5.1.a Induktionsbeweis

Behauptung: $\forall n \geq 1$: $\text{hokuspokus}(n) = 3^n - 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 3^i$

Induktionsanfang: $n = 1$ (Aufgrund des Definitionsbereichs für n)

l.S. $3^1 - 4 \cdot 0 = 3$ ✓

R.S. $2 \cdot 1 + 1 = 3$ ✓

Induktionsanfang: $n = 2$ (Aufgrund des Basisfalls)

l.S. $3^2 - 4 \cdot 3^0 = 5$ ✓

R.S. $2 \cdot 2 + 1 = 5$ ✓

Induktionsvorraussetzung:

Für zwei n gilt: $\text{hokuspokus}(n) = 3^n - 4 \sum_{i=0}^{n-2} 3^i$

Induktionsschritt:

z.z.: $n \to n+2$ Ziel: $\text{hokuspokus}(n+2) = 3^{n+2} - 4 \sum_{i=0}^{n} 3^i$

$$\text{hokuspokus}(n+2) = 9 \cdot \text{hokuspokus}(n) - 16 = 9\left(3^n - 4 \sum_{i=0}^{n-2} 3^i\right) - 16$$

$$= 3^2 \cdot 3^n - 4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-2} 3^i \cdot 3^2\right) - 16 = 3^{n+2} - 4\left(\sum_{i=0}^{n-2} 3^{i+2}\right) - 16$$

$$= 3^{n+2} - 4\left(\sum_{i=2}^{n-2+2} 3^i\right) - 16 = 3^{n+2} - 4\left(\sum_{i=0}^{n} 3^i - \sum_{i=0}^{1} 3^i\right) - 16$$

$$= 3^{n+2} - 4\left(\sum_{i=0}^{n} 3^i - 3^0 + 3^1\right) - 16 = 3^{n+2} - 4\left(\sum_{i=0}^{n} 3^i - 4\right) - 16$$

$$= 3^{n+2} - 4\left(\sum_{i=0}^{n} 3^i\right) + \cancel{16} - \cancel{16} = 3^{n+2} - 4 \sum_{i=0}^{n} 3^i \quad \square$$

5.1.6 Terminierungsfunktion

$t(n) = n \quad ; \quad n \geq 1 \; ; \; n \in \mathbb{N}$

- $t(n)$ ist streng monoton fallend da bei der Rekursion n kleiner wird (und zwar um $n-2$).

- $t(n)$ ist nach unten begrenzt, da es ab $n \leq 2$ keine weitere Rekursion gibt.