函数逼近 (一)

October 18, 2022

要求：程序应写清注释

一、 内容

导入必要的包

```python
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt

from sympy import *
```

1. 基于伯恩斯坦多项式的魏尔斯特拉斯一致逼近定理数值实例

```python
from scipy.interpolate import BPoly

# BPloy: bernstein polynomial
# Parameters

# c: cndarray, shape (k, m, …)
# Polynomial coefficients, order k and m intervals

# x: xndarray, shape (m+1,)
# Polynomial breakpoints. Must be sorted in either increasing or
    decreasing order.

# 构造逼近 f(x) = sin(\2pi x), x\in [0, 1] 的 Bernstein多项式

x = [0, 1]  # interval
```

```python
n1, n2 = 10, 100   # order

# coefficents
c10 = np.array([np.sin(2 * math.pi * k / n1) for k in range(n1+1)]).reshape(-1, 1)
c100 = np.array([np.sin(2 * math.pi * k / n2) for k in range(n2+1)]).reshape(-1, 1)

# generate bernstein polynomials
bp10 = BPoly(c10, x)  # 10-order
bp100 = BPoly(c100, x)  # 100-order
```

函数逼近可视化

```python
# visualize
# 验证魏尔斯特拉斯逼近定理的结论
xp = np.linspace(0, 1, 100)

# plt.figure()
plt.plot(xp, bp10(xp), 'r--', label='10-order polynomial approximation')
plt.plot(xp, bp100(xp), 'b--', label='100-order polynomial approximation')
plt.plot(xp, np.sin(2 * math.pi * xp), 'k-', label='$sin(2\pi x)$')
plt.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```

2. 符号运算定积分

```python
# 符号函数定积分
# 求定积分用 integrate方法
x = symbols('x')
f = 2 * x
# 参数传入函数，积分变量和范围
result = integrate(f, (x,0,1))
print(result)
```

3. 符号函数求导

```
# 符号函数求导
# 求导使用diff方法
x = symbols('x')
f1 = 2 * x ** 4 + 3 * x + 6
# 参数是函数与变量
f1_ = diff(f1, x)
print(f1_)

f2 = sin(x)
f2_= diff(f2, x)
print(f2_)

# 求偏导
y = symbols('y')
f3 = 2 * x ** 2 + 3 * y ** 4 + 2 * y
# 对x, y分别求导
f3_x = diff(f3, x)
f3_y = diff(f3, y)
print(f3_x)
print(f3_y)
```

4. 求解非线性方程组

```
from scipy.optimize import fsolve

def func(x):
    return [x[0] * np.cos(x[1]) - 4,
            x[1] * x[0] - x[1] - 5]

root = fsolve(func, x0 = [1, 1])  # x0: initial value
print(root)

np.isclose(func(root), [0.0, 0.0])  # func(root) should be almost 0.0.
```

二、 练习

1. 结合符号运算，计算如下函数的线性最佳一致逼近多项式

   (1) $f(x)=(x+1)^3, \quad x\in[0,1]$

   (2) $f(x)=\sqrt{x}, \quad x\in[0,1]$

2. 已知 $p_0(x)=1, p_1(x)=x$，根据勒让德多项式的递推关系，求出勒让德多项式 $p_n(x)$,$n=2,3,\ldots,8$

3. 验证函数 $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin 10x, \cos 10x$ 关于内积 $(f,g)=\int_0^{2\pi} fg dx$ 两两正交.

4. 设 $T_n(x)$ 为 n 次切比雪夫多项式，分别会出 T_7, T_8 的图形并标出所有的零点和极值点.

三、 作业

1. 编写程序对定义在 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x) = sin(2\pi x)$, 近似的计算伯恩斯坦多项式

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

与 $f(x)$ 的偏差 $\epsilon_n = \|B_n(f,x) - f(x)\|_\infty$, 并且绘出偏差 ϵ_n 随 n 变化的图形

2. 计算定义在区间 $[0,1]$ 的函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 的最佳一致逼近多项式为 $p_1(x)$; 求节点 $x_1, x_2 \in (0,1)$, 使得以这两个节点作为插值节点所得到的的插值多项式是 $p_1(x)$.