2. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Konvergenz von Reihen 4 Punkte

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Aufgabe 2: Kombinatorik 4 Punkte

Sei $n > 517$ eine natürliche Zahl. Wie viele Tripel $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$ gibt es, die

$$k_1 + k_2 + k_3 = n$$

erfüllen?

Aufgabe 3: Konvergenz von Reihen 4 Punkte

Man zeige für $n \geq 2$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei p $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ $S_n^p := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Zeigen Sie

a) $S_n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

b) $(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \ldots + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1.$

Hinweis: a) lässt sich durch Induktion beweisen. Bei b) addiere man die Gleichungen

$$(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \binom{p+1}{1} x^p + \binom{p+1}{2} x^{p-1} + \ldots + 1$$

für $x = 1, 2, \ldots, n.$