线性方程组直接解法 (2)

September 21, 2022

一 内容

1 稀疏数组

导入一些必要的包

```python
import numpy as np
from scipy.sparse import coo_matrix
```

构建稀疏矩阵

```python
# row和col代表稀疏矩阵元素的行和列指标对应的向量
# data代表稀疏矩阵对应的存储元素
row  = np.array([0, 3, 1, 0])
col  = np.array([0, 3, 1, 2])
data = np.array([4, 5, 7, 9])
coo = coo_matrix((data, (row, col)), shape=(4, 4), dtype=np.int)

# 输出完整矩阵
print(coo.toarray())
print(coo.todense())
```

2 矩阵分解

QR 分解

```python
A = np.array([[2, -2, 3],
              [1, 1, 1],
```

```python
                [1, 3, -1]])
# QR分解
Q, R = np.linalg.qr(A)

# Q是正交矩阵, R是上三角矩阵
print(Q)
print(R)
```

奇异值分解

```python
#  奇异值分解
U, S, V_H = np.linalg.svd(A)

# U,V_H分别为左右西矩阵
# S为奇异值向量
print(U)
print(diag(S))
print(V_H)
```

二　练习

1. 编写函数 MatPermutation(i, j)，生成如下置换阵

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} i \cdot j.$$

2. 编写函数 MatGivens(i, j, θ)，生成如下 Givens 矩阵

$$G(i, j, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} i \cdot j.$$

3. 编写函数 MatHouseholder(w)，生成如下反射矩阵

$$P = I - 2ww^T$$

4. 编写函数实现第 1 题和第 2 题中函数的稀疏数组版本，即 spMatPermutation(i, j)，spMatGivens(i, j, θ).

三 作业

1. 正交矩阵判断

实验目的: 正交矩阵的判断.

实验内容: 编写程序判断矩阵是否为正交矩阵.

2. 用 Givens 变换化上海森伯格矩阵为上三角阵

实验目的:Givens 变换.

实验内容: 用 Givens 变换把上海森伯格矩阵.

$$\begin{pmatrix} 15 & 4 & 7 & 0 & 6 \\ 12 & 3 & 0 & 24 & 9 \\ 0 & 24 & 81 & 39 & 40 \\ 0 & 0 & 32 & 21 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

化为上三角矩阵

3. 正交三角分解

实验目的: 正交三角分解.

实验内容: 利用施密特正交化过程进行正交三角分解.

该算法如下:

step1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 阶非奇异矩阵 A 的列向量.

step2. 利用施密特正交化过程可得到:

$$b_1 = a_1, \quad e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$$

$$b_2 = a_2 - [a_2, e_1]e_1, \quad e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$$

$$b_n = a_n - [a_n, e_1]e_1 - [a_n, e_2]e_2 - \cdots - [a_n, e_{n-1}]e_{n-1}, \quad e_n = \frac{b_n}{\|b_n\|}$$

即

$$a_1 = b_1 = \|b_1\|e_1$$

$$a_2 = b_2 + [a_2, e_1]e_1 = [a_2, e_1]e_1 + \|b_2\|e_2$$

$$a_n = b_n + [a_n, e_1]e_1 + [a_n, e_2]e_2 + \cdots + [a_n, e_{n-1}]e_{n-1} = [a_n, e_1]e_1 + [a_n, e_2]e_2 + \cdots + [a_n, e_{n-1}]e_{n-1}e_{n-1} + \|b_n\|e_n$$

step3. 于是，则有

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}\|b_1\| & [a_2,e_1] & \cdots & [a_n,e_1]\\ & \|b_2\| & \cdots & [a_n,e_2]\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \|b_n\|\end{pmatrix}:=QR$$