3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: 4 Punkte

Beweisen sie ausgehend von den Axiomen der reellen Zahlen

a) $(-a)(-b) = ab$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$,

b) Aus $ax = b$ und $ay = b$ folgt $x = y$, falls $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

   a) $\left|\frac{x+4}{x-2}\right| < x$ b) $|x-a| + |x-b| \le b - a$, wobei $a \le b$

2. Beweisen Sie

   a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$

   b) Zu reellen Zahlen x, y mit $x < y$ gibt es eine reelle Zahl z, so dass $x < z < y$ gilt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

   a) $\frac{1}{x + |x+1|} < 2$ b) $||x-1| - 4| < 2$

2. Beweisen Sie

   a) $\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$, für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \le r < s$;

   b) $\frac{x+y}{1+|x+y|} \le \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4.

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf Beschränktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls das Infimum, das Supremum, Minimum und Maximum der Menge.

a) $\left\{x + \frac{1}{x}, \frac{1}{2} < x \le 2\right\}$ b) $\left\{2^{-m} + \frac{1}{n}, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$