Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

Dieses Dokument findest du auf github.com unter: https://github.com/henri-libre/analysis1. Du darfst das Dokument nutzen, erweitern und verbreiten. Maintainer des Dokumentes erreichst du entweder dort oder per E-Mail an analysis1istgeil@nanooq.org. Für die Korrektheit des Dokumentes ist entweder keiner oder du verantwortlich. Die URL der Veranstaltung an sich lautet: https://analysis3.wordpress.com/analysis-i-ws-1516/uebungen-zu-analysis-i-wise-1516/

Kapitel 2

Übungsblatt 1

Das entsprechende Übungsblatt befindet sich im Anhang A.1.

2.1 Aufgabe 1: Vollständige Induktion

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in N$ gilt:

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch $2^(n + 2)$ teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$

2.1.1 Musterlösung

Noch nicht bekannt gegeben

2.1.2 Lösung Lerngruppe „HenriLibre, du?, du?, du?“

1. z. z.: $5^n - 1|4$

   - Induktionsanker:
     $n_1 = 1 : 5^1 - 1 = x \cdot 4$
     $\Leftrightarrow 5 - 1 = x \cdot 4$
     $\Leftrightarrow x = 4$

   - Induktionsvoraussetzung:
     $(5^n - 1)$ ist durch 4 teilbar.

- Induktionsschritt:
  $n \mapsto n+1 : a_{n+1} = 5^{n+1} - 1$
  $= (5 \cdot 5^n) - 1$
  $(4 \cdot 5^n + 5^n) - 1$
  $(4 \cdot 5^n) + (5^n - 1)$
  Erster Term ist per Definition durch 4 teilbar. Zweiter Term ist gleich unserer Induktionsvoraussetzung.

2. z. z.: $3^{2^n} - 1 | 2^{n+2}$

- Induktionsanker:
  $n_1 = 1 : 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$
- Induktionsvoraussetzung:
  $3^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar.
- Induktionsschritt:
  $n \mapsto n+1 : 3^{2^{n+1}} - 1$
  $\underset{\text{mer ziehen}}{\overset{\text{aus der Kla-}}{=}} (3^{2^n})^2 - 1$
  $\underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Binomische}}{=}} (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$
  Erster Term ist die Induktionsvoraussetzung. Der zweite Term ist im Detail unwichtig, wegen der Multiplikation.

3. z. z.: Für Menge M mit $|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$

- Induktionsvoraussetzung:
  $n = 1$: Sei $M = \{n\}$. Dann ist $P(M) = \{\varnothing, \{a\}\} \to |P(M)| = 2^1$.
- Induktionsschritt:
  Dann sei $M^* = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
  Dann gilt laut Induktionsvoraussetzung: $|P(M^*) = 2^n|$.
  Nun gilt[1] $P(M) \setminus P(M^*) = \{T \cup \{a_{n+1}\} | T \in P(M^*)\}$
  $\Rightarrow |P(M)| = 2|P(M^*)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
- Erklärung:
  Es sei $P(m^*) = \{\varnothing\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$. Wenn nun $\{a_3\}$ hinzugefügt wird, ist $P(m) = P(m^*) \cup \{a_3\} = \{\varnothing\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$, $\{a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$.

[1] $P(M) \setminus P(M^*)$ muss disjunkt sein, weil: Wenn A, B disjunkt, dann $A \cap B = \varnothing$.

2.2 Aufgabe 2: Indirekter Beweis

Es seien $a_1, \ldots, a_m \in N$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in N$

$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) > 2^m, \text{so folgt} \sum_{i=1}^{m} a_i > n. \tag{2.1}$$

2.2.1 Lösung Lerngruppe „HenriLibre, du?, du?, du?“

Indirekt: z.z. für $a_1, \ldots, a_n$ mit $n \in N$ gilt

$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) > 2^m, \text{so folgt} \sum_{i=1}^{m} a_i > n. \tag{2.2}$$

Exkurs „Indirekter Beweis“: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$:

#	A	B	A $\Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	f	f	w	w
2	f	w	w	w
3	w	f	f	f
4	w	w	w	w

Tabelle 2.1: In der dritten Zeile steht der Indirekter Beweis

Zunächst zeigen wir: $(1+k) \leq 2^k \quad \forall k \in N$:

$$n = 1 : 1 + 1 = 2 \leq 2^1 = 2$$
$$n = 2 : 1 + 2 = 3 \leq 2^2 = 4$$
$$n = 3 : 1 + 3 = 4 \leq 2^3 = 8$$
$$n \mapsto n + 1 :$$
$$1 + (n + 1) \leq 1 + 2^n \leq 2 + 2^n \leq 2^{(n+1)}$$
$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) = (1+a_1) \cdot \ldots \cdot (1+a_m) \overset{\text{Hinweis}}{\leq} 2^{a_1} \cdot \ldots \cdot 2^{a_m} = 2^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leq 2^n$$

2.3 Aufgabe 3: Vollständige Induktion

1. Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n, von dem ein beliebiges Geld entfernt wird. Zeigen Sie, dass das Brett mit „L“-förmigen Kartonstückchen überdeckt werden kann. Die Kartonstückchen sind dabei so groß, dass sie genau drei Felder bedecken. Die Kartonstücke dürfen sich nicht überlappen.

2. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar.

2.3.1 Lösung Lerngruppe „HenriLibre, du?, du?, du?“

1. Z. z. dass das Brett mit „L“-förmigen Kartonstpcken überdecken.

   - Induktionsanker:

Tabelle 2.2: Schachbrett mit der Seitenläge 2^n

   - Induktionsvoraussetzung:
     $n = 1 : 2 \times 2 \rightsquigarrow$ „L“-förmiges Kartonstückchen $\Rightarrow$ Vollständige Überdeckung.
   - Induktionsschritt:
     $n \mapsto n + 1$: Wir nehmen von einem Schachbrett mit Seitenlänge 2^{n+1} ein Feld weg und teilen es in 4 Schachbretter mit der Seitenlänge 2^n auf:

2	2	1	X
2	2	1	1
3	3	4	4
3	3	4	4

Tabelle 2.3: Schachbrett mit der Seitenläge 2^{n+1}, das weggenommene Feld sei X

Sei das weggenommene Feld ohne Beschränkung der Allgemeinheit oben rechts aus 1. Dann können wir laut Induktionsvoraussetzung das Feld 1 vollständig überdecken. Genauso können wir dies mit den Feldern 2, 3 und 4 bis auf ein Feld überdecken. Diese drei Felder werden so angeordnet:

2	2	1	X
2	L	1	1
3	L	L	4
3	3	4	4

Tabelle 2.4:

Dann können wir diese drei Felder auch überdecken. Dann ist das gesamte Brett mit Ausnahme des weggenommenen Feldes vollständig überdeckt. □

2. Aus dem ersten Aufgabenteil folgt nicht, dass der Beweis für diesen Aufgabenteil. Viel mehr ist der erste Teil ein Spezialfall von diesem Aufgabenteil.
   Z. z.: $3|2^{2n} - 1$

   - Induktionsanker:

     $$\begin{aligned} n_1 = 1 : 3 &= 2^{2\cdot 1} - 1 \\ \Leftrightarrow 3 &= 4 - 1 \\ \Leftrightarrow 3 &= 3 \end{aligned}$$

   - Induktionsvoraussetzung:
     $3|2^{2n} - 1$

   - Induktionsschritt:

     $$\begin{aligned} n \mapsto n+1 : &3|2^{2(n+1)} - 1 \\ \Leftrightarrow &3|2^{2n} \cdot 2^2 - 1 \\ \Leftrightarrow &3|2^{2n} \cdot 3 \end{aligned}$$

     Eigentlich müsste der letzte Teil irgendwie durch 3 teilbar sein.

2.4 Aufgabe 4: Vollständige Induktion

Wo steckt der Fehler in folgendem induktionsbeweis?
Behauptung: für $n \geq 1$ gilt: je n natürliche Zahlen sind gleich.
Beweis:

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtliche wahr.

- Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n \in N$ (Induktionsannahme). betrachte die Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sind nach Induktionsannahme gleich, d.h. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ bzw. $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1}$. Damit folgt $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1}$, also die Behauptung. $\square$

Anhang A

A.1 Übungsblatt 1

1. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Vollständige Induktion 4 Punkte

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$.

Aufgabe 2: Indirekter Beweis 4 Punkte

Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{m}(1 + a_i) > 2^n, \text{ so folgt } \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1 + k) \leq 2^k \, \forall k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 3: Vollständige Induktion 4 Punkte

1. Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n, von dem ein beliebiges Feld entfernt wird. Zeigen Sie, dass das Brett mit "L"-förmigen Kartonstückchen überdeckt werden kann. Die Kartonstückchen sind dabei so groß, dass sie genau drei Felder bedecken. Die Kartonstücke dürfen sich nicht überlappen.
2. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion 4 Punkte

Wo steckt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?
Behauptung: für $n \geq 1$ gilt: je n natürliche Zahlen sind gleich.
Beweis:

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr.
- Induktionsschritt: Die Bahauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Betrache die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ bzw. $a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ sind nach Induktionsannahme gleich, d.h.

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ bzw.} a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1}$$

Damit folgt $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$, also die Behauptung. $\square$