

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	2
1.1	Übungsblatt1, Aufgabe 1: Vollständige Induktion, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre	4
1.2	Übungsblatt 1, Aufgabe 2: Indirekter Beweis, 4 Punkte, Lern- gruppe Henri Libre	6
1.3	Übungsblatt 1, Aufgabe 3: Vollständige Induktion, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre	8
1.4	Übungsblatt 1, Aufgabe 4: Vollständige Induktion, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre	10
1.5	Musterlösung	11
1.6	Übungsblatt 2, Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre	13
1.7	Übungsblatt2, Aufgabe 2: Kombinatorik, 4 Punkte, Lerngrup- pe Henri Libre	14
1.8	Übungsblatt2, Aufgabe 3: Konvergenz von Reihen, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre	14
1.9	Übungsblatt2, Aufgabe 4: , 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre	14
A		15
A.1	Übungsblatt 1	15
A.2	Übungsblatt 2	17

Kapitel 1

Vorwort

Dieses Dokument findest du auf github.com unter: <https://github.com/henri-libre/analysis1>. Du darfst das Dokument nutzen, erweitern und verbreiten. Maintainer des Dokumentes erreichst du entweder dort oder per E-Mail an analysis1stgeil@nanooq.org. Für die Korrektheit des Dokumentes ist entweder keiner oder du verantwortlich. Die URL der Veranstaltung an sich lautet: <https://analysis3.wordpress.com/analysis-i-ws-1516/uebungen-zu-analysis-i-wise-1516/>

Übungsblatt 1

Das entsprechende Übungsblatt befindet sich im Anhang A.1 ¹.

¹<https://analysis3.files.wordpress.com/2015/08/blatt1.pdf>

1.1 Übungsblatt1, Aufgabe 1: Vollständige Induktion, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

1. Z. z.: $5^n - 1 | 4$

- Induktionsanker:

$$n_1 = 1 : 5^1 - 1 = 4 \quad \checkmark$$

$$n_2 = 2 : 5^2 - 1 = 24 \quad \checkmark$$

$$n_3 = 3 : 5^3 - 1 = 124 \quad \checkmark$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$(5^n - 1) | 4$$

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} n \mapsto n + 1 : 5^{n+1} - 1 \\ &= (5 \cdot 5^n) - 1 \\ &= (4 \cdot 5^n + 5^n) - 1 \\ &= (4 \cdot 5^n) + (5^n - 1) \end{aligned}$$

Erster Term ist durch 4 teilbar. Zweiter Term ist gleich unserer Induktionsvoraussetzung.

2. Z. z.: $3^{2^n} - 1 | 2^{n+2}$

- Induktionsanker:

$$n_1 = 1 : 3^{2^1} - 1 | 2^{1+2} \Leftrightarrow 8 | 8 \quad \checkmark$$

$$n_2 = 2 : 3^{2^2} - 1 | 2^{2+2} \Leftrightarrow 80 | 16 \quad \checkmark$$

$$n_3 = 3 : 3^{2^3} - 1 | 2^{3+2} \Leftrightarrow 6560 | 32 \quad \checkmark$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$3^{2^n} - 1 | 2^{n+2}$$

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} n &\mapsto n+1 : 3^{2^{n+1}} - 1 \\ &\stackrel{\text{aus Klammer ziehen}}{=} (3^{2^n})^2 - 1 \\ &\stackrel{\text{3. Binomische Formel}}{=} (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1) \end{aligned}$$

Erster Term ist die Induktionsvoraussetzung. Der zweite Term ist im Detail unwichtig, wegen der Multiplikation.

3. Z. z.: Für Menge M mit $|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$

- Induktionsvoraussetzung: $n = 1$: Sei $M = \{n\}$. Dann ist $P(M) = \{\emptyset, \{a\}\} \rightarrow |P(M)| = 2^1$.
- Induktionsschritt:
Dann sei $M^* = \{a_1, \dots, a_n\}$.
Dann gilt laut Induktionsvoraussetzung: $|P(M^*)| = 2^n$.
Nun gilt² $P(M) \setminus P(M^*) = \{T \cup \{a_{n+1}\} | T \in P(M^*)\}$
 $\Rightarrow |P(M)| = 2|P(M^*)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
- Erklärung:
Es sei $P(m^*) = \{\emptyset\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$. Wenn nun $\{a_3\}$ hinzugefügt wird, ist $P(m) = P(m^*) \cup \{a_3\} = \{\emptyset\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$.

² $P(M) \setminus P(M^*)$ muss disjunkt sein, weil: Wenn A, B disjunkt, dann $A \cap B = \emptyset$.

1.2 Übungsblatt 1, Aufgabe 2: Indirekter Beweis, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

Zeige zunächst: $(1 + k) \leq 2^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- Induktionsanker:

$$k_1 = 1 : 1 + 1 \leq 2^1 \Leftrightarrow 2 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$k_2 = 2 : 1 + 2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 3 \leq 4 \quad \checkmark$$

$$k_3 = 3 : 1 + 3 \leq 2^3 \Leftrightarrow 4 \leq 8 \quad \checkmark$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$(1 + k) \leq 2^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} k \mapsto k + 1 : \quad & 1 + (k + 1) \leq 2^{k+1} \\ & \Leftrightarrow (2 + k) \leq 2 \cdot 2^k \\ & \Leftrightarrow \frac{2 + k}{2} \leq (1 + k) \leq 2^k \end{aligned}$$

Der erste Term ist immer kleiner als die linke Seite der Induktionsvoraussetzung.

Exkurs „Indirekter Beweis“: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$:

#	A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	0	0	1	1
2	0	1	1	1
3	1	0	0	0
4	1	1	1	1

Tabelle 1.1: In der dritten Zeile steht der Indirekter Beweis

Indirekter Beweis: Z. z.: Für a_1, \dots, a_n mit $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) > 2^n, \text{ so folgt } \sum_{i=1}^n a_i > n$$

Eigentlich sieht das so schöner aus:

$$n < \sum_{i=1}^n a_i < 2^n < \prod_{i=1}^n (1 + a_i)$$

- „Anker“. Einfach mal durchrechnen:

$$n_1 = 1 : 1 < 1 < 2^1 < (1 + 1) \quad \blacktriangleright$$

$$n_2 = 2 : 2 < 1 + 2 < 2^2 < (1 + 1)(1 + 2) \quad \checkmark$$

$$n_3 = 3 : 3 < 1 + 2 + 3 < 2^3 < (1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \quad \checkmark$$

- „Voraussetzung“, zu zeigen:

$$n < \sum_{i=1}^n a_i < 2^n < \prod_{i=1}^n (1 + a_i)$$

- Indirekter Beweis:

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) = (1 + a_1) \cdot \dots \cdot (1 + a_n)$$

jeder Term kleiner als

$$\leq 2^{a_1} \cdot \dots \cdot 2^{a_n} = 2^{\sum_{i=1}^n a_i}$$

$$\begin{array}{c} \text{vorhin bewiesen} \\ \leq \end{array} 2^n$$

1.3 Übungsblatt 1, Aufgabe 3: Vollständige Induktion, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

1. Z. z. dass das Brett mit „L“-förmigen Kartonstücken überdecken.

- Induktionsanfang:

Tabelle 1.2: Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n

- Induktionsvoraussetzung:
 $n = 1 : 2 \times 2 \rightsquigarrow$ „L“-förmiges Kartonstückchen \Rightarrow Vollständige Überdeckung.
- Induktionsschritt:
 $n \mapsto n + 1$: Wir nehmen von einem Schachbrett mit Seitenlänge 2^{n+1} ein Feld weg und teilen es in 4 Schachbretter mit der Seitenlänge 2^n auf:

2	2	1	X
2	2	1	1
3	3	4	4
3	3	4	4

Tabelle 1.3: Schachbrett mit der Seitenlänge 2^{n+1} , das weggenommene Feld sei X

Sei das weggenommene Feld ohne Beschränkung der Allgemeinheit oben rechts aus 1. Dann können wir laut Induktionsvoraussetzung das Feld 1 vollständig überdecken. Genauso können wir dies mit den Feldern 2, 3 und 4 bis auf ein Feld überdecken. Diese drei Felder werden so angeordnet:

2	2	1	X
2	L	1	1
3	L	L	4
3	3	4	4

Tabelle 1.4:

Dann können wir diese drei Felder auch überdecken. Dann ist das gesamte Brett mit Ausnahme des weggenommenen Feldes vollständig überdeckt. \square

2. Aus dem ersten Aufgabenteil folgt nicht, dass der Beweis für diesen Aufgabenteil. Viel mehr ist der erste Teil ein Spezialfall von diesem Aufgabenteil.

Z. z.: $3|2^{2n} - 1$

- Induktionsanfang:

$$n_1 = 1 : 2^{2 \cdot 1} - 1 = 3 \quad \checkmark$$

$$n_2 = 2 : 2^{2 \cdot 2} - 1 = 15 \quad \checkmark$$

$$n_3 = 3 : 2^{2 \cdot 3} - 1 = 63 \quad \checkmark$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$3|2^{2n} - 1$$

- Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} n \mapsto n + 1 : & 2^{2(n+1)} - 1 \\ &= 2^{2n+2} - 1 \\ &= (2^{2n} - 1 + 1) \cdot 4 - 1 \\ &= (2^{2n} - 1) \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 1 \\ &= 4(2^{2n} - 1) + 3 \end{aligned}$$

Der letzte Term ist durch 3 teilbar. Die Multiplikation am Anfang ist ein Vierfaches der Induktionsvoraussetzung. Die Induktionsvoraussetzung selber ist durch 3 teilbar. Also ist auch die Multiplikation durch 3 teilbar. Damit ist die ganze Formel durch 3 teilbar.

1.4 Übungsblatt 1, Aufgabe 4: Vollständige Induktion, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

Der Fehler in dem Induktionsverweis liegt im Folgenden: Innerhalb des Induktionsschrittes nimmt die Induktion an, dass die Induktionsannahme gleich der Behauptung, also wahr, ist. Dieser Schritt ist jedoch fehlerhaft, da nie bewiesen wurde, ob jede Aussage wahr ist. Da man von einer falschen Aussage auf sowohl wahre als auch falsche Aussage schließen kann, fehlt daher ein Beweis, dass die Induktionsannahme wahr ist. Ein Gegenbeweis wäre z. B. für $n = 2$.

1.5 Musterlösung

Stand 2015-10-29: Noch nicht bekannt gegeben

Übungsblatt 2

Das entsprechende Übungsblatt befindet sich im Anhang A.2 ³.

³<https://analysis3.files.wordpress.com/2015/08/blatt-21.pdf>

1.6 Übungsblatt 2, Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

1. Z.z. $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

• Induktionsanfang:

$$n = 1 : \quad \frac{1}{1(1+1)} = 1 - \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$n = 2 : \quad \frac{1}{2(2+1)} = 1 - \frac{1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

• Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)}$$

• Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} n \mapsto n+1 : \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= 1 - \frac{1}{((n+1)+1)} = 1 - \frac{1}{(n+2)} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2) - (n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2) - n - 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)} \end{aligned} \quad \square$$

2. Z.z. $\forall n \in \mathbb{N}$, gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1 - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$n = 1 : \sum_{k=1}^1 k^3 = 1 - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \checkmark$$

- Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1 - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Induktionsschritt:

$$n \mapsto n+1 : \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = 1 - \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{rechten Term ausrechnen}}{=} \frac{n^4 + 6n^3 + 14n^2 + 12n + 4}{4} \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &\stackrel{\text{ausrechnen}}{=} \frac{n^4 + 6n^3 + 14n^2 + 12n + 4}{4} \quad \square \end{aligned}$$

1.7 Übungsblatt2, Aufgabe 2: Kombinatorik, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

1.8 Übungsblatt2, Aufgabe 3: Konvergenz von Reihen, 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

1.9 Übungsblatt2, Aufgabe 4: , 4 Punkte, Lerngruppe Henri Libre

Anhang A

A.1 Übungsblatt 1

1. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Vollständige Induktion

4 Punkte

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n -elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$.

Aufgabe 2: Indirekter Beweis

4 Punkte

Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^m (1 + a_i) > 2^n, \text{ so folgt } \sum_{i=1}^m a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1 + k) \leq 2^k \forall k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 3: Vollständige Induktion

4 Punkte

1. Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n , von dem ein beliebiges Feld entfernt wird. Zeigen Sie, dass das Brett mit "L"-förmigen Kartonstückchen überdeckt werden kann. Die Kartonstückchen sind dabei so groß, dass sie genau drei Felder bedecken. Die Kartonstücke dürfen sich nicht überlappen.
2. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $2^{2^n} - 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion

4 Punkte

Wo steckt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung: für $n \geq 1$ gilt: je n natürliche Zahlen sind gleich.

Beweis:

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr.
- Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Betrachte die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n bzw. $a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ sind nach Induktionsannahme gleich, d.h.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ bzw. } a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1}$$

Damit folgt $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1}$, also die Behauptung. \square

A.2 Übungsblatt 2

2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen

4 Punkte

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

1.
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
2.
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe 2: Kombinatorik

4 Punkte

Sei $n > 517$ eine natürliche Zahl. Wie viele Tripel $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ gibt es, die

$$k_1 + k_2 + k_3 = n$$

erfüllen?

Aufgabe 3: Konvergenz von Reihen

4 Punkte

Man zeige für $n \geq 2$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Aufgabe 4:

4 Punkte

Sei $p, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $S_n^p := 1^p + 2^p + \dots + n^p$. Zeigen Sie

- a) $S_n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$
- b) $(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2}S_n^{p-1} + \dots + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1$.

Hinweis: a) lässt sich durch Induktion beweisen. Bei b) addiere man die Gleichungen

$$(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \binom{p+1}{1}x^p + \binom{p+1}{2}x^{p-1} + \dots + 1$$

für $x = 1, 2, \dots, n$.