# Introduction aux algèbres de Hall cohomologiques

Amiens - 11/09/2025

0. Introduction
1. Carquois et algèbre de chemins
2. Champs algébriques, champs quotients
3. Algèbres de Hall cohomologiques
4. Carquois avec potentiel
5. Exemples

# 0 Introduction

algèbres de Hall : Ringel ~ 1990's pour géométriser les algèbres de Kac-Moody $U(\mathfrak{g})$ et leurs déformations $U_q(\mathfrak{g})$

⇝ a inspiré la construction de Lusztig de la catégorification de $U_q(\mathfrak{n}^+)$ et de la base canonique

algèbres de Hall cohomologiques : Kontsevich-Soibelman 2010
carquois (avec potentiel)

et Schiffmann-Vasserot 2008.
algèbres préprojectives

## 1 Carquois et algèbre de chemins

### Représentations

$$Q = (Q_0, Q_1)$$

$Q_0$ : ensemble de sommets — $Q_1$ : ensemble d'arêtes

$s, t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ fonctions "source" et "target"

représentation de $Q$ :

$V_i$, $i \in Q_0$ espace vectoriel

$x_\alpha \in \mathrm{Hom}(V_{s(\alpha)}, V_{t(\alpha)})$, $\alpha \in Q_1$ application linéaire

morphisme de représentations : $f : \left((V_i)_{i \in Q_0}, (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1}\right) \to \left((W_i)_{i \in Q_0}, (y_\alpha)_{\alpha \in Q_1}\right)$

$(f_i)_{i \in Q_0}$ t.q $\forall \alpha \in Q_1$,

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[d, "f_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "f_{t(\alpha)}"] \\
W_{s(\alpha)} \arrow[r, "y_\alpha"'] & W_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

commute.

$\mathrm{Rep}\, Q$ = catégorie des représentations de $Q$

= catégorie abélienne (noyaux, conoyaux, ...)

$$\ker\left((f_i)_{i \in Q_0}\right) = \left((\ker f_i)_{i \in Q_0},\ x_\alpha\Big|_{\ker f_{s(\alpha)}}^{\ker f_{t(\alpha)}}\right), \ldots$$

**Problème historique** : classifier les représentations d'un carquois à isomorphisme près.

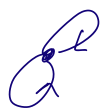
**Exemples** : $Q = \bullet$ $\quad$ $\mathrm{Rep}\, Q = \mathrm{Vect}(k)$ : classifié par la dimension

$Q = \bullet \longrightarrow \bullet$ $\quad$ $\mathrm{Rep}\, Q = \left\{ \left( V, W, f \in \mathrm{Hom}(V, W) \right) \right\}$

classifié par $\left( \dim V, \dim V, \text{rang } f \right)$.

$Q =$  carquois de Jordan

$\mathrm{Rep}\, Q = \left\{ \left( V, f \in \mathrm{End}(V) \right) \right\}$ $\quad$ classifié par la forme normale de Jordan

$Q =$  inclassifiable.

## Algèbre des chemins

$k$ corps

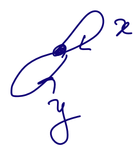
$kQ$ = algèbre associative engendrée par les chemins dans $Q$ ; le produit est la concaténation des chemins.

ex. $Q = \bullet$ $\qquad kQ = k$

$Q = \underset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\bullet}$ $\qquad kQ = ke_1 \oplus ke_2 \oplus k\alpha$

$$e_1\alpha = \alpha e_2 = \alpha$$
$$\alpha^2 = e_2\alpha = \alpha e_1 = 0$$
$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2$$

$Q =$  $\qquad kQ = k[x]$ alg. de polynômes

$Q =$  $\qquad kQ = k\langle x, y\rangle$

<u>Fact</u> : $\mathrm{Rep}\, Q \cong \mathrm{Mod}\, kQ$.

## ② Champs algébriques

- Objets géométriques répondant à des problèmes de paramétrisation gardant la mémoire des automorphismes.

ex : · paramétrer 3 points du plan complexe $\quad \mathbb{C}^3 \circlearrowleft \mathfrak{S}_3 \rightsquigarrow [\mathbb{C}^3/\mathfrak{S}_3]$

· paramétrer les espace vectoriels de dimension $d$

$$pt \circlearrowleft GL_d \quad \rightsquigarrow \quad [pt/GL_d]$$

· $G$ groupe (fini). Paramétrer les représentations de $G$ de dimension $d$ : $\quad Hom(G, GL_d) \circlearrowleft GL_d$

$$\rightsquigarrow [Hom(G, GL_d)/GL_d]$$

Ce sont des champs quotient :

$X$ variété algébrique

$G$ groupe algébrique ( ex. $G = GL_n$)

$G \curvearrowright X$

$\rightsquigarrow$ il existe un objet $[X/G]$ "champ quotient".

Comment comprendre $[X/G]$ ?

Un "truc" sur $[X/G]$ est un "truc $G$-équivariant" sur $X$.

On a $\quad G \times X \xrightarrow{a} X \quad ; \quad G \times X \xrightarrow{pr_2} X$

Par exemple, un fibré vectoriel sur $[X/G]$ est un fibré vectoriel $G$-équivariant sur $X$ :

$\mathcal{F} \longrightarrow X$ fibré vectoriel

$+ \quad a^*\mathcal{F} \overset{\varphi}{\cong} pr_2^*\mathcal{F}$ iso de fibrés vectoriels sur $G \times X$.

$+$ condition de cocycle.

<u>exemple</u>: $[pt/G]$ : la condition de cocycle dit qu'un fibré vectoriel sur $[pt/G]$ est exactement pareil qu'une représentation de $G$.

$\rightsquigarrow$ les champs algébriques ont un comportement mixte entre géométrie et théorie des représentations.

## Cohomologie des champs quotients

$X$ espace topologique $\longrightarrow H^*(X)$ cohomologie singulière

foncteur contravariant :

$$f : X \to Y \quad \rightsquigarrow \quad f^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$$

Si $f : X \to Y$ est propre, on a un pousser-en-avant

$$f_* : H^*(X) \longrightarrow H^*(Y)$$

# Cohomologie équivariante

$X \circlearrowleft G \quad \rightsquigarrow H^*_G(X)$

esp top  groupe top

$E$ esp top contractible avec action de $G$ libre

$$H^*_G(X) := H^*(X \times E / G)$$

Ne dépend pas du choix de $E$ :

$$\begin{tikzcd}
& X \times E \times E' / G \arrow[dl, "\text{fiber } E'"'] \arrow[dr, "\text{fiber } E"] & \\
X \times E / G & & X \times E' / G
\end{tikzcd}$$

ex : $H^*_{\mathbb{C}^*}(pt) \cong \mathbb{Q}[x]$

$$H^*_{GL_n}(pt) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}.$$

## ③ Algèbres de Hall cohomologiques

$Q = (Q_0, Q_1)$ carquois

$d \in \mathbb{N}^{Q_0}$ vecteur dimension

champ des représentations de $Q$ de dimension $d$ :

$$\mathfrak{M}_{Q,d} = \left[ X_{Q,d} / GL_d \right] \quad \text{où}$$

$$X_{Q,d} = \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}\left(\mathbb{C}^{d_{s(\alpha)}}, \mathbb{C}^{d_{t(\alpha)}}\right)$$

$\circlearrowleft$

$GL_d = \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}$ par changement de base aux sommets

suites exactes de représentations de $Q$ :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

$f$ injective, $g$ surjective, $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$

champs des suites exactes :

$d, d' \in \mathbb{N}^{Q_0}$ $\quad \mathbb{C}^{d+d'} \cong \mathbb{C}^{d} \oplus \mathbb{C}^{d'}$ ev $Q_0$-gradués

$$P_{d,d'} = \left\{ g \in GL_{d+d'} \mid g \cdot \mathbb{C}^{d} \subset \mathbb{C}^{d} \right\}$$

"Sous-groupe parabolique"

$$X_{Q,d,d'} = \left\{ (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in X_{Q,d+d'} \mid x_\alpha\left(\mathbb{C}^{d_{s(\alpha)}}\right) \subset \mathbb{C}^{d_{t(\alpha)}} \right\}$$

$$\mathcal{E}xact_{Q,d,d'} = \left[ X_{Q,d,d'} / P_{d,d'} \right].$$

## Diagram d'induction

$$X_{Q,d,d'} = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{*} & * \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_{Q,d,d'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X_{Q,d} \times X_{Q,d'} & & X_{Q,d+d'}
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}xact_{Q,d,d'} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\mathfrak{M}_{Q,d} \times \mathfrak{M}_{Q,d'} & & \mathfrak{M}_{Q,d+d'}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{*}$ $\quad$ $\boxed{*}$

Fact : $p$ is proper and so, pushforward

$$p_* : H^*(\mathcal{E}xact_{Q,d,d'}) \longrightarrow H^*(\mathfrak{M}_{Q,d+d'})$$

$$q^* : H^*(\mathfrak{M}_{Q,d} \times \mathfrak{M}_{Q,d'}) \longrightarrow H^*(\mathcal{E}xact_{Q,d,d'})$$

$$\wr\| \text{ Künneth}$$

$$H^*(\mathfrak{M}_{Q,d}) \otimes H^*(\mathfrak{M}_{Q,d'})$$

La composition donne

$$m_{d,d'} = p_* q^* : H^*(\mathfrak{M}_{Q,d}) \otimes H^*(\mathfrak{M}_{Q,d'}) \to H^*(\mathfrak{M}_{Q,d+d'})$$

Structure d'algèbre associative $\mathbb{N}^{Q_0}$-graduée sur $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} H^*(\mathfrak{M}_{Q,d})$.

Espace sous-jacent :

$$H^*(\mathcal{M}_{Q,d}) \simeq \mathbb{Q}[x_{i,\ell} \ : i \in Q_0 \ , \ 1 \leq \ell \leq d_i]^{\mathfrak{S}_d}$$

$$\mathfrak{S}_d = \prod_{i \in Q_0} \mathfrak{S}_{d_i}$$

$\mathfrak{S}_{d_i}$ permute les variables $x_{i,\ell}$ , $1 \leq \ell \leq d_i$ .

Formule explicite : algèbre de battage

$$k_{d,d'} = \frac{\displaystyle\prod_{\alpha \in Q_1} \prod_{r=1}^{d_{s(\alpha)}} \prod_{s=d_{t(\alpha)}+1}^{d_{t(\alpha)}+d'_{t(\alpha)}} (x_{t(\alpha),s} - x_{s(\alpha),r})}{\displaystyle\prod_{i \in Q_0} \prod_{r=1}^{d_i} \prod_{s=d_i+1}^{d_i+d'_i} (x_{i,s} - x_{i,r})}$$

$$\in \mathbb{Q}(x_{i,\ell} \quad : i \in Q_0,\ 1 \leq \ell \leq d_i + d'_i)$$

$k_{d,d'}$ est $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_{d'}$ - invariant.

$$f \in H^*(\mathfrak{M}_{Q,d}), \quad g \in H^*(\mathfrak{M}_{Q,d'})$$

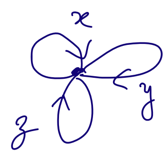
$m_{d,d'}(f,g) =$ symétrisation de $f g k_{d,d'}$ pour le rendre $\mathfrak{S}_{d+d'}$ - invariant

## ④ Carquois avec potentiel

Pas de potentiel : "algèbre de battage"

Situation plus intéressante : potentiel

$W \in \mathbb{C}Q$ combinaison linéaire de cycles

ex $Q =$ 


$kQ = k\langle x, y, z\rangle$

$W = xyz - xzy$

Pour $d \in \mathbb{N}^{Q_0}$, $\mathrm{Tr}(W)_d : X_{Q,d} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction $Gl_d$-invariante : fonction sur le champ

$$\mathrm{Tr}(W)_d : \mathfrak{M}_{Q,d} \longrightarrow \mathbb{C} .$$

Foncteur des cycles évanescents $\varphi_{\mathrm{Tr}(W)_d}$ faisceau constructible sur $\mathfrak{M}_{Q,d}$.

La construction précédente se généralise : il y a une structure d'algèbre associative sur

$$\boxed{\mathrm{CoHA}(Q,W) := \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^{Q_0}} H^*(\mathfrak{M}_{Q,d}, \varphi_{\mathrm{Tr}(W)_d}) .}$$

cohomologie à coefficients dans $\varphi_{\mathrm{Tr}(W)_d}$.

Question : décrire $\mathrm{CoHA}(Q,W)$ plus explicitement / algébriquement

## 5 Exemples

- $Q$ carquois

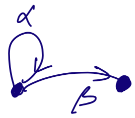
  $\mathrm{CoHA}(Q)$ est une algèbre de battage

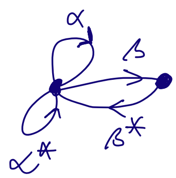
- $Q$ carquois symétrique

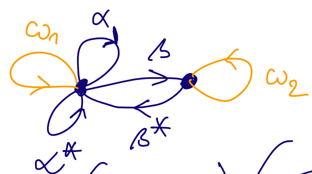
  $\mathrm{CoHA}(Q)$ est supersymétrique

  par rapport au degré cohomologique

- carquois triple et potentiel canonique

  $Q$ carquois 


  $\bar{Q}$ carquois double 


  $\tilde{Q}$ carquois triple 


  potentiel canonique $W = \left(\sum_{i \in Q_0} \omega_i\right)\left(\sum_{\alpha \in Q_1} [\alpha, \alpha^*]\right)$

$Q =$ 

$\tilde{Q} =$ 


$W = xyz - xzy.$

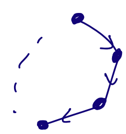
CoHA$(Q,W)$ n'est pas connue mais il existe une filtration $F^\bullet$ de CoHA$(Q,W)$ t.q

$$\mathrm{Gr}^{F^\bullet}\,\mathrm{CoHA}(Q,W) \cong U(\underbrace{\mathfrak{n}^+[u]}_{\text{algèbre de courant de } \mathfrak{n}^+})$$

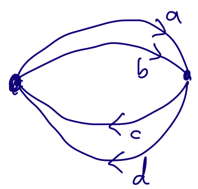
$\mathfrak{n}^+ =$ une certaine algèbre de Kac-Moody généralisée.

[Davison-H-Schlegel Mejia]

- Davison : Description de CoHA$(\tilde{Q}, W)$ lorsque $Q =$ 

- Jindal : Description de CoHA$(Q,W)$ lorsque $Q$ est un carquois cyclique 

- Davison – Jindal : description de CoHA$(Q,W)$ lorsque $(Q,W)$ est le carquois conifolde.

$Q =$ 


$W = acbd - adbc$