



有限元编程题

已知在区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上, 二维椭圆方程的 Dirichlet 边值问题如下定义:

$$\begin{aligned} -\Delta u + 2u &= 2(\pi^2 + 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

其中真实解 $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. 试完成以下题目:

- (1) 请写出上述问题的变分形式, 以及相应有限元的离散变分形式;
- (2) 选取分片线形连续的有限元空间, 依照 (1) 问中的变分形式计算上述问题的有限元解并与真实解比较. 你需要作出三张二维热力图 (参考 matplotlib 中的 imshow 方法), 分别对应真实解, 有限元解和绝对误差, 以此来验证你的结果;
- (3) 理论上 (2) 中有限元解 \mathcal{L}_2 范数的收敛阶为 $O(h^2)$, 试验证之.