1. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Vollständige Induktion 4 Punkte

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch 2^{n+2} teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$.

Aufgabe 2: Indirekter Beweis 4 Punkte

Es seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{m}(1 + a_i) > 2^n, \text{ so folgt } \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1 + k) \leq 2^k \, \forall k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 3: Vollständige Induktion 4 Punkte

1. Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n, von dem ein beliebiges Feld entfernt wird. Zeigen Sie, dass das Brett mit "L"-förmigen Kartonstückchen überdeckt werden kann. Die Kartonstückchen sind dabei so groß, dass sie genau drei Felder bedecken. Die Kartonstücke dürfen sich nicht überlappen.
2. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $2^{2n} - 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion 4 Punkte

Wo steckt der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

<u>Behauptung:</u> für $n \geq 1$ gilt: je n natürliche Zahlen sind gleich.

<u>Beweis:</u>

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr.
- Induktionsschritt: Die Bahauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme). Betrache die Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sind nach Induktionsannahme gleich, d.h.

  $$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ bzw.} a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1}$$

  Damit folgt $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$, also die Behauptung. $\square$