Universidade Federal de Itajubá

Computação Gráfica

Módulo 6 - Transformações Geométricas

Profª. Elisa de Cássia Silva Rodrigues

Introdução

- O que são transformações geométricas?
  - Operações que visam a alteração de características como:
    - ⋆ Posição.
    - ⋆ Orientação.
    - ⋆ Forma.
    - ⋆ Tamanho.
  - Podem ser representadas por:
    - ⋆ Equações.
    - ⋆ Forma matricial (mais usada).
  - Manipulação de pontos usa matrizes com dimensão:
    - ⋆ 2×2 (no plano (x, y)).
    - ⋆ 3×3 (no espaço (x, y, z)).

Definições

- Matriz de transformação:
  - Combinação de matrizes que representam transformações lineares.
- Pontos:
  - Distância em relação a cada um dos eixos do sistema de coordenadas.
  - Os pontos $A(2,3)$ e $B(1,1)$ podem ser escritos como:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vetores:
  - Objetos matemáticos organizados em linhas ou colunas (1 dimensão).
- Matrizes:
  - Objetos matemáticos organizados em linhas e colunas (geral).

Aritmética de Vetores e Matrizes

- Operações de adição e subtração (operandos com mesma dimensão).
  - Adição: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
  - Subtração: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- Multiplicação dos elementos de vetores/matrizes por uma constante.
  - Multiplicação por escalar: $\frac{1}{2} * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Transposição dos valores de suas linhas e colunas.
  - Transposta: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Aritmética de Vetores e Matrizes

- Multiplicação de matrizes (nº colunas da 1ª, igual nº linhas da 2ª) .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*7+2*5 & 1*6+2*0 \\ 3*7+4*5 & 3*6+4*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 41 & 18 \end{bmatrix}$$

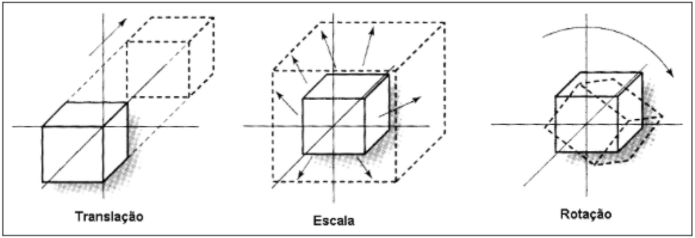
$$A * B \neq B * A$$

- Propriedade: $(A * B)^T = B^T * A^T$
- Produto Escalar: $V_1 \cdot V_2 = 1 * 3 + 2 * 4$,

onde $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $V_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

Transformação em Pontos e Objetos

- Representação de um objeto em várias posições no espaço é fundamental para compreender sua forma.



Fonte: *http://gcg.inf.furb.br/?page_id=4141*

Transformação de Translação

- Deslocamento do objeto através da translação de todos os seus pontos, adicionando quantidades às coordenadas do ponto.
  - Translação 2D:

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases} \qquad \begin{gathered} P' = P + T \\ \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix} \end{gathered}$$

  - Translação 3D:

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \\ z' = z + T_z \end{cases} \qquad \begin{gathered} P' = P + T \\ \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix} \end{gathered}$$

Transformação de Translação

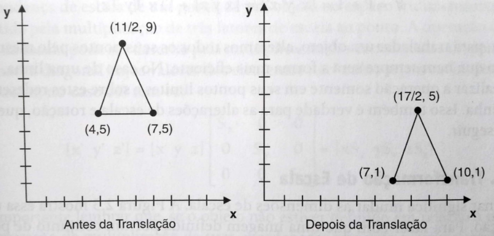


FIGURA 2.2. *Translação de um triângulo de 3 unidades na horizontal e –4 na vertical. Repare que se teria o mesmo efeito transladando a origem do sistema de coordenadas para o ponto (–3, 4) na primeira figura.*

Transformação de Escala

- Mudar as dimensões de escala de um objeto através da multiplicação dos valores das coordenadas por um fator de escala.
  - Escala 2D:

$$\begin{cases} x' = x * S_x \\ y' = y * S_y \end{cases}$$

$$P' = P * S$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x * S_x & y * S_y \end{bmatrix}$$

  - Escala 3D:

$$\begin{cases} x' = x * S_x \\ y' = y * S_y \\ z' = z * S_z \end{cases}$$

$$P' = P * S$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x * S_x & y * S_y & z * S_z \end{bmatrix}$$

Transformação de Escala

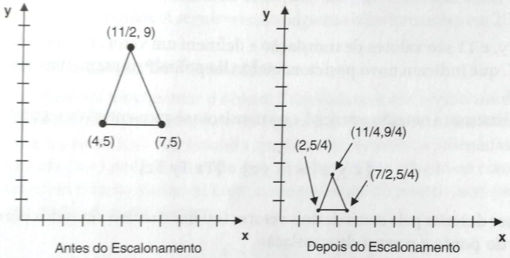


FIGURA 2.3. *A mesma figura antes e depois de uma mudança de escala genérica, de 1/2 na horizontal e 1/4 na vertical. Repare que esse mesmo efeito relativo seria conseguido mudando a escala do sistema de eixos para uma outra que fosse o dobro da primeira na horizontal e quatro vezes maior na vertical.*

Transformação de Escala

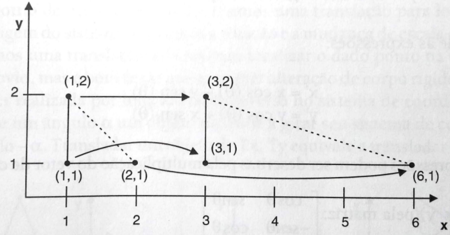


FIGURA 2.4. *Mudança de escala de objetos não na origem é acompanhada por uma translação. Se os fatores de escala não forem iguais, o objeto também se deforma.*

Se objeto não estiver definido em relação à origem,
essa operação de multiplicação de suas coordenadas por uma matriz
também fará com que o objeto translade.

Transformação de Rotação 2D

- Deslocamento de um objeto em torno da origem.
- Se o ponto (x, y), distante $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ da origem com ângulo ϕ for rotacionado por um ângulo θ então:

$$\begin{cases} x' = r * cos(\theta + \phi) = r * cos\phi * cos\theta - r * sen\phi * sen\theta \\ y' = r * sen(\theta + \phi) = r * sen\phi * cos\theta + r * cos\phi * sen\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x * cos\theta - y * sen\theta \\ y' = y * cos\theta + x * sen\theta \end{cases}$$

$$P' = P * R$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Transformação de Rotação 2D

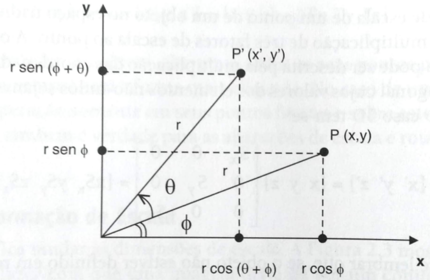
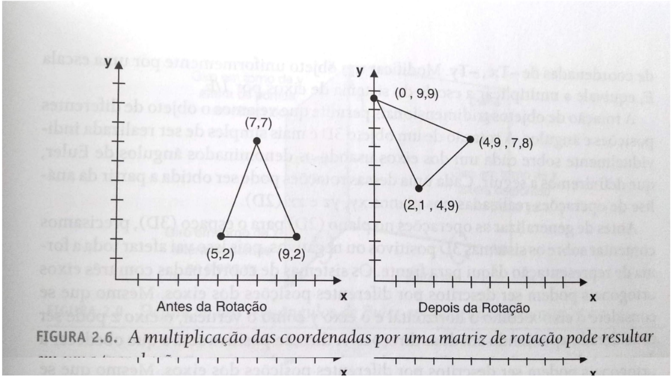


FIGURA 2.5. *Rotação de um ponto P em torno da origem, passando para a posição P'. Repare que se chegaria a esse mesmo ponto através de uma rotação de $-\theta$ no sistema de eixos xy.*

Transformação de Rotação 2D



Se objeto não estiver definido em relação à origem, a rotação também fará com que o objeto translade.

Transformação de Rotação 2D

- Aplicar translação + rotação:
  - Translada para a origem, rotaciona e aplica translação inversa.

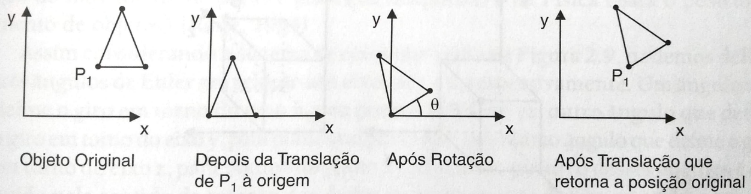


FIGURA 2.7. *Processo de alteração da orientação de um objeto em torno de um certo ponto, que não na origem.*

Transformação de Rotação 3D

- Em 3D existe uma matriz de rotação para cada eixo.
  - Rotação ao redor do eixo Z:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Rotação ao redor do eixo X:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\beta & sen\beta \\ 0 & -sen\beta & cos\beta \end{bmatrix}$$

  - Rotação ao redor do eixo Y:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} cos\delta & 0 & -sen\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\delta & 0 & cos\delta \end{bmatrix}$$

Transformação de Rotação 3D

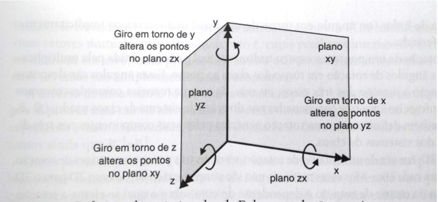


FIGURA 2.9. *Definição dos três ângulos de Euler em relação aos eixos x, y e z.*

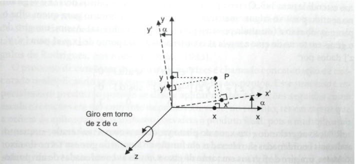


FIGURA 2.10. *Ângulo de Euler em torno do eixo z. Só os pontos do plano xy são alterados. Pode-se observar nesta figura uma outra forma de entender a rotação: girar objetos no espaço de um certo ângulo ou rodar o próprio sistema de eixos com o ângulo em sentido oposto.*

Concatenação é o processo de combinar duas ou mais matrizes multiplicando as matrizes antes de aplicá-las aos pontos (ordem de multiplicação afeta o resultado).

Transformação de Reflexão

- Também chamada de espelhamento ou *flip*:
  - Produz um objeto como se fosse o reflexo de um espelho posicionado no eixo em torno do qual se faz o espelhamento.

- Em 2D, a reflexão pode ser aplicada sobre o eixo Y, eixo X ou ambos.
- Em 3D, em torno de um plano ou em torno de dois eixos.
  - Reflexão em torno do plano XZ (inverte-se a coordenada y):

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Reflexão em torno dos eixos X e Y (inverte-se as coordenadas x e y:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformação de Reflexão

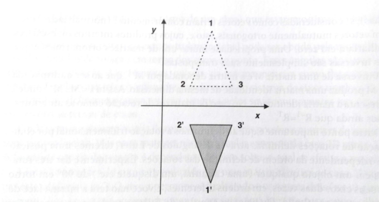


FIGURA 2.11. *Reflexão de um objeto em torno do eixo x.*

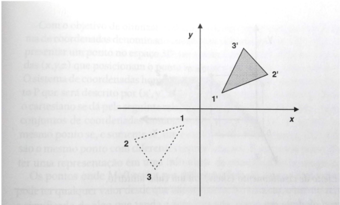


FIGURA 2.12. *Reflexão de um objeto em torno da origem dos eixos xy.*

Transformação de Cisalhamento

- Também chamada de *shearing* ou *skew*:
  - Distorce o formato de um objeto aplicando-se um deslocamento ao valor de uma coordenada proporcional ao valor de outras.
  - Distorção na direção x, proporcional a y:

$$\begin{cases} x' = x + S_y \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ S_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S_y é a distância de deslocamento de x na altura de y.

Transformação de Cisalhamento

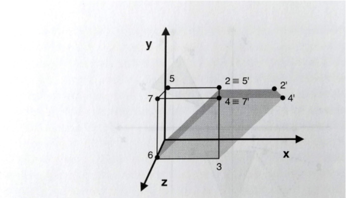


FIGURA 2.13. *Efeito de cisalhamento (skew) em um cubo unitário.*

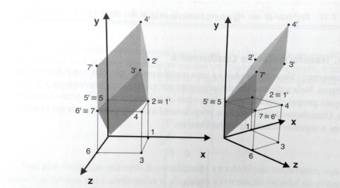
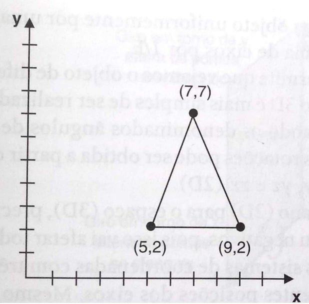


FIGURA 2.14. *Duas vistas do mesmo cisalhamento na direção y em função das coord das x e z de cada ponto.*

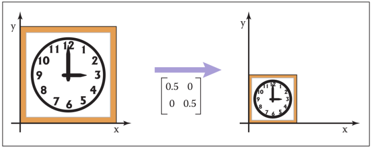
Atividade Prática

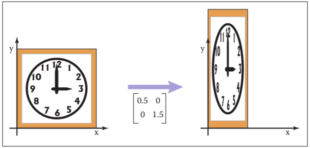
- Dada a figura abaixo, executar um rotação no plano XY por um ângulo de 50 graus, evitando que haja uma translação.



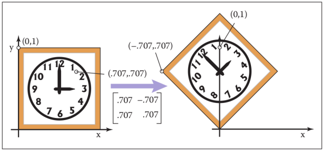
Exemplos

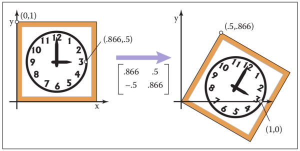
- Escala 2D





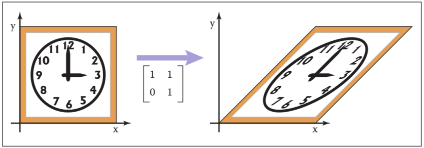
- Rotação 2D (positiva e negativa)

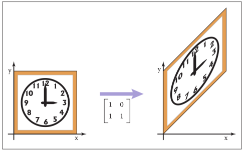




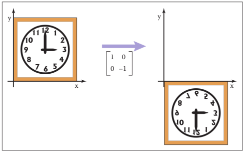
Exemplos

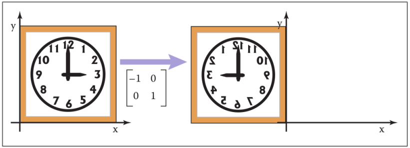
- Cisalhamento 2D (eixo x e eixo y)



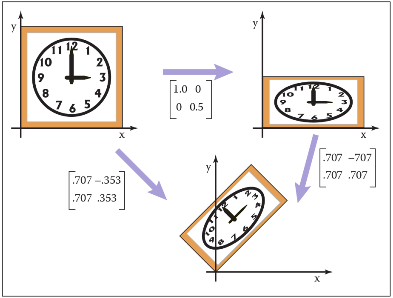


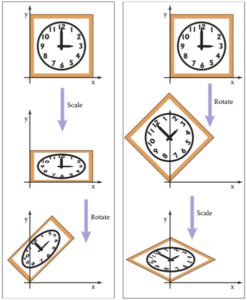
- Reflexão 2D (eixo x e eixo y)





- Composição (combinação) de transformações.
  - É comum aplicar mais de uma transformação a um objeto.
  - **Ex:** aplicar uma escala S, e depois uma rotação R ($M = R * S$).





Coordenadas Homogêneas

- Diversas operações podem ser concatenadas numa única matriz pela multiplicação prévia.
- Porém, operações de translação devem ser aplicadas de forma separada, uma vez que depende de soma e subtração.
- Para otimizar essas operaçoes usa-se o Sistema de Coordenadas Homogêneas.
- Representação de um ponto 3D em coordenadas cartesianas:

  (x, y, z) em relação à origem.

- Representação de um ponto 3D em coordenadas homogêneas:

  (x', y', z', H) em relação à origem, onde $H \neq 0$.

  Se $H = 0$, o ponto está fora do espaço dimensional.
  Se $H = 1$, a transformação é direta: $(x, y, z, 1) = (x, y, z)$.

Coordenadas Homogêneas

- Transformação de coordenadas homogêneas para cartesianas:
  - $(x, y, z) = (x'/H, y'/H, z'/H)$
- Um mesmo ponto 3D tem várias representações diferentes em coordenadas homogêneas:
  - **Ex:** $(2, 3, 4, 6) = (4, 6, 8, 12)$ (são iguais se forem múltiplos).

O uso de coordenadas homogêneas é importante para permitir a representação de reais por inteiros, por exemplo, $(1, 2, 1, 1000)$.

Também são usadas para evitar problemas ocasionados pela representação de números grandes, por exemplo, $(1, 2, 1, 1/10000000)$.

Coordenadas Homogêneas

- Matriz de escala 2D

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de rotação 2D

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- Matriz de translação 3D

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x + T_x & y + T_y & z + T_z & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de translação 3D (outra forma)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes Inversas

- **Matriz de escala:**
  - Escala$(S_x, S_y, S_z) \Rightarrow$ Escala$(1/S_x, 1/S_y, 1/S_z)$.
- **Matriz de rotação:**
  - Rotação$(\theta) \Rightarrow$ Rotação$(-\theta)$.
- **Matriz de translação:**
  - Translação$(T_x, T_y, T_z) \Rightarrow$ Translação$(-T_x, -T_y, -T_z)$.
- **Composição de matriz de transformação:**
  - Se $M = M_1 M_2 \ldots M_n \Rightarrow M^{-1} = M_n^{-1} \ldots M_2^{-1} M_1^{-1}$.

Referências Bibliográficas

1. AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura. ***Computação Gráfica: Geração de Imagens***. 2003.
2. MARSCHNER, Steve; SHIRLEY, Peter. ***Fundamentals of Computer Graphics***. 2016.

Obrigada pela atenção!