Kapitel 1

Vorwort

Dieses Dokument findest du auf github.com unter: https://github.com/henri-libre/analysis1. Du darfst das Dokument nutzen, erweitern und verbreiten. Maintainer des Dokumentes erreichst du entweder dort oder per E-Mail an analysis1istgeil@nanooq.org. Für die Korrektheit des Dokumentes ist entweder keiner oder du verantwortlich. Die URL der Veranstaltung an sich lautet: https://analysis3.wordpress.com/analysis-i-ws-1516/uebungen-zu-analysis-i-wise-1516/

Kapitel 2

Übungsblatt 1

2.1 Aufgabe 1:

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in N$ gilt:

1. $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.
2. $3^{2^n} - 1$ ist durch $2^(n + 2)$ teilbar.
3. Die Anzahl A_n aller Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch $A_n = 2^n$

2.1.1 Musterlösung

Noch nicht bekannt gegeben

2.1.2 Lösung Lerngruppe „HenriLibre, du?, du?, du?“

1. z. z.: $5^n - 1|4$

    - Induktionsanker:
      $n_1 = 1 : 5^1 - 1 = x \cdot 4$
      $\Leftrightarrow 5 - 1 = x \cdot 4$
      $\Leftrightarrow x = 4$

    - Induktionsvoraussetzung:
      $(5^n - 1)$ ist durch 4 teilbar.

- Induktionsschritt:
$n \mapsto n+1 : a_{n+1} = 5^{n+1} - 1$
$= (5 \cdot 5^n) - 1$
$(4 \cdot 5^n + 5^n) - 1$
$(4 \cdot 5^n) + (5^n - 1)$
Erster Term ist per Definition durch 4 teilbar. Zweiter Term ist gleich unserer Induktionsvoraussetzung.

2. z. z.: $3^{2^n} - 1 | 2^{n+2}$

   - Induktionsanker:
   $n_1 = 1 : 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$
   - Induktionsvoraussetzung:
   $3^{2^n} - 1$ durch 2^{n+2} teilbar.
   - Induktionsschritt:
   $n \mapsto n+1 : 3^{2^{n+1}} - 1$
   $\underset{\text{mer ziehen}}{\overset{\text{aus der Kla-}}{=}} (3^{2^n})^2 - 1$
   $\underset{\text{Formel}}{\overset{\text{Binomische}}{=}} (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$
   Erster Term ist die Induktionsvoraussetzung. Der zweite Term ist im Detail unwichtig, wegen der Multiplikation.

3. z. z.: Für Menge M mit $|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$

   - Induktionsvoraussetzung:
   $n = 1$: Sei $M = \{n\}$. Dann ist $P(M) = \{\varnothing, \{a\}\} \rightarrow |P(M)| = 2^1$.
   - Induktionsschritt:
   Dann sei $M^* = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
   Dann gilt laut Induktionsvoraussetzung: $|P(M^*) = 2^n|$.
   Nun gilt[1] $P(M) \setminus P(M^*) = \{T \cup \{a_{n+1}\} | T \in P(M^*)\}$
   $\Rightarrow |P(M)| = 2|P(M^*)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
   - Beispiel:
   $P(m^*) : \{\varnothing\}$

[1] $P(M) \setminus P(M^*)$ muss disjunkt sein, weil: Wenn A, B disjunkt, dann $A \cap B = \varnothing$.