



数值积分 (2)

November 9, 2022

要求：转换成 Jupyter 文档，按自己的期望有条件选做

一、 内容

1. 高维积分，矩形区域。
2. 蒙特卡洛计算积分
3. 积分方程。
4. 函数 `integrate.quad(func, a, b, args, full_output)`
5. 函数 `integrate.dblquad(func, a, b, gfun, hfun, args, epsabs, epsrel)`
6. 函数 `integrate.tplquad(func, a, b, gfun, hfun, qfun, rfun, args, epsabs, epsrel)`



二、 练习

1. 分别取样本数 $n = 100, 1000, 10000$, 用蒙特卡洛方法计算积分

$$(1) \int_0^2 \int_0^1 e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} dx_1 dx_2 \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^3} dx$$

2. 计算如下积分

$$(1) \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(-\sum_{i=1}^2 x_i\right) dx_1 dx_2$$

$$(2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(-\sum_{i=1}^3 x_i\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$(3) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sin\left(-\sum_{i=1}^4 x_i\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

3. 计算如下积分

$$(1) \int_1^2 \int_1^x \sin(x+y) dy dx$$

$$(2) \iint_D (x+y) dx dy, D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$$



三、 作业

1. 蒙特卡洛方法计算积分

实验目的：蒙特卡洛方法

实验内容：分别取样本数 $n = 100, 1000, 10000$ ，用蒙特卡洛方法计算积分

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} dx_1 dx_2$$

2. 积分方程求解

实验目的：利用数值积分构造求解积分方程的数值解法

实验内容：考虑积分方程

$$\int_0^1 (x^2 + s^2)^{\frac{1}{2}} u(s) ds = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - x^3}{3}, x \in [0, 1]$$

按如下步骤求解该积分方程：(1) 将区间 $[0, 1]$ 等距离散： $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ 并设 $u(x_i) \approx u_i, (i = 0, 1, \dots, n)$ 记 $U = (u_0, u_1, \dots, u_n)^T$

(2) 对于每个节 x_1 ，其对应的线性方程可用复合辛普森公式近似替代

$$\int_0^1 (x_i^2 + s^2)^{\frac{1}{2}} u(s) ds = \frac{(x_i^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - x_i^3}{3}, i = 0, 1, \dots, n$$

等号左边的积分项得到。于是，可得到线性方程组 $AU = Y$ ，其中 A 为一个 $n+1$ 阶方阵

(3) 求解该方程组

分别取 $n = 4, 8, 16, 32$ 进行计算，会出相应的数值解图形，并分析系数矩阵 A 的条件数与 n 的关系

3. 高位积分的蒙特卡洛方法

实验目的：高位积分的蒙特卡罗方法

实验内容：对于任意维区域 Ω ，计算其测度的一般方法是：

找一个规则区域 A 包含 Ω ，且 A 的测度是已知的，生成区域 A 中的 m 个均匀分布的随机点 $p_i, i = 1, 2, \dots, m$ ，如果其中有 n 个落在区域 Ω 中，则区域 Ω 的测度等于 $\frac{n}{m}$ 乘以区域 A 的测度。

而函数 $f(x)$ 在区域 Ω 上的积分可用如下公式近似计算：

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx \text{meas}(\Omega) \times \frac{1}{n} \sum_{p_k \in \Omega} f(p_k)$$

其中 $\text{meas}(\Omega)$ 表示区域 Ω 的测度

利用上述方法，计算冰淇淋的体积。假设冰淇淋的下部为一椎体，而上部为一球体，其中锥面为 $z^2 = x^2 + y^2$ ，球面为 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 。区域 A 可选取为立方体

$$A = \{(x, y, z) \in R^3 : x \in [-1, 1], y \in [-1, 1], z \in [0, 2]\}$$