有限元单元分类

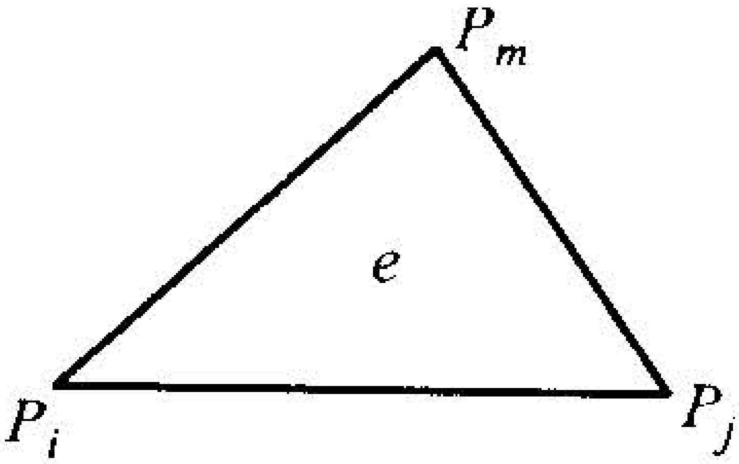
1 线性元

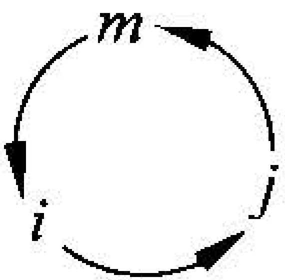
2 高次元

3 等参元

（1）线性元

单元上的线性插值多项式





$$u_h(x,y)=ax+by+c, \quad (x,y)\in e.$$

其中 a,b,c 为待定的常数.

$$u_h(x,y)=ax+by+c, \quad (x,y)\in e.$$

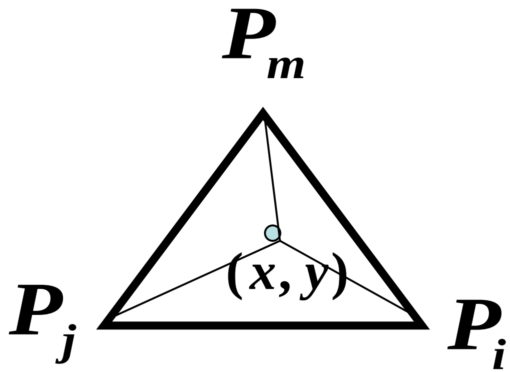
设 $u_h(x,y)$在 P_i,P_j 和 P_m 上的函数值分别为

$$\begin{cases} u_i = u_h(x_i,y_i), \\ u_j = u_h(x_j,y_j), \\ u_m = u_h(x_m,y_m). \end{cases}$$

根据 u_i,u_j 和 u_m 可以定出 a,b,c.

$$\begin{cases} ax_i + by_i + c = u_i, \\ ax_j + by_j + c = u_j, \\ ax_m + by_m + c = u_m. \end{cases} \tag{2.7}$$

(2.7)式是以 a,b,c 为未知数的线性方程组.



单元e的面积

$$\Delta_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} ax_i + by_i + c = u_i \\ ax_j + by_j + c = u_j \\ ax_m + by_m + c = u_m \end{cases}$$

$$u_h(x, y) = ax + by + c \qquad (x, y) \in e_n$$

$$= N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_m(x, y)u_m$$

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix} \qquad N_j(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix}$$

$$N_m(x, y) = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}$$

$$u_h(x,y) = ax + by + c \qquad (x,y) \in e_n$$

$$= N_i(x,y)u_i + N_j(x,y)u_j + N_m(x,y)u_m$$

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2\Delta_e}(a_i x + b_i y + c_i), \ \ N_j(x,y), N_m(x,y)$$

其中
$$\begin{cases} a_i = \begin{vmatrix} y_j & 1 \\ y_m & 1 \end{vmatrix}, \quad a_j = \begin{vmatrix} y_m & 1 \\ y_i & 1 \end{vmatrix}, \quad a_m = \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_j & 1 \end{vmatrix}, \\ b_i = -\begin{vmatrix} x_j & 1 \\ x_m & 1 \end{vmatrix}, \quad b_j = -\begin{vmatrix} x_m & 1 \\ x_i & 1 \end{vmatrix}, \quad b_m = -\begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}, \\ c_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}, \quad c_j = \begin{vmatrix} x_m & y_m \\ x_i & y_i \end{vmatrix}, \quad c_m = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}. \end{cases}$$

$$u_h(x,y) = N_i(x,y)u_i + N_j(x,y)u_j + N_m(x,y)u_m,$$

$$\begin{cases} N_i(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \end{vmatrix}, \\ N_j(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix}, \\ N_m(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta_e}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{N} = [N_i(x,y), N_j(x,y), N_m(x,y)],$$

$$\boldsymbol{u}_e = [u_i, u_j, u_m]^{\mathrm{T}},$$

则在 e 上有

$$u_h = u_h(x,y) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_e,$$

并且 $u_h(x,y)$ 的梯度向量可以表示为

$$\nabla u_h = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_e,$$

$$u_h = u_h(x, y) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_e, \quad \nabla u_h = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_e,$$

其中

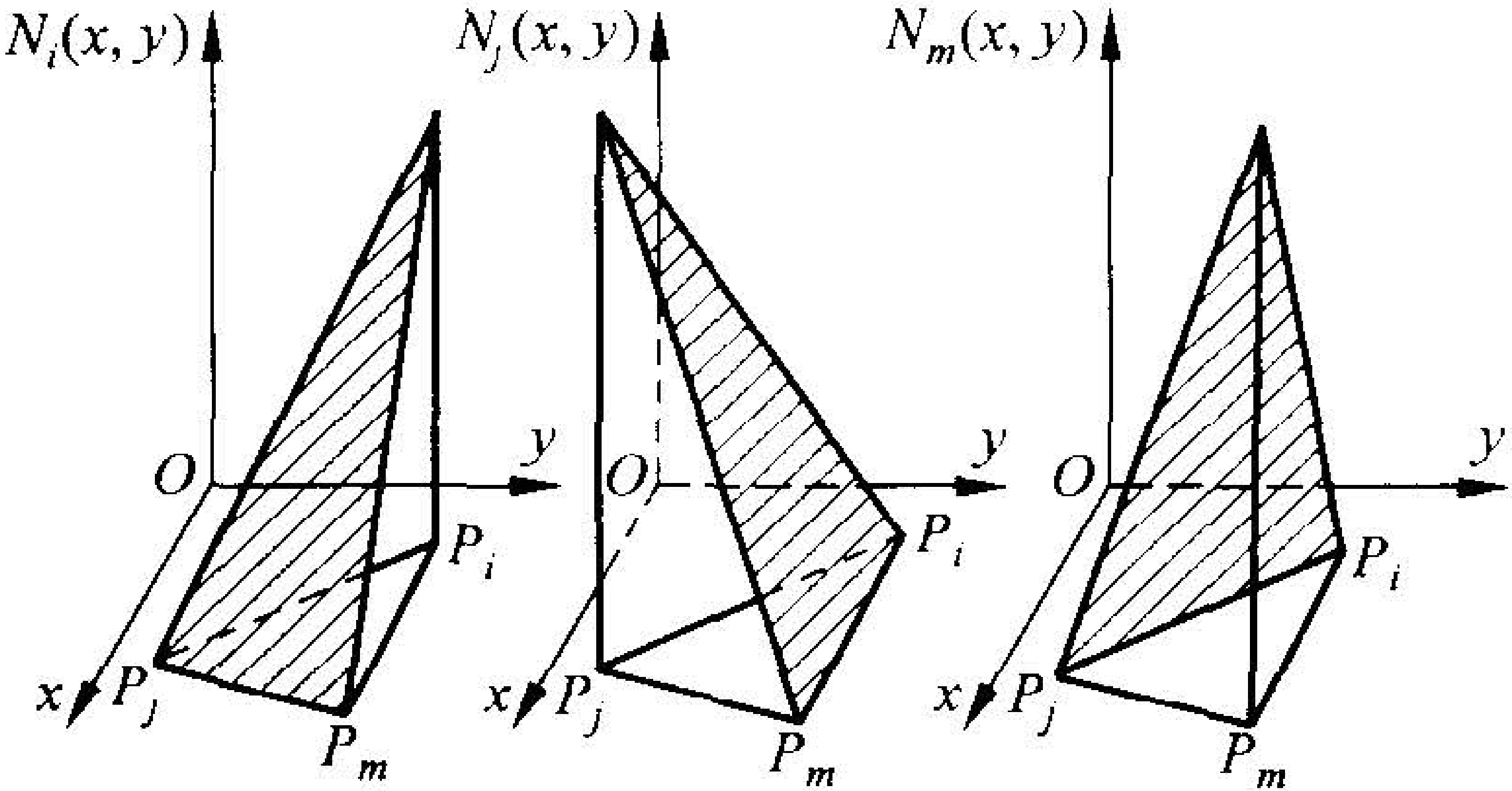
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_m}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \end{bmatrix}.$$

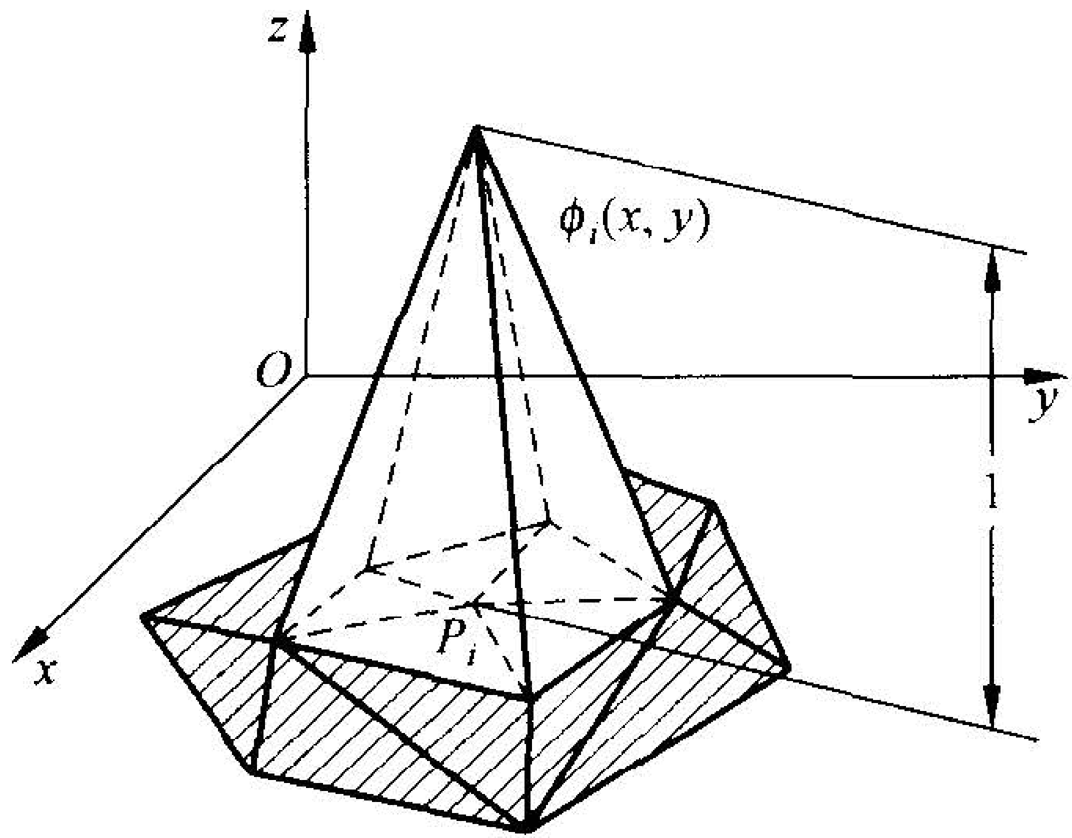
称 $N_i(x, y), N_j(x, y), N_m(x, y)$

为 e 上的线性插值基函数.

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2\Delta_e}(a_i x + b_i y + c_i), \ N_j(x,y), N_m(x,y)$$

$$N_k(x_l, y_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases} \qquad k, l = i, j, m.$$





这种以三角形顶点为插值节点的三角形称为 Courant 三角形 (1943 年). 每个单元三角形顶点处参数决定的分片一次函数是 C^0 元, 因此对二阶问题而言是协调的, 亦称为协调膜元.

（2）高次元

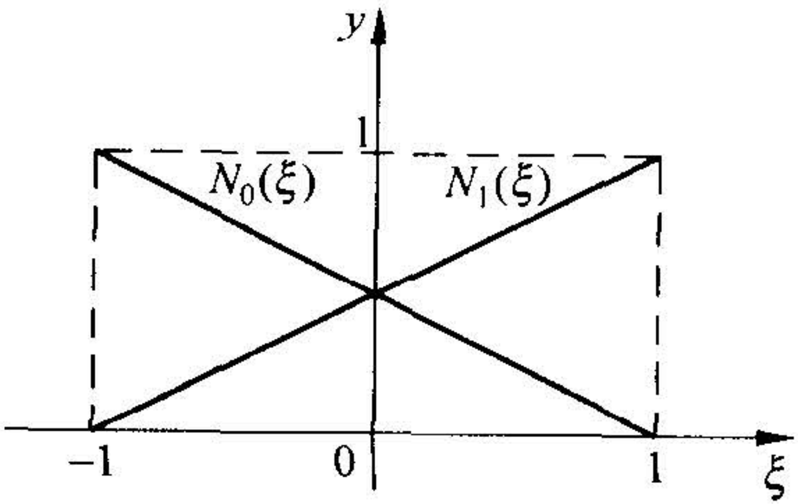
一维问题的高次插值

将前面的方法推广到一般情形，讨论如何构造通过 $n+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 的 n 次插值多项式 $L_n(x)$.

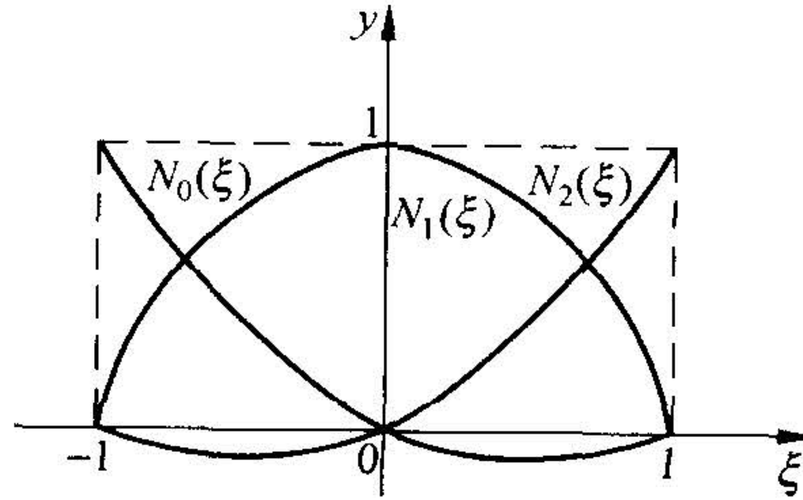
满足 $L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n).$

则
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$



$L_1(x)$ 的基函数



$L_2(x)$ 的基函数

基函数的形状

在每个单元 $e_i=[x_{i-1},x_i]$ 上讨论插值问题

$$\xi_i=\frac{2}{h_i}\left(x-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),$$

其中 $h_i=x_i-x_{i-1}$ 为 e_i 的长度.

把每个单元 e_i 都变换到一个标准的区间 $[-1,1]$

$[-1,1]$ 上的三个节点是 $\xi_0=-1,\xi_1=0,\xi_2=1$,

$$N_0(\xi)=\frac{1}{2}\xi(\xi-1),\quad N_1(\xi)=1-\xi^2,\quad N_2(\xi)=\frac{1}{2}\xi(\xi+1),$$

在 $[-1,1]$ 上的二次插值函数 $u_h(\xi)$ 可写成

$$u_h(\xi)=u_0N_0(\xi)+u_1N_1(\xi)+u_2N_2(\xi),$$

其中 u_0,u_1,u_2 分别是 $u_h(\xi)$ 在 $\xi=-1,0,1$ 上的值.

在$[-1,1]$上的二次插值函数 $u_h(\xi)$可写成

$$u_h(\xi) = u_0 N_0(\xi) + u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi),$$

其中 u_0, u_1, u_2 分别是 $u_h(\xi)$在 $\xi = -1, 0, 1$ 上的值.

$$\boldsymbol{u}_e = [u_0, u_1, u_2]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{N} = [N_0(\xi), N_1(\xi), N_2(\xi)],$$

$$u_h(\xi) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{u}_e, \quad \xi \in [-1,1].$$

二维问题三角形元的高次插值

我们在上一节已经讨论过三角形元上的线性插值

用到的一次多项式 $ax+by+c$

三个系数，可通过三个节点上的函数值来确定.

要提高逼近的准确度，可以考虑 高次插值.

两个变量 x,y 的高次多项式

		1			0 次项
	x		y		1 次项
	x^2	xy	y^2		2 次项
x^3	x^2y		xy^2	y^3	3 次项
x^4	x^3y	x^2y^2	xy^3	y^4	4 次项
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		

一次多项式有 3 项，二次多项式有 6 项，三次多项式有 10 项

一般的 k 次完全多项式有 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 项.

所以 Lagrange 插值需要有 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 个节点来确定各项系数.

还要考虑到在相邻的两个单元的共同边界上，

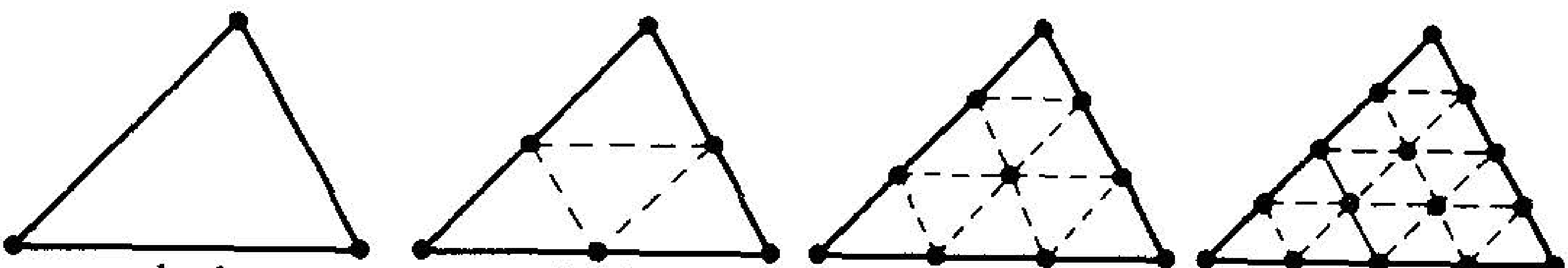
函数应该是连续的.

把三角形的三条边都平分为 k 份，

用平行三边的线段把对应的分点连起来

交点 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 个

把它们作为单元上的节点



$k=1$ 3节点　$k=2$ 6点节　$k=3$ 10节点　$k=4$ 15节点

两个三角形元上都如上作 k 次插值

则在共同边界上可以变换为以边界弧长 s

为参数的 k 次多项式. 这个 s 的 k 次多项式

由共同边界上的 $k+1$ 个节点上的函数值

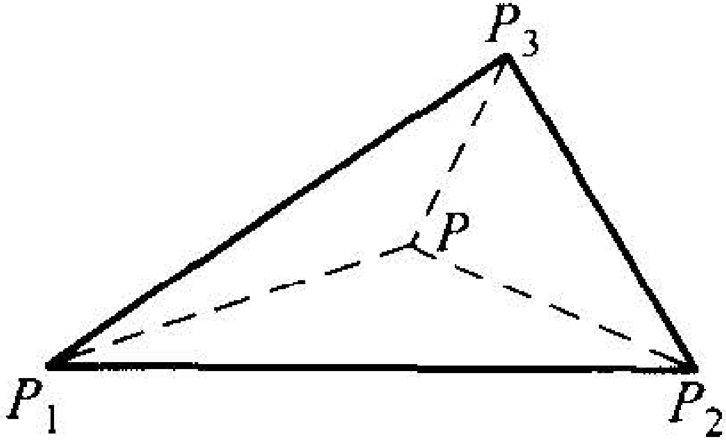
完全确定，所以相邻的两个三角

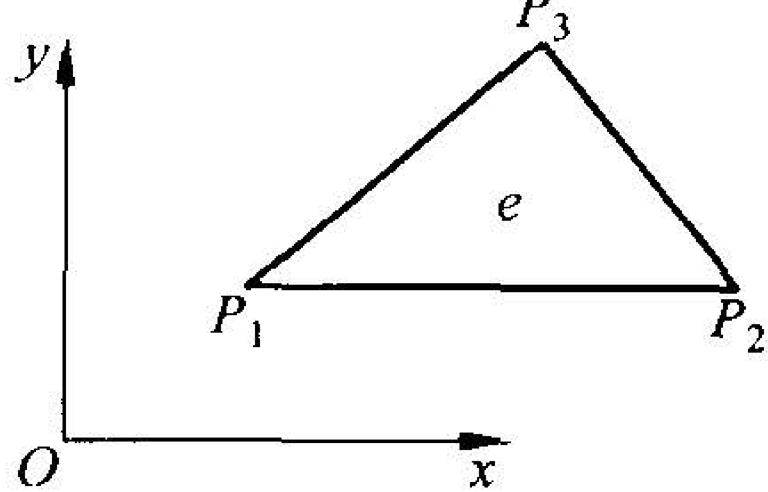
形元在共同边界上的插值函数是完全相同的.

⇨ 分片 k 次插值，插值函数在 Ω 上是连续的

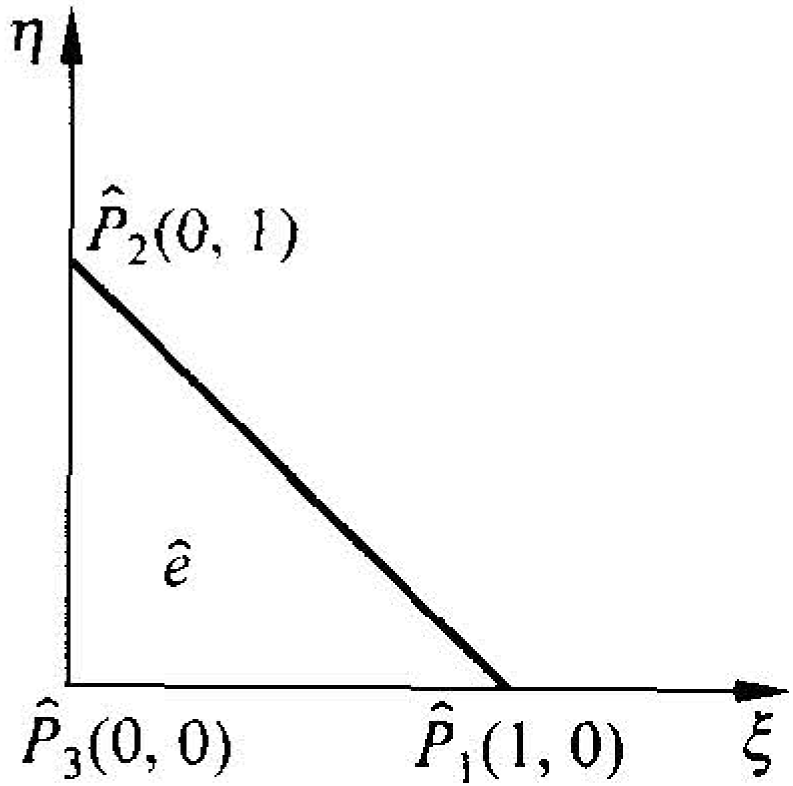
即 $u \in C(\bar{\Omega})$.

线性插值





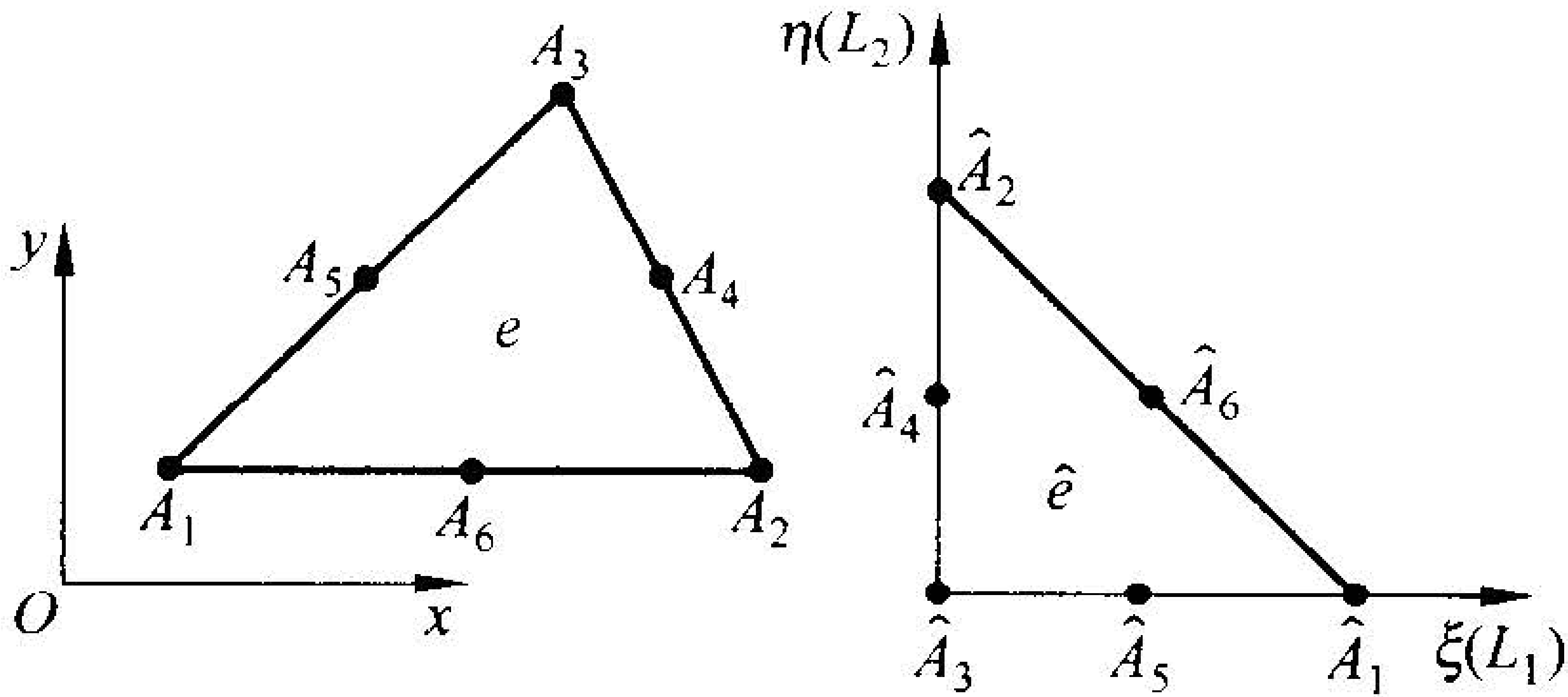
$$\begin{cases} x=(x_1-x_3)\xi+(x_2-x_3)\eta+x_3 \\ y=(y_1-y_3)\xi+(y_2-y_3)\eta+y_3 \end{cases}$$



二次插值

作三角形上的二次插值需要 6 个节点，

取为 e 的三个顶点和三边中点，



e上各节点的面积坐标(L_1, L_2, L_3)分别为

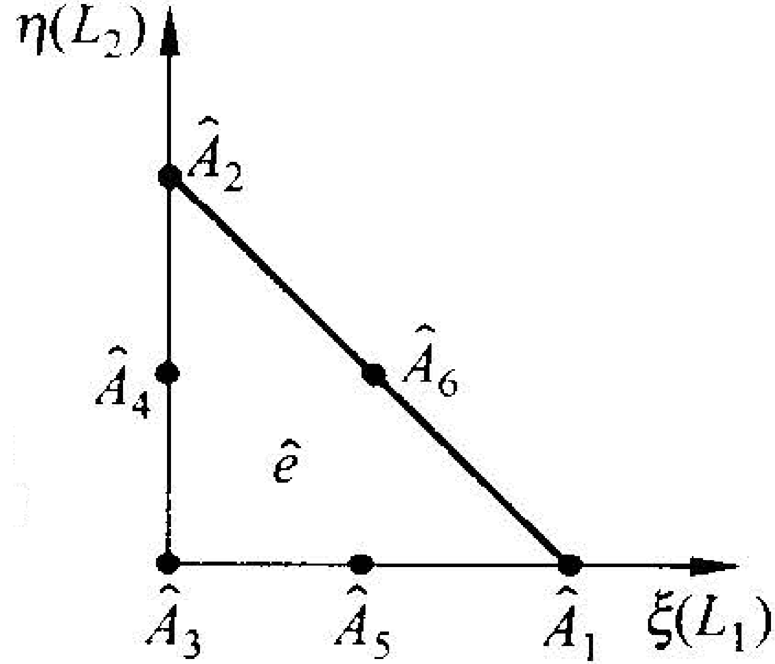
$A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1),$

$A_4\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), A_5\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right), A_6\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

在$\hat{e}$上作出6个二次插值基函数

$N_i(\xi,\eta), i=1,\cdots,6$，它们是$\xi,\eta$的二次式

$$N_i(A_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases} \qquad i,j=1,2,\cdots,6.$$



N_1 应在过 $\hat{A}_2$,$\hat{A}_4$ 和 $\hat{A}_3$ 的直线 $L_1=0$ 上应为零

在过 $\hat{A}_6$ 和 $\hat{A}_5$ 的直线 $L_1=\frac{1}{2}$ 上也为零,

所以可设二次式 $N_1=cL_1\left(L_1-\frac{1}{2}\right)$,

再用 $N_1(\hat{A}_1)=1$ 定常数 c,得到 $c=2$.

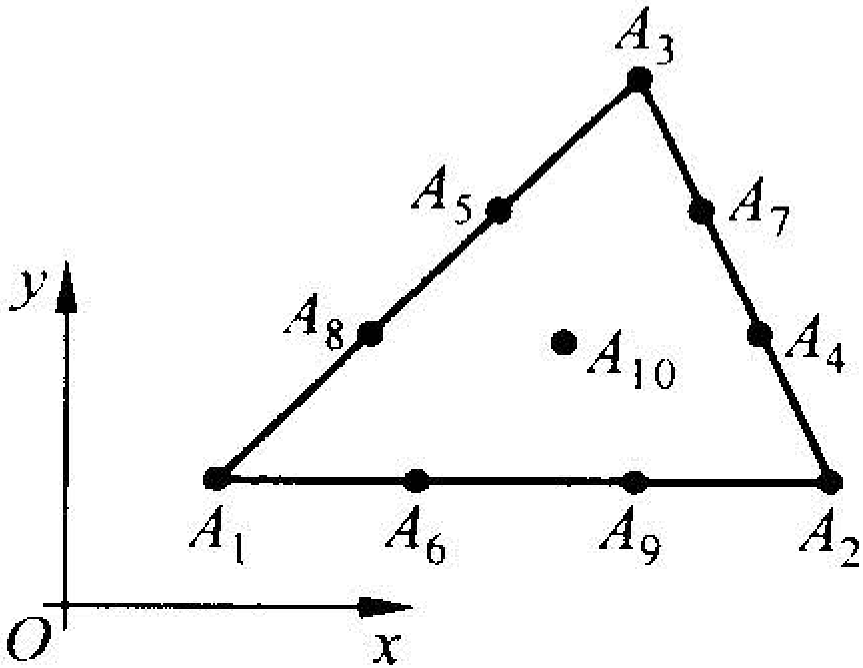
同理可定出 N_2 至 N_6，

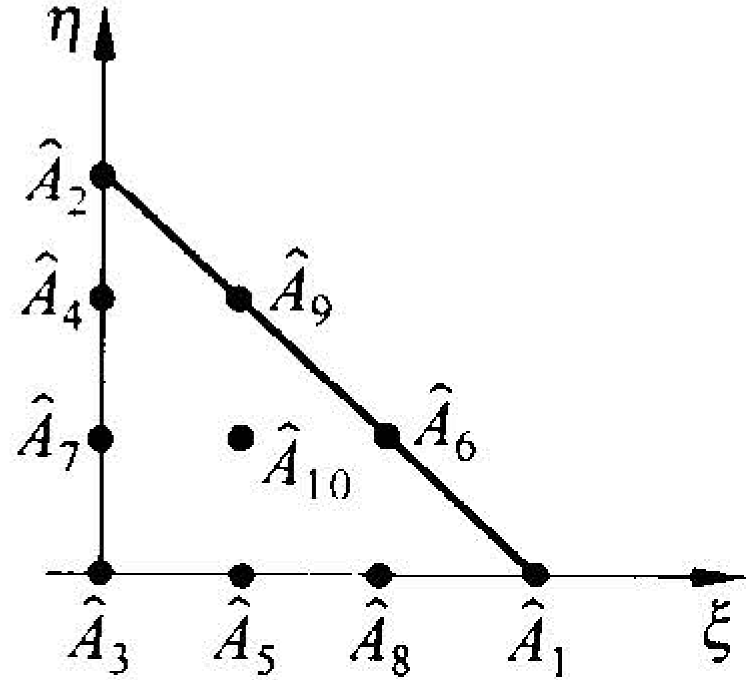
$$N_1 = L_1(2L_1 - 1),$$
$$N_2 = L_2(2L_2 - 1),$$
$$N_3 = L_3(2L_3 - 1),$$
$$N_4 = 4L_2L_3,$$
$$N_5 = 4L_3L_1,$$
$$N_6 = 4L_1L_2.$$

如果插值函数 u_h 在节点上的值为 u_i $(i=1,2,\cdots,6)$，则有

$$u_h = \sum_{i=1}^{6} u_i N_i.$$

三次插值





$$N_i = \frac{L_i}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2), \quad i = 1,2,3,$$

$$N_4 = \frac{9}{2}L_2 L_3 (3L_2 - 1),$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_3 - 1),$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1),$$

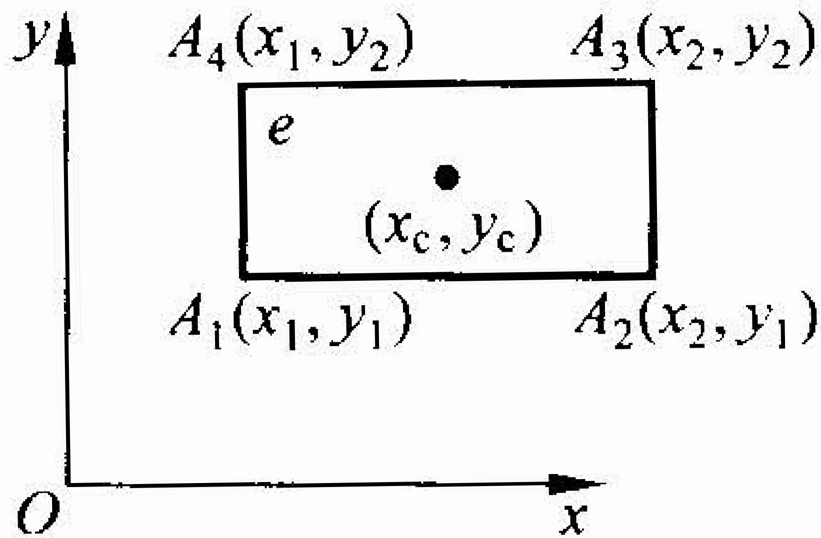
$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1),$$

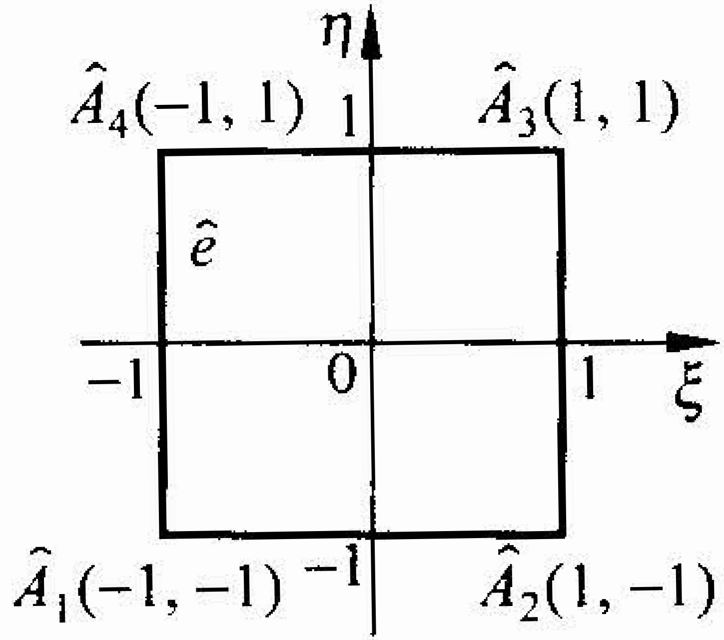
$$N_8 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1),$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1),$$

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3.$$

二维问题的矩形元





$$\xi = \frac{2(x - x_c)}{x_2 - x_1}, \quad \eta = \frac{2(y - y_c)}{y_2 - y_1}.$$

其中(x_c, y_c)为矩形的形心

双线性插值式共有四项，即

$$u_h(x,y) = a + bx + cy + dxy.$$

当 x 固定时，它是 y 的一次多项式，

当 y 固定时，它是 x 的一次多项式.

可以令矩形的四个顶点为插值点，

以插值点上 $u_h(x,y)$ 的函数值为插值条件

确定四个系数.

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \\ N_2 = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3 = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ N_4 = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \quad i = 1,2,3,4.$$

不难验证

$$N_i(\hat{A}_j) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3,4.$$

记 A_i 上插值函数 $u_h(x,y)$ 的值为 u_i $(i=1,2,3,4)$，则在矩形单元 e 上有

$$u_h(x,y)=\sum_{i=1}^{4}u_iN_i.$$

由于在每个矩形元的边界上，$u_h(x,y)$ 是 x 或 y 的一次函数，它由此边界上两节点的函数值惟一确定. 因此，分片双线性插值函数在相邻两个元的共同边界上是连续的，

$$u_h\in C(\overline{\Omega}).$$

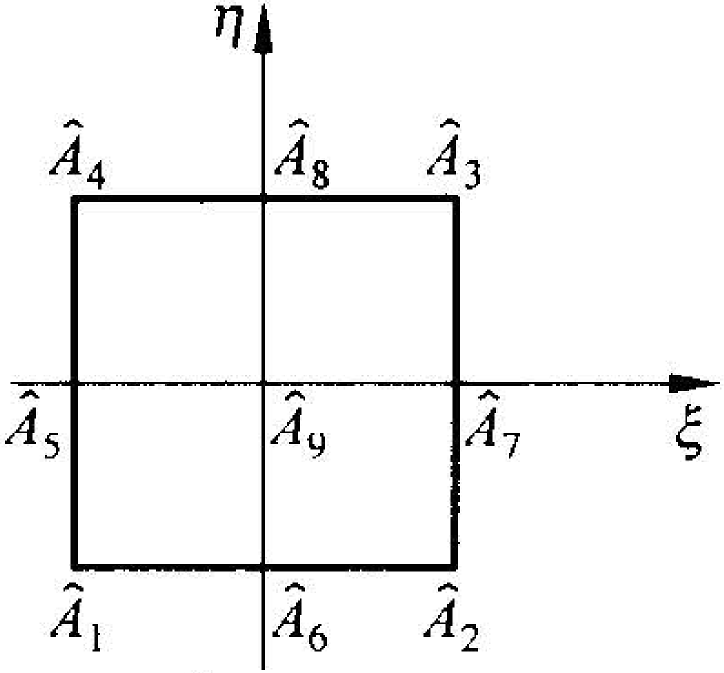
双二次插值

双二次插值函数共有 9 项

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \\ x & xy & xy^2 \\ x^2 & x^2y & x^2y^2 \end{bmatrix}$$

一般的双二次插值函数可写成这 9 项的线性组合

$$N_i(\hat{A}_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, 9.$$



$$N_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1), \quad N_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(\eta - 1),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi + 1)(\eta + 1), \quad N_4 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta + 1),$$

$$N_5 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2), \quad N_6 = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1)(1 - \xi^2),$$

$$N_7 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)(1 - \eta^2), \quad N_8 = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1)(1 - \xi^2),$$

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2).$$

不完全的双二次插值

在标准矩形元去掉内部节点 $\hat{A}_9$

对应在双二次插值式的 9 项中去掉 x^2y^2 项

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta),$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta),$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta),$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta),$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi),$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi),$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta).$$

完全的和不完全的双二次插值对二次多项式函数都是准确的.

Hermite 插值

可以在矩形 e 的四个顶点 A_1，A_2，A_3 和 A_4 分别给定函数值，两个一阶偏导数值和二阶混合偏导数值，共 16 个条件，确定一个双三次完全多项式的 16 个系数.

分片 Hermite 插值有 $C^1(\bar{\Omega})$ 连续性

基函数可以通过一维 Hermite 插值基函数的乘积得到

Adini 单元

考虑不完全的双三次多项式插值，

在 A_1 ,A_2 ,A_3 和 A_4 分别去掉二阶混合

偏导数的条件，对应去掉双三次式中

x^3y^3 ,x^2y^3 ,x^3y^2 和 x^2y^2 项

单元的边界上法向导数是间断的，但仍属 $C(\bar{\Omega})$.

T 为矩形单元,

$$P_T = P_3(T) \oplus [x_1^3x_2, x_1x_2^3],$$

$$\Sigma_T = \{p(a_i), \partial_j p(a_i),\ 1 \le i \le 4, j = 1,2\}.$$

T 为矩形单元,

$P_T = P_3(T) \oplus [x_1^3 x_2, x_1 x_2^3]$,

$\Sigma_T = \{p(a_i), \partial_j p(a_i),\ 1 \le i \le 4, j = 1, 2\}$.

注:

有限元空间 X_h 由一个三元组 (T, P, Σ) 确定.

$T \in \mathcal{J}_h$ 是单元; P 是定义在 T 上的给定类型,

给定次数的多项式空间; Σ 是唯一地确定 T

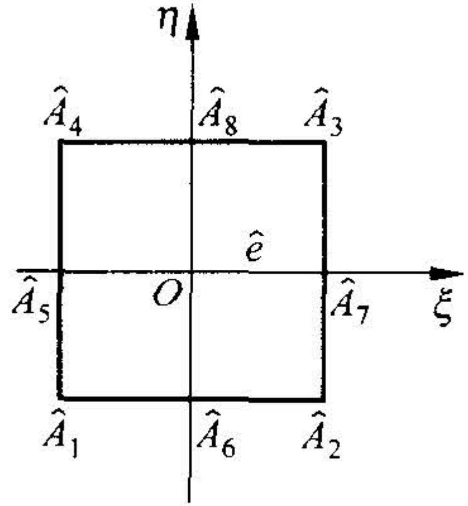
上插值多项式 $p \in P$ 的插值数据.

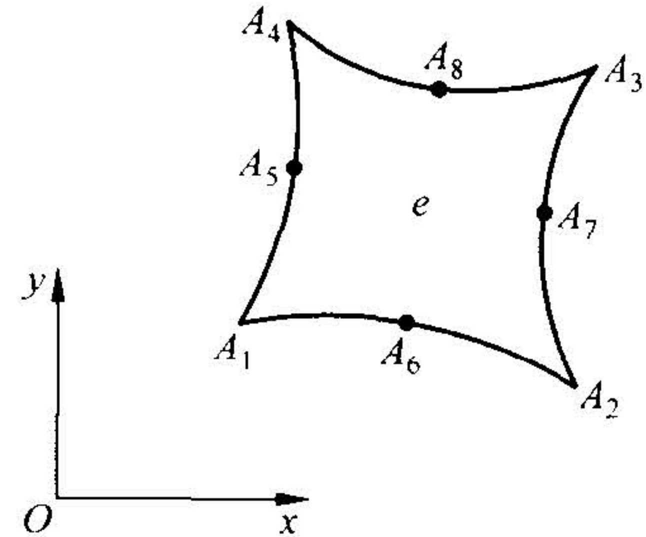
等参数单元的概念

对于任意区域 Ω 来说，不论是三角形剖分还是矩形剖分，都需要用直线段代替 Ω 的曲线边界来得到 Ω 的近似区域，

有时人们会不满意这种近似. 如果采用曲线边界的单元，会得到 Ω 更好的近似区域.

基于以上考虑，下面引入**等参数单元**的概念.





注：$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta), \\ y = y(\xi,\eta), \end{cases}$$

要求变换是可逆的

也就是要求它的 Jacobi 行列式

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| \neq 0.$$

插值函数式

$$u_h = \sum_{i=1}^{4} u_i N_i(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \hat{e}$$

和坐标变换式

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{4} x_i N_i(\xi,\eta), \\ y = \sum_{i=1}^{4} y_i N_i(\xi,\eta). \end{cases}$$

的形式是相同的，

它们都以节点的值为参数，参数的数目是相同的，采用的基函数也相同，

具有这种形式的单元称为**等参数单元**

课堂练习

1. 请确定线性变换使得区间[a,b]化为[-1,1]。
2. 请构造如下单元的基函数，其中节点为各边中点，自由度为节点函数值。