

- 1 - Situation
- 2 - Contexte et motivation
- 3 - Opérations
- 4 - Théorème d'intégralité
- 5 - Exemples
- 6 - Renforcements
- 7 - Historique
- 8 - Construction des P_i .

Intégralité cohomologique pour les représentations des groupes réductifs.

On travaille sur \mathbb{C} .

tout élément agit
 de façon unipotente sur
 toutes les repr.
 sous groupe unipotent
 connexe normal max

1- Situation

$$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), (\mathbb{C}^*)^N, \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})\dots$$

Plus généralement : G : groupe réductif (radical unipotent trivial)

char 0 linéairement réductif (les représentations de
 dimension finie sont semi simples)

non-exemple : $G = \mathbb{G}_a$ groupe additif
 agit sur $V = \mathbb{C}^2$ via
 $\mathbb{G}_a \hookrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

V est extension non triviale de \mathbb{C} par elle-même.

$T \subset G$ tore maximal $T \cong (\mathbb{C}^*)^{\mathrm{rk} G}$

$$\text{e.g. } \mathrm{diag} \cong (\mathbb{C}^*)^n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

représentations : $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, V \mathbb{C} -er de
dimension finie

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}^2$$

caractères : $X^*(T) = \{\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m\} \cong \mathbb{Z}^{rk G}$

coracitaires : $X_*(T) = \{\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T\} \cong \mathbb{Z}^{rk G}$

Accouplement : $\langle \cdot, \cdot \rangle : X_*(T) \times X^*(T) \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \alpha \rangle &= \int_{\mathbb{G}_m} \lambda(g) \alpha(g) g^{-1} dg \\ &\quad \text{where } g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Poids : $T \cap V$ diagonalisable :

$$V = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha$$

$$V_\alpha = \{v \in V \mid t \cdot v = \alpha(t)v \quad \forall t \in T\}$$

$\mathcal{N}(V) = \{\alpha \in X^*(T) \mid V_\alpha \neq 0\}$ poids de V .

En particulier : $\mathcal{N}(o_G)$ poids de $o_G = \text{Lie}(G)$

ex: $GL_2(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$

$$(\mathbb{C}^*)^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(t_1, t_2) \cdot e_1 = t_1 e_1$$

$$(t_1, e_2) \cdot e_2 = t_2 e_2.$$

V symétrique : $\dim V_\alpha = \dim V_{-\alpha} \quad \forall \alpha \in X^*(T)$.

\simeq antidualité

- ex: • $T^*V = V \oplus V^*$ V rep. de G
- V rep. de $SL_2(\mathbb{C})$
 - σ_g rep adjointe de G .
 - toutes les représentations en types $B_n, C_m, E_7, E_8, G_2, F_4$
- $O(2n+1) \quad Sp(2n)$

Groupe de Weyl: $W = N_G(T)/T$

$$N_G(T) = \{g \in G \mid g T g^{-1} = T\}$$

$W_{\text{fin}} \cong W_{\text{Sl}_n} \cong S_m$ permutations, eng^{al}: groupe de Coxeter.

$$\text{T ore } W_T = \{\text{id}\}$$

W à poids de V .

Intégralité cohomologique = décomposition de

$H_G^*(V)$ cohomologie équivariante

$$V \text{ ev} \Rightarrow \text{contractible} \quad \cong H_G^*(\text{pt}) \cong H^*(BG)$$

E_G esp. top contractible avec action libre de G

$$BG = E_G/G$$

ex. $H_G^*(\mathbb{P}) : G = \mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ libre

$$\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} = \varinjlim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{P}^\infty = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$$

$$H^*(\mathbb{P}^N) \cong \mathbb{Q}[x] / (x^{N+1}) \quad \deg x = 2$$

$$H^*(\mathbb{P}^\infty) = H_{\mathbb{C}}^*(\text{pt}) \cong \mathbb{Q}[x].$$

$$T = (\mathbb{C}^*)^n \quad \leadsto \quad H_T^*(\text{pt}) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

G général: $H_G^*(\text{pt}) \cong H_T^*(\text{pt})^W$ $T \subset G$ max. torique.

et $H_{GL_n}^*(\text{pt}) \cong \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{\mathbb{S}_n}$ polynômes symétriques.

$$G = GL_2(\mathbb{C}) \quad \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2].$$

En général: $H_G^*(\text{pt})$ est une algèbre de polynômes.

en particulier : $\dim_{\mathbb{Q}} H_G^*(\text{pt}) = +\infty$

Intégralité cohomologique: extraire un sous-espace

$$P_0 \subset H^*(V/G)$$

générateur (au sens de l'induction parabolique)

$$\dim P_0 < \infty$$

P_0 = "cohomologie cuspidale" de V/G .

2. Contexte et motivation

(a) Topologie de l'action de G sur V (= du champ quotient V/G)

du quotient GIT $V//G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}(\mathbb{C}[V]^G)$
 schéma affine de f.f
 (Hilbert)

$V//G$ classifie les G -orbites fermées

ex: ① $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^N$ $\mathbb{C}^N // \mathbb{C}^* \cong \text{pt}$
 mult. prds 1.

② $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^2$ $t \cdot (u, v) = (tu, t^{-1}v)$

$\begin{cases} xy = \lambda \\ \{0\} \end{cases}$ $\lambda \neq 0$ sont les orbites fermées

$\leadsto \mathbb{C}^2 // \mathbb{C}^* \cong \mathbb{C}$

$(\mathbb{C}[x, y])^{\mathbb{C}^*} = \mathbb{C}[xy] \subset \mathbb{C}(x, y)$

③ $G \curvearrowright \mathfrak{o}_G$ adjointe

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_G // G &\cong t // W & t = \text{Lie } T \\ &\cong \mathbb{A}^{rk G} \end{aligned}$$

④ non lisse : $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[a, b, c, d]$

$$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^4 = V, \quad t \cdot (u, v, w, z) = (tu, tv, t^{-1}w, t^{-1}z)$$

$$\mathbb{C}^4 // \mathbb{C}^* \stackrel{\sim}{=} \text{Spec}(\mathbb{C}[ac, ad, bc, bd])$$

$$\cong \text{Spec}\left(\mathbb{C}[A, B, C, D] / \langle AD - BC \rangle\right)$$

quadratique dans \mathbb{C}^4 .

Calculer des générateurs de $\mathbb{C}[V]^G$: problème difficile et ancien
 de théorie des invariants, même pour $\mathrm{SL}(\mathbb{C})$ [invariants des formes binaires]
 Sylvester - Franklin, 1879 : degrés ≤ 10 avec erreurs
 von Gall, 1880 ; Shiota 1967
 Brouwer - Popoviciu 2010 : degré 9 92 générateurs
 degré 10 104 générateurs
 degré 11 : pas grand chose de connu.

- * Certains invariants portent des noms intéressants
 - catalecticant : invariant de degré $\frac{n}{2} + 1$ pour les formes binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z}$
 - canonnique : degré $\frac{n+1}{2}$ pour les formes binaires de degré $n \in 2\mathbb{Z} + 1$

Intégralité cohomologique vs calcul algorithmique

de $H^*(V//G)$ (conjecturellement)

coh. d'intersection = coh. singulière si $V//G$ lisse
en code de l'info. sur les singularités
sinon.

(b) Topologie de $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$
champ d'Artin lisse → bon espace de module (Alper)
globalisation de $V/G \rightarrow V//G$. (= situation locale)

ex. $\mathcal{M} = \text{Bun}_G$
 $V/G \rightarrow V//G \xleftarrow[\text{principe local-global}]{\text{spécialisation}}$ $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$
reposant sur des théorèmes de branches étales (Luna, Alper - Hall - Rydh)

(c) Introduire et étudier de nouveaux invariants énumératifs pour (G, V) .

③ Opérations

Induction parabolique

V une représentation de G

$\lambda : G_m \rightarrow T$ cocaractère

$$G^\lambda = \{g \in G \mid \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} = g \quad \forall t \in \mathbb{C}^*\}$$

$\subset G$

Levi
sous-groupe (en parti: groupe réductif) Note: $T \subset G^\lambda$

$$V^\lambda = \{v \in V \mid \lambda(t) \cdot v = v \quad \forall t \in \mathbb{C}^*\}$$

$\subset V$

sous-rep.

$$G^{\lambda \geq 0} = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \text{ existe}\}$$

$\subset G$

sous-groupe parabolique

$$V^{\lambda \geq 0} = \{v \in V \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot v \text{ existe}\}$$

$\subset V$

H_n

$$\begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \\ & * & * & \\ & & * & \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$$

Diagramme d'induction

$$\begin{array}{ccc}
 & V^{\lambda \geq 0} / G^{\lambda \geq 0} & \\
 q_{\lambda} \swarrow & \text{lisse} & \searrow p_{\lambda} \\
 V^{\lambda} / G^{\lambda} & & V / G
 \end{array}$$

$$\text{Ind}_{\lambda} := p_{\lambda} \circ q_{\lambda}^* : H^*(V^{\lambda} / G^{\lambda}) \rightarrow H^*(V / G)$$

induction parabolique.

$$\text{Ind}_{\lambda} : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^W \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^W$$

Formule explicite :

$$k_{\lambda} := \frac{\prod_{\alpha \in w(\lambda)} \alpha^{\dim V_{\alpha}}}{\prod_{\alpha \in w(\lambda)} \alpha^{\dim V_{\alpha}}} \in \text{Frac}(H_T^*(pt))$$

$$\text{Ind}_{\lambda}(f) = \frac{1}{|W^{\lambda}|} \sum_{w \in W} w \cdot (f^{k_{\lambda}}).$$

Démonstration: Calculs après localisation et calcul de classes d'Euler, en utilisant des résultats de Borel-Weil-Bott.

Classes tautologiques

$H \subset G$ sous-groupe normal

$$H_G^*(pt) \underset{e.V.}{\cong} H_{G/H}^*(pt) \otimes H_H^*(pt)$$

non-canonical

\rightsquigarrow action de $H_H^*(pt)$ sur $H_G^*(pt)$.

Théorème d'intégralité cohomologique

$$\lambda \sim \mu \iff \begin{cases} G^\lambda = G^\mu \\ V^\lambda = V^\mu \end{cases}$$

$\rightsquigarrow P_V := X_*(T) /_{\sim}$ ensemble fini
 \mathcal{J}
 W

$$G_\lambda = \ker(G^\lambda \rightarrow \mathrm{GL}(V^\lambda)) \cap Z(G^\lambda) \subset G_{\text{normal}}$$

$$W_\lambda = \{w \in W \mid w \cdot \lambda \sim \lambda\} \subset W$$

sous-groupe

$$\epsilon_{V,\lambda} : W_\lambda \longrightarrow \{\pm 1\} \quad \text{tel que}$$

$$k_{w \cdot \lambda} = \epsilon_{V,\lambda}(\omega) k_\lambda \quad \text{pour } \omega \in W_\lambda$$

Théorème (H., 2024) Soit V une représentation symétrique de G

Pour $\lambda \in X_*(T)$, il existe un espace vectoriel

$P_\lambda \subset H^*_{G^\lambda}(V^\lambda)$ de dimension finie, stable.

sous l'action de W_λ , tel que

$$\bigoplus_{\tilde{\lambda} \in \tilde{P}_V/W} \left(P_{\tilde{\lambda}} \otimes H^*(pt/G_d) \right)^{E_{V,d}} \xrightarrow{\bigoplus \text{Ind}_{\tilde{\lambda}}} H_G^*(V)$$

$\subset H_{G_d}^*(V^d)$
 $+ W_d$ -action

est un isomorphisme.

P_d est gradué par le degré cohomologique

Def $p_{d,i} := \dim P_d^i \in \mathbb{N}$ invariants de

Donaldson-Thomas raffinés
 associés à (G, V)

des nouveaux invariants énumératifs que l'on
 cherche à comprendre.

↳ donner une interprétation géométrique

5- Exemples

$$\textcircled{1} \quad GL_2(\mathbb{C}) \curvearrowright (T^*\mathbb{C}^2)^g \quad g \geq 0.$$

$$d_0 : \mathbb{G}_m \rightarrow T \\ t \mapsto 1$$

$$d_1 : \mathbb{G}_m \rightarrow T \\ t \mapsto (t, 1)$$

$$d_2 : \mathbb{G}_m \rightarrow T \\ t \mapsto (t, t)$$

$$d_3 : \mathbb{G}_m \rightarrow T \\ t \mapsto (t, t)$$

$$V^{d_0} = V, \quad G^{d_0} = G, \quad G_{d_0} = \{1\}, \quad W_{d_0} = W, \quad k_{d_0} = 1$$

$$\mathcal{E}_{V, d_0} = \text{triv}$$

$$V^{d_1} = (T^*(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}))^g, \quad G^{d_1} = T, \quad G_{d_1} = \mathbb{C}^* \times \{1\} \subset T, \quad W_{d_1} = \{1\},$$

$$k_{d_1} = \frac{x_1^g}{x_1 - x_2} \quad \mathcal{E}_{V, d_1} = \text{triv}$$

$$V^{d_2} = \{0\}, \quad G^{d_2} = T, \quad G_{d_2} = T, \quad W_{d_2} = W, \\ k_{d_2} = \frac{(x_1 x_2)^g}{x_1 - x_2}, \quad \mathcal{E}_{V, d_2} = \text{sign}$$

$$V^{d_3} = \{0\}, \quad F^{d_3} = G, \quad G_{d_3} = G, \quad W_{d_3} = W, \quad k_{d_3} = (x_1, x_2)^T$$

$$\epsilon_{V, d_3} = \text{sgn}.$$

Quelques calculs :

$$\mathcal{P}_{d_0} = \bigoplus_{j=0}^{g-2} \mathbb{Q} \cdot (x_1 + x_2)^j \subset H^*(V/G) \cong \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_1} = \bigoplus_{j=0}^{g-1} \mathbb{Q} \cdot x_2^j \subset H^*(V^{d_1}/G^{d_1}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_2} = \mathbb{Q} \subset H^*(V^{d_2}/G^{d_2}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

$$\mathcal{P}_{d_3} = \{0\} \subset \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2].$$

isomorphisme d'intégralité

$$\mathcal{P}_{d_0} \oplus \mathcal{P}_{d_1} \otimes \mathbb{Q}[x_1] \oplus (\mathcal{P}_{d_2} \otimes \mathbb{Q}[x_1, x_2]) \xrightarrow{\text{sgn}} \mathbb{Q}[x_1 + x_2, x_1 x_2]$$

$$(f, g, h) \mapsto f + \frac{x_1^g g(x_1, x_2) - x_2^g g(x_2, x_1)}{x_1 - x_2} +$$

$$2(x_1 x_2)^{\frac{g}{2}} \frac{h(x_1, x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$② \quad \mathbb{C}^* \cap V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

$$\lambda_0 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \mapsto 1$$

$$\lambda_1 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$t \mapsto t$$

$$\mathcal{P}_V = \{\overline{\lambda_0}, \overline{\lambda_1}\}$$

$$V^{\lambda_0} = V, \quad G^{\lambda_0} = G, \quad G_{\lambda_0} = \{1\}, \quad k_{\lambda_0} = 1$$

$$V^{\lambda_1} = \text{pt}, \quad G^{\lambda_1} = G, \quad G_{\lambda_1} = G, \quad k_{\lambda_1} = \prod_{k < 0} (\dim V_k)$$

$$\in \mathbb{Q}[x]$$

$$\text{Ind}_{\lambda_1, \lambda_0} : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$$

$$f(x) \mapsto \underbrace{k_{\lambda_1} \cdot f(x)}_{= C_V \cdot x^{\sum_{k>0} \dim V_k}}$$

$$P_{\lambda_0} = \mathbb{Q}[x]_{\deg < \sum_{k>0} \dim V_k}$$

$$P_{\lambda_1} = \mathbb{Q}$$

$$P_{\lambda_0} \oplus P_{\lambda_1} \otimes \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$$

$$(f, g) \mapsto f + k_{\lambda_1} g.$$

6 - Renforcements de l'isomorphisme d'intégralité

② Identifier P_d :

$$X_*(T)^{st} = \left\{ d \in X_*(T) \mid \bigcup G^d/G_d - \text{orbites fermées ouvertes} \subset V^d \right.$$

+ une G^d/G_d -orbite générale à stabilisateur fini.

Conjecture :

$$P_d \underset{\approx}{=} \begin{cases} \mathrm{IH}^*(V^d // G^d) & \text{si } d \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

→ Lorsque (G, V) proviennent d'un carquois symétrique, Meinhardt-Reineke ~2014

→ $(G = \mathbb{C}^*, V)$ (H, 2024)

→ V rep orthogonale de G : (BDINKP 2025)

b) Définir une version faisceautisée des p_d .

$$\pi_d : V^d/G^d \rightarrow V/G \quad d_d = \dim V^d - \dim G^d$$

$$\begin{array}{ccc} & V^{d \geq 0}/G^{d \geq 0} & \\ q_d \downarrow & & p_d \searrow \\ V^d/G^d & & V/G \\ \pi_d \downarrow & & \downarrow \pi \\ V^d/G^d & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & V/G \end{array}$$

$$\text{Ind}_d : \mathbb{Q}_{V^d/G^d}[d_d] \rightarrow \pi_* \mathbb{Q}_{V/G}[d]$$

Théorème (H, 2024)

Il existe des complexes constructible W_d -équivariants
 \mathcal{P}_d sur V^d/G^d t.g.

$$\bigoplus_{\lambda \in \Phi_{V/W}} \left(\mathcal{P}_d \otimes H_{G_d}^*(pt) \right)^{e_{V,d}} \longrightarrow \pi_* \mathbb{Q}_{V/G}[d]$$

$$L$$

sont un isomorphisme,

Conjecture (renforcement de la version fäuseautisé)

$$P_\lambda \cong \begin{cases} \mathcal{H}(V^\lambda // G^\lambda) [-\dim G_\lambda] & \text{si } \lambda \in X_*(T)^{st} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

→ Thm pour G, V provenant d'un carquois symétrique. (MR)

→ $G = \mathbb{C}^*$ (H. 2024)

→ V rep orthogonale de G : (BDINKP, 2025).

7- Historique

8. Construction des P_λ .