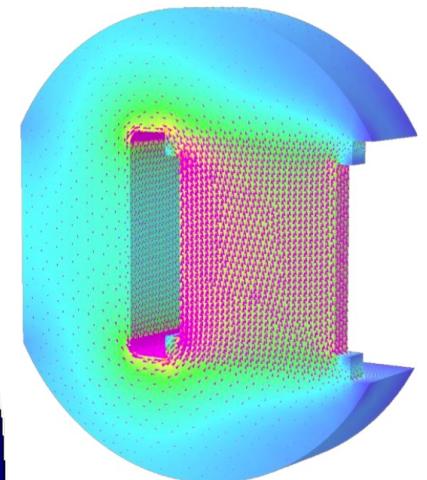
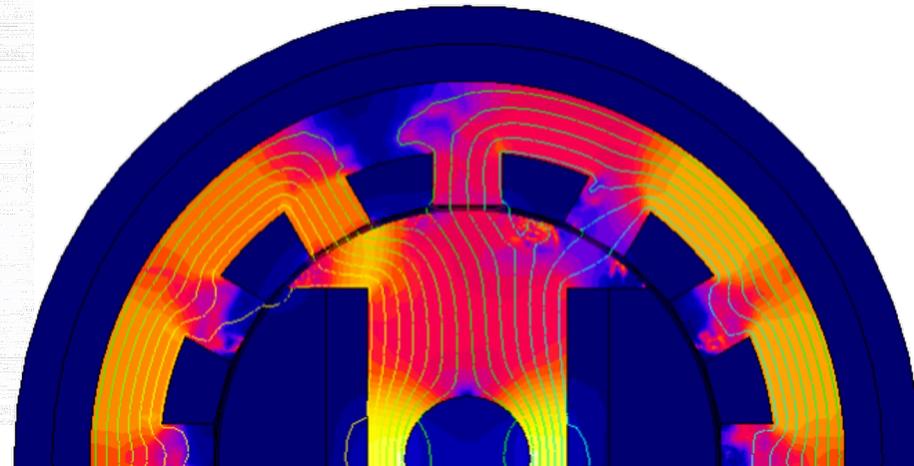
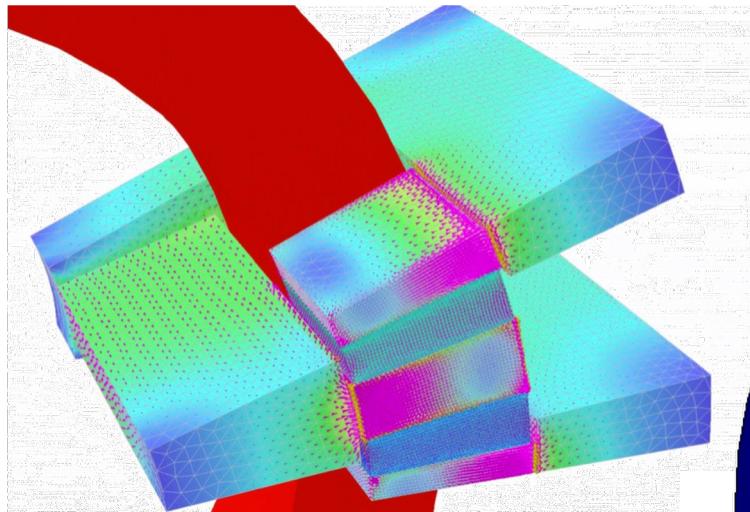


Vorlesung Elektromagnetische Felder (EMF)

WS2025/26

Kapitel 3: Elektrostatik

Elektrotechnisches Institut (ETI)



Gliederung

- 1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen**
- 2. Satz von Hullenfluss und Symmetrie**
- 3. Übergänge an Grenzflächen**
- 4. Potentialfunktion**
- 5. Elektrische Feldenergie**
- 6. Kapazität**
- 7. Potential und Kapazität bei Anwesenheit von Influenzladungen
(Laplace- und Poisson-Gleichung)**
- 8. Zusammenfassung**

1.1 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen I

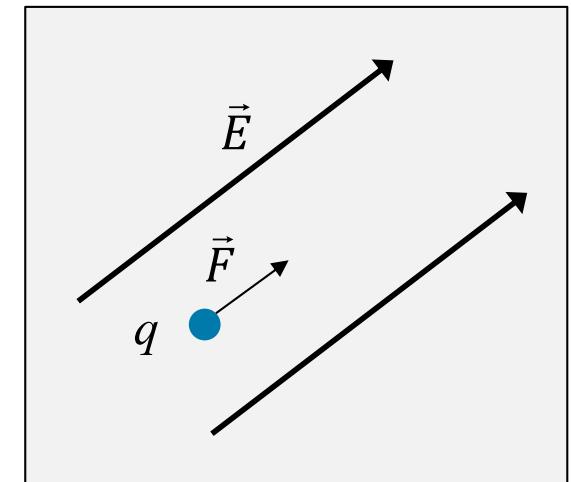
Elektrische Feldstärke E definiert über Kraft F auf Probeladung q :
(Coulombsches Gesetz, 1785)

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die Richtung der Feldlinien gibt die Kraftrichtung auf positive Testladungen an.

Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke.



Elektrische Feldstärke E erzeugt durch alle Ladungen Q bzw. Raumladungsdichte ρ_{ges} im Raum, einschließlich Polarisationsladungen:

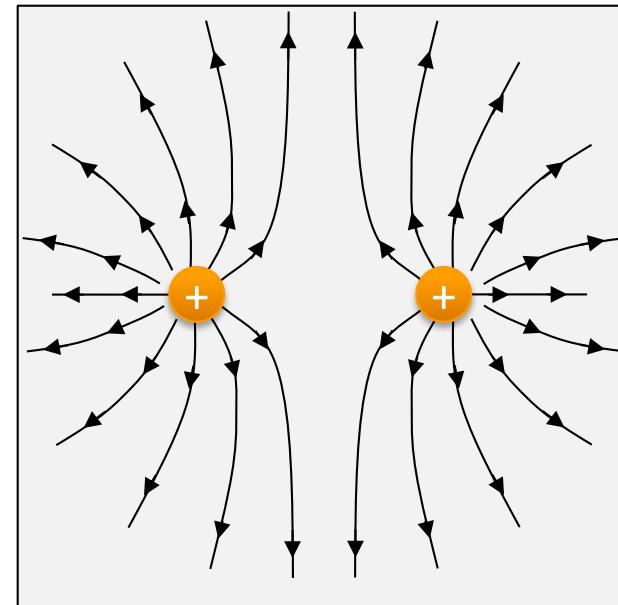
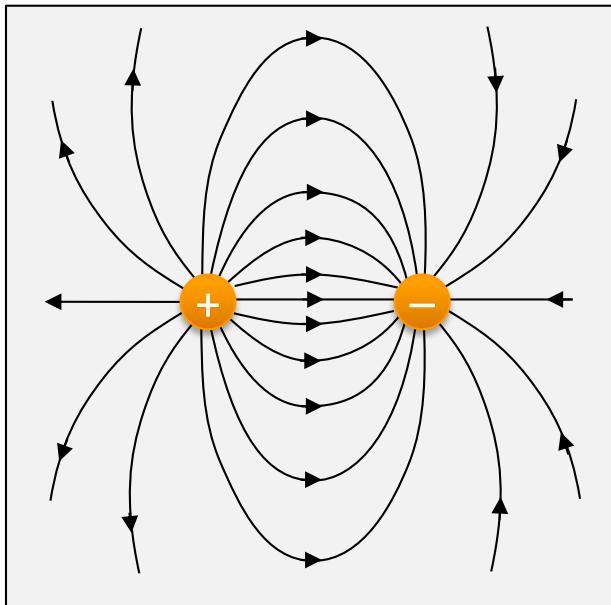
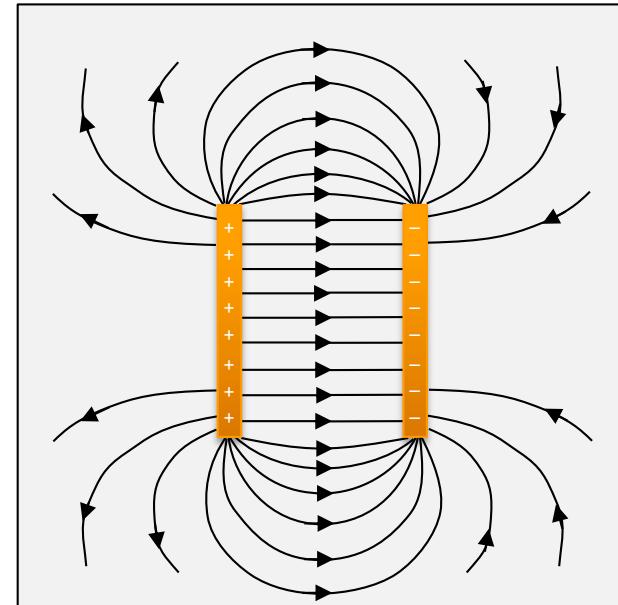
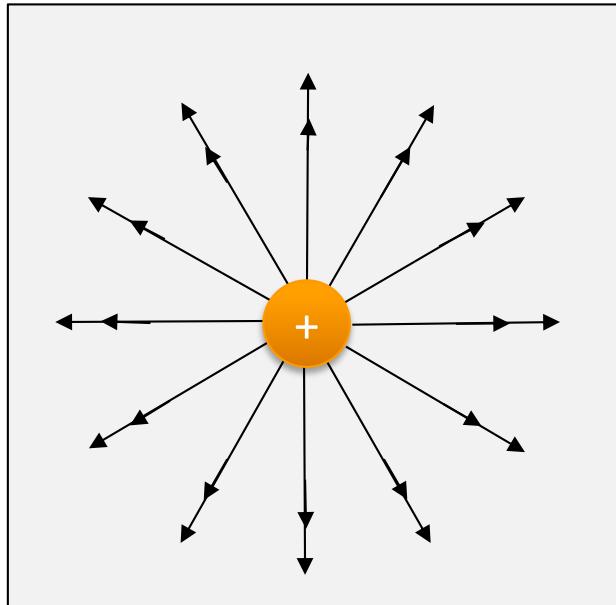
Maxwell:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ges}}}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

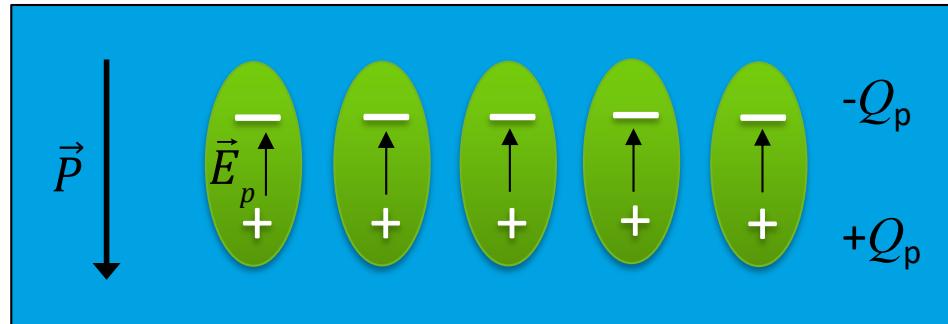
Superpositionsprinzip: Felder jeder einzelnen Ladung individuell berechnen, dann alle addieren.
Achtung: Gilt nur bei Linearität, d.h. keine Sättigungseffekte

1.1 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen II



Materialeffekte: Elektrische Polarisation P

Makroskopisch
gemittelt über
molekulare Effekte



In Molekülen gebundene,
separierte Ladungen,
quasineutral

Elektrisches Polarisationsfeld \vec{E}_p , hervorgerufen durch
Ladungstrennung/-verschiebung innerhalb der Moleküle

Definition der elektrischen Polarisation:

$$\vec{P} = -\epsilon_0 \cdot \vec{E}_p$$

$$[\vec{P}] = \frac{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

1.2 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen IV

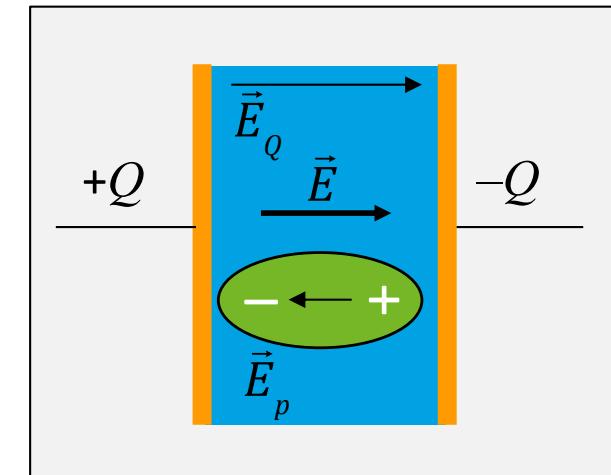
Die Überlagerung

- des durch freie Ladungen Q erzeugten Feldes \vec{E}_Q
- und des durch Ladungsverschiebung in Molekülen erzeugten Polarisationsfeldes \vec{E}_p bzw. \vec{P}

liefert ein effektives Gesamtfeld \vec{E} :

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_p$$

Da E_p entgegen E_Q ergibt sich $E < E_Q$



Ersetzen von \vec{E}_p durch $-\vec{P}/\epsilon_0$ und Multiplikation mit ϵ_0 liefert

$$\epsilon_0 \vec{E}_Q = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

Mit der Definition der **Verschiebungsdichte** \vec{D} (auch: elektrische Flussdichte)

$$\vec{D} \stackrel{\text{Def}}{=} \epsilon_0 \cdot \vec{E}_Q$$

Ergibt sich die bekannte Materialgleichung:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$[\vec{D}] = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

Anschaulicher ist die Schreibweise: $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{P})$

1.2 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen V

Ausgangsgleichung: $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P$

Wenn das Polarisationsfeld \vec{E}_P linear proportional zum elektrischen Gesamtfeld \vec{E} ist

$\vec{E}_P = -\chi_{el} \cdot \vec{E}$ (Richtung entgegengesetzt zu \vec{E}) χ_{el} : elektrische Suszeptibilität

so erhält man durch Einsetzen: $\vec{E} = \vec{E}_Q - \chi_{el} \cdot \vec{E}$

Umformen führt auf: $\vec{E}_Q = (1 + \chi_{el}) \cdot \vec{E}$

Die relative Dielektrizitätszahl des Materials ε_r wird definiert als: $\varepsilon_r = \overset{\text{Def}}{(1 + \chi_{el})}$ mit $\varepsilon_r \geq 1$

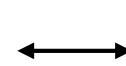
Somit ergibt sich $\vec{E}_Q = \varepsilon_r \cdot \vec{E}$

Mit der bekannten Definition für die Verschiebungsdichte $\overset{\text{Def}}{\vec{D}} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}_Q$

erhält man die übliche Schreibweise:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$$

Nur bei Proportionalität
(linearer Bereich)



$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}}$$

allgemeingültig

1.2 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen VI

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \rho_{ges}$$

Allgemein gültige Maxwell-Gleichung unter Berücksichtigung aller, also der freien und der in dielektrischen Molekülen gebundenen Ladungen.

$$\left. \begin{array}{lll} \rho_{ges} = \rho & + & \rho_p \\ \text{frei} & & \text{gebunden} \\ \vec{E} = \vec{E}_Q & + & \vec{E}_p \end{array} \right\} \text{Superpositionsprinzip}$$

$$\rightarrow \operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}_Q) = \rho$$

Es genügt also die Kenntnis von ϵ_r und der Verteilung der freien Ladungen zur Berechnung des elektrischen Feldes

$$\rightarrow \operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}_P) = \rho_p \quad \text{Problem: } \rho_p \text{ unbekannt}$$

Aber im Fall linearer Materialgleichungen gilt:

$$\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \iff \epsilon_0 \vec{E}_Q = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \implies \vec{E} = \vec{E}_Q / \epsilon_r$$

Traditionelle Schreibweise:

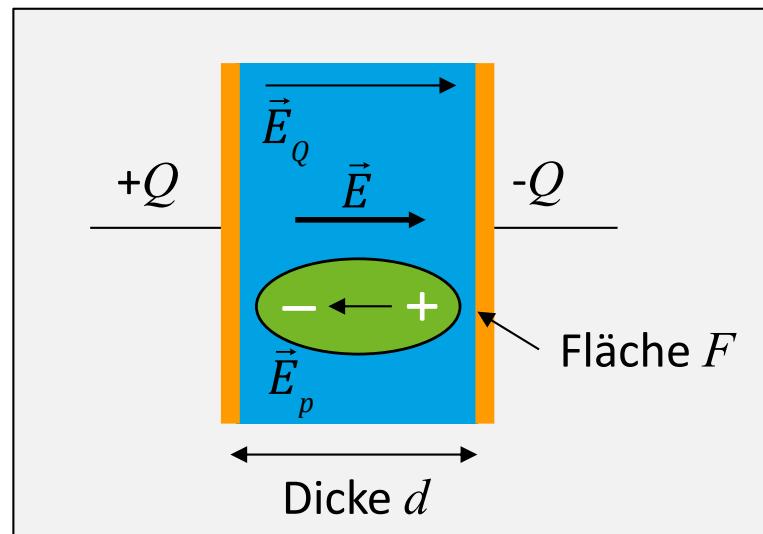
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}$$

ϵ_r ist eine materialspezifische Kenngröße und oft aus Tabellen oder Datenblätter bekannt.

Berechnung der relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r

Im Inneren des Kondensators sind Moleküle mit polarisierbaren Elektronenorbitalen mit der Dichte von N Molekülen pro Volumeneinheit statistisch verteilt.

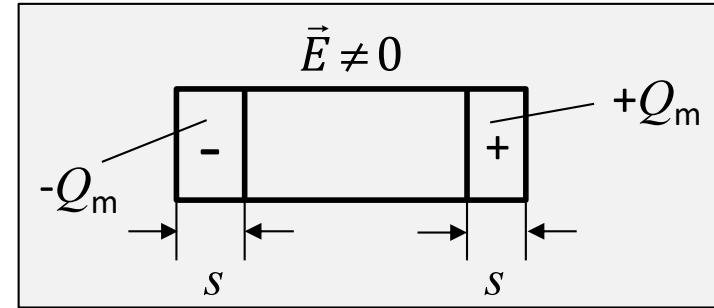
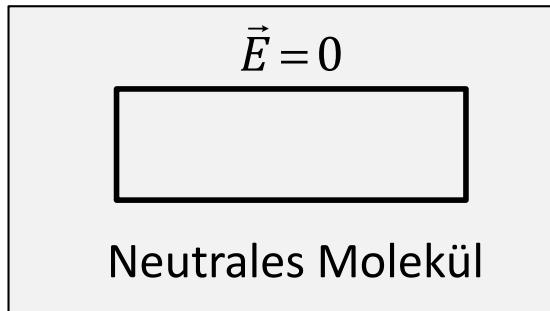


Jedes dieser Moleküle erzeugt einen kleinen Beitrag zum Gesamtpolarisationsfeld \vec{E}_p aller Moleküle.

Das elektrische Feld erzeugt in jedem der Moleküle eine kleine Ladungstrennung, weg vom neutralen Gleichgewicht, um die Distanz s .

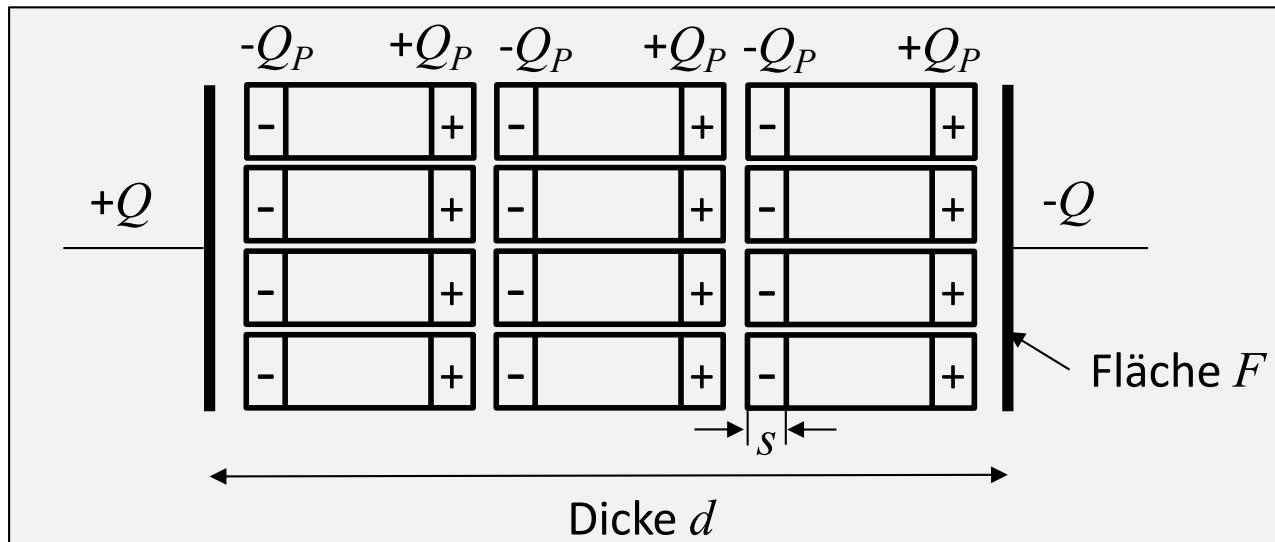
Durch die unterschiedliche Polarität ergibt sich eine Rückstellkraft r , die der Polarisation entgegenwirkt und so ein Gleichgewicht erzeugt.

1.3 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen VIII



Der Ladungsüberschuss am Moleköl $+Q_m$ und $-Q_m$ ist gegeben durch die Raumladungsdichte der Elektronen ρ_- , durch die mittlere Querschnittsfläche des Moleküls F_m und durch die Länge s der Ladungstrennung: $-Q_m = \rho_- \cdot F_m \cdot s$

Zur einfacheren Berechnung des gemittelten Gesamtfeldes E_p wird als Idealisierung angenommen, dass die Moleküle in zu den Kondensatorplatten parallel ausgerichteten Schichten angeordnet sind.



In Dielektrika kommt der durch Umorientierung von ortsfesten, elektrisch geladenen Dipolen zu Polarisation.

In den Molekülen entsteht durch die Anziehung der Pole eine Rückstellkraft r .

1.3 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen IX

Die gesamte Polarisationsladung Q_p ist die Summe der molekularen Teilladungen Q_m über die gesamte Querschnittsfläche A

$$Q_p = \sum Q_m = \rho \cdot F \cdot s = N \cdot q_e \cdot F \cdot s$$

N ist die Dichte der Moleküle, also die Anzahl pro Volumen
 $F \cdot s$ ist das Volumen der einen Ladungsschicht am Rand

Das Gesamtfeld E setzt sich aus der Überlagerung des durch die Ladungen auf den Elektroden des Kondensators hervorgerufenen E_Q sowie dem über alle Moleküle gemittelten E_p zusammen.

Die relative Dielektrizitätskonstante ergibt sich aus:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e^2}{r}$$

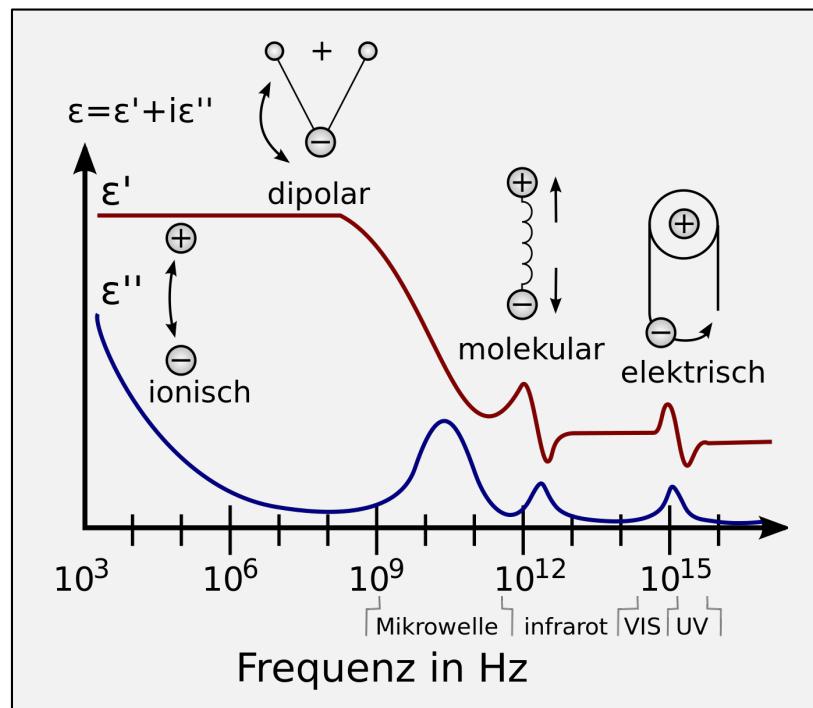
Die relative Dielektrizitätskonstante hängt nur von der Dichte N der Moleküle und von deren Rückstellkonstanten r ab.

Diese stark vereinfachte Modellvorstellung ist zur Beschreibung der in praktischen Anwendungen wichtigen und messbaren Effekte vollkommen ausreichend.

1.3 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen X

Im Allgemeinen ist die relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität) ein Tensor, d.h. eine Matrix, durch die nicht nur der Betrag, sondern auch die Richtung von E dreidimensional gegenüber D verändert wird. Vereinfacht lässt sich die Permittivität als komplexe Zahl darstellen (dann nur zweidimensionale Richtungsänderung).

Außerdem ist ϵ_r bei vielen Stoffen frequenzabhängig. Beispiel Wasser: ϵ_r ca. 80 bei niedrigen Frequenzen, ca. 5 bei hohen Frequenzen (GHz-Bereich). Im Vakuum (Luft) ist $\epsilon_r = 1$.



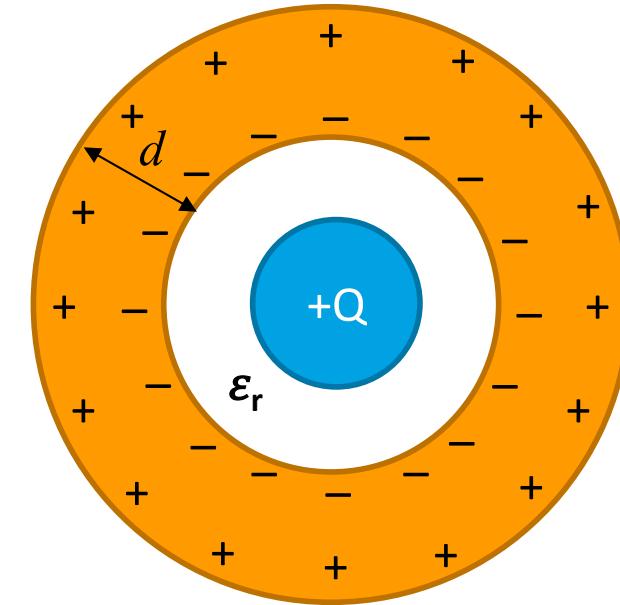
Verlauf der komplexwertigen relativen Permittivität über einen weiten Frequenzbereich, aufgespalten in Real- (rot) und Imaginärteil (blau) mit symbolischer Darstellung der verschiedenen Ursachen wie der Relaxation und bei höheren Frequenzen der atomaren und elektronischen Resonanzen.

Quelle: Prof. Kenneth A. Mauritz derivative work: Cepheiden (talk) - Dielectric_responses.png

Kunstglimmer (Handelsname „Mikanit“) wird gerne als Isolator eingesetzt und hat etwa $\epsilon_r = 6$.

Anschauliche Erklärung von Elektrischer Feldstärke \vec{E} und Elektrischer Verschiebungsdichte \vec{D}

Im Beispiel rechts ist eine Ladung $+Q$ gegeben, die auf einer Kugel (Nichtleiter) gleichmäßig verteilt ist. Darum herum befindet sich eine leitfähige Hohlkugel. In dieser Hohlkugel findet eine Ladungsverschiebung statt. Die Ladungsverschiebung ist völlig unabhängig vom ϵ_r des Zwischenraums zwischen den Kugeln.



Die **elektrische Verschiebungsdichte** \vec{D} entspricht der Oberflächenladungsdichte der Hohlkugel $[D] = \text{C/m}^2$. Für $d \rightarrow 0$ gilt $\sigma_{\text{innen}} = \sigma_{\text{außen}}$
Sie ist damit direkt mit der **Ursache** der Ladungen verknüpft, die das Feld erzeugen.

Die **elektrische Feldstärke** \vec{E} ist dagegen mit der **Wirkung** des Feldes verknüpft, denn sie wird über die Kraft definiert, die das Feld auf eine Probeladung ausübt: $\vec{E} = \vec{F}/q$
 $[E] = \text{N/C} = \text{V/m}$ (üblich)

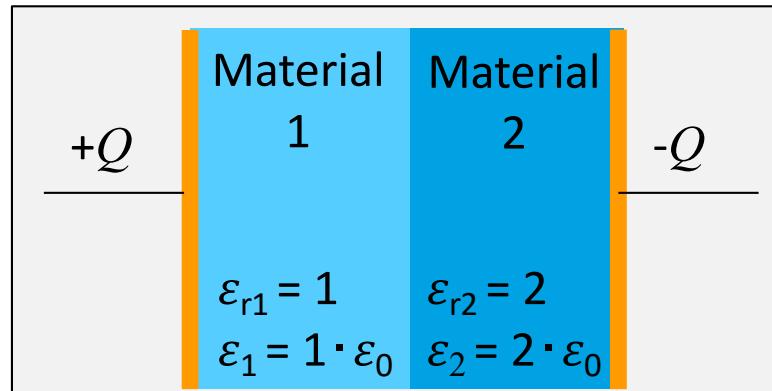
In der elektrischen Verschiebungsdichte \vec{D} sind also nur die Oberflächenladungen berücksichtigt, in der elektrischen Feldstärke \vec{E} sind alle Ladungen berücksichtigt, einschließlich Polarisationsladungen.

1.3 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen XII

Die elektrische Verschiebungsdichte D beginnt bei positiven Ladungen und endet an negativen Ladungen, allerdings nur an echten Ladungen, also nicht an Polarisationsladungen.

Die elektrische Feldstärke E hingegen beginnt und endet auch an Polarisationsladungen.

Beispiel Plattenkondensator mit zwei Materialien



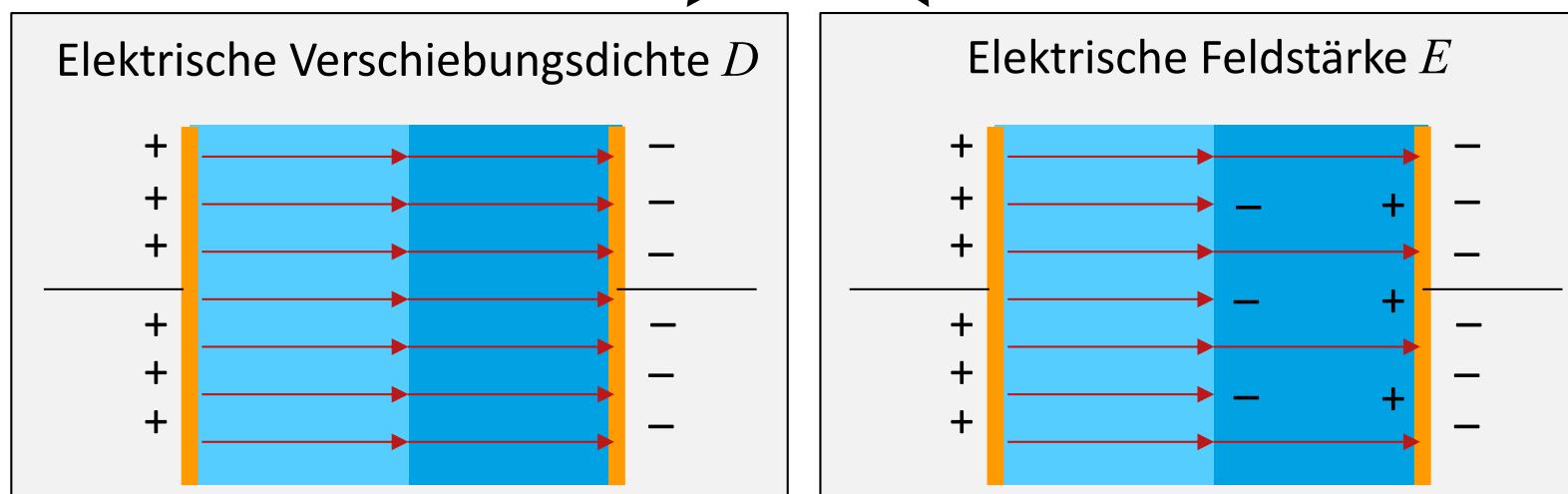
$$E_1 = D_{n1} / \epsilon_1$$

$$E_2 = D_{n2} / \epsilon_2 = E_1 / 2$$

$$U = E_1 \cdot d/2 + E_2 \cdot d/2$$

Das resultierende Feld E ist also im Dielektrikum immer kleiner als im Vakuum.

Die Verschiebungsdichte D ist hingegen unabhängig von ϵ_r gleich.



1.3 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen XIII

Bei geschichteten Isolermaterialien ziehen daher diejenigen mit kleinem ϵ_r die höchsten Feldstärken E an sich und damit die größte elektrische Beanspruchung.

Das ist insbesondere bei eingeschlossenen Luftblasen kritisch

(→ Durchschlag / Teilentladung, Glimmerscheinung → nach einiger Zeit Materialermüdung).

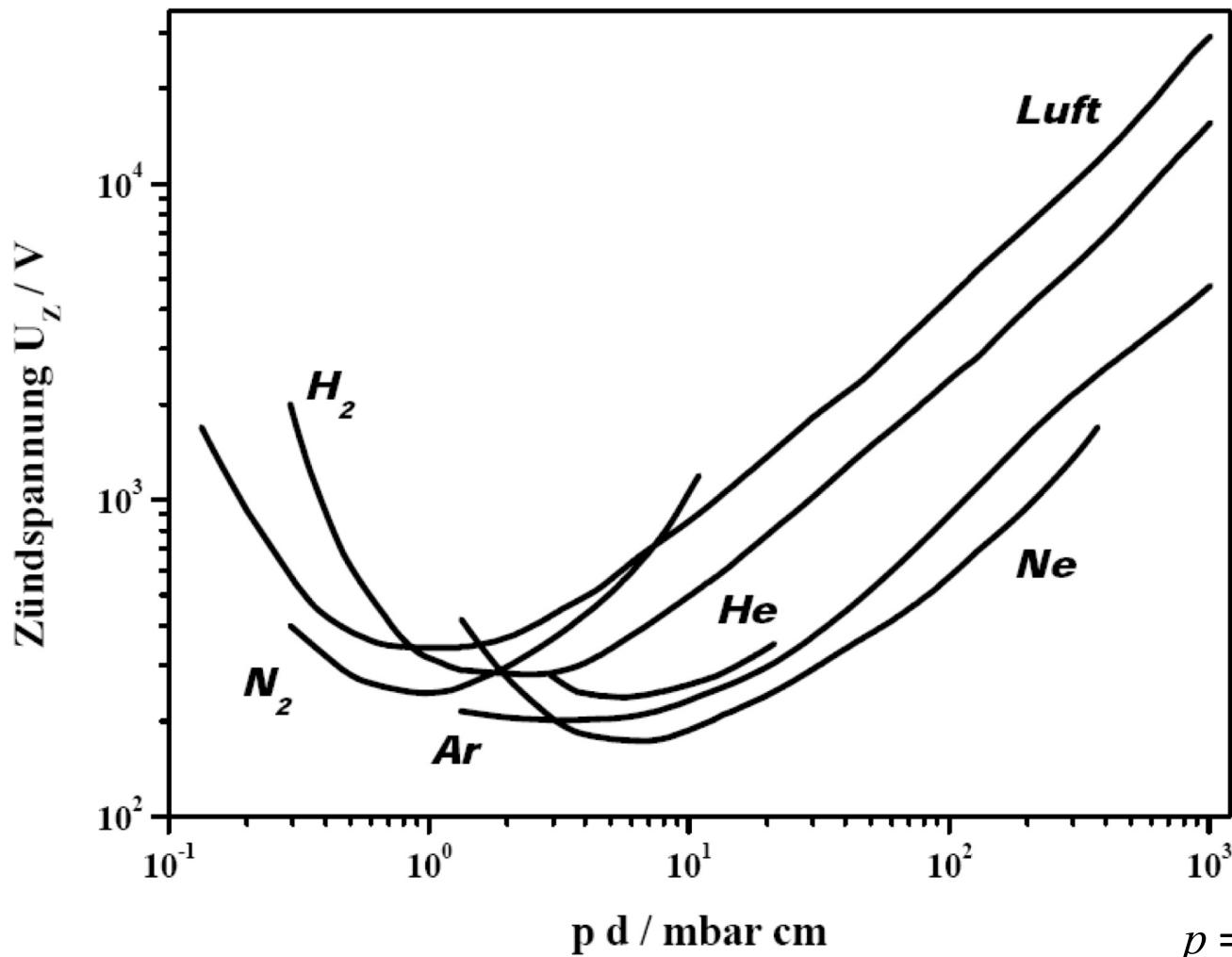
Es gibt Materialien, z.B. Glimmer, die dauerhaft Teilentladungen standhalten.

Andere Materialien, z.B. Harze und Lacke, schmelzen bei Teilentladungen in Luftbläschen lokal auf, so dass die Blase immer größer wird und es nach kurzer Zeit zum Ausfall kommt.

Dielektrische Festigkeit (Durchschlagsfestigkeit)	Luft	ca. $E_{\max} = 30 \text{ kV/cm}$
	Öl	ca. $E_{\max} = 150 \text{ kV/cm}$
	Papier	ca. $E_{\max} = 150 \text{ kV/cm}$
	Glimmer (Mikanit)	ca. $E_{\max} = 2000 \text{ kV/cm}$

Tatsächlich ist die Durchschlagfestigkeit von Gasen (Luft, Stickstoff, Wasserstoff, Helium, ...) stark nichtlinear vom Gasdruck (Aufstellhöhe) und vom Elektrodenabstand abhängig
(→ **Paschen-Gesetz**, 1889).

1.3 Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen XIV



$$U_z = \frac{B \cdot p \cdot d}{\ln \frac{A \cdot p \cdot d}{\ln(1 + \gamma^{-1})}} = E_z \cdot d = f(p \cdot d)$$

p = Gasdruck
 d = Elektrodenabstand
 U_z = Zündspannung
 A, B = Konstanten
 γ = Konstante

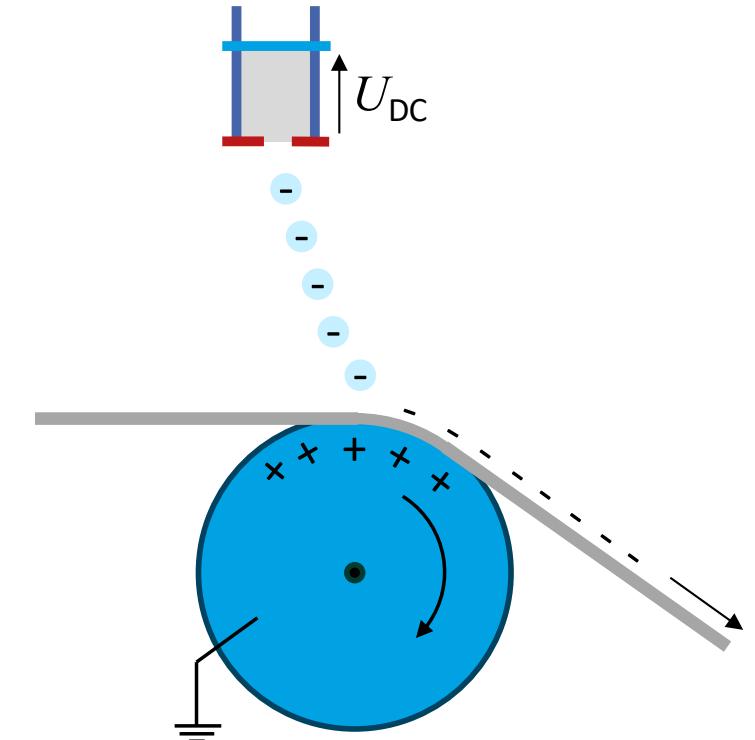
Quelle: Diplomarbeit von Fedjuschenko Andreas, Uni Frankfurt, 2009

1.4 Elektrostatische Aufladung I

Auch auf Nichtleiter (Isolatoren) kann man zusätzliche, freie Ladungen aufbringen, so dass der Nichtleiter damit insgesamt geladen wird („Nettoladung“) und ein *D*-Feld erzeugt.

→ Elektrostatische Aufladung

Diese Ladungen sind aber nach dem Aufbringen unbeweglich und führen nicht zu einem Stromfluss.



Ein System zur elektrostatischen Aufladung besteht aus einem Hochspannungsgenerator und einer Elektrode. Der Hochspannungsgenerator liefert die für das Erzeugen einer elektrostatischen Ladung benötigte Hochspannung. Diese kann 3.000 bis 60.000 Volt betragen.

Quelle: <https://www.simco-ion.de/produkte/elektrostatisch-aufladen-1>

1.4 Elektrostatische Aufladung II

Reibungselektrizität

Die bekannteste Methode zum Aufladen von Nichtleitern ist die Reibungselektrizität, d.h. die Aufladung von unterschiedlichen, aneinander geriebenen Isolatoren wie Bernstein und Fell oder Glas und Seide. Die physikalische Ursache dieses Phänomens ist die Kontaktspannung zwischen den beiden Isolatoren, die bei plötzlicher Trennung erhalten bleibt. Die Reibung dient dabei nur zur Herstellung eines möglichst innigen Kontakts. Die Aufladung durch Reibungselektrizität ist die älteste bekannte elektrische Erscheinung (schon 550 v. Chr. beschrieben).

Der Stoff mit der höchsten Dielektrizitätszahl wird positiv aufgeladen (Coehnsche Regel):

- Haare (Katzenfell)
- Elfenbein
- Bergkristall / Quartz
- Flintglas
- Baumwolle
- Papier
- Seide
- Kautschuk
- Harz
- Lack
- Hartgummi
- Bernstein
- Schwefel



Bildquelle: <https://kidsweb.wien/experimente/elektrostatische-ladung>

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie I

Erzeugung der Verschiebungsdichte D durch Raumladungsdichte ρ

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \rho \iff \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(x, y, z)$$

Berechnungsmethode für D im Falle einfacher Symmetrien

$$\iiint_{Vol} \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \iiint_{Vol} \rho \cdot dV$$

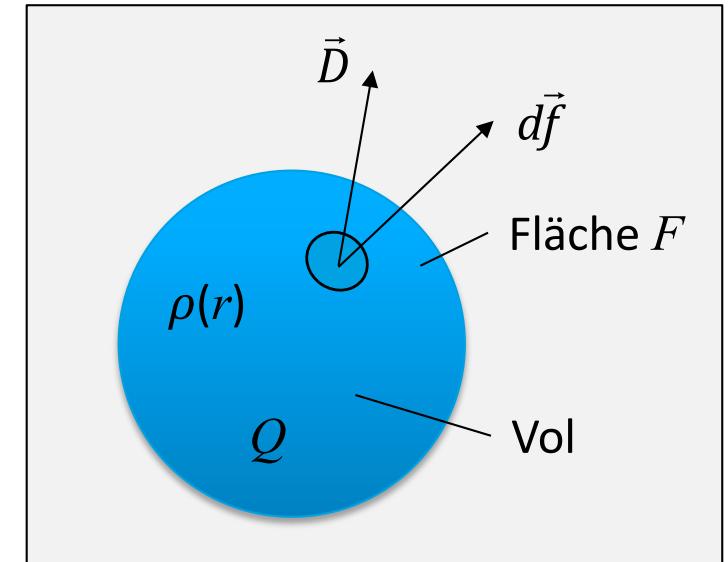
Mathematisch äquivalente Darstellung

Satz von Gauß

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol} \rho \cdot dV$$

„Satz vom Hüllenfluss“

Wichtig für die praktische Nutzung:
 1) Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
 2) Wahl einer geschlossenen Integrationsfläche



Kugelförmiger Nichtleiter mit Raumladungsdichte $\rho(r)$

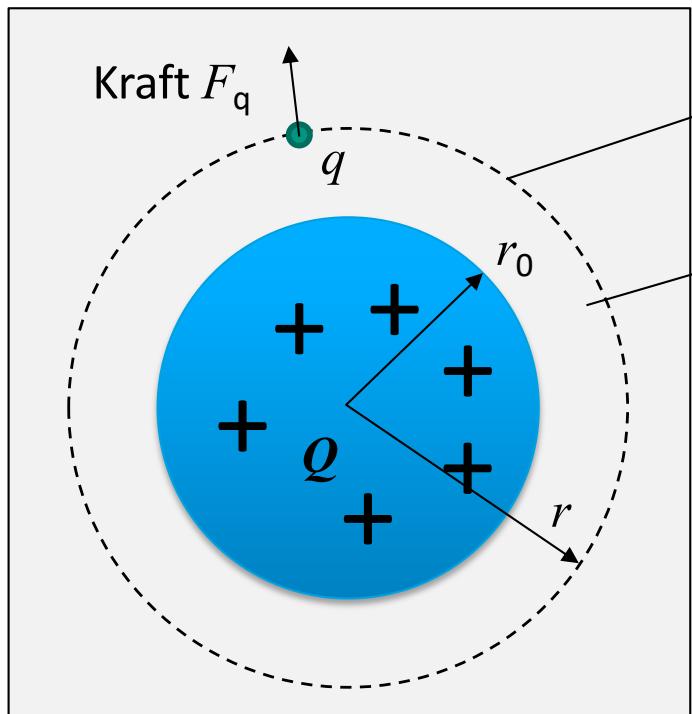
Gesamte Ladung Q im Volumen

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie II

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung: Kugelkoordinaten

Symmetrie von Kugel und Ladungsverteilung

$\rightarrow \vec{D} = D_r(r) \cdot \vec{e}_r$ konstant auf Hüllfläche



$$\rho_0 = \frac{Q \cdot 3}{4\pi r_0^3}$$

Gesamtladung Q
innerhalb der nicht-leitenden Kugel mit
Radius r_0

Kugelsymmetrie:

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

Berechnung Außenfeld für $r > r_0$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \rightarrow \iiint_{Vol} \operatorname{div} \vec{D} \cdot dV = \iiint_{Vol} \rho \cdot dV$$

$$\iint_{F(r)} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol(r)} \rho \cdot dV \Rightarrow D_r \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}; D_\vartheta = 0; D_\varphi = 0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \Rightarrow F_{qr} = q \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}$$

Folgerung der Kraftgleichung
aus den Maxwell-Gleichungen

2. Satz von Hullenfluss und Symmetrie III

Berechnung Innenfeld für $r < r_0$

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const.} \quad r < r_0$$

$$\oint\int\int_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol} \rho \cdot dv$$

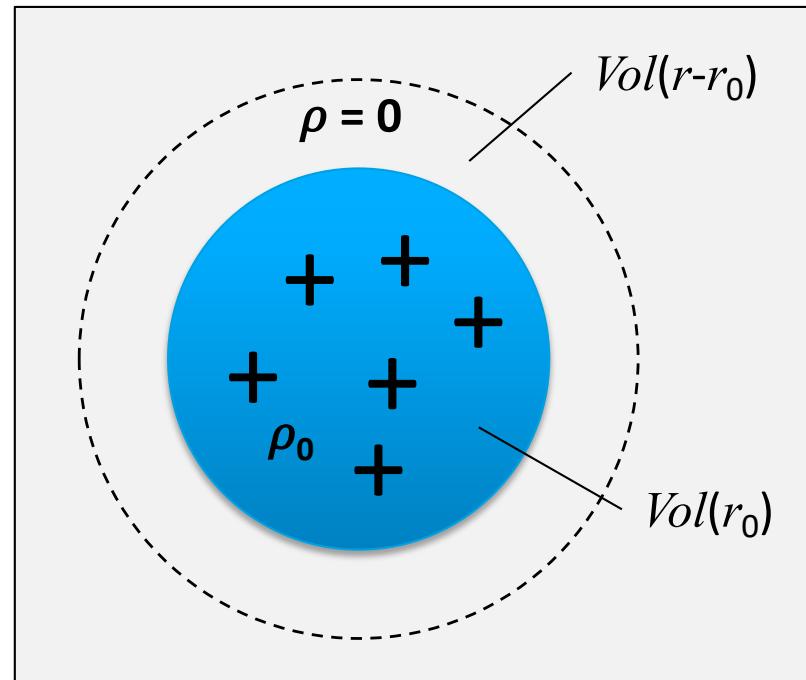
$$D_r \cdot \vec{e}_r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \underbrace{\sin \vartheta \cdot d\vartheta d\varphi}_{4\pi} = \rho_0 \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \cdot \underbrace{\sin \vartheta \cdot d\vartheta d\varphi dr}_{4\pi}$$

$$\frac{D_r \cdot 4\pi r^2}{\text{Kugelfläche}} = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\text{Kugelvolumen}} \quad \Rightarrow \quad D_r(r) = \frac{\rho_0}{3}r$$

2. Satz von Hullenfluss und Symmetrie IV

Berechnung Außenfeld für $r > r_0$

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{Vol(r)} \rho \cdot dv \\
 &= \iiint_{Vol(r_0)} \rho \cdot dv + \iiint_{Vol(r-r_0)} \rho \cdot dv \\
 &= \rho_0 \cdot \iiint_{Vol(r_0)} dv + 0 \cdot \iiint_{Vol(r-r_0)} dv \\
 &= \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \\
 &= Q
 \end{aligned}$$

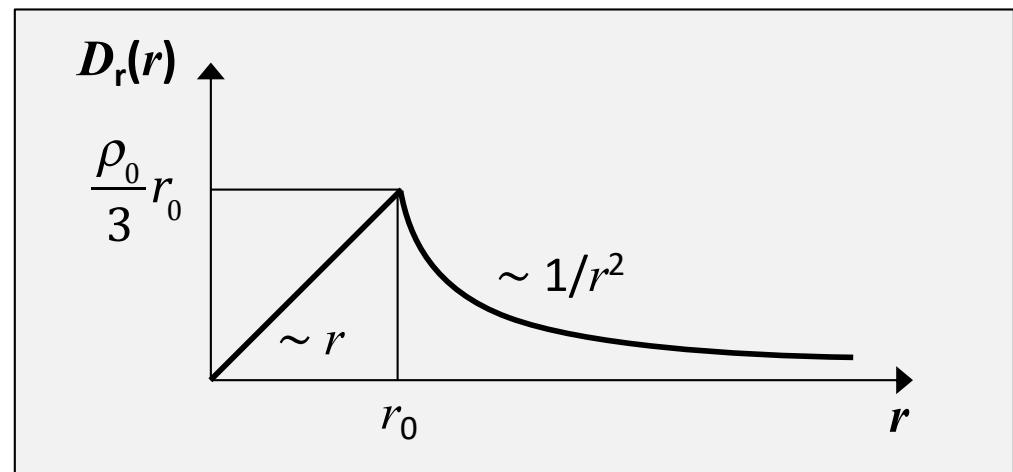


von zuvor:

$$D_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

variabel fest

$$D_r(r) = \frac{\rho_0}{3} \frac{r_0^3}{r^2}$$



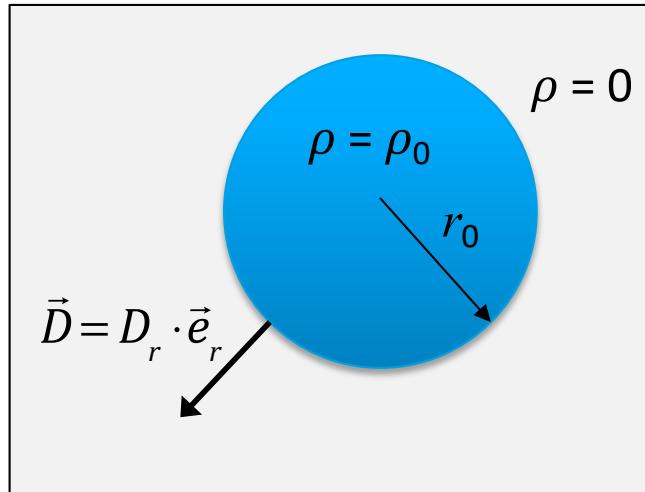
2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie V

Umkehrung: Berechnung von $\rho(r)$ aus gegebenem $D_r(r)$

Innen $r < r_0$

$$\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{3} \cdot r \cdot \vec{e}_r$$

Nur r -Komponente



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot D_r \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot r \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot \frac{\partial r^3}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot 3r^2 \\ &= \rho_0 \end{aligned}$$

Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\implies \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \quad \text{q.e.d}$$

Außen $r > r_0$

$$\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

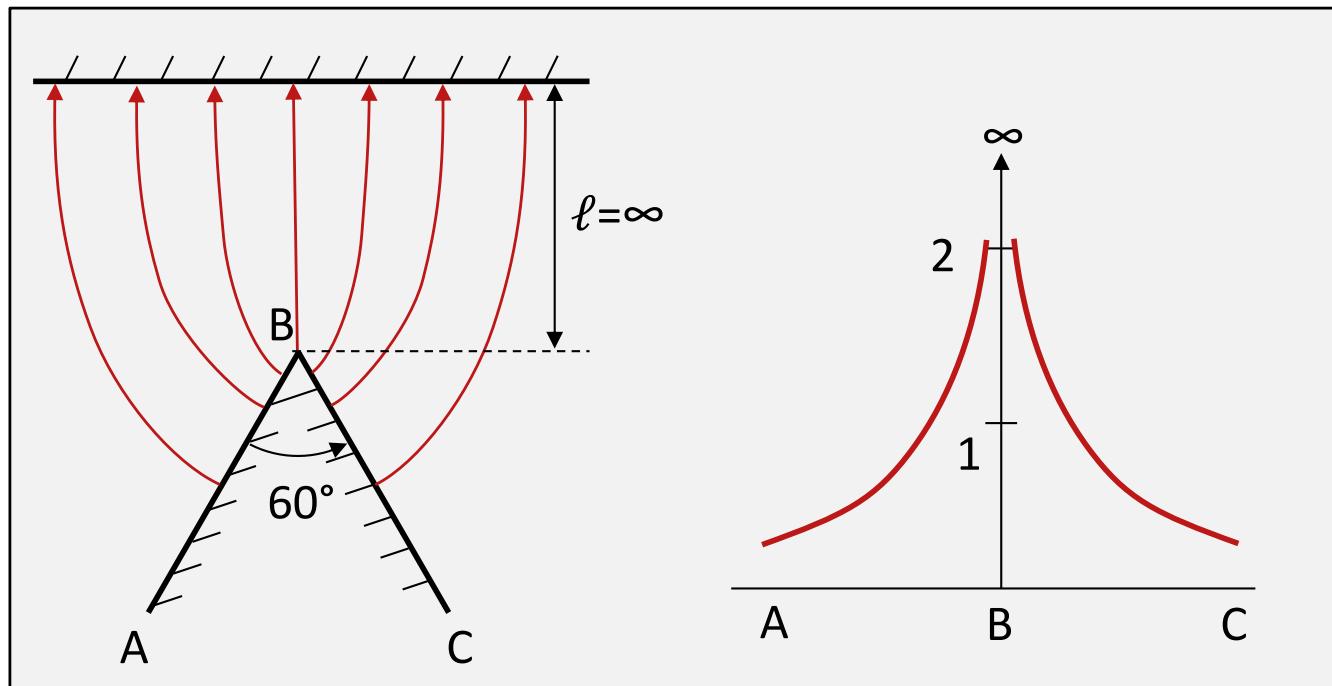
$$\implies \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 0} \quad \text{q.e.d}$$

2. Satz von Hullenfluss und Symmetrie VI

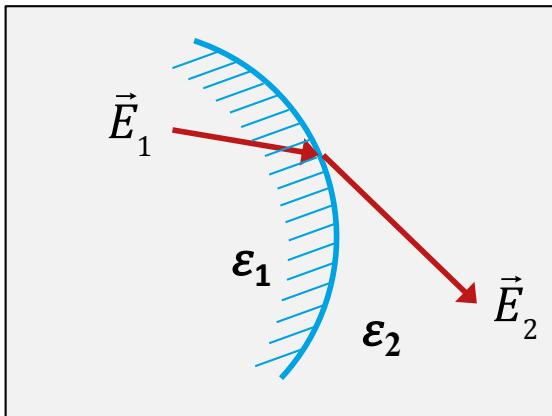
$$\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \text{an der Oberfläche der Kugel ist } r = r_0$$

→ Bei gegebener Ladung Q wird das Feld an der Oberfläche um so höher, je kleiner r_0 ist.

Auch an Spitzen, Ecken und Kanten verdichtet sich das elektrische Feld → **Spitzenwirkung**. Dieser Effekt tritt bei allen elektrisch geladenen Strukturen mit spitzen Winkeln und auch bei dünnen Leitern auf. Er kann zu Durchschlägen in der Luft führen (Koronaentladung, Spitzenentladung, Elmsfeuer, Knistern und Brummen von Hochspannungsleitungen).



3. Übergänge an Grenzflächen I



Isolatoren
Optische Linsen

Berechnung der Tangentialkomponenten

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \iint_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

nach Maxwell

Stokescher Satz

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -\frac{d}{dt} \iint_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{E}_i = E_{ti} \cdot \vec{e}_t + E_{ni} \cdot \vec{e}_n \quad i=1,2$$

$$d\vec{s}_1 = ds \cdot \vec{e}_t \quad \text{Wegelemente } d\vec{s}_i$$

$$d\vec{s}_2 = ds \cdot (-\vec{e}_t)$$

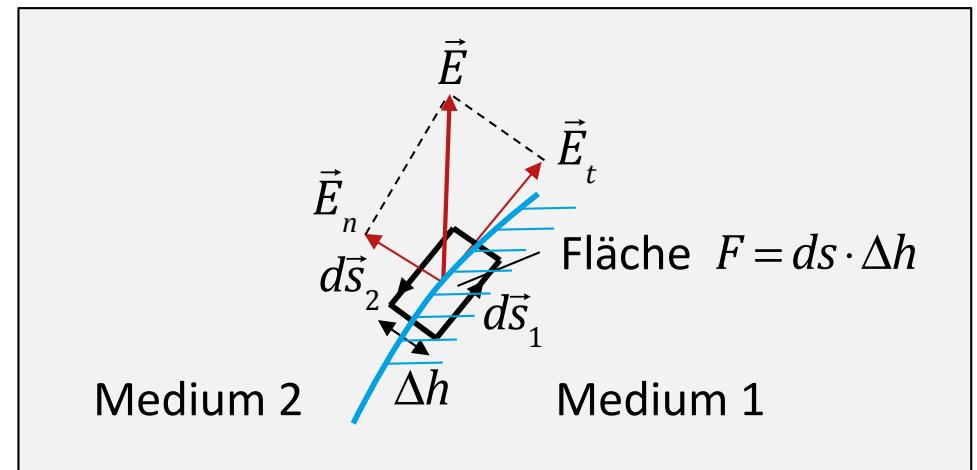
$$\rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = (E_{t1} \cdot \vec{e}_t + E_{n1} \cdot \vec{e}_n) \cdot ds \cdot \vec{e}_t = E_{t1} \cdot ds$$

$$\rightarrow \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -E_{t2} \cdot ds$$

$$\rightarrow E_{t1} \cdot ds - E_{t2} \cdot ds = 0 \rightarrow$$

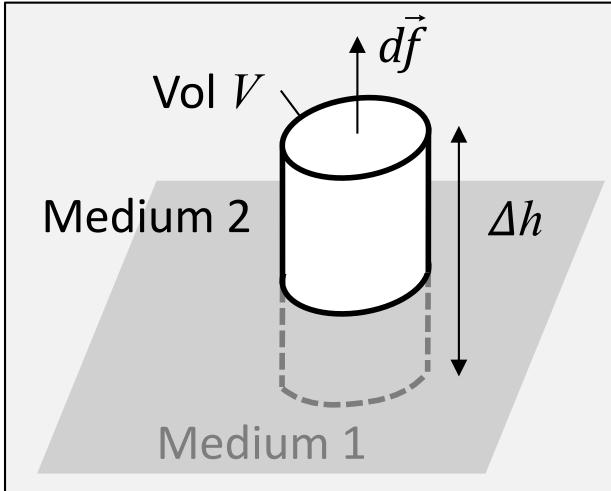
$$E_{t1} = E_{t2}$$

→



Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist an Grenzflächen stetig.

3. Übergänge an Grenzflächen II



Berechnung der Normalkomponenten

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \iiint_{Vol} \text{div } \vec{D} \cdot dv = \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol} \rho \cdot dv$$

nach Maxwell Gaußscher Satz

Volumen $V = d\vec{f} \cdot \Delta h$ wird durch Grenzfläche durchdrungen.
Boden- und Deckelflächen $d\vec{f}$ stehen senkrecht auf der Grenzfläche.
Höhe Δh mit Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten: $\vec{D}_i = D_{ti} \cdot \vec{e}_t + D_{ni} \cdot \vec{e}_n \quad i=1,2$

Oberflächenelemente $d\vec{f}$:

$$\text{Oben: } d\vec{f} = d\vec{f} \cdot \vec{e}_n$$

$$\text{Unten: } d\vec{f} = d\vec{f} \cdot (-\vec{e}_n)$$

$$\text{Rand: } \Delta h \rightarrow 0 \rightarrow F_{Rand} = 0$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iint_{Vol} D_{n2} \cdot d\vec{f} - \iint_{Vol} D_{n1} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol} \rho \cdot \Delta h \cdot d\vec{f} = \iint_{Vol} \sigma \cdot d\vec{f} \quad \Rightarrow \quad D_{n2} - D_{n1} = \sigma$$

Freie Oberflächenladungsdichte

Die Normalkomponente der elektrischen Verschiebungsdichte macht an der Grenzfläche einen Sprung gleich der freien Grenzladungsdichte. Sie ist stetig, wenn $\sigma = 0$.

3. Übergänge an Grenzflächen III

$$D_{n2} = D_{n1} + \sigma$$

Voraussetzung $\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$

$$\rightarrow \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_{n2} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_{n1} + \sigma$$

$$E_{n2} = \frac{\sigma / \epsilon_0}{\epsilon_{r2}} + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot E_{n1}$$

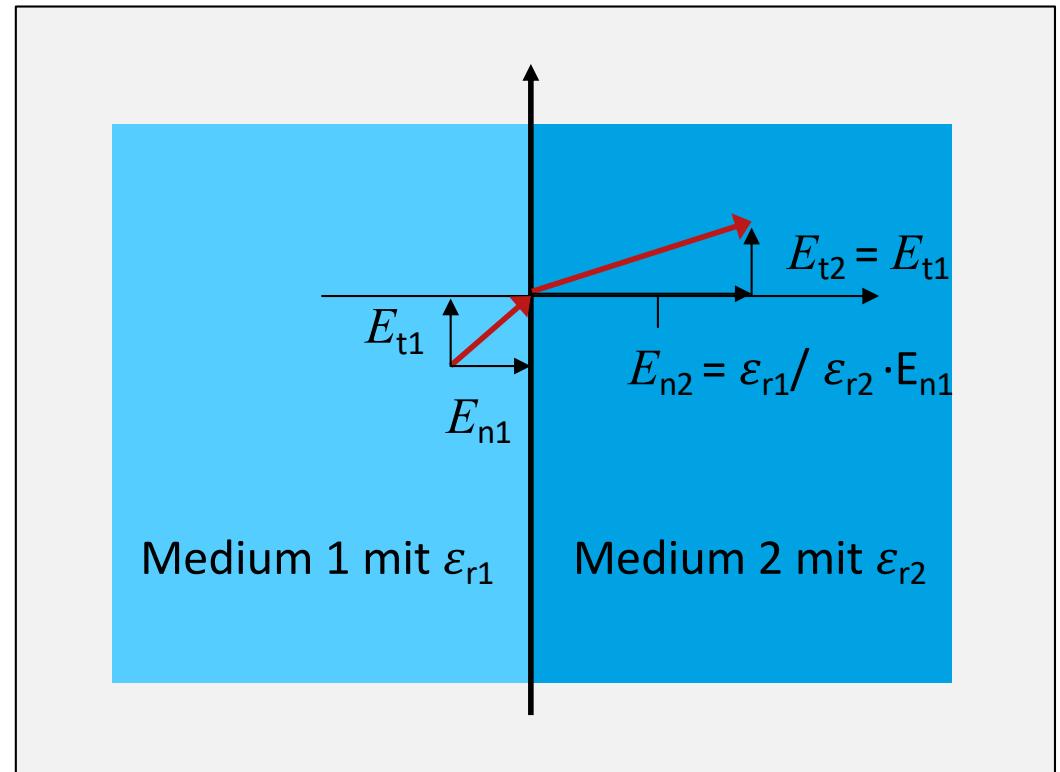
Außerdem gilt $E_{t2} = E_{t1}$

Falls $\sigma = 0$, so folgt

$$E_{n2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot E_{n1}$$

Außerdem gilt

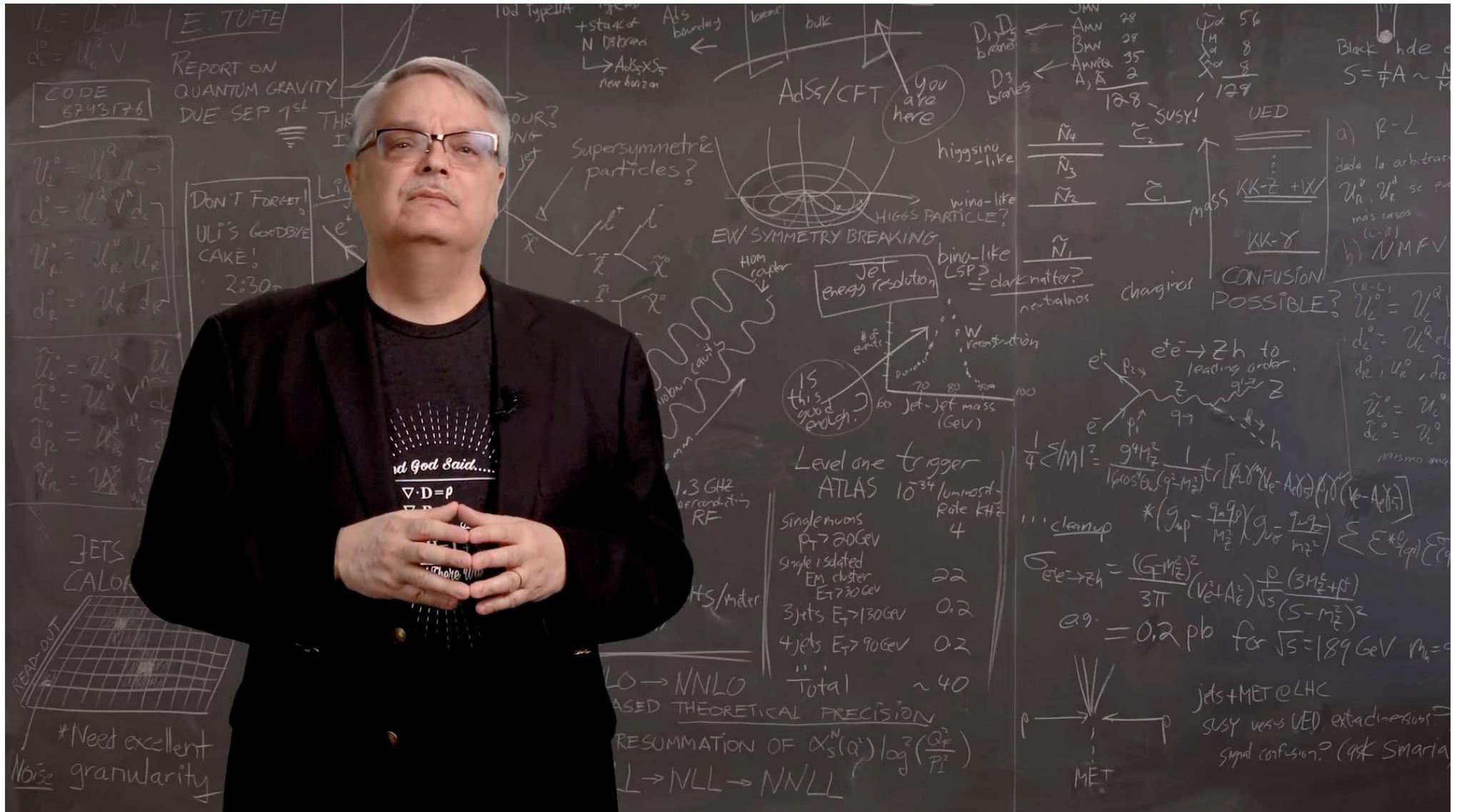
$$E_{t1} = E_{t2}$$



Richtung und Stärke von E ändern sich an Sprüngen der Dielektrizitätskonstanten.

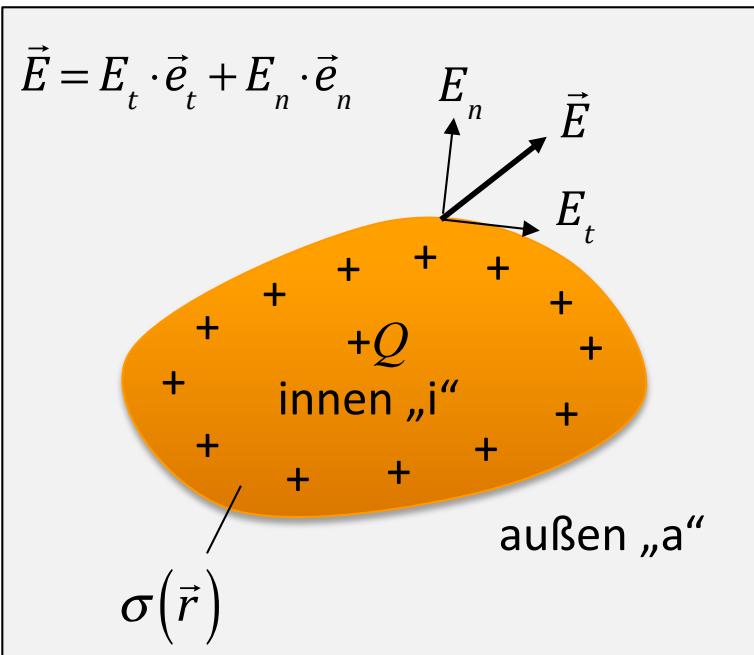
3. Übergänge an Grenzflächen IV – Anwendung Lichtreflexion und -beugung

Quelle: <https://www.youtube.com/watch?v=NLmpNM0sgYk>



3. Übergänge an Grenzflächen V – Anwendung Metallocberflächen

Felder an Leiteroberflächen



$$\boxed{\vec{E}_i = 0} \quad \text{da } \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}_i \text{ und } \vec{J} = 0$$

Stetigkeit der Normalkomponenten:

$$D_{na} - D_{ni} = \sigma$$

$$\epsilon_{ra} \cdot \epsilon_0 \cdot E_{na} - \epsilon_{ri} \cdot \epsilon_0 \cdot E_{ni} = \sigma$$

$$E_{na} = \frac{\sigma}{\epsilon_{ra} \cdot \epsilon_0}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_a = \frac{\sigma}{\epsilon_{ra} \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{e}_n}$$

Stetigkeit der Tangentialkomponenten:

$$E_{ti} = E_{ta}$$

$$E_i = 0 \rightarrow E_{ti} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{E_{ta} = 0}$$

4.1 Potentialfunktion I

Definition

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi$$

Potentialfunktion

$$[E] = \text{V/m}$$

$$[\Phi] = \text{V}$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Das mathematische Skalarfeld $\Phi(\vec{r})$, auch Potentialfunktion genannt, beschreibt vollständig das reale physikalische elektrische Feld \vec{E} . Das Potential Φ selbst bewirkt keine messbaren Kräfte.

Der Nullpunkt (Bezugspotential, Erdung) ist durch eine beliebige Konstante C wählbar, ohne das vom Potential beschriebene elektrische Feld zu verändern. Die Potentialfunktion ist also nicht eindeutig bestimmt:

$$\vec{E}_1 = -\text{grad}\Phi_0(\vec{r})$$

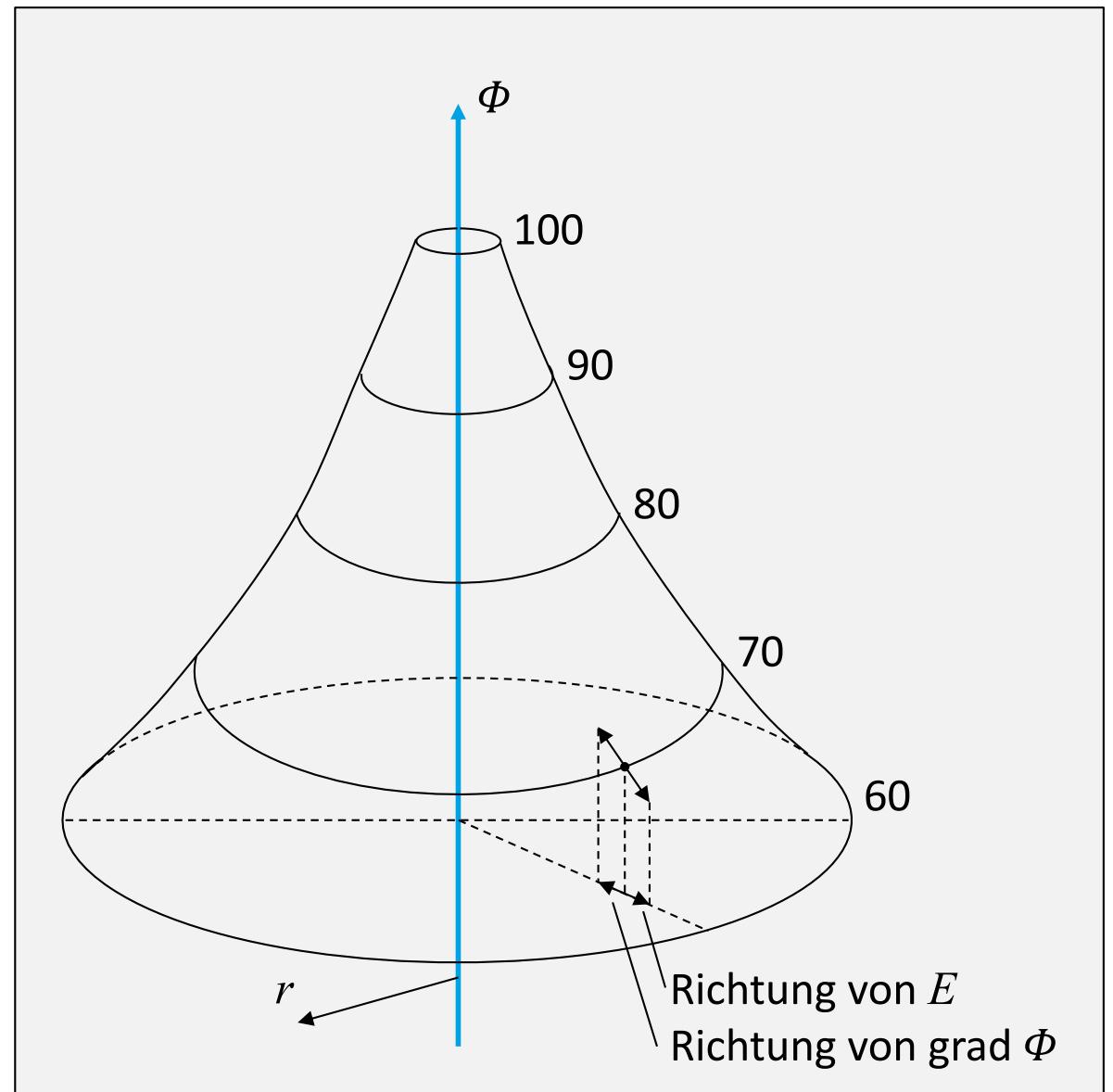
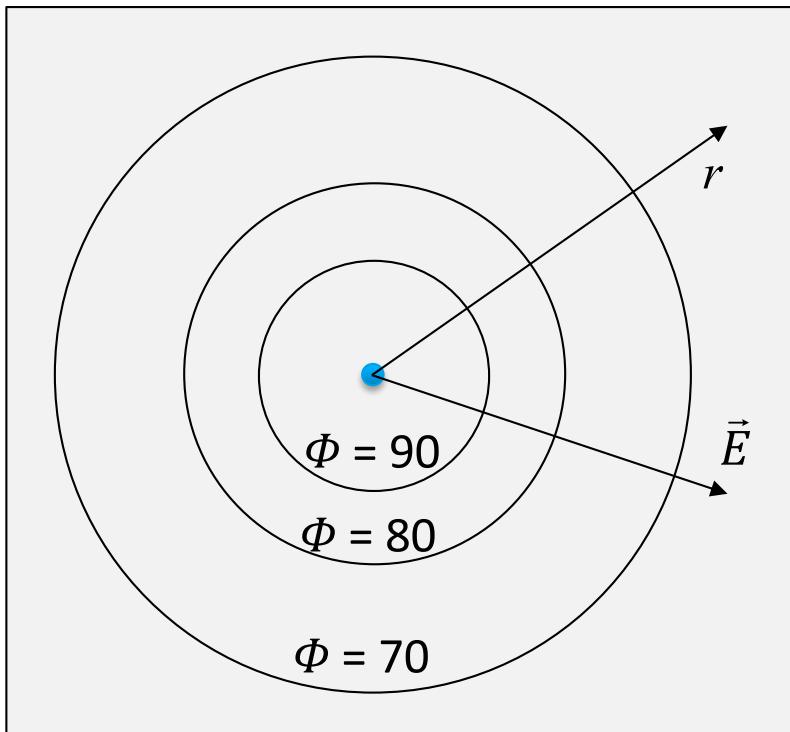
$$\vec{E}_2 = -\text{grad}(\Phi_0(\vec{r}) + C)$$

$$= -\text{grad}\Phi_0(\vec{r}) - \text{grad}C \rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

4.1 Potentialfunktion II

Beispiel Linienladung Q/ℓ

$$\vec{E} = \frac{Q/\ell}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r \quad (\text{ohne Beweis})$$



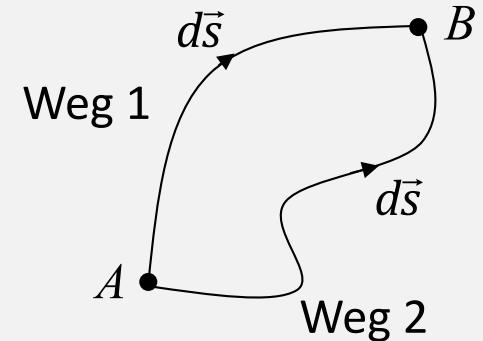
4.1 Potentialfunktion III

Die Einführung der mathematischen Hilfsgröße des Potentials erlaubt eine einfache Berechnung des Wegintegrals:

Integralsatz der Mathematik:

Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte der Potentialfunktion an den Punkten B und A – unabhängig vom integrierten Weg zwischen den Punkten.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



$$\Phi(B) - \Phi(A) = \int_A^B \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s}$$

Damit wird

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = +\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

Wichtig ist nur die Potentialdifferenz an den Orten 1 und 2, nicht der Verlauf der Potentialfunktion zwischen ihnen. **Das Potential ist wegunabhängig.**

$$U_{BA} = \Phi(B) - \Phi(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Die elektrische Spannung U_{BA} eines Punktes B gegenüber einem Punkt A ergibt sich aus der Differenz der Potentiale in diesen Punkten.

4.1 Potentialfunktion IV

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r})$$

Differentielle Darstellung

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad}\Phi \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\text{es ist } d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz \right)$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

Integrale Darstellung

4.1 Potentialfunktion V

Arbeit im elektrischen Feld

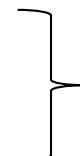
Welche Energie wird benötigt, um eine Probeladung Q' vom Ort 1 zum Ort 2 zu bewegen?

$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta W_e = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q' \cdot \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q' \cdot (\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1))}$$

ΔW_e hängt nur von r_1 und r_2 ab, nicht aber von der Wahl des Weges dazwischen.
Es wird keine Energie auf Wegen entlang von Äquipotentiallinien verbraucht.

$\Rightarrow Q' \cdot \Phi(\vec{r})$ Nennt man die potentielle Energie einer Ladung Q' am Ort r

Physikalische Bedeutung hat
aber nur die Potentialdifferenz
zwischen zwei Orten 1 und 2



Der Nullpunkt für Φ ist ja willkürlich
 $\text{grad}(\Phi + C) = \text{grad}\Phi$

Die für die Bewegung eines Körpers mit der Ladung Q' von r_1 nach r_2 erforderliche Energie W_{12} ist gleich dem Produkt aus der Ladung des Körpers und der zwischen den beiden Punkten liegenden Spannung U_{21} , also: $W_{12} = Q' \cdot U_{21}$

4.1 Potentialfunktion VI

Äquipotentialflächen

$$\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$$

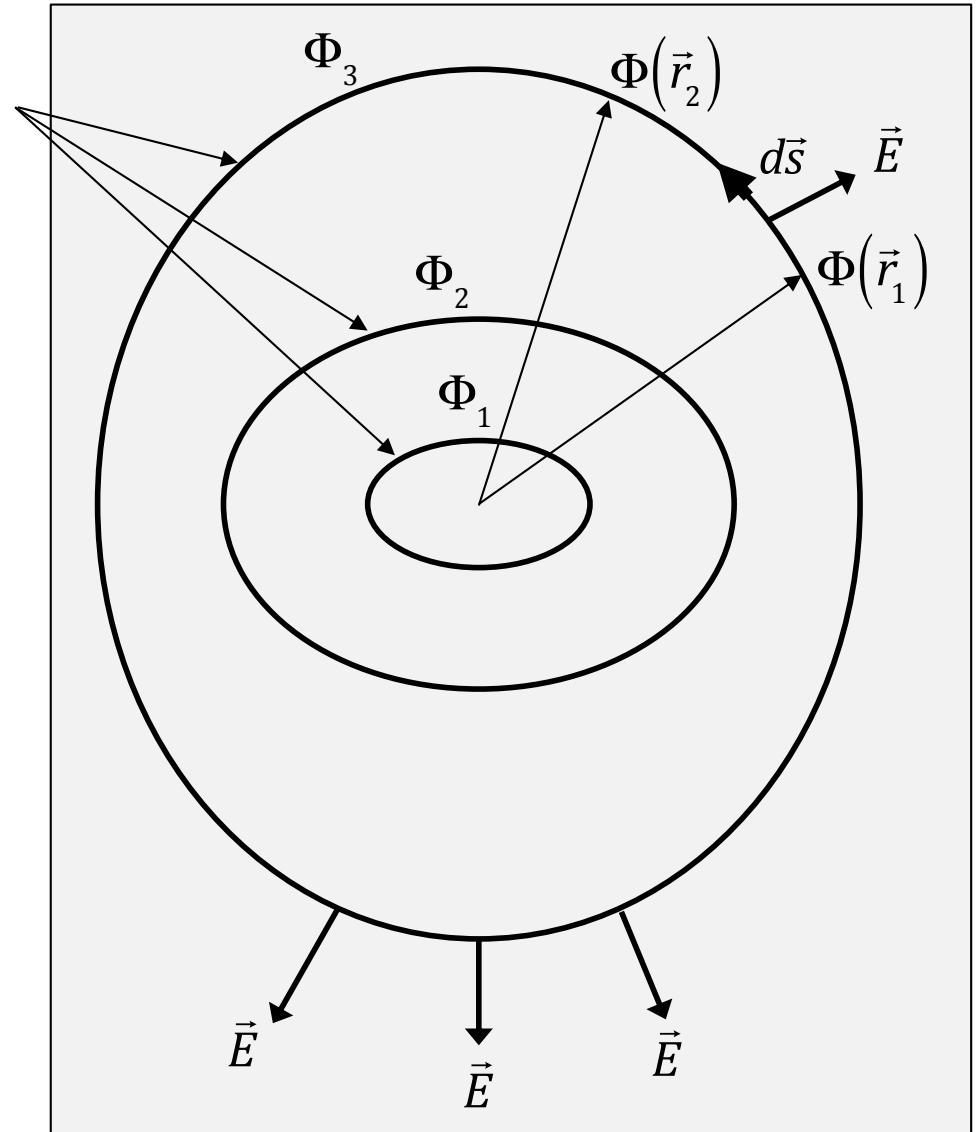
Definition von Äquipotentialflächen

$$\Phi(\vec{r}_2) = \Phi(\vec{r}_1) = \Phi_3$$

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = 0 \rightarrow - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

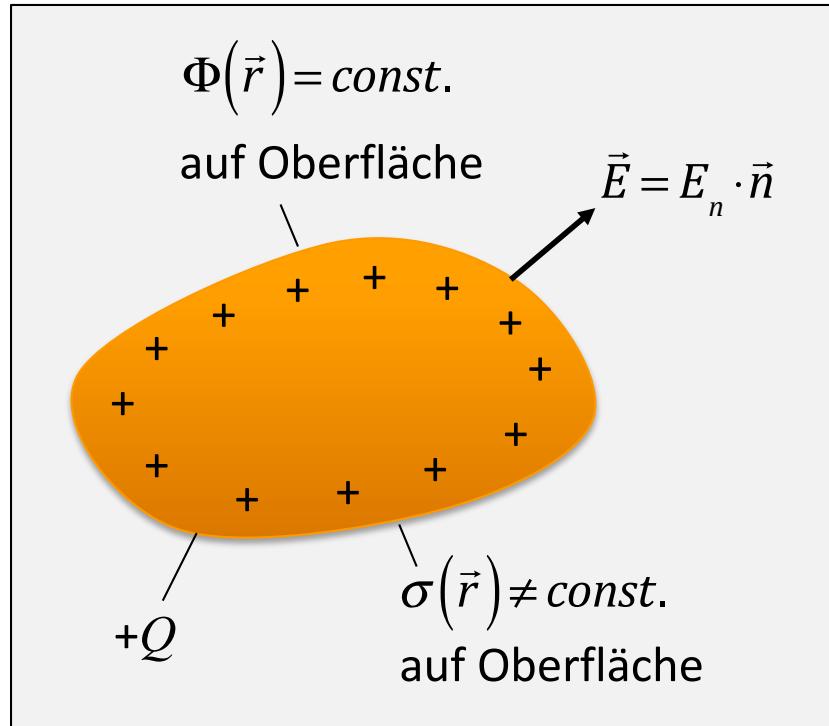
$$\Rightarrow d\vec{s} \perp \vec{E}$$

Äquipotentialflächen stehen senkrecht auf den Feldvektoren des elektrischen Feldes.



4.1 Potentialfunktion VII

Potentiale an Leiteroberflächen



An Oberflächen gilt:

$E_t = 0$ es gibt keine Tangentialkomponenten

$\rightarrow \Phi = \text{const.}$

Oberfläche ist Äquipotentialfläche

$\rightarrow \vec{E} = E_n \cdot \vec{n}$



**Das elektrische Feld (die elektrischen Feldlinien) steht
immer senkrecht auf der Oberfläche von Leitern.**

4.2 Eine Punktladung I

Gegeben sei eine Punktladung bei $r = 0$

Berechnung von $\Phi(\vec{r})$ aus bekanntem $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}\Phi(r) - \Phi(\infty) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r (E_r \cdot \vec{e}_r) \cdot (dr \cdot \vec{e}_r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r'^2} dr' \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left[-1 \cdot \frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

siehe Folie 19

Willkürliche, aber praktische Festlegung: $\Phi(\infty) = 0$

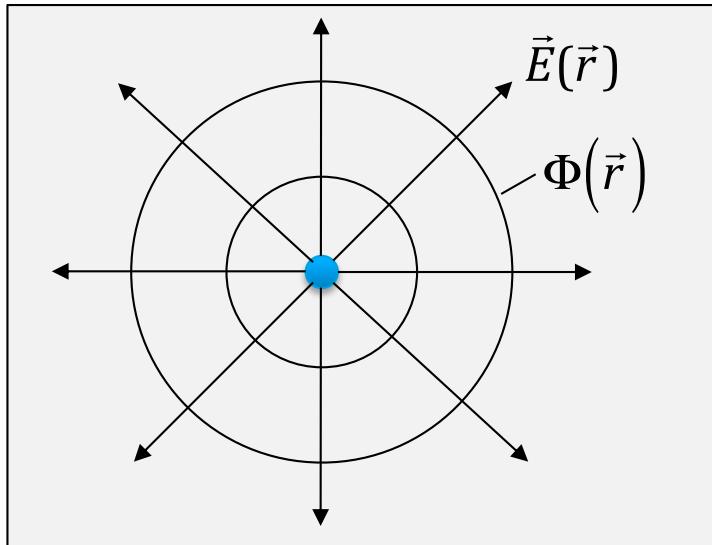
$$\rightarrow \boxed{\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r}}$$

Coulombpotential einer Punktladung

$Q' \cdot \Phi(\vec{r})$: Potentielle Energie einer Probeladung Q' im Feld der erzeugenden Ladung Q (Arbeit, um aus dem Unendlichen an den Ort r zu kommen)

4.2 Eine Punktladung II

Umkehrung: Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$ aus bekanntem $\Phi(\vec{r})$:



Äquipotentialflächen sind hier
Kugelschalen um Q

Kugelsymmetrie

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{Kugelkoordinaten}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\Phi \\ &= -\vec{e}_r \cdot \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\Phi(r)}{\partial\vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\Phi(r)}{\partial\varphi} \\ &= +\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r\end{aligned}$$

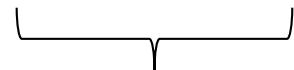
4.2 Eine Punktladung III

Welche Energie ist nötig, um die Probeladung Q' von r_1 nach r_2 im Feld einer Punktladung zu bringen?

$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \rightarrow \Delta W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q' \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{\Delta W = Q' \cdot (\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2))}$$

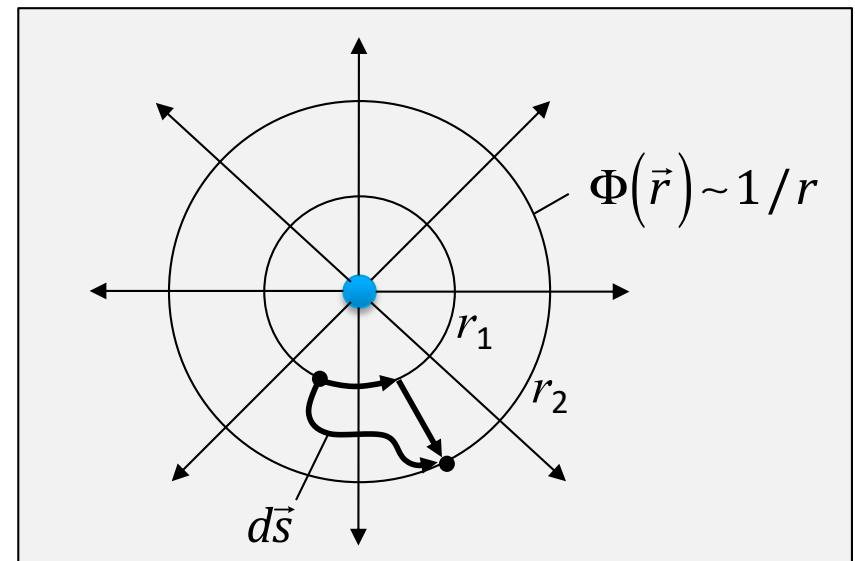
Es genügt die Kenntnis nur von $\Phi(r_1)$ und $\Phi(r_2)$



Potentialdifferenz

Beweis:

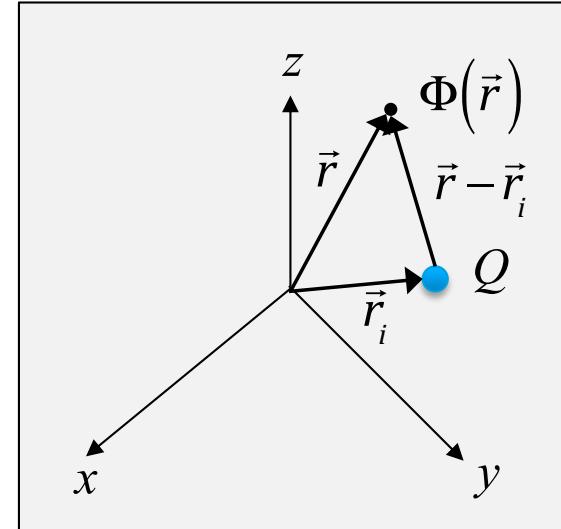
$$\begin{aligned} & \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (E_r(r) \cdot \vec{e}_r) \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (E_r(r) \cdot \vec{e}_r) \cdot (\vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot d\vartheta + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \Phi(r_1) - \Phi(r_2) \end{aligned}$$



4.3 Viele Punktladungen

Potentialfunktion einer Punktladung außerhalb des Ursprungs bei r_i

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



Potentialfunktion von n Punktladungen

Allgemein gilt:

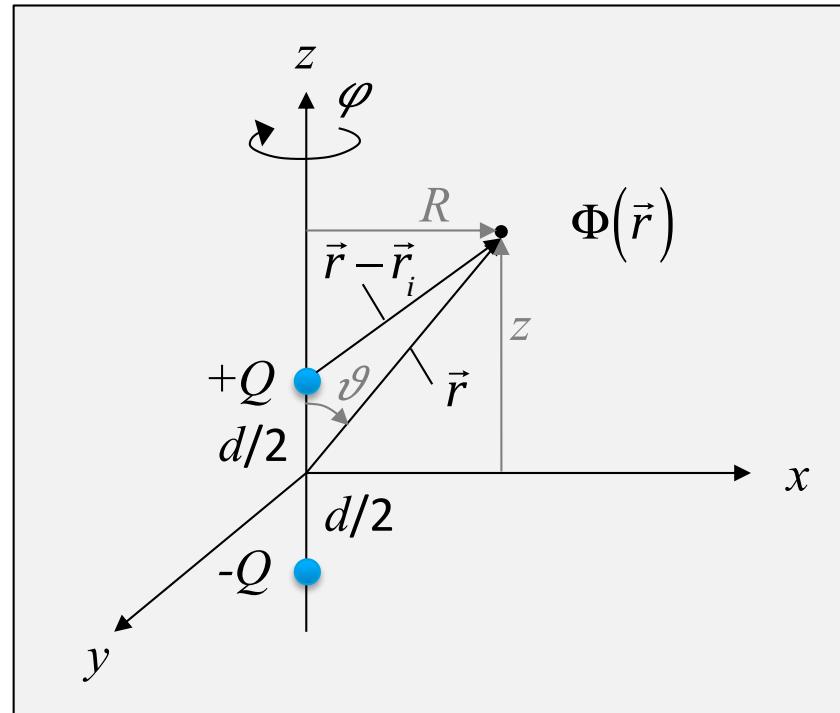
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Man beachte das jeweilige Vorzeichen der Q_i

4.4 Elektrischer Dipol I

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Punktladungen ($+Q, -Q$) im Abstand d mit $Q_{\text{ges}} = +Q - Q = 0$

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{\left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}$$



$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} \right)$$

Das Potential eines Dipols ist zylindersymmetrisch, also nicht abhängig von φ .

4.4 Elektrischer Dipol II

Betrachtung aus großer Entfernung

$$\frac{1}{\sqrt{(z-d/2)^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - z \cdot d + d^2/4) + R^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2 - z \cdot d}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z \cdot d}{r^2}}}$$

Reihenentwicklung: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

damit Näherung: $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z \cdot d}{r^2}}} \approx \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} \right)$ Reihenentwicklung nach zwei Termen abgebrochen

und entsprechend: $\frac{1}{\sqrt{(z+d/2)^2 + R^2}} \approx \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{z \cdot d}{2r^2} \right)$

Eingesetzt und
in Kugelkoordinaten:

mit $z = r \cdot \cos \vartheta$

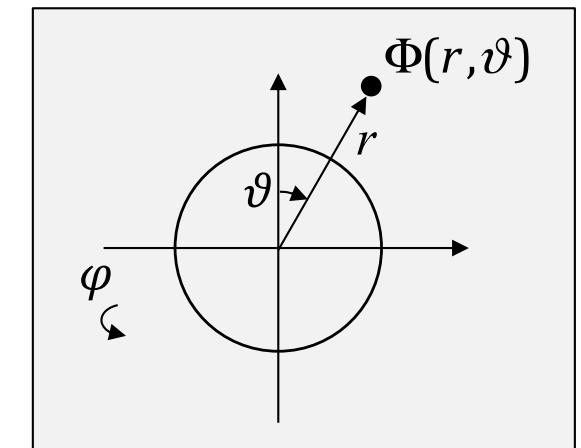
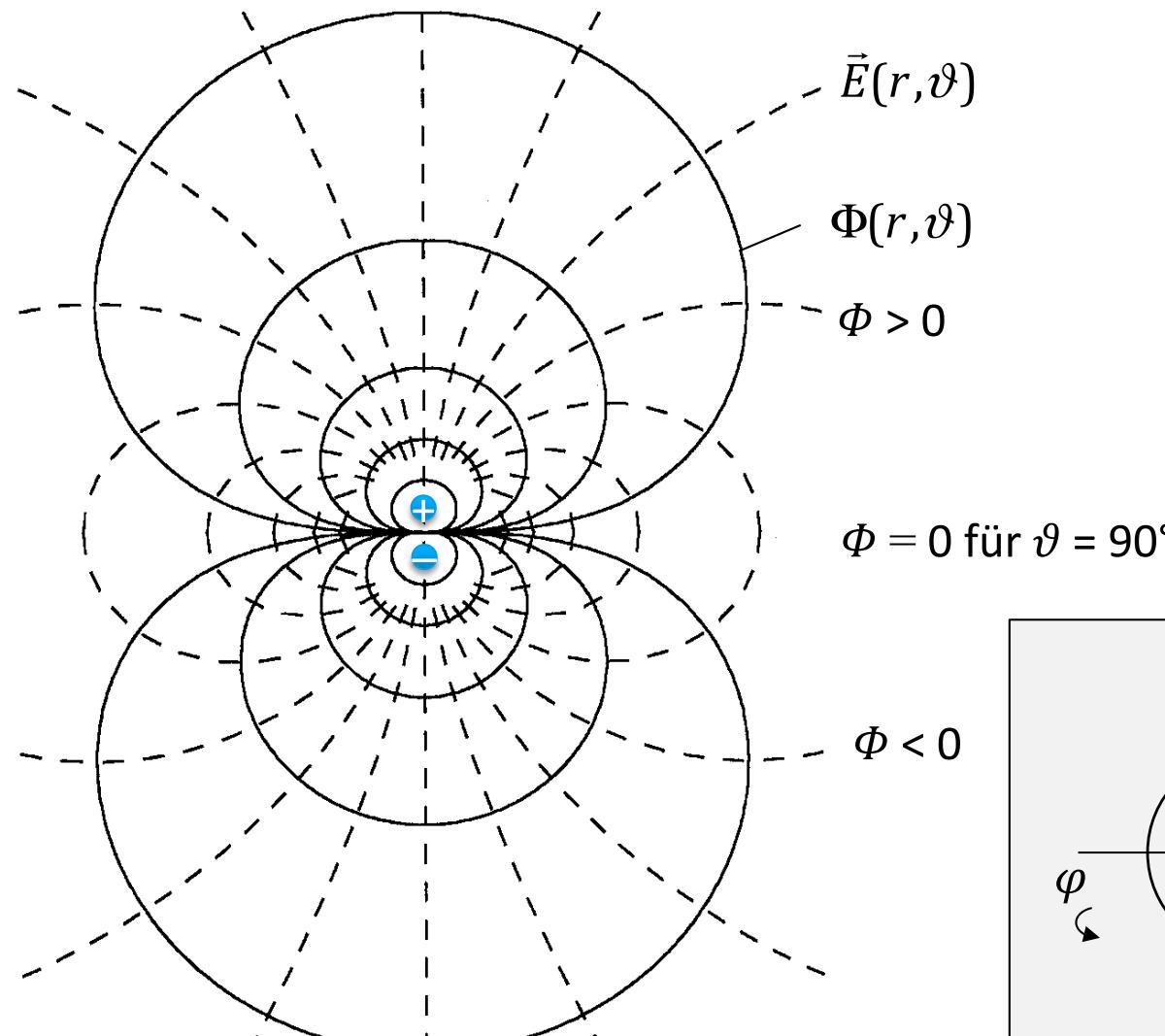
folgt als Endresultat:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} - 1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} \right) = \frac{Q \cdot z \cdot d}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \cdot r^3}$$

$$\boxed{\Phi(r, \vartheta) = \frac{Q \cdot d \cdot \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \cdot r^2}}$$

4.4 Elektrischer Dipol III

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E} \sim 1/r^3 \\ \Phi \sim 1/r^2 \end{array} \right\} \text{für } \vartheta = 0$$



Symmetrie in φ

4.4 Elektrischer Dipol IV

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q \cdot d}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\operatorname{grad} \Phi \\ &= -\vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &= -\vec{e}_r \left[\frac{Q \cdot d}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \cdot \cos \vartheta \cdot \left(-\frac{2}{r^3} \right) \right] \\ &\quad - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{Q \cdot d}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (-\sin \vartheta) \right] \\ &\quad - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{Q \cdot d}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \vartheta}{r^2} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\vec{E}(r, \vartheta) = 2 \frac{Q \cdot d}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^3} \cdot \vec{e}_r + \frac{Q \cdot d}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^3} \cdot \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi$$

4.5 Coulomb Integral I

$$\Phi_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Eine Punktladung Q_i an der Stelle r_i

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Gesamtwirkung aller N Punktladungen Q_i am Ort r

Übergang zum Kontinuum: Viele Punktladungen, gleichmäßig fein verteilt

→ Ladung ΔQ_i im kleinen Volumenelement Δv_i an der Stelle r_i

$$\Delta Q_i = \rho(\vec{r}_i) \cdot \Delta v_i$$

→ $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\rho(\vec{r}_i) \cdot \Delta v_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

→
$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv'}$$
 Coulomb-Integral

4.5 Coulomb Integral II

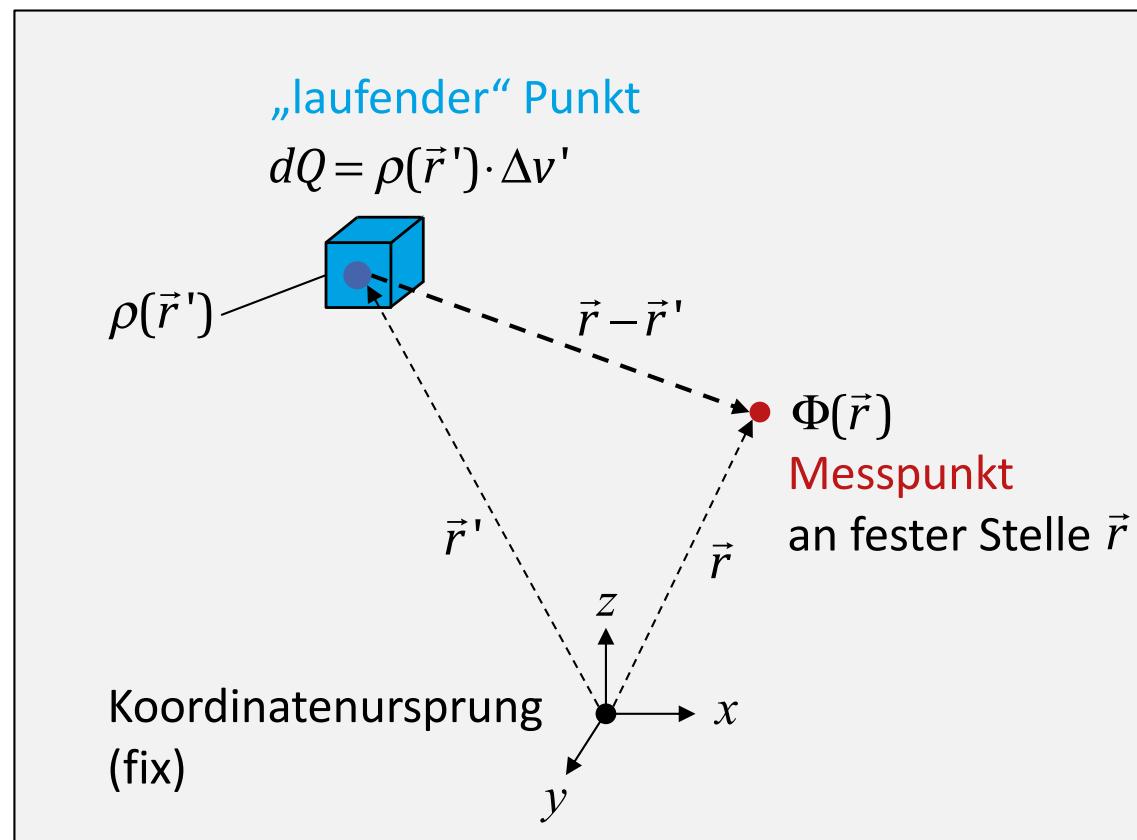
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\nu'$$

Coulomb-Integral

Summation über
alle $\rho(\vec{r}') \cdot \Delta\nu'$

→ Integration über den
gesamten Raum mit
laufender Koordinate \vec{r}'

Methode zur Berechnung des Potenzials Φ bei
gegebener Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$



4.5 Coulomb Integral III

Berechnung des E-Feldes aus Coulomb Integral:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv' \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

Vorsicht: numerische Differentiation ist immer kritisch, da kleinste Fehler (Rauschen) zu großen Ausschlägen führen!

Abhilfe: Direkte, analytische Differentiation

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv' \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \left[\nabla \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dv' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \left[\left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \rho(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla \rho(\vec{r}') \right] dv' \quad \text{Produktregel} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') \right] dv' \end{aligned}$$

Da \vec{r} und \vec{r}' unabhängig sind, können die Operationen vertauscht werden.

Wenn Raumladung gleichmäßig verteilt, dann ist der Gradient null.

4.5 Coulomb Integral IV

Nebenrechnung

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (x - x') \cdot \vec{e}_x + (y - y') \cdot \vec{e}_y + (z - z') \cdot \vec{e}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = ?$$

$$= \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

$$= \vec{e}_x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} + \vec{e}_y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(y - y')}{\sqrt{\dots}^3} + \vec{e}_z \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(z - z')}{\sqrt{\dots}^3}$$

$$= -\vec{e}_x \cdot \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} - \vec{e}_y \cdot \frac{(y - y')}{\sqrt{\dots}^3} - \vec{e}_z \cdot \frac{(z - z')}{\sqrt{\dots}^3}$$

$$= -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{q.e.d.}$$

4.5 Coulomb Integral V

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint \frac{\rho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{v}'$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(x, y, z) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot (x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \cdot \vec{e}_x \cdot dx' dy' dz' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot (y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \cdot \vec{e}_y \cdot dx' dy' dz' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot (z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \cdot \vec{e}_z \cdot dx' dy' dz' \end{aligned}$$

Nur bei gleichmäßig verteilten Raumladungen!
 Keine numerische Differentiation mehr nötig.
 Numerische Integration ist problemlos.

4.6 Potentialfunktion – Zusammenfassung

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Maxwell

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Maxwell

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

Def. Potential

Gauß

$$\iint_{\text{H\"ulle}} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{\text{Volumen}} \rho \cdot dv$$

Wenn ρ gegeben
und Symmetrie

Satz vom
H\"ullfluss

$$\vec{D} \quad \vec{E}$$

$$\rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2}$$

Feld einer Punktladung

$$-\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 d\Phi$$

$$\Phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Potential einer
Punktladung am Ort r_i

Vorgehensweise bei beliebigem
 $\rho(r)$ und beliebiger Geometrie:

$$\rho(\vec{r}) \rightarrow \Phi(\vec{r}) \rightarrow E(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \Phi(\vec{r})$$

$$d\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Viele Punktladungen,
Übergang zum Kontinuum

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \iiint \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Coulomb-Integral

4.7 Beispiel Oberleitung auf der A5 bei Frankfurt I

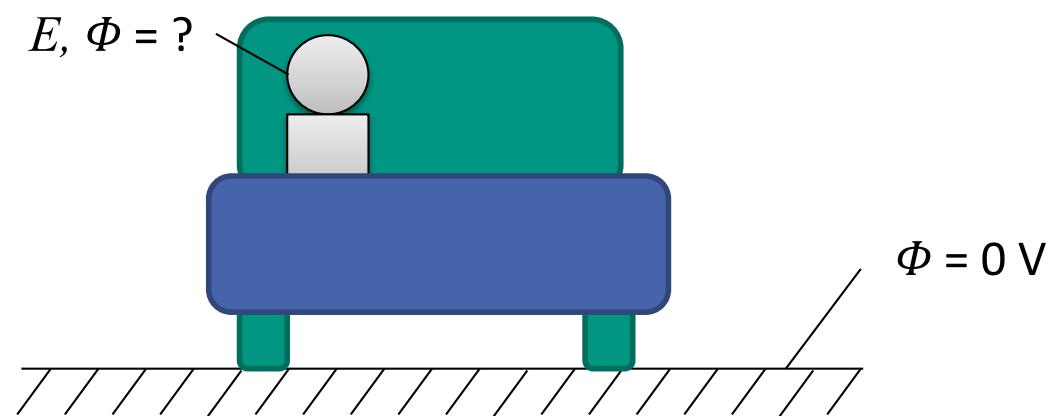


Welchen elektrischen Feldern sind die Menschen in den Autos ausgesetzt?

Bildwelle FAZ

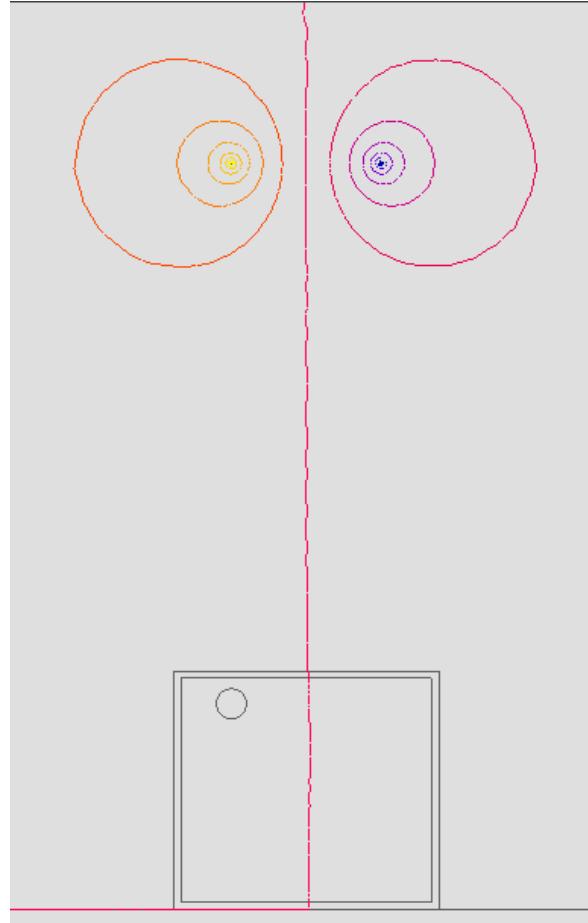
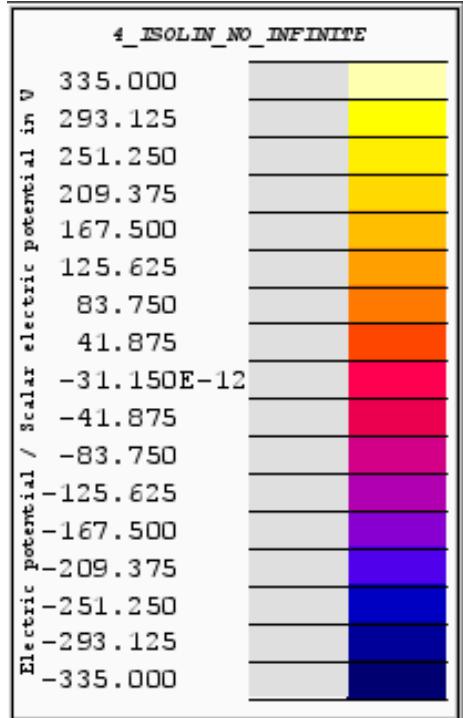
4.7 Beispiel Oberleitung auf der A5 bei Frankfurt II

$$\Phi_1 = +375 \text{ V} \quad \Phi_2 = -375 \text{ V}$$

4.7 Beispiel Oberleitung auf der A5 bei Frankfurt III

Elektrostatisches Potential (numerische Feldberechnung)



Elektrische Feldstärke im Kopfbereich (Pkw) ca. **7 V/m**
Allerdings ist das ein **Gleichfeld**

Zum Vergleich:



Bildquelle: Varta

Feldstärke in
unmittelbarer Nähe:
 $1,2 \text{ V pro } 5 \text{ cm} = \mathbf{24 \text{ V/m}}$

5.1 Energiedichte I

Das elektrische Feld im Raum trägt an seinem jeweiligen Ort eine gespeicherte Energiedichte, die proportional zum Quadrat der Feldstärke ist.

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$
$$W_e = \iiint_{\text{Volumen}} w_e \cdot dv$$

Energiedichte des elektrischen Feldes

Gesamte elektrische Feldenergie im Volumen V

Wenn $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ gilt, dann folgt:

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

$$[w_e] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Physikalische Einheit der Energiedichte

$$[W_e] = \text{V} \cdot \text{As} = \text{J}$$

Physikalische Einheit der Energie

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

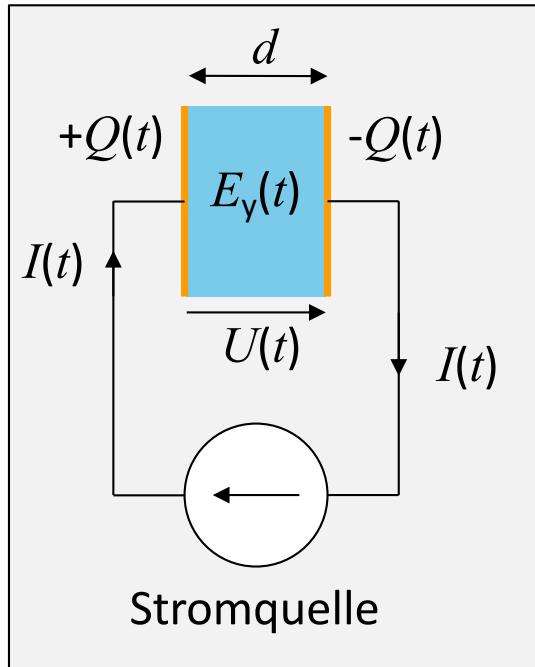
Energie (Arbeit) = Leistung · Zeit

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$$

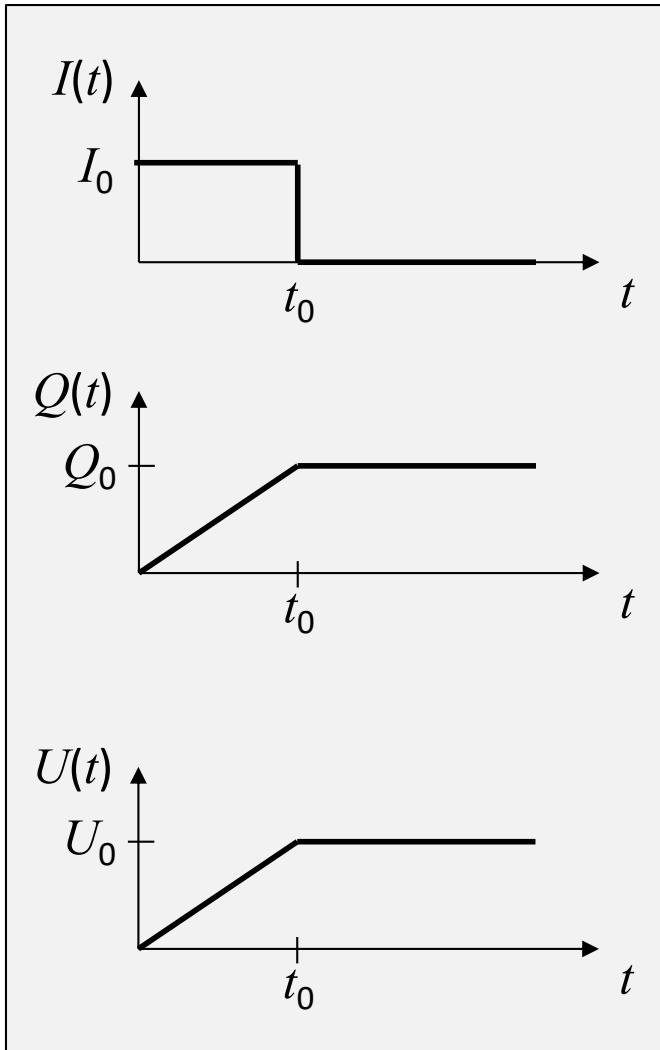
kWh = typische Einheit für elektrische Energie
(Kraftwerke, Elektromobilität, ...)

5.1 Energiedichte II

Veranschaulichung: Langsames Aufladen eines Plattenkondensators mit Luft ($\epsilon_r = 1$)



Die Stromquelle wird bei $t = t_0$ abgeschaltet.



$$I(t) = \begin{cases} I_0 & ; 0 < t < t_0 \\ 0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} I_0 \cdot t & ; 0 < t < t_0 \\ Q_0 = I_0 \cdot t_0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0 A} \cdot I_0 \cdot t & ; 0 < t < t_0 \\ \frac{1}{\epsilon_0 A} \cdot I_0 \cdot t_0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

5.1 Energiedichte III

Aufgenommene elektrische **Leistung** aus Sicht der Stromquelle

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0^2 \cdot t & ; 0 < t < t_0 \\ 0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

Aufgenommene elektrische **Energie** nach Abschluss der Aufladung, also $t \geq t_0$:

$$W_{UI} = \int_0^{t_0} P(t) \cdot dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0^2 \cdot t \cdot dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0^2 \cdot t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} \cdot Q_0^2$$

$$\text{mit } U = E \cdot d \rightarrow E_{y0} = E_y(t_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_0}{A} \rightarrow Q_0 = \epsilon_0 \cdot A \cdot E_{y0} \rightarrow W_{UI} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2 \cdot A \cdot d$$

Aufgebaute elektrische Feldenergie nach der Aufladung: $W_e = \int w_e \cdot dv$

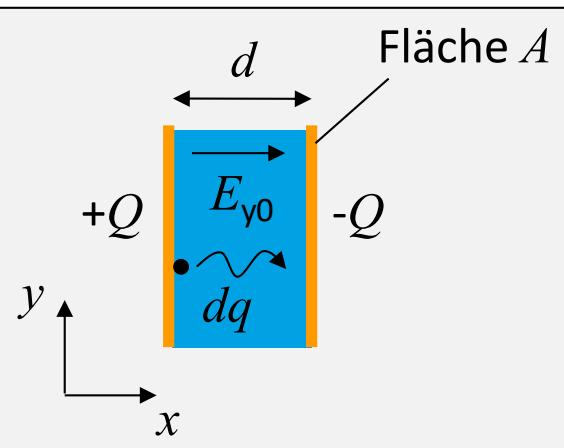
E_y ist im Kondensator räumlich konstant. Volumen $A \cdot d \rightarrow W_e = w_e \cdot A \cdot d$

$$\text{Energieerhaltung: } W_e = W_{UI} \rightarrow w_e \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2 \cdot A \cdot d \rightarrow w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2$$

Elektrische
Feldenergie

5.1 Energiedichte IV

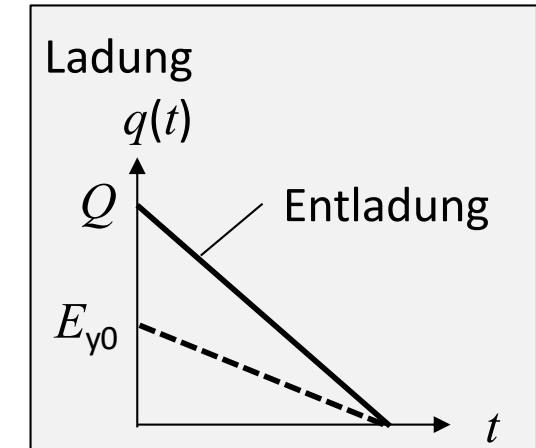
Allmähliche Selbstentladung eines Kondensators durch Leckstrom



Ladung dq wird von + nach – Platte gebracht
Entladung in kleinsten Portionen

$$dF_y = dq \cdot E_y \quad \text{Kraft auf Ladung } dq$$

$dW = dq \cdot E_y \cdot s$ Die dem Feld E_y entnommene
Arbeit, z.B. kinetische Energie,
Joulsche Wärme



Freigesetzte Energie zur vollständigen Entladung

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q E_y(q) \cdot s \cdot dq$$

$$= \int_0^Q \frac{q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d \cdot dq = \frac{d}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{2} q^2 \Big|_0^Q$$

Beispiel: Innen kein
Dielektrikum ($\epsilon_r=1$)

$$= \frac{d}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{2} (\epsilon_0 \cdot A \cdot E_{y0})^2$$

$$\rightarrow W = d \cdot A \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2$$

$$\rightarrow W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2$$

freigesetzte Energie
bzw. Energiedichte

$$\text{es war: } D_{y0}(Q) = \sigma = Q / A$$

$$\rightarrow E_{y0}(Q) = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

$$\rightarrow E_y(q) = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

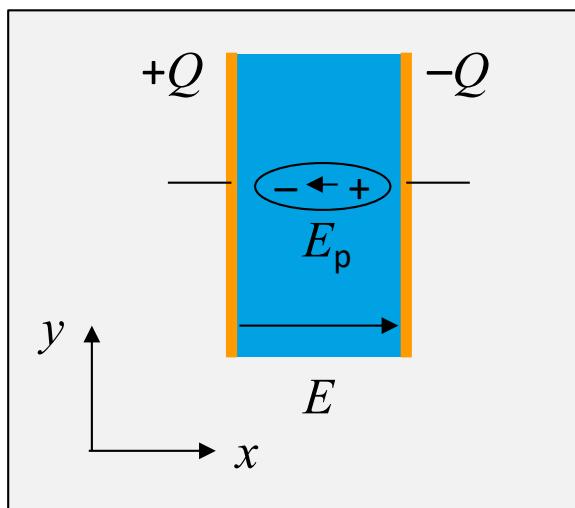
5.1 Energiedichte V

Einfluss eines Dielektrikums ($\epsilon_r > 1$)

Die gespeicherte Feldenergiedichte des elektrischen Feldes ohne Dielektrikum ist $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2$

Warum ist die gesamte Energiedichte mit Dielektrikum $w_{eges} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_Q \cdot E > w_e$?

Antwort: Es besteht ein zusätzlich gespeicherter Energieinhalt in den Molekülen, hervorgerufen von der elektrostatischen Rückstellkraft der getrennten Ladungen.



Kraftgleichgewicht im Molekül: $\vec{F} = q_e \cdot \vec{E} = r \cdot \vec{s}$

Hier ist r die elektrostatische Rückstell-Konstante proportional zur Auslenkung der Ladungen im Molekül

Auslenkung Elektronen durch E : $\vec{s} = q_e \cdot \vec{E} / r$

Gespeicherte Energie pro Molekül: $W_{pm} = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s}' = \int_0^s r \vec{s}' \cdot d\vec{s}' = \frac{1}{2} r \cdot s^2 = \frac{1}{2} r \cdot (q_e \cdot E / r)^2$

5.1 Energiedichte VI

Gespeicherte Energie pro Molekül:

$$W_{pm} = \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{r} E^2$$

Bei N Molekülen pro Volumeneinheit
ist die gespeicherte Energiedichte

$$w_p = N \cdot W_{pm} = N \cdot \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{r} E^2$$

Die gesamte Energiedichte w_{egeg} ist die Summe der reinen Feldenergiedichte w_e und der in den Molekülen gespeicherten elektrostatischen Energiedichte w_p

$$w_{egeg} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \frac{N \cdot q_e^2}{r} E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot \left(1 + \frac{N \cdot q_e^2}{\varepsilon_0 \cdot r} \right) \cdot E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2$$

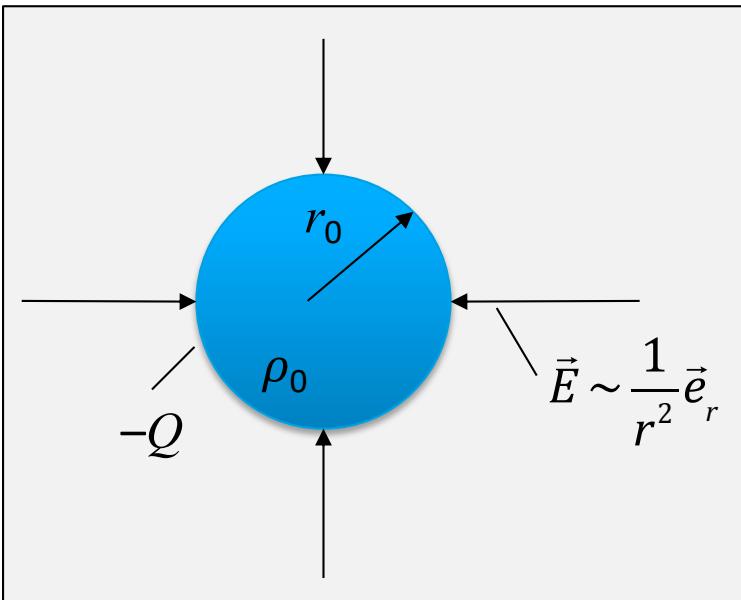
$\underbrace{\varepsilon_0 \cdot \left(1 + \frac{N \cdot q_e^2}{\varepsilon_0 \cdot r} \right)}$ ε_r

Somit ergibt sich schließlich:

$$w_{egeg} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Hier versteckt sich in D bzw. ε_r die zusätzlich in den Molekülen gespeicherte Energie der elektrostatischen Rückstellkraft.

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel I



Gesamtfeldenergie = Feldenergie innen + Feldenergie außen

$$(r \leq r_0) \quad (r > r_0)$$

$$W_e = \int_{r \leq r_0} w_{ei} \cdot dv + \int_{r > r_0} w_{ea} \cdot dv$$

$$\oint\!\oint\vec{D}\cdot d\vec{f} = \iiint \rho_0 \cdot dv \quad \text{Maxwell}$$

$$\rightarrow D_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{r_0^3} \quad \text{mit} \quad \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

$$\rightarrow \text{innen} \quad E_{ri} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r_0^3} \quad \text{siehe Seite 21}$$

$$\rightarrow \text{außen} \quad E_{ra} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \quad \text{siehe Seite 22}$$

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel II

Berechnung der Feldenergie im Inneren

$$W_{ei} = \iiint_{r \leq r_0} w_{ei} = \iiint_{r \leq r_0} \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E_{ri}^2 dv$$

$$\text{mit } E_{ri} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{r}{r_0^3}$$

$$\rightarrow W_{ei} = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2} \frac{r^2}{r_0^6} \cdot r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2} 2 \cdot 2\pi \int_0^{r_0} \frac{r^4}{r_0^6} dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{r^5}{r_0^6} \Big|_0^{r_0}$$

$$\rightarrow \boxed{W_{ei} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{5} \frac{1}{r_0}}$$

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel III

Berechnung der Feldenergie im Äußeren

$$W_{ea} = \iiint_{r>r_0} \frac{1}{2} \epsilon \cdot E_{ra}^2 dv$$

$$\text{mit } E_{ra} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

$$\rightarrow W_{ea} = \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2} \frac{1}{r^4} \cdot r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2} 2 \cdot 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \left. \frac{-1}{r} \right|_{r_0}^{\infty} \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{ea} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0}}$$

$$\boxed{W_{ges} = W_{ei} + W_{ea} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{5} + 1 \right)} \quad \begin{array}{l} \text{unabhängig vom Vorzeichen von } Q \\ \text{proportional zu } 1/r_0 \end{array}$$

5.3 Feldenergie von Anordnungen metallischer geladener Leiter I

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{D} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \iiint \text{grad} \Phi \cdot \vec{D} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \iiint \text{div}(\Phi \cdot \vec{D}) dv - \iiint \Phi \cdot \text{div} \vec{D} dv \right\} \quad \text{mit } \text{div}(\Phi \cdot \vec{D}) = \Phi \cdot \text{div} \vec{D} + \text{grad} \Phi \cdot \vec{D} \quad (\text{Mathe})$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \iint_F \Phi \cdot \vec{D} d\vec{f} - \iiint \Phi \cdot \rho dv \right\} \quad \text{mit } \text{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{Maxwell})$$

In metallischen Leitern ist $\iint_F \Phi \cdot \vec{D} d\vec{f} = 0$, weil innerhalb des Leiters kein Feld vorhanden ist ($E_i = 0$).
Somit:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \Phi \cdot \rho dv$$

Feldenergie im gesamten Raum,
dargestellt durch Potential und
Raumladungsdichte.

Das Integral über den Raum wird nur benötigt, wenn auch Raumladungen vorhanden sind.

5.3 Feldenergie von Anordnungen metallischer geladener Leiter II

In metallischen Leitern:

→ $\rho_{\text{innen}} = 0$ aber Flächenladungsdichte auf der Metall-Oberfläche

→ $\Phi = \text{const.}$ auf der Metall-Oberfläche

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \Phi \cdot \rho dv = \frac{1}{2} \Phi \cdot Q$$

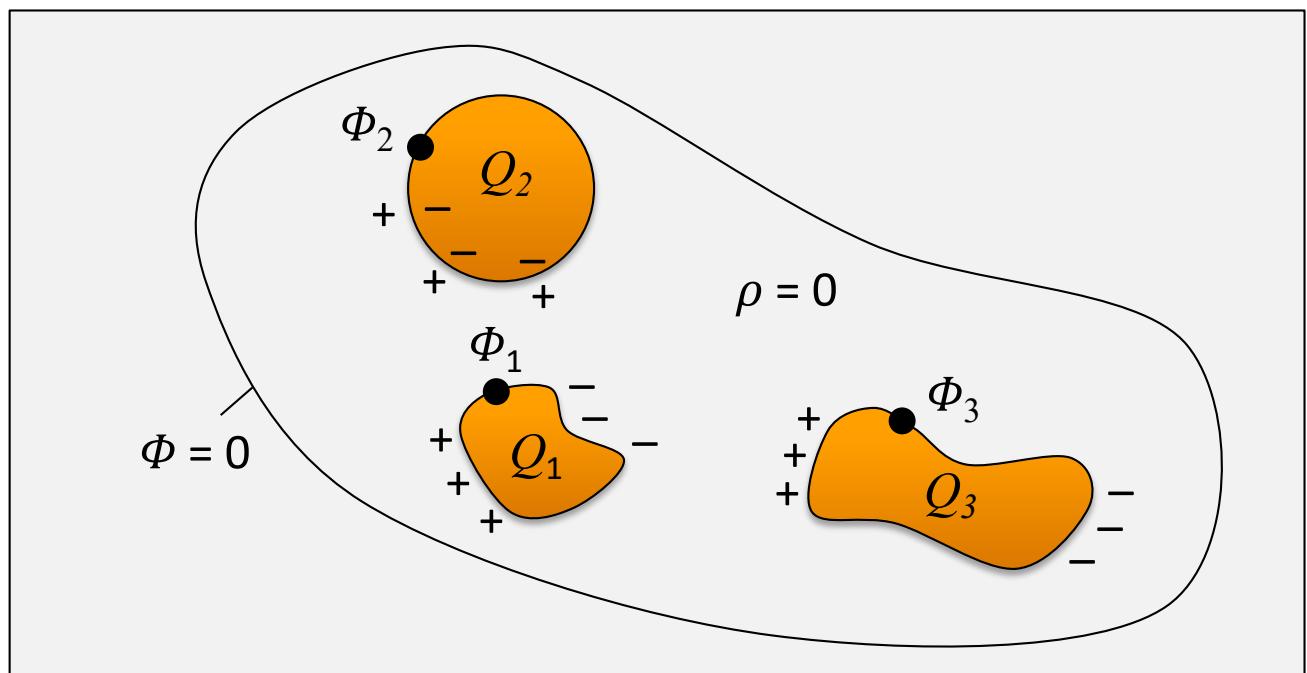
Bei N Leitern gilt: da $\rho = 0$ außerhalb der Leiter, Integration nur auf den N Leiteroberflächen

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \iiint \Phi_k \cdot \rho_k dv$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot \iiint \rho_k dv$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot Q_k}$$

Man setzt üblicherweise
 $\Phi = 0$ im Unendlichen



6. Kapazität I

In der Elektrodynamik gibt es zwei Beziehungen von Größen, die durch die gleiche Proportionalitätskonstante C verbunden sind:

- Die Ladung Q mit der Potentialdifferenz bzw. der Spannung U
- Die elektrische Feldenergie mit der Potentialdifferenz bzw. der Spannung U

$$\boxed{Q = C \cdot U}$$

\Updownarrow

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} C \cdot U^2}$$

A diagram showing two orange circles representing charges. The left circle is labeled $+Q$ and the right circle is labeled $-Q$. A curved arrow points from the $+Q$ circle towards the $-Q$ circle. Below the circles, the symbol U is written, representing the potential difference or voltage between the two charges.

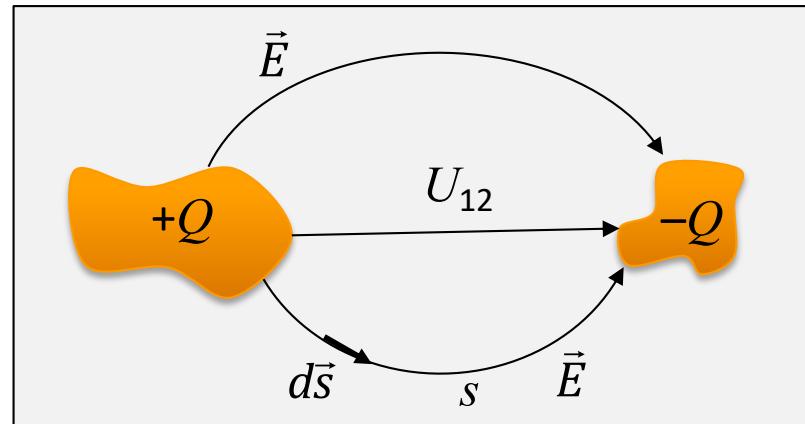
Diese gemeinsame Proportionalitätskonstante C heißt *Kapazität*

Der Ladungsbegriff Q wird nun erweitert und allgemein zum **Verschiebungsfluss**, also zum elektrischen Fluss im Raum. Die Verschiebungsdichte D im Raum ist dann gegeben aus $D = dQ / dA$

6. Kapazität II

Definition der Kapazität C :

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| = \left| \frac{\oint_S \epsilon \vec{E} d\vec{f}}{\int_S \vec{E} d\vec{s}} \right|$$

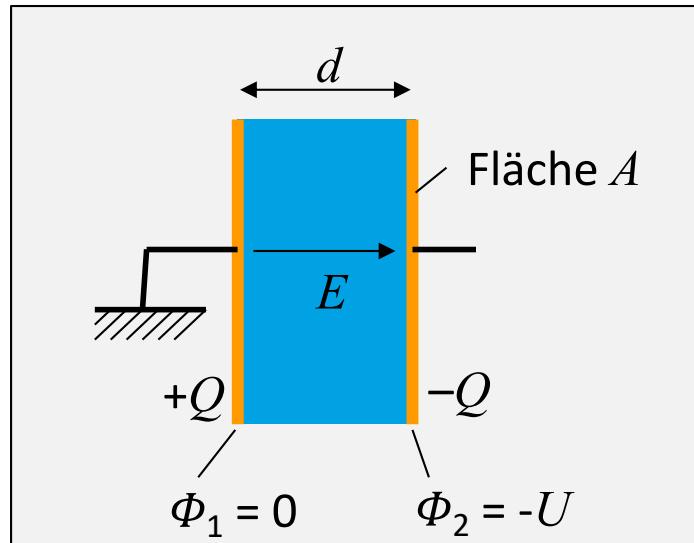


Die Kapazität ist nur abhängig von der Geometrie, sie ist unabhängig von E .

Berechnung von C

- Suche E als Funktion von Q
- Berechne $\Phi_2 - \Phi_1 = U_{12}$ aus E als Funktion von Q
- Dividieren Q durch U_{12}
- Voraussetzung: Gleich starke, entgegengesetzte Ladungen $+Q - Q = 0$

6.1 Kapazität eines Plattenkondensators



$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = -E \cdot d$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = D = \epsilon \cdot E$$

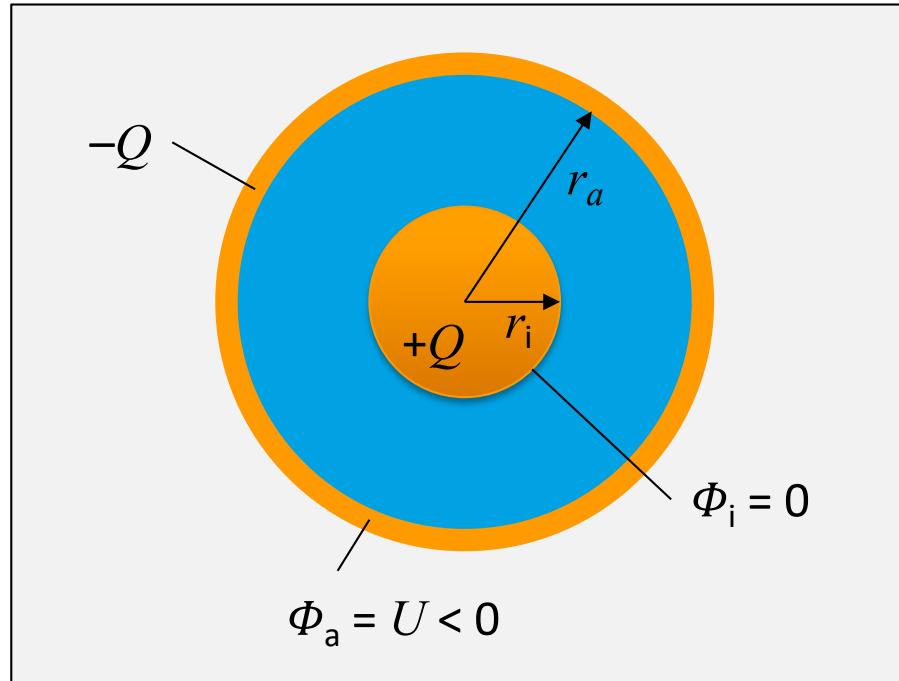
Flächenladungsdichte σ
Verschiebungsdichte D

$$E = \frac{Q}{\epsilon \cdot A} \rightarrow U = \frac{-Q}{\epsilon \cdot A} \cdot d$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| \rightarrow C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}$$

Hier ist Q der Verschiebungsfluss im Raum (Dielektrikum, blau) zwischen den Elektroden, der von der Ladung $+Q$ auf der linken Elektrode zur Ladung $-Q$ der rechten Elektrode fließt: $Q = +Q$

6.2 Kapazität eines Kugelkondensators

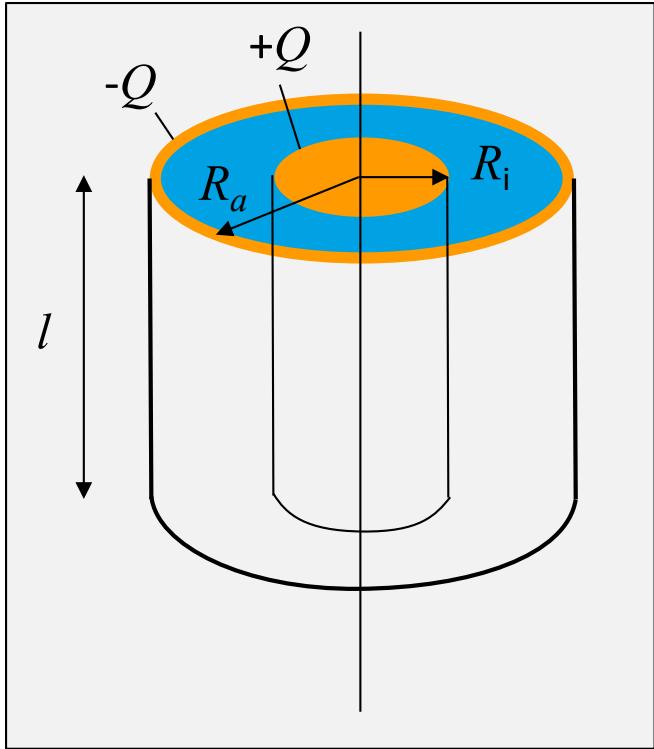


$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2} dr$$

$$U = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_i}^{r_a} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}$$

6.3 Kapazität eines Zylinderkondensators



$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \rightarrow \iiint \operatorname{div} \vec{D} dv = \iiint \rho dv \rightarrow \iint \vec{D} d\vec{f} = Q$$

$$\text{Symmetrie: } \vec{D} = D_R \vec{e}_R \rightarrow D_R \cdot l \cdot 2\pi \cdot R = Q \text{ für } l \gg R_a$$

$$\rightarrow \epsilon \cdot E_R \cdot l \cdot 2\pi \cdot R = Q$$

$$\rightarrow E_R = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} d\vec{s} = - \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln R \Big|_{R_i}^{R_a}$$

$$\rightarrow \Delta\Phi = - \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} = U$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| \rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

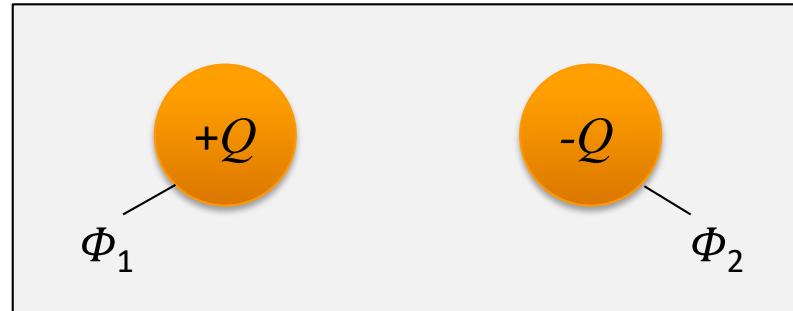
Kapazität des
Zylinderkondensators

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$$

Kapazität pro Länge
eines Koaxialleiters
(„Kapazitätsbelag“)

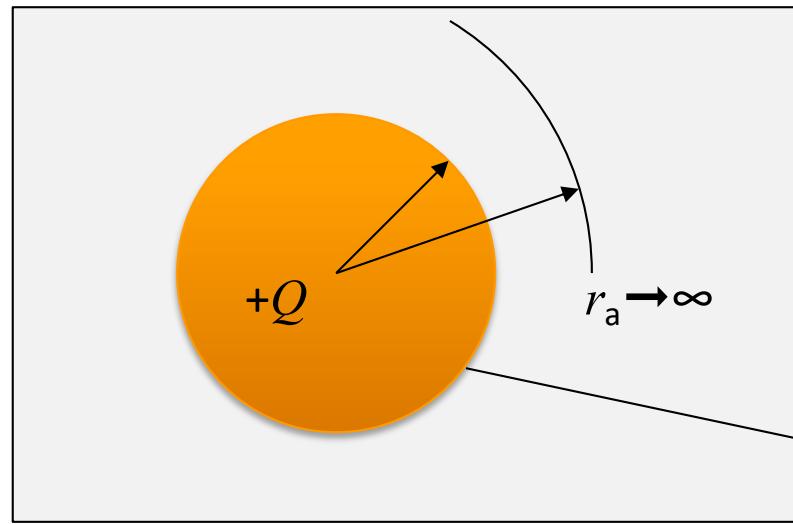
6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter I

Bisher zwei Leiter



$$Q = C \cdot U = C \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$$

Jetzt ein Leiter



Potential an Kugeloberfläche $\Phi(r_i)$:

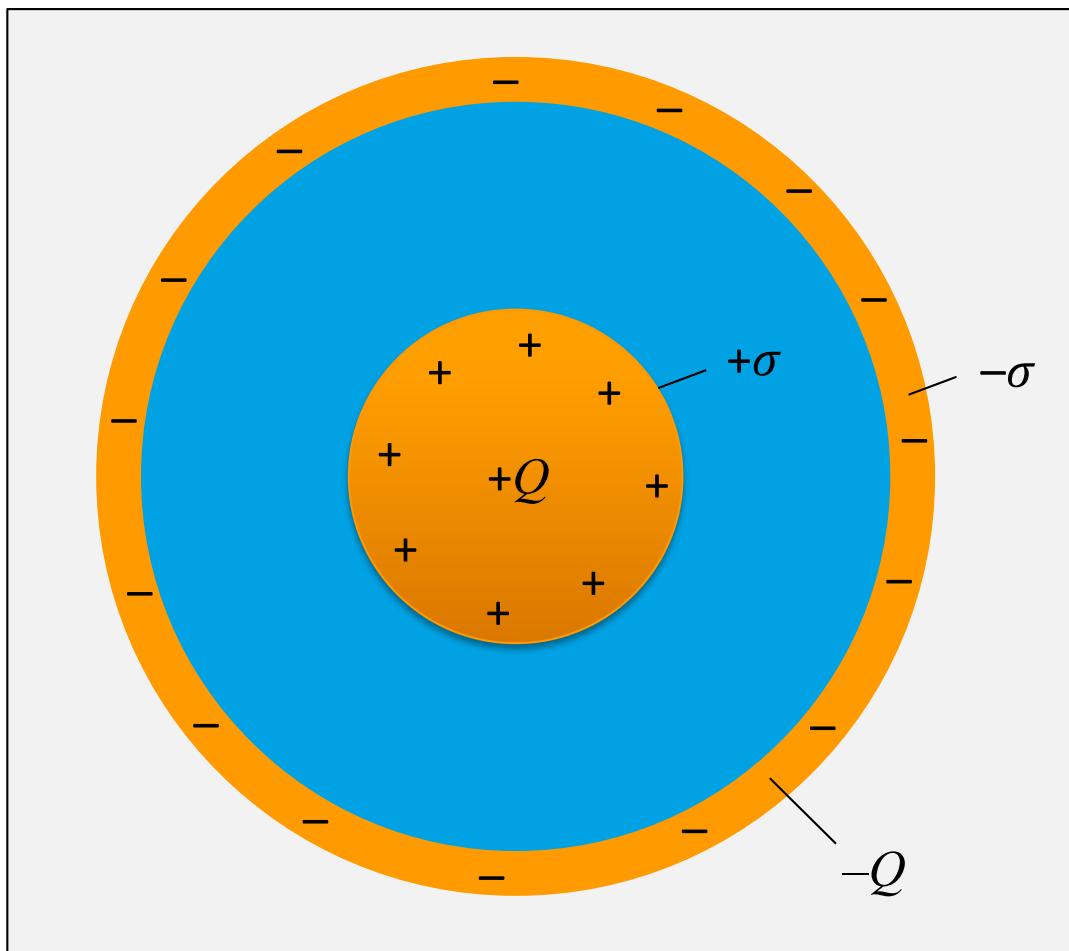
$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r_i}$$

Die Kapazität C ist die Proportionalitätskonstante für den Zusammenhang zwischen Ladung und Potential:

$$Q = C \cdot \Phi(r_i) \rightarrow C = \frac{Q}{\Phi(r_i)} = 4\pi\epsilon r_i$$

Symmetrische Ladungsverteilung

z.B. Platten-, Koax- oder Kugelkondensatoren



Ladungen gleichmäßig auf Oberfläche verteilt

$$\sigma = \text{const.}$$

Symmetrische Anordnung

→ Satz vom Hüllfluss nutzbar

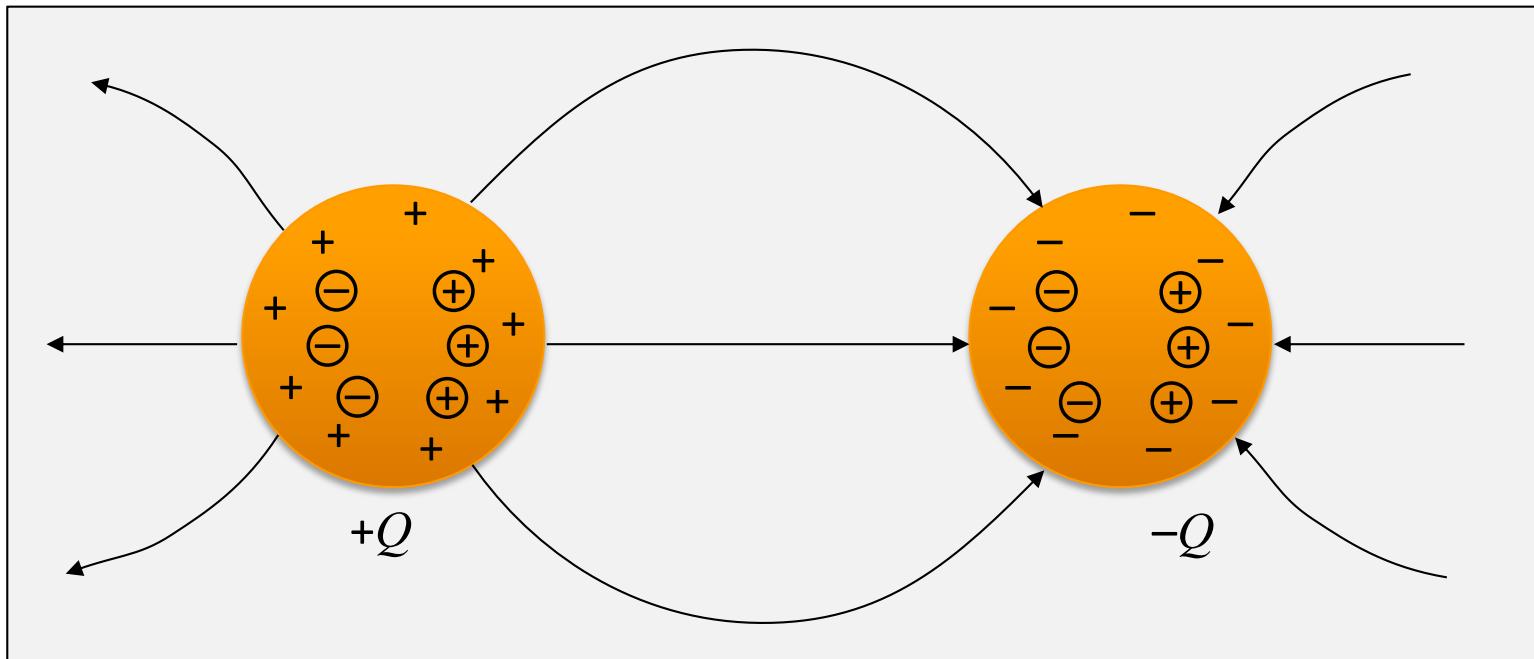
$$\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q$$

Berechnung von $E = E(Q)$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}$$

$$C = \left| \frac{Q}{\Phi_2 - \Phi_1} \right|$$

Unsymmetrische Ladungsverteilung durch Influenzladungen



Aufgabe: Berechnung von Φ aus gegebenem Q

jedoch: Ladungsverteilung aufgrund der Influenz unbekannt, keine Symmetrie erkennbar

→ Satz vom Hüllenfluss oder Coulomb-Integral NICHT nutzbar

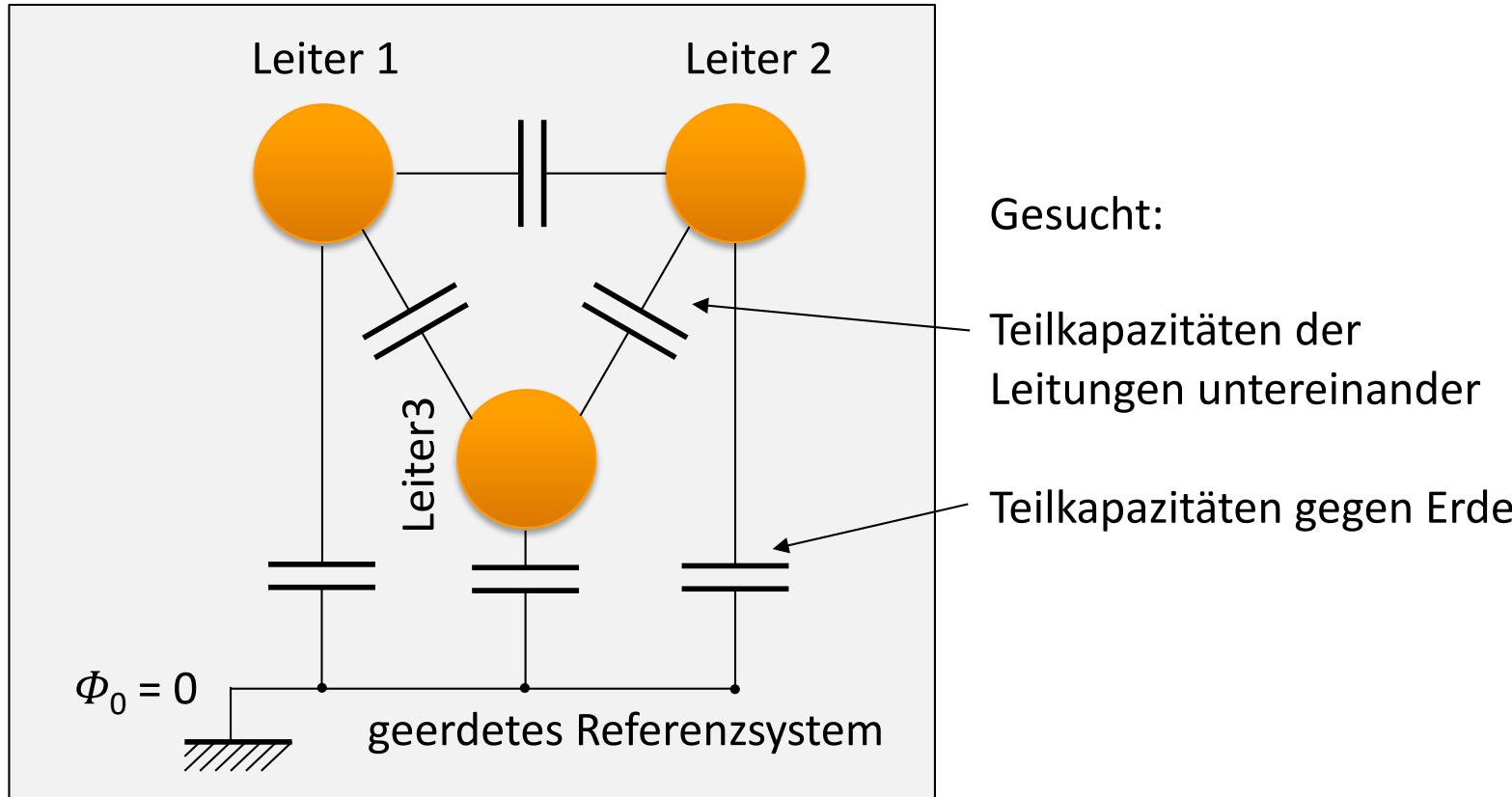
Aber: Feldlinien senkrecht zur Oberfläche

Und: $\Phi = \text{const.}$ auf Metallocberflächen (Äquipotential-Flächen)

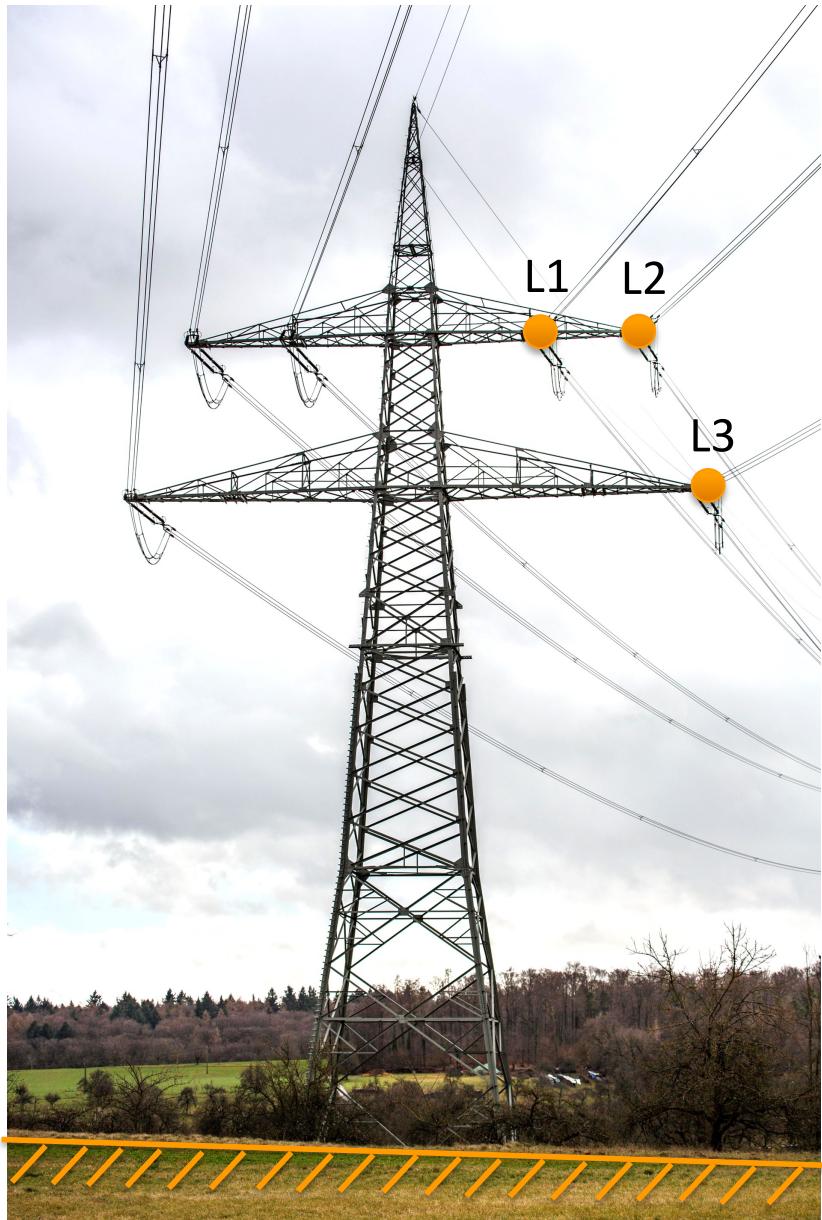
→ Methode der Laplace-Gleichung möglich (siehe Abschnitt 8.1)

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter IV

Kapazität dreier Leiter (z.B. Hochspannungsleitungen)



6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter V



$$U_{L1N} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} / \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t)$$

$$U_{L2N} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} / \sqrt{3} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$U_{L3N} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} / \sqrt{3} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Zum Beispiel $U_{eff} = 380 \text{ kV}$, $t = 0$

$$U_{L1N} = 0 \text{ kV}$$

$$U_{L2N} = +269 \text{ kV}$$

$$U_{L3N} = -269 \text{ kV}$$

Faktor $\sqrt{2}$ zur Umrechnung von Effektivwert auf Spitzenwert. Faktor $\sqrt{3}$ zur Umrechnung der verketteten Spannung (Leiter-Leiter) auf Sternpunktspannung (Leiter-Erde).

Bei längeren Leitungen werden die Positionen der Leiter mehrfach getauscht (Verdrillmast), damit im Mittel gleiche Kapazitäten aller Leiter untereinander und gegen Erde (N) entstehen. Das vermindert die Übertragungsverluste durch den Blindstrom (kapazitiver Ableitstrom gegen Erde).

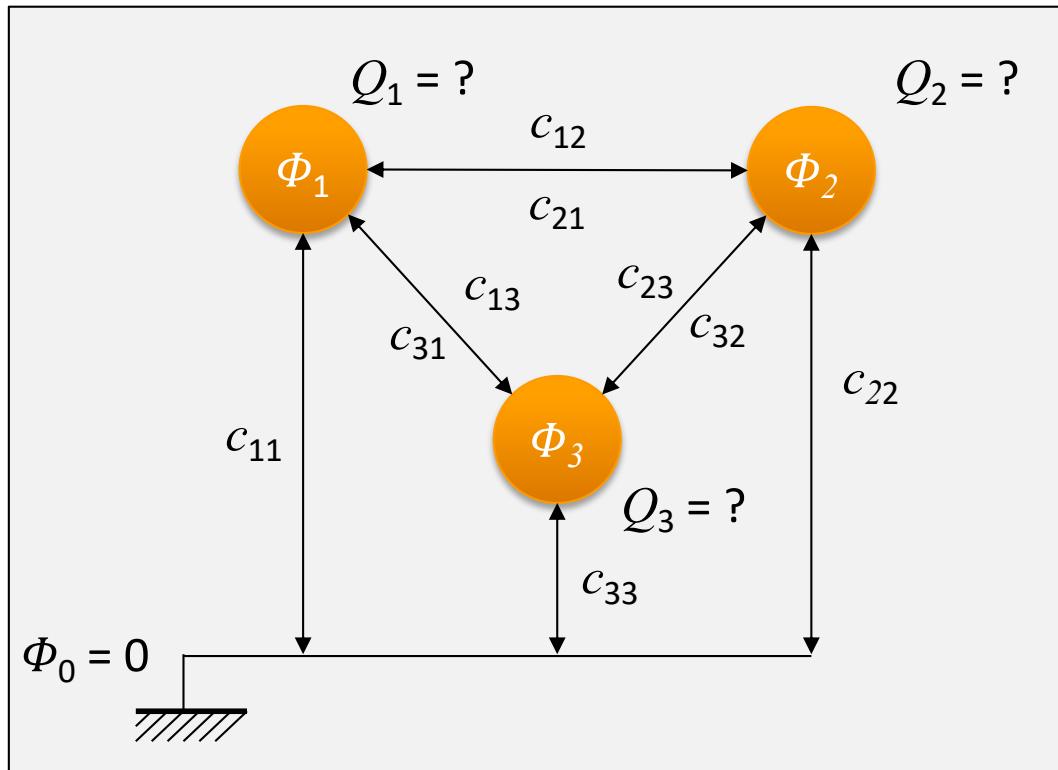
6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter V



Bildquelle: Störfix, Creative Commons by-sa 3.0 de, Mast der [Thüringer Strombrücke](#) (380 kV) bei Weißenbrunn vorm Wald (Rödental, Bayern)

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter VI

Lösung der Aufgabenstellung mittels **Influenzkoefizienten**



Fragestellung neu:

Φ_i = vorgegeben, z.B. die Spannungen
an Freileitungen

Q_k = gesucht

Lösung mittels numerischer Methoden,
siehe Abschnitt 7.1.3

$$Q_i = Q_i(\Phi_k)$$

Die Lösung ist eine lineare Funktion von Φ

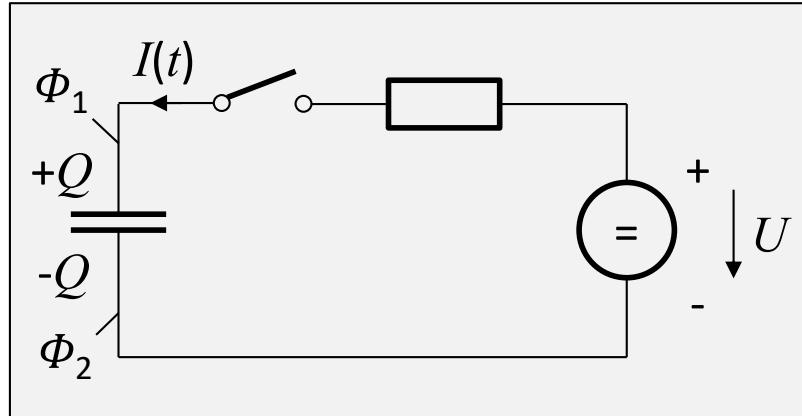
$$Q_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \Phi_k$$

Influenzkoefizienten c_{ik}

(Kopplungskonstanten, keine echten Kapazitäten)

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter VII

Unterschied zwischen Kapazität eines Kondensators und Influenzkoefizienten



$$Q = \int_0^T I(t) dt$$

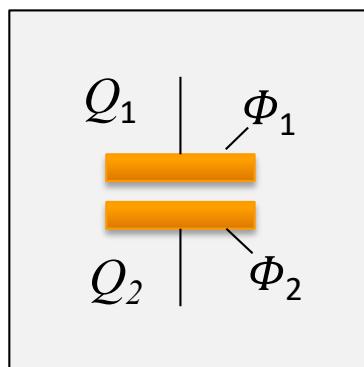
Kondensator, „echte“ Kapazität

$$Q = C \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) = C \cdot U$$

C Kapazität

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

„Spezialfall“



c_{ik} Influenzkoefizienten = „allgemeiner Fall“

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

Q_1, Q_2 beliebig

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter VIII

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{IN} \\ \cdot & \ddots & & & \\ \cdot & & \ddots & & \\ \cdot & & & \ddots & \\ c_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_k$$

Ladungen Q_i der Leiter i
Potential Φ_k im Leiter k

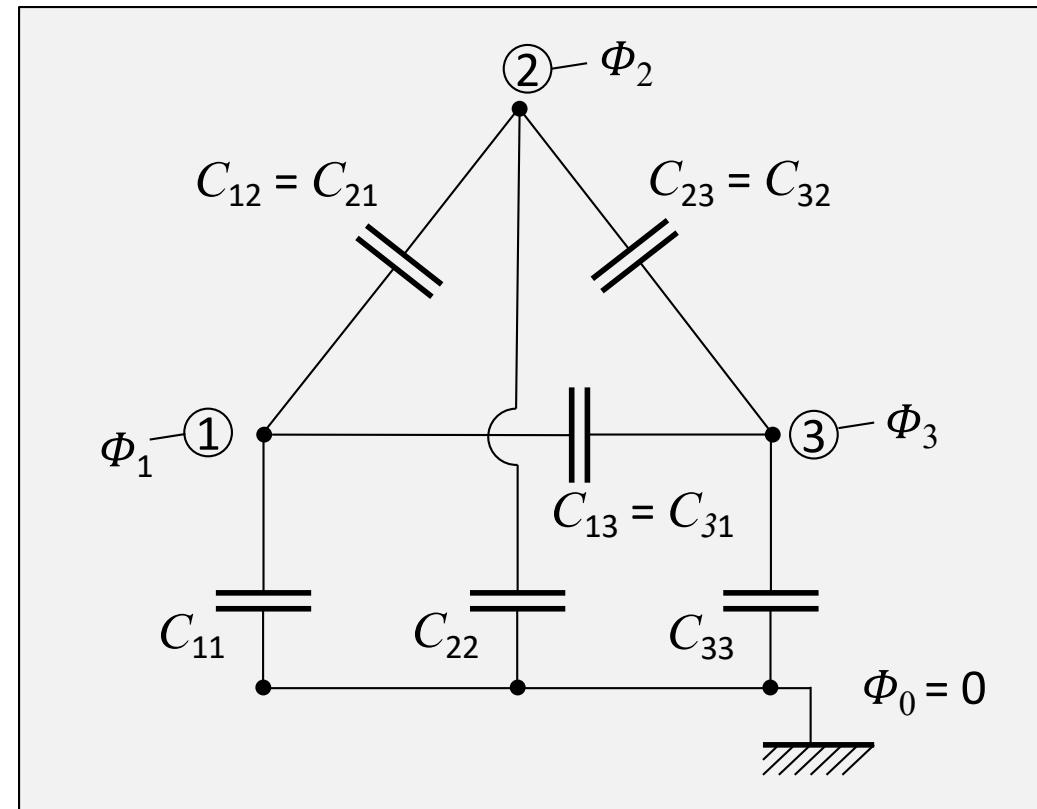
c_{ik} = Influenzkoeffizienten = Kopplungskonstanten, keine echten Kapazitäten

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter IX

Teilkapazitäten c_{ik}

Echte Teilkapazitäten sind wie beim gewöhnlichen Kapazitätsbegriff die Proportionalitätskonstanten zwischen Spannungsdifferenzen und Ladungen.

→ „erwünschte“ Darstellung:



$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13}(\Phi_1 - \Phi_3)$$

$$Q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2 + C_{23}(\Phi_2 - \Phi_3)$$

$$Q_3 = C_{31}(\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32}(\Phi_3 - \Phi_2) + C_{33}\Phi_3$$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter X

Teilkapazitäten

„erwünschte“ Darstellung
mit Teilkapazitäten C_{ij}

$$\begin{aligned}Q_1 &= C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13}(\Phi_1 - \Phi_3) \\Q_2 &= C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2 + C_{23}(\Phi_2 - \Phi_3) \\Q_3 &= C_{31}(\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32}(\Phi_3 - \Phi_2) + C_{33}\Phi_3\end{aligned}$$

bisherige Darstellung mit
Influenzkoeffizienten c_{ij}

$$\begin{aligned}Q_1 &= c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{13}\Phi_3 \\Q_2 &= c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{23}\Phi_3 \\Q_3 &= c_{31}\Phi_1 + c_{32}\Phi_2 + c_{33}\Phi_3\end{aligned}$$

„große“ C_{ij} =
Kapazitäten



„kleine“ c_{ij} =
Influenzkoeffizienten
(keine Kapazitäten)

$$\begin{aligned}Q_1 &= (C_{11} + C_{12} + C_{13})\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 - C_{13}\Phi_3 \\Q_2 &= (C_{21} + C_{22} + C_{23})\Phi_2 - C_{21}\Phi_1 - C_{23}\Phi_3 \\Q_3 &= (C_{31} + C_{32} + C_{33})\Phi_3 - C_{31}\Phi_1 - C_{32}\Phi_2\end{aligned}$$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XI

„erwünscht“

$$Q_1 = (C_{11} + C_{12} + C_{13})\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 - C_{13}\Phi_3$$

$$Q_2 = (C_{21} + C_{22} + C_{23})\Phi_2 - C_{21}\Phi_1 - C_{23}\Phi_3$$

$$Q_3 = (C_{31} + C_{32} + C_{33})\Phi_3 - C_{31}\Phi_1 - C_{32}\Phi_2$$

„bisher“

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{13}\Phi_3$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{23}\Phi_3$$

$$Q_3 = c_{31}\Phi_1 + c_{32}\Phi_2 + c_{33}\Phi_3$$

Koeffizientenvergleich:

$$C_{12} = -c_{12}$$

$$C_{13} = -c_{13}$$

$$C_{21} = -c_{21}$$

$$C_{23} = -c_{23}$$

$$C_{31} = -c_{31}$$

$$C_{32} = -c_{32}$$

$$C_{11} - c_{12} - c_{13} = c_{11} \rightarrow C_{11} = c_{11} + c_{12} + c_{13}$$

$$-c_{12} + C_{22} - c_{23} = c_{22} \rightarrow C_{22} = c_{22} + c_{21} + c_{23}$$

$$-c_{31} - c_{32} + C_{33} = c_{33} \rightarrow C_{33} = c_{33} + c_{31} + c_{32}$$

Verallgemeinert:

$$\rightarrow C_{ik} = -c_{ik}$$

und

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$$

wobei

$$c_{ik} = c_{ki}$$

Zusammenfassung

Bestimmung der Teilkapazitäten C_{ik}

1) Bestimmung von Q_i als Funktion von Φ_k mittels numerischer Verfahren

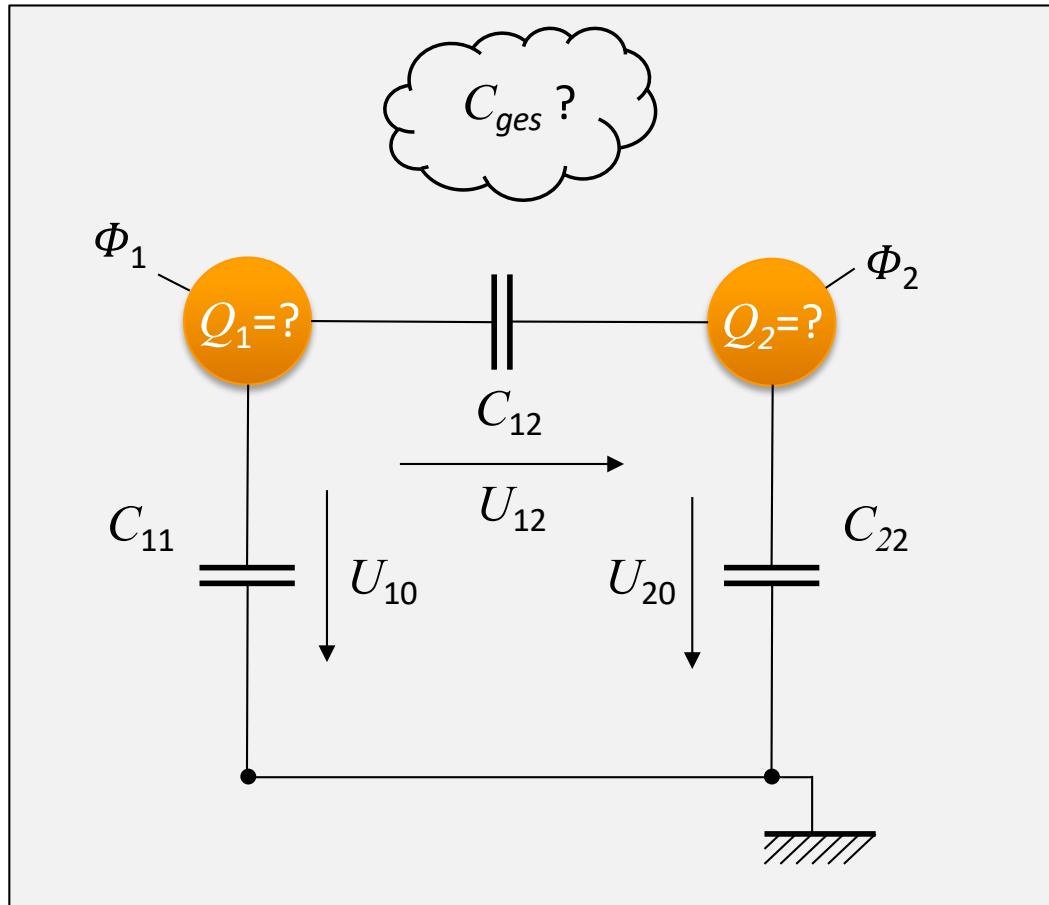
$$Q_i = \{c_{ik}\} \cdot \Phi_k \quad \text{mit } \{c_{ik}\} = \text{Influenzkoeffizienten-Matrix}$$

2) Ermitteln der individuellen Teilkapazitäten C_{ik}

$$C_{ik} = -c_{ik}$$

$$C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$$

Beispiel: Berechnung der Gesamtkapazität von Doppelleitern



Frage:

$\Phi_i = \text{vorgegeben}$

$Q_k = \text{gesucht}$

Lösung mittels numerischer Methoden

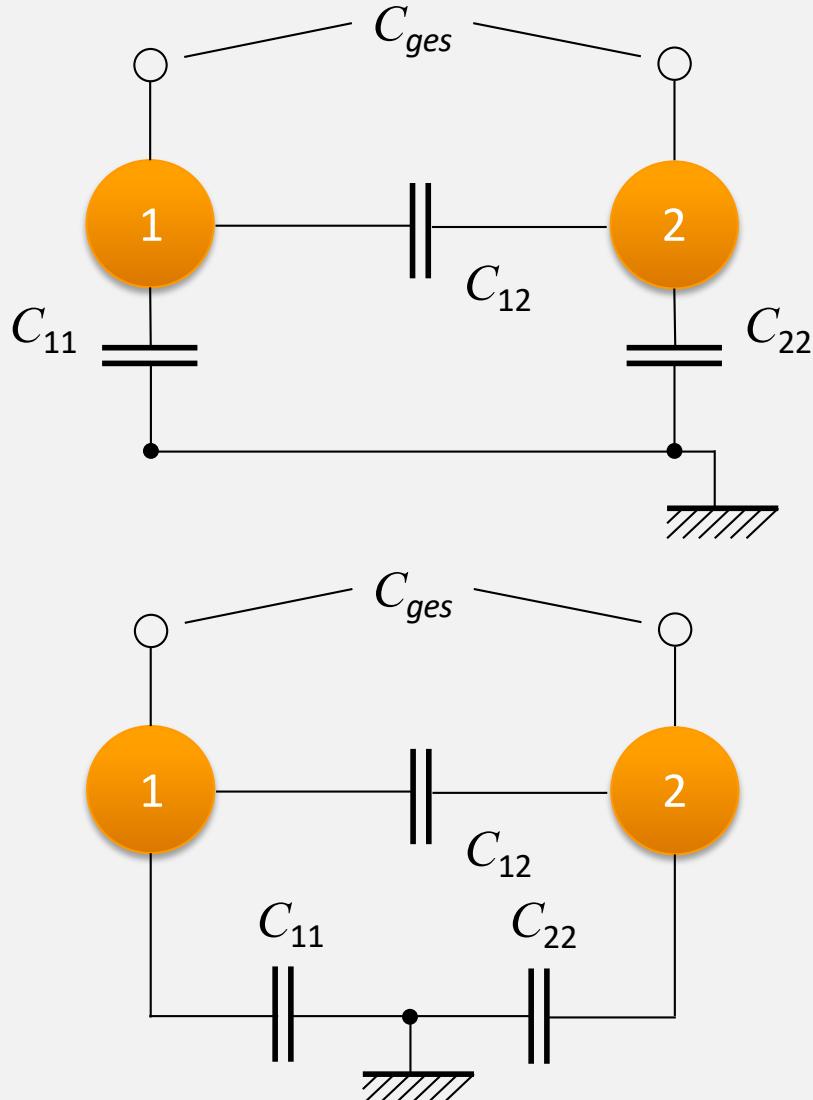
$$Q_i = Q_i(\Phi_k)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^2 c_{ik} \Phi_k$$

$c_{ik} = \text{Influenzkoefizienten}$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XIV

Gesamtkapazität - Teilkapazität



Für 2 Elektroden mit $N = 2$ gilt

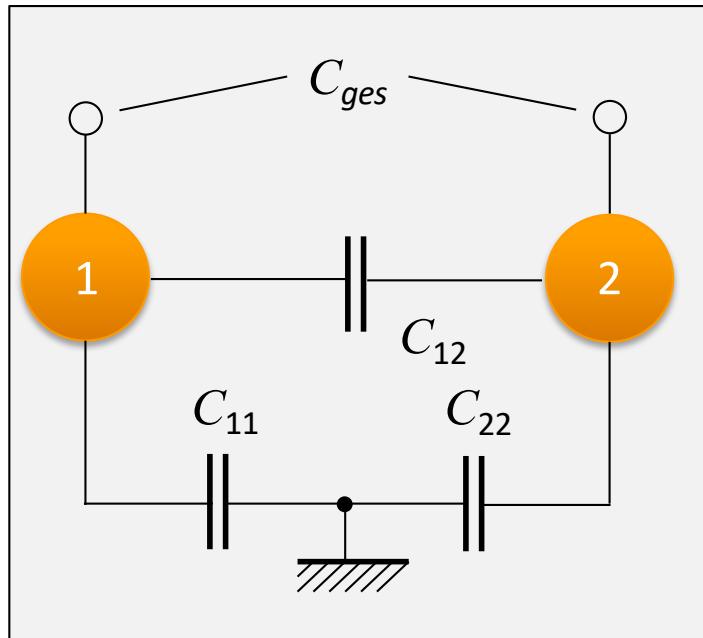
$$\begin{aligned} C_{12} &= -c_{12} \\ C_{21} &= C_{12} = -c_{21} \\ C_{11} &= c_{11} + c_{12} \\ C_{22} &= c_{22} + c_{21} \end{aligned}$$

$$C_{ges} = C_{12} + \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}}} \rightarrow C_{ges} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}}$$

Die effektive Kapazität C_{ges} zwischen zwei Punkten setzt sich aus den Einflüssen aller Teilkapazitäten zusammen.

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XV

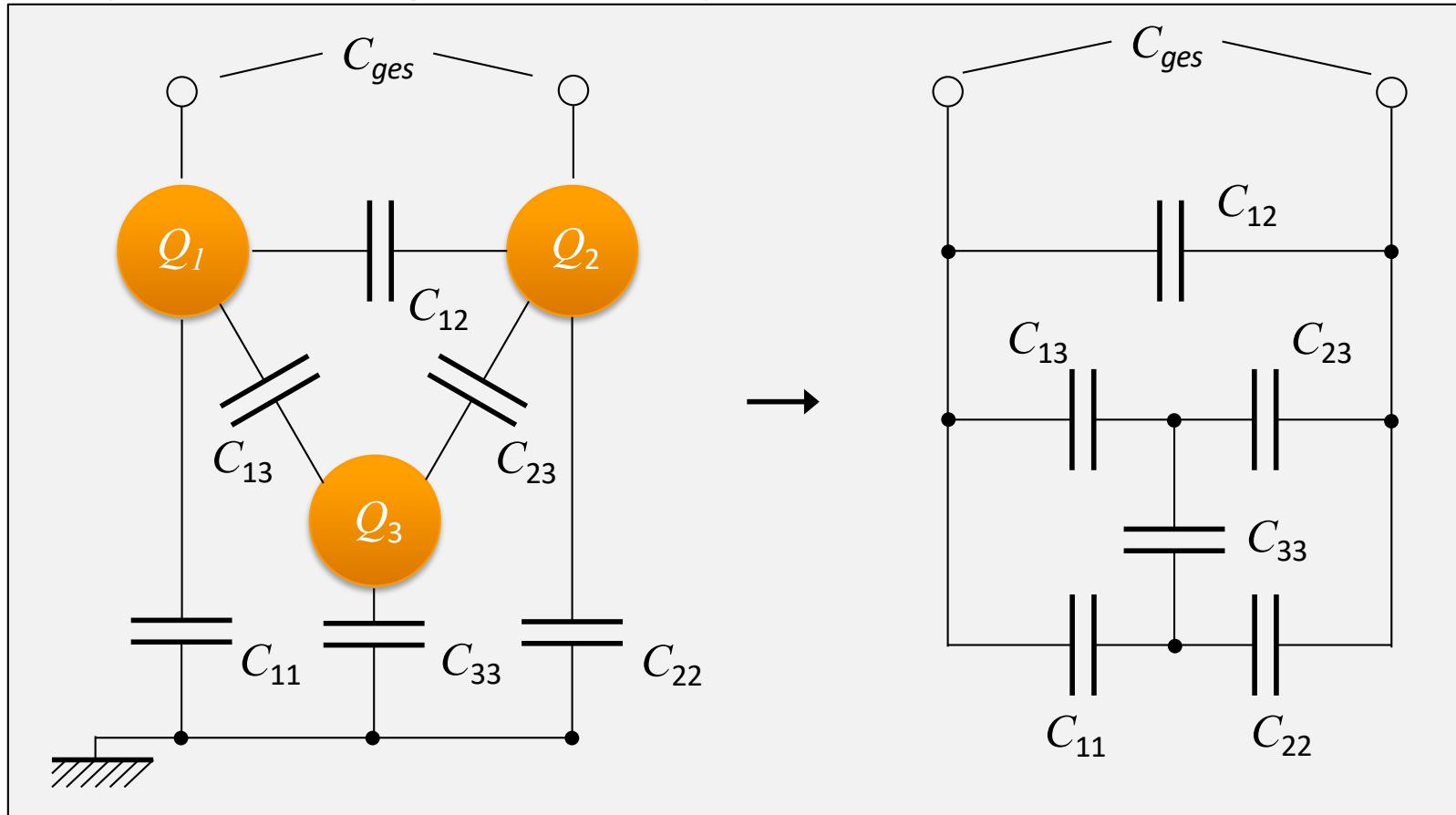
Beweis



$$\begin{aligned}
 C_{ges} &= C_{12} + \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}}} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = \frac{C_{11}C_{12} + C_{22}C_{12} + C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}} \\
 &= \frac{-(c_{11} + c_{12})c_{12} - (c_{22} + c_{21})c_{12} + (c_{11} + c_{12})(c_{22} + c_{21})}{c_{11} + c_{12} + c_{22} + c_{21}} \\
 &= \frac{-c_{11}\cancel{c_{12}} - c_{12}\cancel{c_{12}} - c_{22}\cancel{c_{12}} - c_{21}\cancel{c_{12}} + c_{11}c_{22} + c_{11}\cancel{c_{21}} + c_{12}\cancel{c_{22}} + c_{12}\cancel{c_{21}}}{c_{11} + c_{12} + c_{22} + c_{21}} \\
 &= \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XVI

Beispiel: Berechnung der Gesamtkapazität von Dreifachleitern



1. Bestimmung $\{c_{ik}\}$
2. Teilkapazitäten $C_{ik} = -c_{ik}$ $C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$
3. Serien/Parallel-Schaltung $\rightarrow C_{ges}$

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität I

Bisher:

Gespeicherte Ladung

$$Q = C \cdot U$$



Jetzt:

Gespeicherte Energie

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

→ Verallgemeinerung auf viele geladene Leiter

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität II

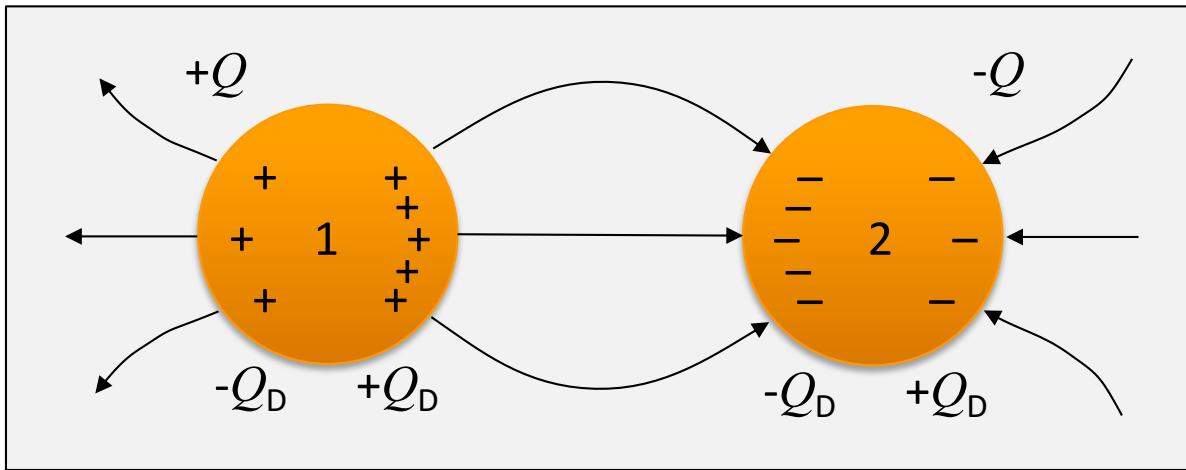
Es gilt:
$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k Q_k \quad \text{mit} \quad Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_k \quad \rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_k$$

Die Feldenergie ist eine quadratische Funktion der Potentiale.

Vorteil:

Das Feld muss nicht im gesamten Raum bekannt sein,
es genügt, Φ auf den Elektroden zu messen.

7. Bestimmung von Potential und Kapazität bei Anwesenheit von Influenzladungen



Ungleiche Verteilung der Ladungen auf der Oberfläche

→ Bestimmung von C unmöglich mit Coulomb-Integral, da Verteilung unbekannt:

$$\Phi_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(\iiint \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|} dv' \right)$$

wobei $\iiint \rho_i(\vec{r}') dv' = \begin{cases} +Q & \text{für } i = 1 \\ -Q & \text{für } i = 2 \end{cases}$

$$\Phi_2(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(\iiint \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|} dv' \right)$$

$$U_{12} = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$C = \left| \frac{Q}{U_{12}} \right| = ?$$

Problem

Verteilung von $\rho_i(\vec{r}')$ unbekannt

nur $\iiint \rho_i(\vec{r}') dv' = \pm Q$ bekannt

7.1 Herleitung von Laplace- und Poisson-Gleichung I

Voraussetzung: ϵ nicht ortsabhängig

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{Maxwell}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \text{Material-Gleichung}$$

$$\operatorname{div} \epsilon \vec{E} = \epsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = -\epsilon \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \rho$$

}

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Laplace-Gleichung

$$\Delta \Phi = 0$$

Gültig für ladungsfreie Raumgebiete $\rho = 0$

7.1 Herleitung von Laplace- und Poisson-Gleichung II

Laplace – Gleichung = Elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

Lösung = skalare, zweifach stetig differenzierbare Funktion

Anwendungen:

- *Elektrostatik*
Berechnung des elektrischen Potentials im ladungsfreien Raum
- *Gravitation*
Die Berechnung der Kraft zwischen zwei Massen ist mathematisch äquivalent zur Kraft zwischen zwei Ladungen. Das Gravitationspotential kann somit wie das elektrische Potential mit der Laplace-Gleichung berechnet werden.
- *Wärmeleitung*
Berechnung eines stationären Temperaturgefälles
- *Fluidodynamik*
Berechnung laminarer Strömungen inkompressibler Fluide (z.B. Öl, Wasser)

7.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme I

1. In metallischen Leitern (ohne Ströme) gilt:

$$\vec{E} = 0$$

$\rightarrow \text{grad } \Phi = 0 \rightarrow \boxed{\Phi = \text{const.}}$ innerhalb und auf der Oberfläche

2. Die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ im Raum mit $\rho = 0$ hängt nur von der Potentialverteilung $\Phi(\vec{r}_{\text{Rand}})$ ab
3. Die Potentialverteilung wird durch die Laplace-Gleichung $\Delta \Phi = 0$ bestimmt

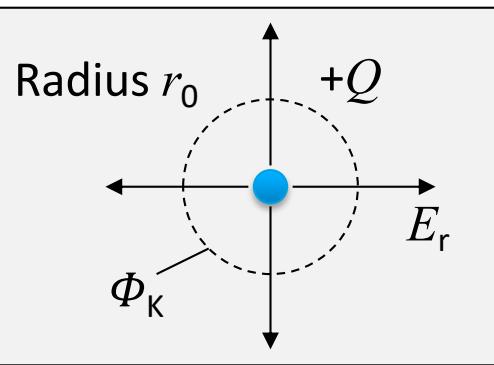


Die Potenzialverteilung in diesem Raum ist eindeutig gegeben,
egal wie $\Phi(\vec{r}_{\text{Rand}})$ auf dem Rand erzeugt wurde.

Beispiele:

7.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme II

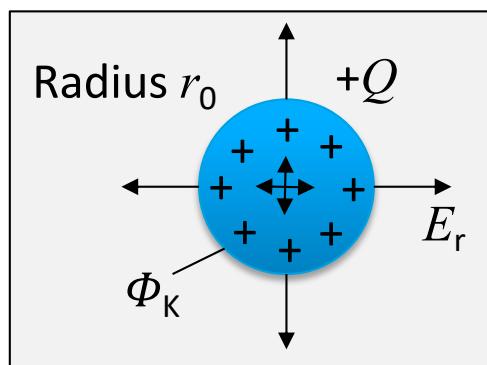
① Punktladung $+Q$



$$E_{r1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \begin{cases} r < r_0 \\ r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq r_0$$

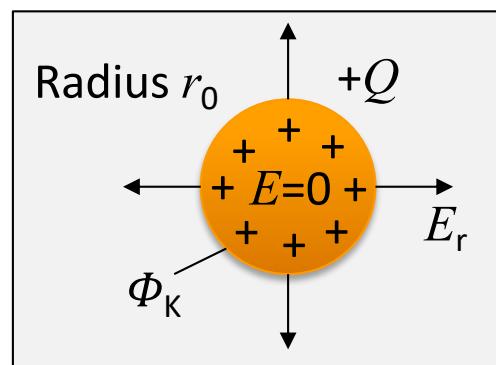
② Isolator $+Q$



$$E_{r2} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r_0^3} & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} & r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq r_0$$

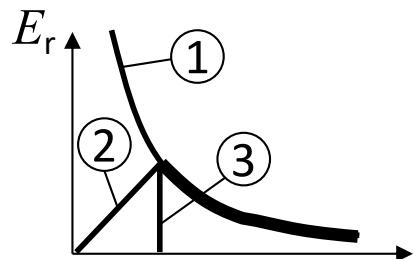
③ Leiter $+Q$



$$E_{r3} = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} & r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{für } r \geq r_0$$

Für $r > r_0$ gilt:
 $E_{r1} = E_{r2} = E_{r3} \rightarrow$



Randbedingung bei r_0 :

$$\Phi_{Rand} = \Phi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_0}$$

Potential im Raum $r > r_0$:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} = \Phi_{Rand} \cdot \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

7.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme III

Begründung

Aus Maxwell-Gleichungen folgt die Laplace-Gleichung für Φ :

$$\boxed{\Delta\Phi = 0}$$

Kartesisch:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

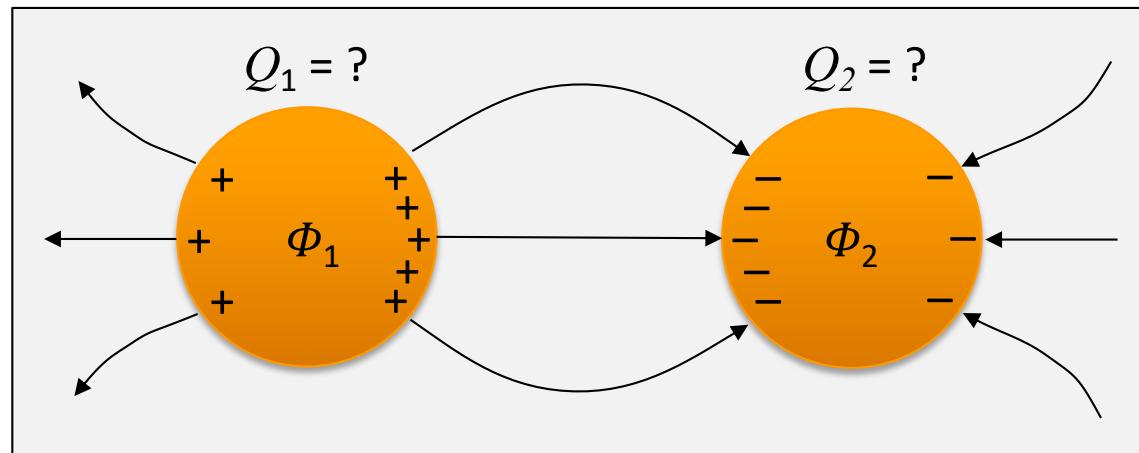
Die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ im leeren Raum muss immer diese DGL erfüllen.

Die Lösung einer partiellen DGL ist ausschließlich durch ihre Randbedingungen $\Phi = \Phi_{\text{Rand}}$ festgelegt.

7.3 Berechnungsmethode von Kapazitäten und Influenzladungen I

Gegeben: Φ_1, Φ_2

Gesucht: Q_1, Q_2



Randbedingung:

- 1 Potentiale und Form der Elektroden

$$\Phi_1 = \Phi_1(r = \text{Elektrodenoberfläche}) = \text{const.}$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(r = \text{Elektrodenoberfläche}) = \text{const.}$$

- 2 Lösung der Laplace-GL.

$$\Delta\Phi = 0$$

mit Randbedingung aus 1

$$\rightarrow \Phi(\vec{r})$$

im Raum zwischen/außerhalb der Elektroden

- 3 Bestimmung von E:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r})$$

- 4 Speziell auf der Elektrodenoberfläche:

$$\vec{E}(\vec{r} = \text{Oberfläche}) = \vec{E}_{H1,2}(\vec{r}_{Rand})$$

aus 3

- 5 Bestimmung $Q_{1,2}$ aus:

$$\oint\!\oint \epsilon \vec{E}_{H1,2} \cdot d\vec{f} = \oint\!\oint \sigma \cdot df = Q_{1,2}$$

7.3 Berechnungsmethode von Kapazitäten und Influenzladungen II

Bestimmung der Influenz-Koeffizienten

Algorithmus (1) – (5) liefert:

$$Q_1 = alg(\Phi_1, \Phi_2)$$

$$Q_2 = alg(\Phi_1, \Phi_2)$$

Influenzkoeffizienten-Matrix c_{ik}

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

Bestimmung der Koeffizienten c_{ik}

a) setze $\Phi_1 = 0$

$$Q_{1a} = alg_1(0, \Phi_2)$$

$$Q_{2a} = alg_2(0, \Phi_2)$$

und

$$Q_{1a} = c_{12}\Phi_2$$

$$Q_{2a} = c_{22}\Phi_2$$



$$c_{12} = alg_1(0, \Phi_2) / \Phi_2$$

$$c_{22} = alg_2(0, \Phi_2) / \Phi_2$$

b) setze $\Phi_2 = 0$

$$Q_{1b} = alg_1(\Phi_1, 0)$$

$$Q_{2b} = alg_2(\Phi_1, 0)$$

und

$$Q_{1b} = c_{11}\Phi_1$$

$$Q_{2b} = c_{21}\Phi_1$$



$$c_{11} = alg_1(\Phi_1, 0) / \Phi_1$$

$$c_{21} = alg_2(\Phi_1, 0) / \Phi_1$$

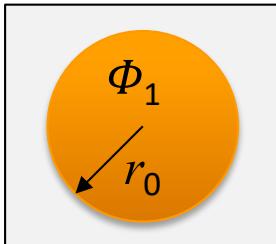
Bestimmung der Teilkapazitäten bzw. der Potentialkoeffizienten

- 1) Bestimmung von Q_k als Funktion von Φ_i
- 2) Aus $Q_i = \{c_{ik}\} \Phi_k$ folgte die Influenzkoeffizienten-Matrix $\{c_{ik}\}$
- 3) Ermitteln der individuellen Teilkapazitäten

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ik} &= -c_{ik} \\ C_{ii} &= \sum_{k=1}^N c_{ik} \end{aligned}}$$

7.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem I

1



Φ_1 auf Metallkugel gegeben $\rightarrow \Phi_1 = \text{const.} = \text{Randbedingung}$

$\Phi(r) = ?$ im Außenraum

Kugelsymmetrie \rightarrow nur radiale Variation von Φ
 $\Phi = \Phi(r)$ unabhängig von ϑ, φ

2

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = 0$$

Laplace-Gl. (r -Abhängigkeit)
in Kugelkoordinaten (siehe Kapitel 1, Folie 40)

$$\rightarrow r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} = c_1$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

$$\Phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

c_1, c_2 sind noch unbekannte Integrationskonstanten

7.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem II

$$\Phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung für dieses Problem

Bestimmung von c_1, c_2 aus den Randbedingungen:

- a) Potential im ∞ soll gegen Null gehen

mit $(r \rightarrow \infty) = 0$ folgt $c_2 = 0$

- b) Potential auf der Kugeloberfläche ist $\Phi_1 = \text{const.}$

mit $(r = r_0) = \Phi_1$ folgt $-c_1 / r_0 = \Phi_1 \quad c_1 = -r_0 \cdot \Phi_1$



$$\Phi(r) = \Phi_1 \frac{r_0}{r}$$

Lösung der Laplace-Gleichung im Außenraum
bei gegebenen Randbedingungen

7.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem III

(3) Bestimmung von $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\Phi_1 \frac{r_0}{r} \right) \vec{e}_r = \Phi_1 \frac{r_0}{r^2} \vec{e}_r$$

(4) E auf Kugeloberfläche $r = r_0$

$$\vec{E}_{H1} = E(r_0) = \Phi_1 \frac{r_0}{r_0^2} \vec{e}_r = \Phi_1 \frac{1}{r_0} \vec{e}_r$$

(5) Bestimmung von Q_1

$$\oint \epsilon \vec{E}_{H1} \cdot d\vec{f} = Q_1$$

$$= \epsilon \cdot \Phi_1 \frac{1}{r_0} \cdot 4\pi r_0^2 = \epsilon \cdot \Phi_1 4\pi r_0$$

→ $Q_1 = 4\pi\epsilon r_0 \cdot \Phi_1$

7.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem IV

Bestimmung des Influenzkoeffizienten

Algorithmus (1) bis (5) liefert:

$$Q_1 = 4\pi \varepsilon r_0 \cdot \Phi_1$$

Influenzkoeffizienten-Matrix c_{ik}

$$Q_1 = c_{11} \Phi_1$$

Bestimmung von c_{11} :

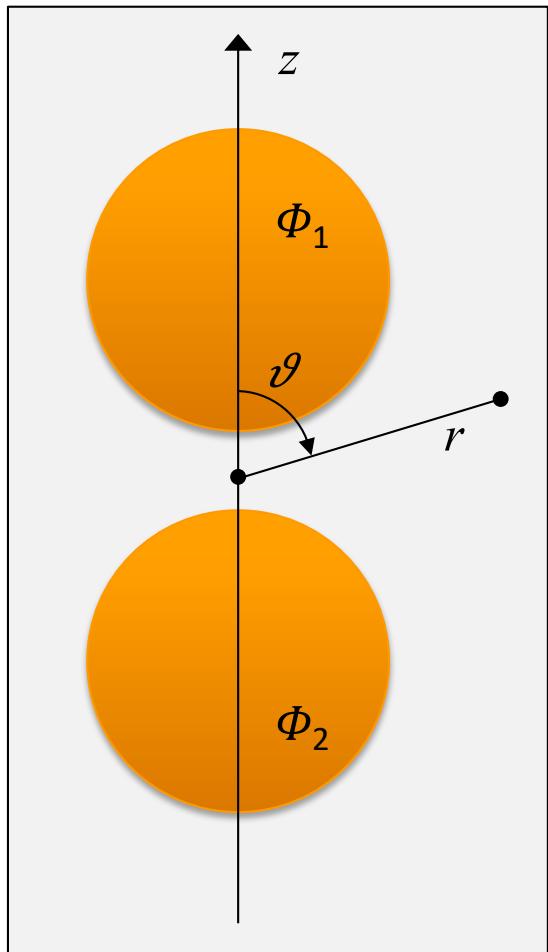
$$c_{11} = alg_1(\Phi_1) / \Phi_1 = (4\pi \varepsilon r_0 \Phi_1) / \Phi_1$$

$$c_{11} = 4\pi \varepsilon r_0$$

mit $C_{11} = c_{11}$ folgt auch für die Kapazität:

$$C_{11} = 4\pi \varepsilon r_0$$

7.5 Beispiel rotationssymmetrisches Problem



Keine Kugelsymmetrie mehr

$\Phi = \Phi(r, \vartheta)$ abhängig von ϑ

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi(r, \vartheta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right)$$



Integration ?

Lösung mittels Separation der Variablen
oder numerische PDGL – Routine
(z.B. Finite Elemente oder Finite
Differenzen Feldberechnung)

7.6 Zusammenfassung

Die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$

ist eine geeignete Methode:

- wenn Äquipotentiallinien durch metallische Flächen vorgegeben sind,
- und wenn das Medium linear und isotrop ist,
- und wenn zwischen den Metallen keine freien Ladungen sind.

Kartesische Koordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Idee: Transformation der partiellen Differentialgleichung in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen
 Die Symmetrie der Randbedingungen legt die Wahl des Koordinatensystems (kartesisch, zylindrisch, sphärisch) fest.

Man sucht die Lösung der Laplace-Gleichung für eine spezielle Form von Φ :

$$\Phi = U(x) \cdot V(y) \cdot W(z)$$

$$\rightarrow V(y) \cdot W(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x) + U(x) \cdot W(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(y) + U(x) \cdot V(y) \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} W(z) = 0$$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} \right] = 0$$

Jeder der drei Summanden hängt nur noch von einer Variablen ab. Da die Summe immer Null ergeben soll, muss jeder einzelne Summand konstant und unabhängig von der Variablen sein.

Kartesische Koordinaten

$$\left[\frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = 0 \right]$$

$$f_x(x) + f_y(y) + f_z(z) = 0$$

Wir haben also die Summe dreier Funktionen $f_x(x), f_y(y), f_z(z)$, die jeweils für alle x, y, z , konstant sein müssen:

$$f_x(x) = C_1$$

$$f_y(y) = C_2 \quad \text{mit} \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$f_z(z) = C_3$$

Nun setzen wir (zunächst willkürlich):

$$C_1 = -\alpha^2$$

$$C_2 = -\beta^2 \quad \text{mit} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$C_3 = +\gamma^2$$

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten III

Damit sind $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f_z(z)$ konstant und unabhängig von x, y, z

$$f_x(x) = -\alpha^2 \quad \rightarrow \alpha \text{ unabhängig von } x$$

$$f_y(y) = -\beta^2 \quad \rightarrow \beta \text{ unabhängig von } y$$

$$f_z(z) = +\gamma^2 \quad \rightarrow \gamma \text{ unabhängig von } z$$

Einsetzen
ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} &= -\alpha^2 \\ \frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} &= -\beta^2 \quad \rightarrow \\ \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} &= \gamma^2 \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot U(x) &= 0 \\ \frac{d^2 V(y)}{dy^2} + \beta^2 \cdot V(y) &= 0 \\ \frac{d^2 W(z)}{dz^2} - \gamma^2 \cdot W(z) &= 0 \end{aligned}}$$

Damit haben wir drei unabhängige, gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diese lassen sich leicht lösen.

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten IV

Lösung einer DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dU(x)}{dx} + a_2 U(x) = 0$$

Ansatz: $U(x) = C \cdot e^{\lambda x}$

und somit: $\frac{dU(x)}{dx} = \lambda C \cdot e^{\lambda x}$
 $\frac{d^2U(x)}{dx^2} = \lambda^2 C \cdot e^{\lambda x}$

Einsetzen ergibt: $\lambda^2 C \cdot e^{\lambda x} + a_1 \lambda C \cdot e^{\lambda x} + a_2 C \cdot e^{\lambda x} = 0$

$$C \cdot e^{\lambda x} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0$$

Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

Lösung des Polynoms: $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$

*Exkurs: Lösung einer
DGL 2. Ordnung*

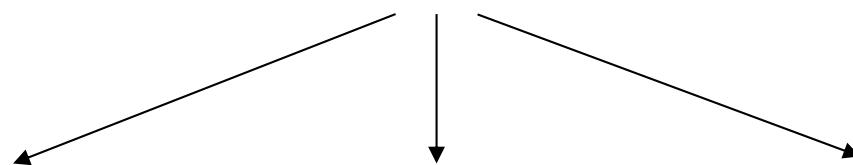
7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten V

Lösung einer DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dU(x)}{dx} + a_2 U(x) = 0$$

Lösung des Polynoms: $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$

Exkurs: Lösung einer
DGL 2. Ordnung



$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$$

$$\rightarrow U(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 = 0$$

$$\rightarrow U(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 < 0$$

$$\rightarrow U(x) = e^{ax} \cdot (C_1 \cdot \cos(bx) + C_2 \cdot \sin(bx))$$

$$a = -\frac{a_1}{2}$$

$$b = \sqrt{\left| \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right|}$$

C_1 und C_2 sind freie Konstanten, deren Werte man aus den Randbedingungen ermittelt.

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten VI

Lösung einer DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + a_1 \frac{dU(x)}{dx} + a_2 U(x) = 0$$

Zurück zu unseren drei DGLs:

Lösung der drei charakteristischen Polynome:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot U(x) = 0$$

$$a_1 = 0, a_2 = \alpha^2, \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\alpha^2}$$

$$a = 0, b = \alpha$$

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} + \beta^2 \cdot V(y) = 0$$

$$a_1 = 0, a_2 = \beta^2, \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\beta^2}$$

$$a = 0, b = \beta$$

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} - \gamma^2 \cdot W(z) = 0$$

$$a_1 = 0, a_2 = -\gamma^2, \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma^2}$$

Lösungen der DGLs:

$$U(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha x) + C_2 \cdot \cos(\alpha x)$$

$$V(y) = C_3 \cdot \sin(\beta y) + C_4 \cdot \cos(\beta y)$$

$$W(z) = C_5 \cdot e^{+\gamma z} + C_6 \cdot e^{-\gamma z}$$

Daraus folgt als Gesamtlösung der Laplace-Gleichung:

$$\Phi = [C_1 \cdot \sin(\alpha x) + C_2 \cdot \cos(\alpha x)] \cdot [C_3 \cdot \sin(\beta y) + C_4 \cdot \cos(\beta y)] \cdot [C_5 \cdot e^{\gamma z} + C_6 \cdot e^{-\gamma z}]$$

Alle Linearkombinationen sind ebenfalls Lösungen, also allgemein: $\Phi = A \cdot \sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta y) \cdot e^{-\gamma z}$

Partikuläre Lösung: $\Phi_{ij}(x, y, z) = A_{ij} \cdot \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z}$ mit $\gamma_{ij}^2 = \alpha_i^2 + \beta_j^2$

noch unbekannte Koeffizienten

Lösung prüfen:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} = A_{ij} (-\alpha_i^2) \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z} = -\alpha_i^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} = \dots = -\beta_i^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial z^2} = \dots = +\gamma_i^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial z^2} = (-\alpha_i^2 - \beta_i^2 + \gamma_i^2) \Phi_{ij} = 0 \cdot \Phi_{ij} = 0$$

→ Φ_{ij} ist eine Teillösung der Laplace-Gleichung q.e.d.

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten VIII

Gesucht: Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

Annahme: Die Lösungsfunktion lässt sich folgendermaßen darstellen: $\Phi = U(x) \cdot V(y) \cdot W(z)$

Dann partikuläre Lösung: $\Phi_{ij}(x, y, z) = A_{ij} \cdot \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z}$ mit $\gamma_{ij}^2 = \alpha_i^2 + \beta_j^2$

 noch unbekannte Koeffizienten

Jede Linearkombination ist ebenfalls eine Lösung der Potentialgleichung.

Nächster Schritt: Beliebige Lösungsfunktion durch Reihenbildung: $\Phi = \sum_i U_i(x) \cdot V_i(y) \cdot W_i(z)$

Damit allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung durch Überlagerung vieler Lösungen:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{i,j} A_{ij} \cdot \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z}$$

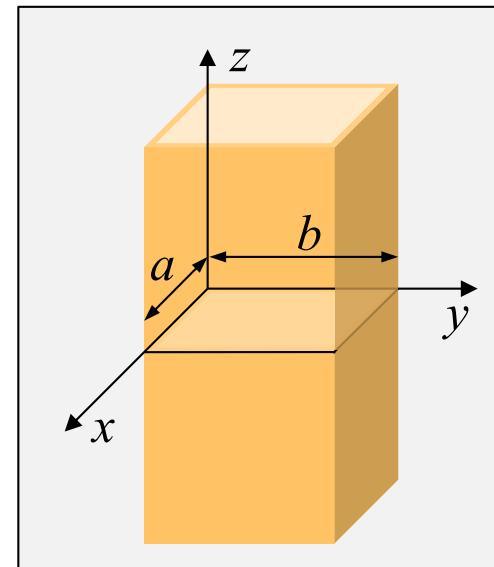
mit $\gamma_{ij}^2 = \alpha_i^2 + \beta_j^2$

Die unbekannten Koeffizienten A_{ij} , α_i , β_j ergeben sich aus den Randbedingungen.

Beispiel: Rechteckiges, metallisches Rohr (unendlich lang)

Randbedingungen:

- a) $\Phi(x,y,z) = 0$ auf dem Rand
- b) $\Phi(x,y,0) = \text{vorgegeben} = V_0(x,y)$
- c) abfallendes Potential in z -Richtung



Einschränkung der Lösungsvielfalt durch Randbedingungen $\phi = 0$ auf dem Rand:

$$\boxed{\Phi(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot e^{-\gamma_{mn} z}} \quad \gamma_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

Nur sin-Terme wegen
 $\Phi(0,y,z) = 0$ „hintere Wand“

Nur sin-Terme wegen
 $\Phi(x,0,z) = 0$ „linke Wand“

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten X

Bestimmung von α_n und β_m durch Berücksichtigung der weiteren Randbedingungen $\Phi = 0$

am vorderen Deckel
am rechten Deckel

$$x = a \\ y = b$$



$$\Phi(a, y, z) = 0 \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Phi(x, b, z) = 0 \rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot e^{-\gamma_{mn} z}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{a}a\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{m\pi}{b}b\right) = 0 \end{array} \right\}$$

Rand-
bedingungen
erfüllt

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

Bestimmung der Koeffizienten A_{nm} durch Anpassung an die vorgegebene
Randbedingung des Potentialverlaufs $V_0(x, y)$:

$$\Phi(x, y, z=0) = V_0(x, y)$$

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten XI

Sei die Randbedingung zum Beispiel:

$$V_0(x, y) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) \quad (\text{willkürlich!})$$

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma_{mn}z}} \rightarrow A_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq 1, m \neq 1 \\ k & n = 1, m = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\Phi(x, y, z) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z} \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad [k] = V}$$

Ist damit die Laplace-Gleichung erfüllt?

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -k \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = k \left\{ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten XII

Berechnung der Felder im Inneren des Rohrs

Potential

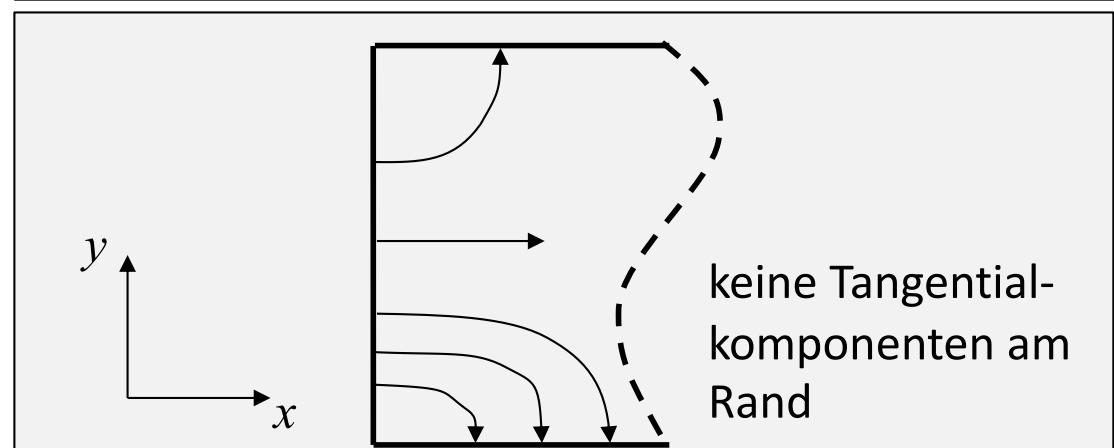
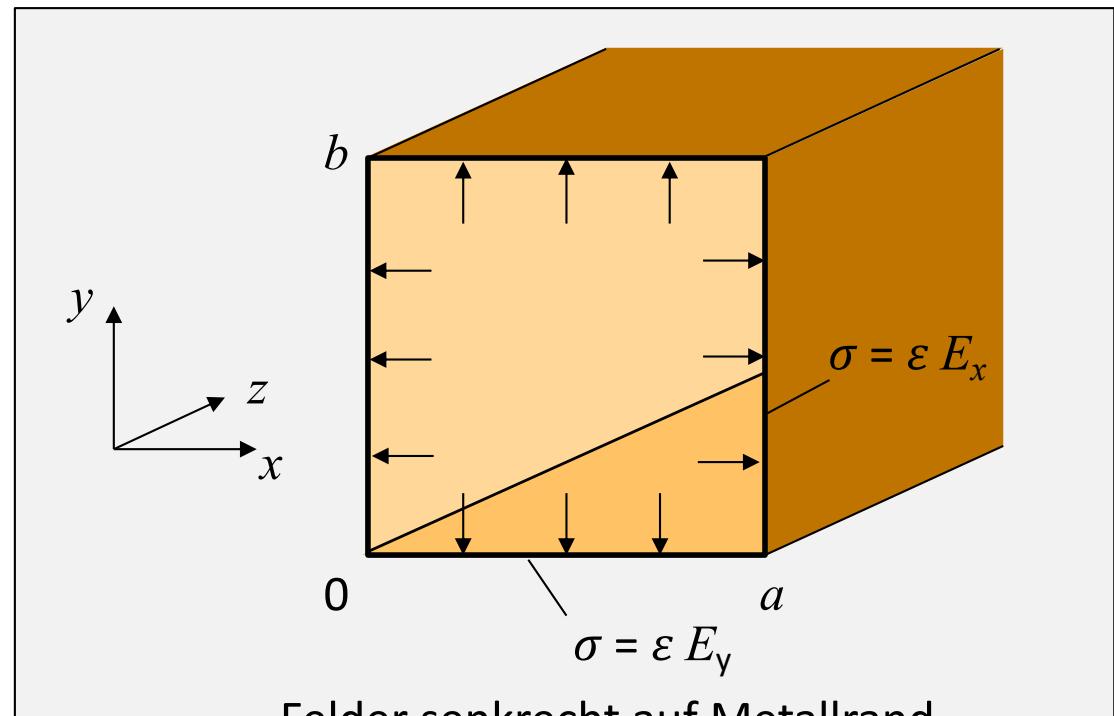
$$\Phi(x, y, z) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

Elektrisches Feld

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = +\gamma \cdot k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -k \frac{\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -k \frac{\pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$



Vorgehen bei allgemeinen Randbedingungen $V_0(x,y)$

Wenn sich $V_0(x,y)$ als Produkt zweier Funktionen in x und y darstellen lässt, so gilt:

$$\Phi(x,y,0) = V_0(x,y) = f_0(x) \cdot g_0(y) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} f_0(x) = 0 \text{ an } x=0, a \\ g_0(y) = 0 \text{ an } y=0, b \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{entspricht der Rand-} \\ \text{bedingung } \Phi=0 \text{ am} \\ \text{Rand} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\Phi(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = f_0(x) \cdot g_0(y)}$$

Zerlegung von $f_0(x)$, $g_0(y)$ nach Fourier in eine Summe von Harmonischen:

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$g_0(y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{mit} \quad b_m = \frac{2}{b} \int_0^b g_0(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy$$

Koeffizientenvergleich: $A_{mn} = a_n \cdot b_m$ $\longleftarrow a_n \cdot b_m$

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Zylinderkoordinaten XIV

$$\boxed{\Delta\Phi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0}$$

$$\Phi = U(R) \cdot V(\varphi) \cdot W(z)$$

$$\rightarrow V(\varphi) \cdot W(z) \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + U(R) \cdot W(z) \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + U(R) \cdot V(\varphi) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{U(R)} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{V(\varphi)} \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

Separationsansatz $f_R(R) + \frac{1}{R^2} f_\varphi(\varphi) + f_z(z) = 0$

$$\begin{array}{c|c|c} & | & | \\ & ? & -m^2 & \gamma^2 \\ \hline & & & \end{array}$$

Konstanten, unabhängig von φ und z

7.7 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kugelkoordinaten XV

$$\boxed{\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0} \quad / \cdot \frac{r^2 \sin^2\vartheta}{U \cdot V \cdot W}$$

$$\Phi = U(r) \cdot V(\vartheta) \cdot W(\varphi)$$

$$\rightarrow \frac{\sin^2\vartheta}{U(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin\vartheta}{V(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{W(\varphi)} \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0$$

Separationsansatz

$$\boxed{\frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 W(\varphi) = 0}$$

Gewöhnliche DGL der sin- und cos- Funktionen

$$\rightarrow W(\varphi) \sim \sin(m\varphi), \cos(m\varphi)$$

m ganze Zahl: Erfüllung der Randbedingungen

$$W(\varphi) = W(\varphi + 2\pi)$$

7.8 Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_p(\vec{r}) + \Phi_L(\vec{r})$$

$\Phi_p(\vec{r})$ Partikuläre Lösung

$\Phi_L(\vec{r})$ Homogene Lösung der Laplace-Gleichung:
Ungleich Null, im Falle von geladenen
Elektroden; Randbedingungen durch deren
Potentiale.

Lösung der Poisson-Gleichung (partikuläre Lösung):

$$\Phi_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

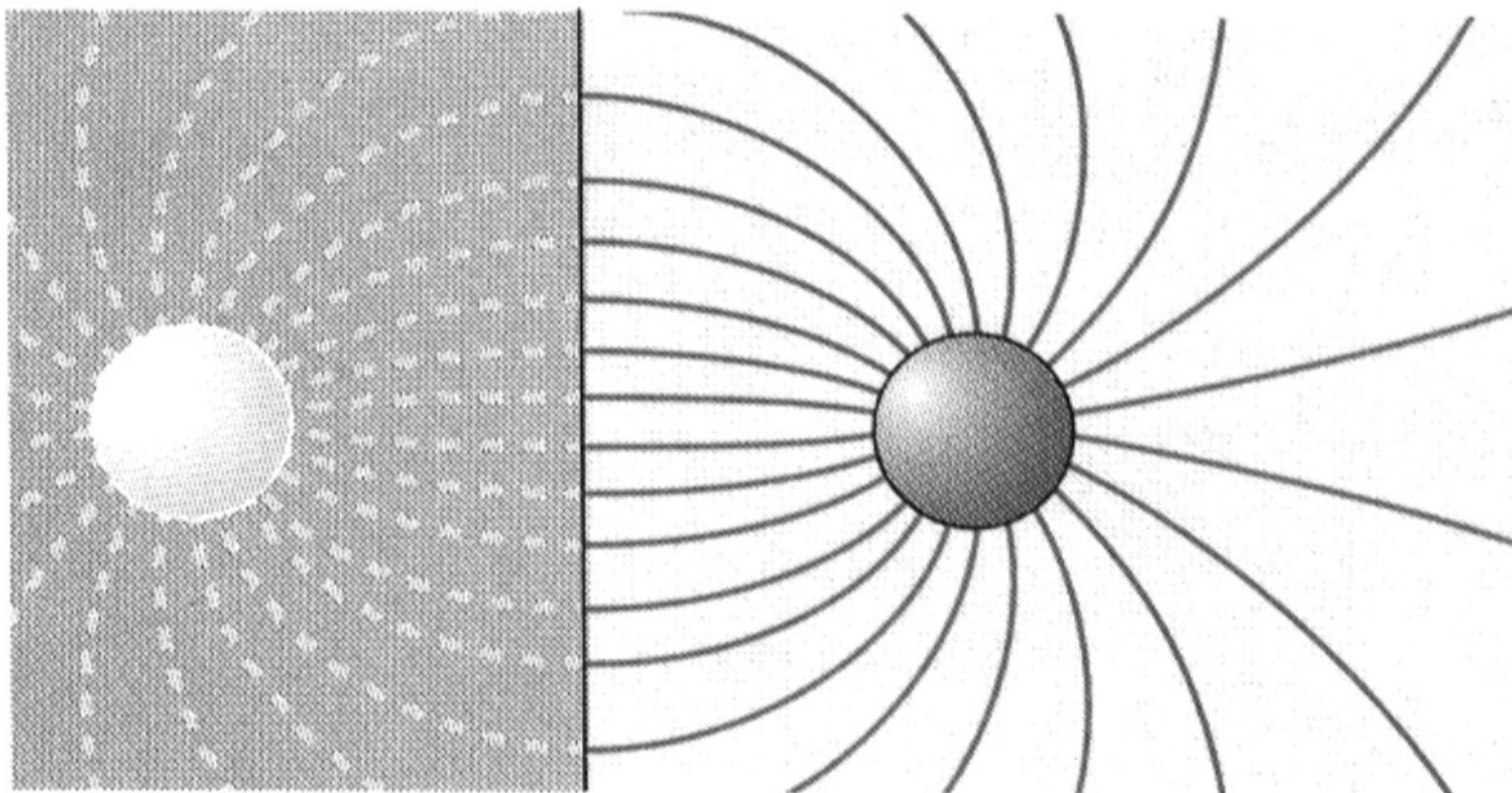
Coulomb-Integral

7.9 Spiegelungsmethode I

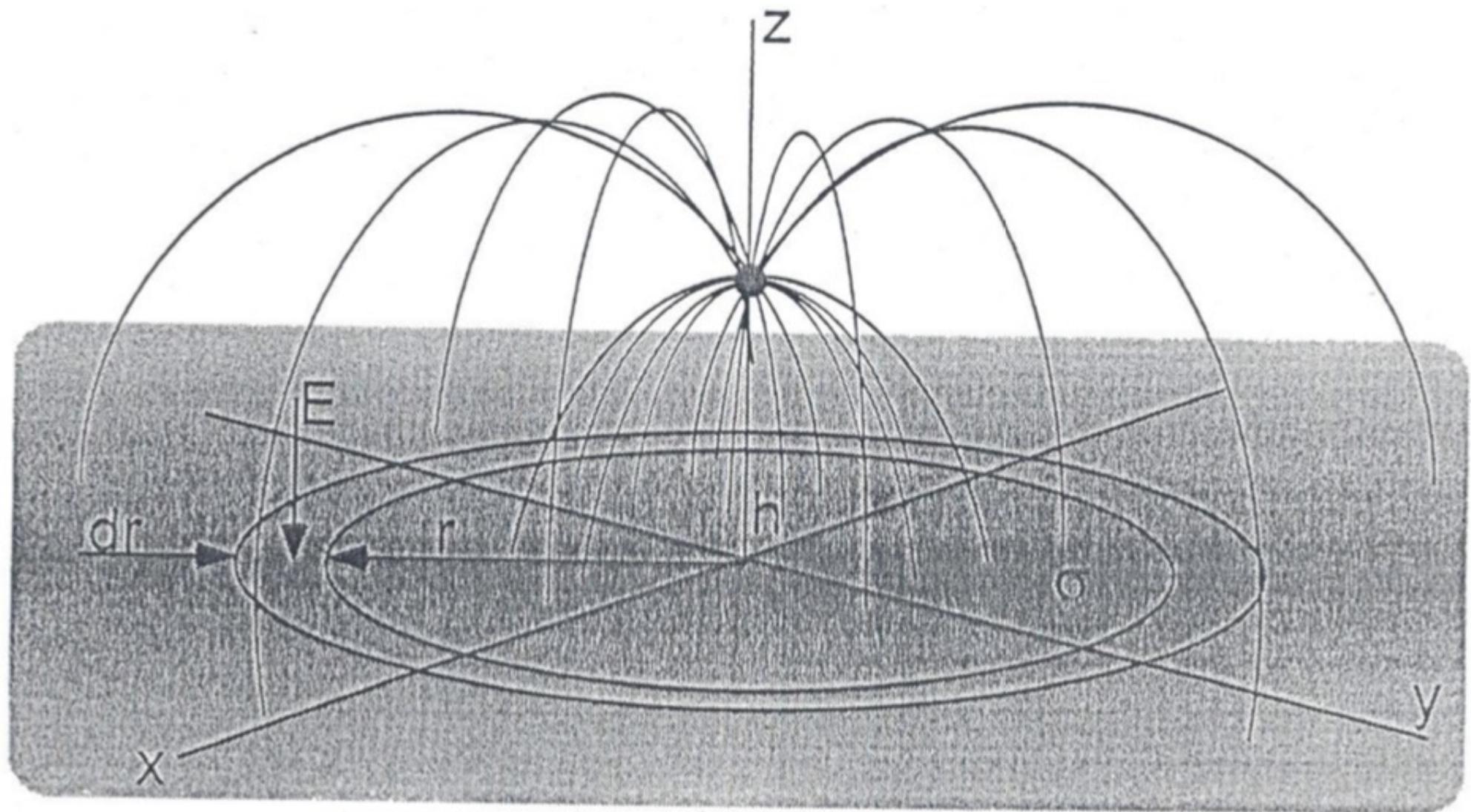
„elektrisches Spiegelbild“

Anwendungsbereich: Punktförmige Ladungen vor Metallplatten

Vorgehen: Metallplatte wegdenken und durch Anbringen von fiktiven Ladungen eine Äquipotentialfläche an der Stelle der Metallplatte mit gleichem Potential erzeugen.

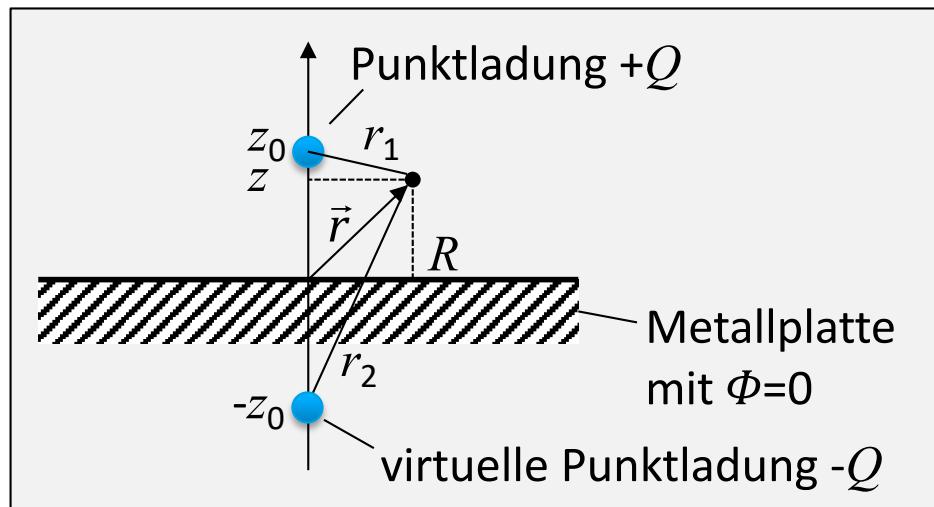


7.9 Spiegelungsmethode II



7.9 Spiegelungsmethode III

Beispiel:
(Zylinderkoordinaten
wegen Symmetrie)



$$r_1 = \sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}$$

$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}} \right) \cdot Q$$

$$\Phi(R, \varphi, z) = 0 \quad \text{Für } z = 0 \text{ und beliebige } R, \varphi \text{ (entspricht Potentialfläche der Metallplatte)}$$

7.9 Spiegelungsmethode IV

$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}} \right) \cdot Q$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}\vec{e}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \left(-\frac{R}{\left(R^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} + \frac{R}{\left(R^2 + (z + z_0)^2\right)^{3/2}} \right) \cdot \vec{e}_R \\ 0 \cdot \vec{e}_\varphi \\ \left(-\frac{(z - z_0)}{\left(R^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} + \frac{(z + z_0)}{\left(R^2 + (z + z_0)^2\right)^{3/2}} \right) \cdot \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

7.9 Spiegelungsmethode V

Auf Oberflächen von Metallplatten bei $z = 0$ gilt:

$$\vec{E}(R, z=0) = 0 \cdot \vec{e}_R - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

Das elektrische Feld steht senkrecht auf der Metalloberfläche.

Die Oberflächenladungsdichte $\sigma(R)$ ist gegeben durch: $\sigma(R) = \epsilon E_z(R, z=0)$

$$= -\frac{Q}{4\pi} \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

Die gesamte Influenzladung auf der Metallplatte:

$$\begin{aligned} Q_{\text{inf}} &= \iint \sigma d\Omega = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma(R) R d\varphi dR \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} R dR \\ &= -Q \cdot z_0 \left[\frac{-1}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = +Q \cdot z_0 \left(0 - \frac{1}{z_0} \right) = -Q \end{aligned}$$

Ist gleich groß wie die Punktladung Q , aber mit negativem Vorzeichen.

8. Zusammenfassung

Prüfen: Welche Randbedingungen sind gegeben? Welche Größen sind gesucht?

Ladungsverteilung gegeben	→ Satz vom Hüllfluß → Coulomb Integral	→ Elektrisches Feld → Elektrisches Potential
Randbedingungen gegeben	→ Laplace Gleichung (ladungsfreier Raum) → Poisson Gleichung (mit Ladungen)	→ Potentialverlauf → analytisch kaum lösbar nur numerische Lösung (FEM)
Elektrisches Feld gegeben	→ Wegintegral $E = - \text{grad } \Phi$ → $\text{div } D = \rho$	→ Potential → Ladungsverteilung