线性方程组直接解法 (1)

2022 年 9 月 21 日

一、 内容

生成矩阵基本方法

```
import numpy as np

np.zeros([2, 2])  # 元素全零矩阵
np.ones((2, 4))  # 元素全1矩阵
np.eyes(5)     # 单位阵
np.random.rand(3, 3)   # 每个元素服从U[0,1]分布的矩阵
```

生成对角矩阵

```
diag_elem = np.random.rand(5)
np.diag(diag_elem)
np.diag(diag_elem, -1)
np.diag(diag_elem, 1)
```

生成下三角矩阵

```
a = np.array([[1, 2, 3, 4],
              [5, 6, 7, 8],
              [9, 10, 11, 12],
              [13, 4, 15, 16]])

# 获取下三角阵
# k代表对角性起始位置
```

```
np.tril(a)
np.tril(a, k=-1)
np.tril(a, k=1)
```

生成上三角矩阵

```
# 获取上三角阵
# k代表对角性起始位置
np.triu(a)
np.triu(a, k=-1)
np.triu(a, k=1)
```

线性代数

```
# 线性代数
a = np.array([[1, 2, 3],
              [0, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

np.linalg.det(a)  # 求矩阵行列式
np.linalg.matrix_rank(a)   # 求矩阵的秩
np.linalg.inv(a)    # 求方阵的逆
np.linalg.eig(a)  # 返回矩阵的特征值和特征向量
```

求矩阵范数

```
# 求矩阵范数
# 参数ord代表范数种类,默认为2
np.linalg.norm(a)   # 2-范数
np.linalg.norm(a, ord=1)  # 1-范数
np.linalg.norm(a, ord=np.inf)  # 无穷范数
```

求条件数

```python
# 求矩阵条件数
# 参数p代表矩阵范数种类,默认为2
np.linalg.cond(a)
np.linalg.cond(a, p=1)
np.linalg.cond(a, p=np.inf)
```

矩阵分解

```python
## 矩阵分解
from scipy.linalg import lu

a = np.array([[4, 12, -16],
              [12, 37, -43],
              [-16, -43, 98]])

lu(a)    # LU分解
np.linalg.cholesky(a)    # cholesky分解
```

二、 练习

1. 用杜利脱尔分解求解下面的线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. 用杜利脱尔分解求解下面的线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 用乔列斯基分解求解下面的线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. 用乔列斯基分解求解下面的线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

5. 分别用高斯消去法和列主元高斯消去法求解线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

三、 作业

1. 两点边值问题离散方程的解

实验目的: 使用直接法求解线性方程组.

实验内容: 已知离散两点边值问题得到如下线性方程组.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \\ \vdots \\ 100 \end{pmatrix}$$

(1) 编写利用克洛托分解求解上述线性方程组的函数 mycrout，其中 $0 = 200$;

(2) 编写利用平方根法求解上述线性方程组的函数 mysqroot，其中 $n = 200$;

(3) 编写追赶法求解上述线性方程组的函数 mychase，其中 $n = 200$;

(4) 试比较上述三种方法的优劣.

2. 范德蒙德线性方程组的求解

实验目的: 条件数与高斯消去法的稳定性.

实验内容: 考虑范德蒙德线性方程组.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} x_0^i \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_1^i \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_2^i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n} x_n^i \end{pmatrix}$$

其中 $x_k = 1 + 0.1k$，$k = 0, 1, \cdots, n$,

(1) 对 $n = 2, 5, 8$，计算系数矩阵的条件数; 随 n 增大, 矩阵性态如何变化?

(2) 对 $n = 5$，解该方程组; 设系数矩阵的最后一个元素有扰动 10^{-4} , 再求解该方程组;

(3) 计算 (2) 中扰动的相对误差和解的相对偏差, 分析它们与条件数的关系;

(4) 你能由此解释为什么不用插值函数存在定理中的方法直接求插值函数，而要用拉格朗日插值或牛顿插值法吗?

3. 线性方程组的性态与条件数估计

实验目的: 线性方程组的性态、条件数估计.

实验内容:

(1) 构造非奇异矩阵 A 和右端向量 b，使得线性方程组 $Ax=b$ 可以精确求解; 再引入系数矩阵和右端向量的扰动 ΔA 和 Δb，使得 $\|\Delta A\|$ 和 $\|\Delta b\|$ 充分小. 设方程 $Ax=b$ 的解为 x，方程 $(A+\Delta A)\hat{x}=b+\Delta b$ 的解为 $\hat{x}$，以向量 1− 范数，给出 $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|}=\dfrac{\|\hat{x}-x\|}{\|x\|}$ 的计算结果.

(2) 选择一系列维数递增的矩阵 A(可以是随机生成的), 比较函数所所需 np.linalg.cond 所需机器时间的差别. 考虑若干逆是已知的矩阵, 借助函数 np.linalg.eig 给出 $\mathrm{cond}_2(A)$ 的数值, 并将它与函数 np.linalg.cond 所得到的结果进行比较;

(3) 利用函数 np.linalg.cond 给出矩阵 A 条件数的估计，并应用如下结论

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\leq\frac{\mathrm{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

分析 $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ 的理论估计，并与 (1) 给出的计算结果进行比较，分析所得结果. 注意如果给出了 $\mathrm{cond}(A)$ 和 $\|A\|$ 的估计，则容易给出 $\|A^{-1}\|$ 的估计.

(4) 自行构造一个 Hilbert 矩阵，并估计其条件数.