计算机科学的先驱者既是数学家、又是逻辑学家，如阿兰·图灵、邱奇等。程序语言学、语义学的研究从模型论衍生而来，而程序验证中的模型检测则从模型论衍生而来。



命题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑
命题逻辑
一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

● 命题

命题 (*proposition*) 是无法严格定义的，一罗素给出了如下解释：

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式，这种形式所表达的或者为真或者为假。

这段解释事实上包括了两部分，前面部分给出了命题的语法，后面部分是命题的语义解释。课本上给出了一种描述：命题是可判断的真假的的陈述句。这种描述的好处可以用来判断句子是否是命题，却不如罗素的解释深刻。



命题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

● 命题

命题 (*proposition*) 是无法严格定义的, 一罗素给出了如下解释:

“命题”主要是指一些字或者其它符号组合成的一种形式, 这种形式所表达的或者为真或者为假。

这段解释事实上包括了两部分, 前面部分给出了命题的语法, 后面部分是命题的语义解释。课本上给出了一种描述: 命题是可判断的真假的的陈述句。这种描述的好处可以用来判断句子是否是命题, 却不如罗素的解释深刻。

● 例子

$p: 4$. 中 p 是符号, 是语法部分, 假(或者用 0 表示) 为其语义。



命题连接词

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

● 命题连接词

语法定义	语义
p, q 是命题, 则 1) $\neg p$ 是命题, 2) $p \square q$ 是命题, \square 包括 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. 3) 命题仅限于此.	见课本真值表



形式推理与真值推理

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

• 相应的我们有形式推理和真值推理

形式推理	真值推理
$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$	$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
前提: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$	真值表满足:
推理规则: 分离规则	当 $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r$ 为真时,
结论: $p \rightarrow r$	$p \rightarrow r$ 为真



形式推理与真值推理

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 相应的我们有形式推理和真值推理

形式推理	真值推理
$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$	$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
前提: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\}$	真值表满足:
推理规则: 分离规则	当 $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r$ 为真时,
结论: $p \rightarrow r$	$p \rightarrow r$ 为真

- 真值推理的一种特殊形式是等值演算

$$A \Leftrightarrow B \text{ 当且仅当 } A \models B \text{ 且 } B \models A$$



谓词与量词

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 命题逻辑的局限

凡是偶数都能被2整除. 6是偶数, 所以6能被2整除.



谓词与量词

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 命题逻辑的局限

凡是偶数都能被2整除. 6是偶数, 所以6能被2整除.

- 谓词

谓词是用来刻画研究对象或者关系的词, 例如:

$P(x, y) : x$ 能被 y 整除. $Q(x,) : x$ 是偶数.



谓词与量词

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 命题逻辑的局限

凡是偶数都能被2整除. 6是偶数, 所以6能被2整除.

- 谓词

谓词是用来刻画研究对象或者关系的词, 例如:

$P(x, y)$: x 能被 y 整除. $Q(x,)$: x 是偶数.

- 量词

全称量词: \forall means for all.

存在量词: \exists means exists.



谓词与量词

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

认识数理逻辑

命题逻辑

一阶谓词逻辑

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 命题逻辑的局限

凡是偶数都能被2整除. 6是偶数, 所以6能被2整除.

- 谓词

谓词是用来刻画研究对象或者关系的词, 例如:

$P(x, y)$: x 能被 y 整除. $Q(x,)$: x 是偶数.

- 量词

全称量词: \forall means for all.

存在量词: \exists means exists.

- $\{\forall x(Q(x) \rightarrow P(x, 2), Q(6))\} \vdash P(6, 2)$



集合

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

● 集合

集合是不能精确定义的基本概念。但是伟大的康托告诉我们，可以描述它为“吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。”



集合

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

● 集合

集合是不能精确定义的基本概念。但是伟大的康托告诉我们，可以描述它为“吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。”

● 这段话描述了集合的一些基本性质：

- 确定
- 相异
- 无序



集合

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

● 集合

集合是不能精确定义的基本概念。但是伟大的康托告诉我们，可以描述它为“吾人直观或思维之对象，如为相异而确定之物，其总括之全体即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。”

- 这段话描述了集合的一些基本性质：
 - 确定
 - 相异
 - 无序
- 这段话也是集合两种表示方法的基础：
 - 列表法：外延原则 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in y)$
 - 谓词表示法：概括原则 $\forall x(P(x) \leftrightarrow x \in \{x|P(x)\})$



子集，空集，幂集

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

- 子集

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$



子集，空集，幂集

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

- 子集

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 空集

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}$$



子集，空集，幂集

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

- 子集

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 空集

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}$$

- 幂集

$$P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$



集合的运算

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念

集合的运算

集合恒等式

习题

思考

• 交、并

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



集合的运算

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念
集合的运算
集合恒等式

习题

思考

- 交、并

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

- 相对补、对称差、绝对补

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A = E - A$$



集合的运算

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念
集合的运算
集合恒等式

习题

思考

- 交、并

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

- 相对补、对称差、绝对补

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A = E - A$$

- 广义交、广义补

$$\cap A = \{x | \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\} \cup A = \{x | \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$$



集合恒等式

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

基本概念
集合的运算
集合恒等式

习题

思考

幂等率	$A \cup A = A, A \cap A = A$
结合律	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
交换律	$A \cup B = B \cup A$
德摩根律	两个字：对偶



习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 集合与数理逻辑的关系
 $P96 - T4$



习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 集合与数理逻辑的关系
 $P96 - T4$
- 证明方法：恒等式
 $P100 - T33$



习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 集合与数理逻辑的关系
 $P96 - T4$
- 证明方法：恒等式
 $P100 - T33$
- 证明方法：循环证明
 $P100 - T35$



习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 集合与数理逻辑的关系
 $P96 - T4$
- 证明方法：恒等式
 $P100 - T33$
- 证明方法：循环证明
 $P100 - T35$
- 证明方法：概念定义+运算定义
 $P100 - T36$



习题

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 集合与数理逻辑的关系
 $P96 - T4$
- 证明方法：恒等式
 $P100 - T33$
- 证明方法：循环证明
 $P100 - T35$
- 证明方法：概念定义+运算定义
 $P100 - T36$
- 用集合定义自然数集并发现尽可能多的集合关系.



思考

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

- 集合与数理逻辑是如何关联的？
- 命题连接词与集合运算符之间的有无关联？
- 等价命题和集合恒等式之间呢？



Q&A

离散数学习题
课

杨海滨

目录

数理逻辑知识
点回顾

集合代数知识
点回顾

习题

思考

Thanks!