Comptage de triplets commutants dans les groupes de matrices

Journée du LAMFA 6 juin 2025.

travail en commun avec T. Kinjo (RIMS, Kyoto)

Groupes de matrices

A_{n-1}

$GL_n(\mathbb{C})$ = matrices $n \times n$ inversibles

$\cup$

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{ M \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1 \}$$

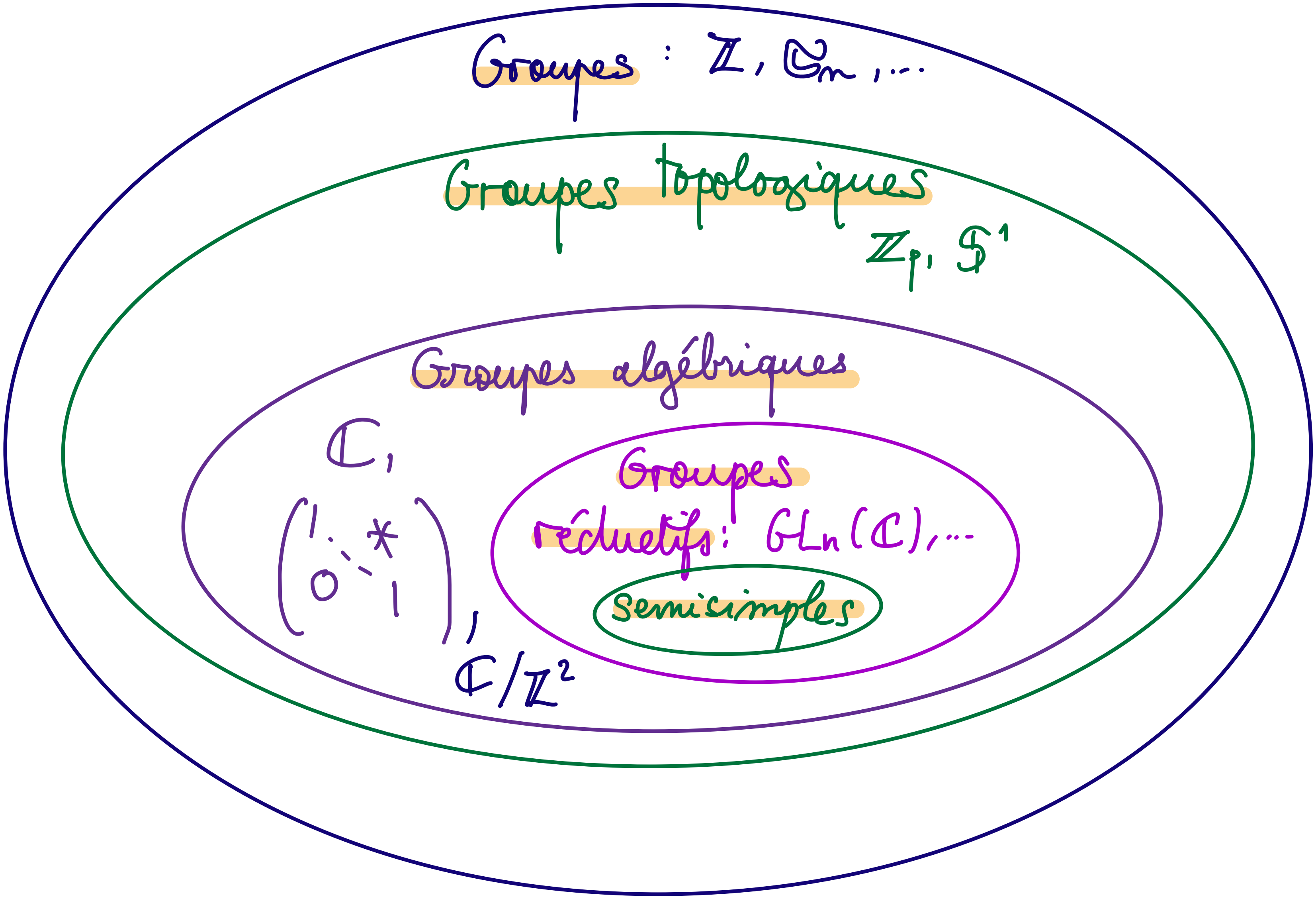
$\twoheaddownarrow$

$$PGL_n(\mathbb{C}) = SL_n(\mathbb{C}) / \mu_n \quad ; \quad \mu_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$$

groupes : $\begin{cases} G \times G \longrightarrow G \\ e \in G \text{ élément neutre} \end{cases}$ + axiomes

+

variétés algébriques : $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ est défini par des **équations polynomiales**.



Groupes : $\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, ...
Groupes topologiques
$\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{S}^1$
Groupes algébriques
$\mathbb{C}$,
$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$,
$\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$
Groupes réductifs : $GL_n(\mathbb{C})$, ...
Semisimples

Groupes orthogonaux

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$$ matrice symétrique

$$O(n) = \{ M \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^tMJM = J \}$$ groupe orthogonal

$$\cup$$

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n)$$

2 familles $\to$ $SO(2n)$ D_n ; $SO(2n+1)$ B_n

$$\dim_{\mathbb{C}} SO(m) = \frac{m(m-1)}{2}$$

Groupes symplectiques

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & 1 \\ & & & & \iddots & \\ & & & 1 & & \\ \hline & & -1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ -1 & & & & & \end{array}\right] \in GL_{2n}(\mathbb{C})$$

matrice antisymétrique

C_n $$Sp(2n) = \{ M \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^tMJM = J \}$$

exercice : $M \in Sp(2n) \Rightarrow \det(M) = 1$.

$$\dim_{\mathbb{C}} Sp(2n) = n(2n+1)$$

$$Z(Sp(2n)) = \{\pm I_{2n}\}$$

$$\pi_1(Sp(2n)) \cong \{1\}$$

Classification des groupes algébriques simples

A_n	$SL(n+1)$	$\longleftrightarrow$	$PGL(n+1)$
B_n	$Spin(2n+1)$		$SO(2n+1)$
C_n	$Sp(2n)$		$PSp(2n) = Sp(2n)/(\pm I_{2n})$
D_n	$Spin(2n)$	$SO(2n)$	$PSO(2n)$
E_6	E_6^{sc}	$\longleftrightarrow$	E_6^{ad}
E_7	E_7^{sc}	$\longleftrightarrow$	E_7^{ad}
E_8			
F_4			
G_2			

E_8, F_4, G_2 : simplement connexe & centre trivial

groupes exceptionnels

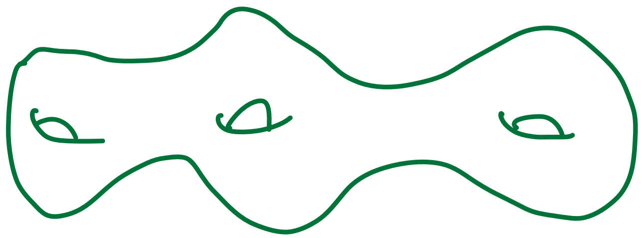
$\boxed{\longleftrightarrow \text{ : dualité de Langlands}}$

Variétés différentielles compactes de dimension 3

- $\mathbb{S}^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \right\}$

- $S \times \mathbb{S}^1$ exemple : $(\mathbb{S}^1)^3 = \mathbb{T}^3$

  surface

  $S =$ 

- $\mathbb{RP}^3 \cong \mathbb{S}^3 / \{\pm 1\}$

- produits connexes de variétés de dim 3

  ex. $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3 \# \dots \# \mathbb{RP}^3$.

Groupe fondamental

(X, x) espace topologique pointé

$\pi_1(X, x) = \{\text{lacets partant de } x\} / \text{homotopie}$

- $\pi_1(*) = \{e\}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ si $n > 1$
- $\pi_1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{Z}^3$
- $\pi_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\pi_1(\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3 \# \dots \# \mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 * \dots * \mathbb{Z}/2$

Représentations du groupe fondamental

X espace topologique

$\pi_1(X) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ rep. de $\pi_1(X)$ de dim n

"système local"

Raffinement $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow G$ pour G un groupe réductif.

ρ_1, ρ_2 $\begin{cases} \text{"conjuguées"} \\ \text{"isomorphe"} \end{cases}$ si il existe $g \in G$ tel que

$\rho_1 = g \rho_2 g^{-1}$.

$\rightarrow$ relation d'équivalence sur $\{\pi_1(X) \to G\}$.

Champ des représentations du groupe fondamental

variété algébrique $\mathrm{Loc}_G(M)$ paramétrant les morphismes $\pi_1(M) \longrightarrow G$.

<u>Construction</u> : $\pi_1(M) = \langle \underbrace{a_i\,,\ i\in I}_{\text{générateurs}} \mid \underbrace{r_j(a_i, i\in I),\ j \in J}_{\text{relations}} \rangle$

$$\mathrm{Loc}_G(M) = \left\{ (g_i)_i \in G^I \;\middle|\; r_j(g_i, i \in I) = 1_G \right\}$$

$$\circlearrowright G \ : \ g \cdot (g_i)_{i\in I} = (g g_i g^{-1})_{i \in I}.$$

Conjecture de dualité de Langlands

Conjecture : M^3 variété compacte de dimension 3.
[Safronov] G groupe réductif complexe

On a
$$\boxed{H_{BPS}\big(\mathrm{Loc}_G(M)\big) = H_{BPS}\big(\mathrm{Loc}_{G^L}(M)\big)}$$

"cohomologie BPS"

définie à partir de la <u>structure symplectique décalée</u> sur $\mathrm{Loc}_G(M)$.

Cohomologie BPS pour $\mathrm{Loc}_G(\mathbb{T}^3)$

$\pi_1(\mathbb{T}^3) \simeq \mathbb{Z}^3$:

$$\pi_1(\mathbb{T}^3) \longrightarrow G \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ A, B, C \in G \;\middle|\; \begin{array}{l} AB = BA \\ AC = CA \\ BC = CB \end{array} \right\}$$

$\mathrm{Loc}_G(M) =$ " variété commutante triple "

$\dim H_{BPS}(\mathrm{Loc}_G(M)) =$ nombre de points de $\mathrm{Loc}_G(M)$ isolés comptés avec une certaine multiplicité

$\rightarrow$ calculable de façon combinatoire

Triplets isolés

- G semisimple.
- $g \in G \rightsquigarrow$ centralisateur :

$$C_G(g) = \{ h \in G \mid hgh^{-1} = g \}$$

$C_G(g)$ peut être non-connexe :

$$C_G^\circ(g) = \text{composante neutre}.$$

- g "isolé" : $Z(C_G^\circ(g))$ est fini
- triplet isolé : $Z\left(C_G^\circ(g_1, g_2, g_3)\right)$ est fini.
- triplet commutant isolé

g_1, g_2, g_3 commutent 2 à 2.

Triplets isolés : $SL_n(\mathbb{C})$

$g \in SL_n(\mathbb{C})$ elt semisimple : $g = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

$$C_{SL_n}(g) = \begin{pmatrix} \boxed{*} & & 0 \\ & \boxed{*} & \\ 0 & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

g isolé $\Rightarrow$ 1 seule valeur propre

$g = \xi I_n$, $\xi \in \mu_n$: n possibilités pour g.

triplets commutants isolés :

$$\#\{(\xi_1 I_n, \xi_2 I_n, \xi_3 I_n) : \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mu_n\} = n^3$$

Triplets isolés : $PGL_2(\mathbb{C})$

I_2 : $C_{PGL_2}(I_2) = PGL_2$

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: $C_{PGL_2}(\alpha) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \sqcup \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \subset PGL_2$

"quasi-isolé"

$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in PGL_2.$

triplets isolés : $\#\left\{ \begin{matrix} (I_2, I_2, I_2) & (\alpha, \beta, I_2) \\ (I_2, \alpha, \beta) & (\alpha, \beta, \beta) \\ (\alpha, \alpha, \beta) & (\alpha, \beta, \beta) \\ (\alpha, I_2, \beta) & (\alpha, \beta, -\beta) \end{matrix} \right\} = 8$

Orbites nilpotentes distinguées

$G \subset GL_n(\mathbb{C})$ groupe algébrique

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \subset \mathfrak{gl}_n = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$

algèbre de lie

$\cup$ $\qquad\qquad \cup$

$\mathcal{N}$ = matrices nilpotentes

$\mathfrak{g} \cap \mathcal{N}$

G ; nombre fini d'orbites

$\boxed{\text{orbites distinguées = les plus importantes.}}$

Conjecture de dualité pour $Sp(2n) / SO(2n+1)$

Théorème : (H- Kinjo)

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \dim H_{BPS}\left(Loc_{Sp(2n)}(\mathbb{T}^3)\right) x^n = \prod_{k\geqslant 1} (1+x^k)^8}$$

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \dim H_{BPS}\left(Loc_{SO(2n+1)}(\mathbb{T}^3)\right) x^{2n+1} = \text{coefficients impairs de } \prod_{k\geqslant 0} (1+x^{2k+1})^8}$$

Théorème (H–Kinjo)

$$x\cdot\prod_{n\geq 1}(1+x^{2n})^8 = \text{coefficients impairs de } \prod_{k\geq 0}(1+x^{2k+1})^8$$

__Démonstration__ : manipulation de l'identité de Jacobi

$$\theta_2(q)^4+\theta_4(q)^4=\theta_3(q)^4.$$

Corollaire :

$$H_{BPS}(\mathrm{Loc}_{Sp(2n)}(\mathbb{T}^3)) \cong H_{BPS}(\mathrm{Loc}_{SO(2n+1)}(\mathbb{T}^3))$$

Prochaines étapes :

$\mathrm{Loc}_G(M)$ pour : • $\boxed{M = \Sigma \times S^1}$

surface de Riemann

cercle

$\rightsquigarrow$ programme de Langlands géométrique

• M quelconque : largement ouvert.