4.Übungsblatt zur Vorlesung Analysis I

Aufgabe 1: Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Bestimmen Sie zudem Betrag und Argument dieser Zahlen. 4 Punkte

(a) $(2+3i)\cdot(1-i)$ (b) $\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^2 - \dfrac{1-i}{1+i}$

(c) $i\cdot(-1+i)^{2009}$ (d) $\dfrac{1+i\alpha}{1-i\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2: Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene: 4 Punkte

(a) $M_1 = \{z;\ |z-a| \geq r,\ a \in \mathbb{C},\ r > 0\}$

(b) $M_2 = \left\{z;\ \text{Re}\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}\right\}$

(c) $M_3 = \left\{z;\ \dfrac{|z-1|}{|z|} < 1\right\}$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Es sei $p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $z_0 \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle von p ist, wenn $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p ist.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und $|b| < 1$, so ist

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}\,b}\right| < 1$$