Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

Dieses Dokument findest du auf github.com unter: https://github.com/henri-libre/analysis1. Du darfst das Dokument nutzen, erweitern und verbreiten. Maintainer des Dokumentes erreichst du entweder dort oder per E-Mail an analysis1istgeil@nanooq.org. Für die Korrektheit des Dokumentes ist entweder keiner oder du verantwortlich. Die URL der Veranstaltung an sich lautet: https://analysis3.wordpress.com/analysis-i-ws-1516/uebungen-zu-analysis-i-wise-1516/

Kapitel 2

Übungsblatt 1

Das entsprechende Übungsblatt befindet sich im Anhang A.1.

2.1 Aufgabe 1:

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in N$ gilt:

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch $2^{(}n + 2)$ teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$

2.1.1 Musterlösung

Noch nicht bekannt gegeben

2.1.2 Lösung Lerngruppe „HenriLibre, du?, du?, du?“

1. z. z.: $5^n - 1|4$
   - Induktionsanker:
     $n_1 = 1 : 5^1 - 1 = x \cdot 4$
     $\Leftrightarrow 5 - 1 = x \cdot 4$
     $\Leftrightarrow x = 4$
   - Induktionsvoraussetzung:
     $(5^n - 1)$ ist durch 4 teilbar.

- Induktionsschritt:
  $n \mapsto n+1 : a_{n+1} = 5^{n+1} - 1$
  $= (5 \cdot 5^n) - 1$
  $(4 \cdot 5^n + 5^n) - 1$
  $(4 \cdot 5^n) + (5^n - 1)$
  Erster Term ist per Definition durch 4 teilbar. Zweiter Term ist gleich unserer Induktionsvoraussetzung.

2. z. z.: $3^{2^n} - 1 | 2^{n+2}$

   - Induktionsanker:
     $n_1 = 1 : 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$
   - Induktionsvoraussetzung:
     $3^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar.
   - Induktionsschritt:
     $n \mapsto n+1 : 3^{2^{n+1}} - 1$
     $\underset{\text{mer ziehen}}{\overset{\text{aus der Kla-}}{=}} (3^{2^n})^2 - 1$
     $\underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Binomische}}{=}} (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$
     Erster Term ist die Induktionsvoraussetzung. Der zweite Term ist im Detail unwichtig, wegen der Multiplikation.

3. z. z.: Für Menge M mit $|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$

   - Induktionsvoraussetzung:
     $n = 1$: Sei $M = \{n\}$. Dann ist $P(M) = \{\varnothing, \{a\}\} \rightarrow |P(M)| = 2^1$.
   - Induktionsschritt:
     Dann sei $M^* = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
     Dann gilt laut Induktionsvoraussetzung: $|P(M^*) = 2^n|$.
     Nun gilt[1] $P(M) \setminus P(M^*) = \{T \cup \{a_{n+1}\} | T \in P(M^*)\}$
     $\Rightarrow |P(M)| = 2|P(M^*)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
   - Erklärung:
     Es sei $P(m^*) = \{\varnothing\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$. Wenn nun $\{a_3\}$ hinzugefügt wird, ist $P(m) = P(m^*) \cup \{a_3\} = \{\varnothing\}, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$, $\{a_3\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$.

[1] $P(M) \setminus P(M^*)$ muss disjunkt sein, weil: Wenn A, B disjunkt, dann $A \cap B = \varnothing$.

Anhang A

A.1 Übungsblatt 1

1. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Vollständige Induktion 4 Punkte

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$.

Aufgabe 2: Indirekter Beweis 4 Punkte

Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{m}(1 + a_i) > 2^n, \text{ so folgt } \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1 + k) \leq 2^k \, \forall k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 3: Vollständige Induktion 4 Punkte

1. Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n, von dem ein beliebiges Feld entfernt wird. Zeigen Sie, dass das Brett mit "L"-förmigen Kartonstückchen überdeckt werden kann. Die Kartonstückchen sind dabei so groß, dass sie genau drei Felder bedecken. Die Kartonstücke dürfen sich nicht überlappen.
2. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion 4 Punkte

Wo steckt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?
Behauptung: für $n \geq 1$ gilt: je n natürliche Zahlen sind gleich.
Beweis:

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr.
- Induktionsschritt: Die Bahauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Betrache die Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ bzw. $a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ sind nach Induktionsannahme gleich, d.h.

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ bzw.} a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1}$$

Damit folgt $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$, also die Behauptung. $\square$