1 Mathematisches Handwerkszeug

Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}$.

a) Drücken Sie die komplexe Zahl z in Polarkoordinaten aus.

b) Berechnen Sie z^6. Geben Sie den Real- und Imaginärteil des Ergebnisses an.

c) Es sei $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $a - a^*$ rein imaginär ist.

d) Die komplexe Konjugation entspricht der „Spiegelung einer komplexen Zahl an der reellen Achse in der komplexen Zahlenebene“. Mit welcher Rechenoperation ließe sich eine „Spiegelung an der imaginären Achse“ darstellen?

Gegeben sei die Funktion

$$G(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_\infty)(z - z_\infty^*)} \qquad \text{mit} \qquad |z| > |z_\infty|$$

sowie $z_0 = 0{,}5$ und $z_\infty = 0{,}5 \cdot (-1 + \mathrm{j})$.

e) Machen Sie eine Skizze zu den Pol- und Nullstellen der Funktion G in der komplexen Zahlenebene. Markieren Sie die Polstellen mit $\times$ und die Nulstellen mit $\circ$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung. Zeichnen Sie außerdem den Einheitskreis ein.

f) Zerlegen Sie $G(z)$ in Partialbrüche.

g) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Zeigen Sie, dass das Integral über f über ein symmetrisches Intervall um 0 zu 0 wird.

Lösung:

a) Der Betrag ist

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2\,.$$

Die Phase ist

$$\varphi = 2\pi - \arctan\left(\frac{|\operatorname{Im}(z)|}{|\operatorname{Re}(z)|}\right) = 2\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\,.$$

Es gilt also

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{5\pi}{3}}\,.$$

b) Es gilt

$$z^6 = (2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{5\pi}{3}})^6 = 64\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,10\pi} = 64\,.$$

mit $\operatorname{Re}(z^6) = 64$ und $\operatorname{Im}(z^6) = 0$.

c) Es ist $a - a^* = 2\,\mathrm{j}\operatorname{Im}(a)$, wobei $\operatorname{Im}(a) \in \mathbb{R}$ und damit ist $2\,\mathrm{j}\operatorname{Im}(a)$ rein imaginär.

d) Für eine komplexe Zahl a entspricht $-a^*$ einer „Spiegelung an der imaginären Achse“.

e) Abbildung 1 zeigt die geforderte Zeichnung.

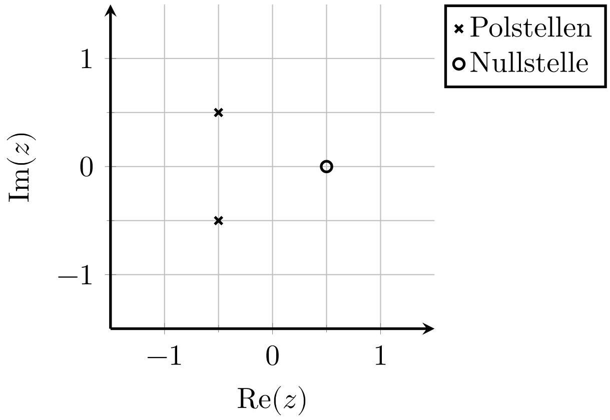


Abbildung 1: Pol- und Nullstellen der Funktion G.

f) Durch Einsetzen von $z = z_\infty$ bzw. $z = z_\infty^*$ in den Ansatz

$$G(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_\infty)(z - z_\infty^*)} = \frac{A}{z - z_\infty} + \frac{B}{z - z_\infty^*} \qquad \Rightarrow \qquad z - z_0 = A(z - z_\infty^*) + B(z - z_\infty)$$

erhält man

$$A = \frac{z_\infty - z_0}{z_\infty - z_\infty^*} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{z_\infty^* - z_0}{z_\infty^* - z_\infty} \overset{z_0 \in \mathbb{R}}{=} A^* \,.$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$A = \frac{z_\infty - z_0}{2\,\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(z_\infty)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{j} - \frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}\,\mathrm{j}} = \frac{-1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{j}}{\mathrm{j}} = \frac{1}{2} + \mathrm{j} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2} - \mathrm{j}\,.$$

Es gilt also

$$G(z) = \frac{\frac{1}{2} + \mathrm{j}}{z - z_\infty} + \frac{\frac{1}{2} - \mathrm{j}}{z - z_\infty^*}\,.$$

g) Das Integral kann aufgeteilt werden. Durch die Subsitution $t = -u$ ($\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, anpassen der Integralgrenzen) sowie vertauschen der Integralgrenzen erhält man für $b \in \mathbb{R}$ dann

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-b}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{b}^{0} -f(-u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{b} -f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{b} -f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{b} -f(t) + f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.
\end{aligned}$$

2 Prototypische Signale

Zeichnen Sie die folgenden Signale füt $T = \frac{1}{2}$. Achten Sie auf eine korrekte Achsenbeschriftung.

a) Einheitssprung mit Zeitverschiebung $\theta(t-3)$, wobei

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

b) Rechtecksignal der Breite $2\,T$ mit Zeitumkehr $r_T(-t)$, wobei

$$r_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

c) Dreieckssignal mit Zeitstauchung $d_T(0{,}5\,t)$, wobei

$$d_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{falls } |t| \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

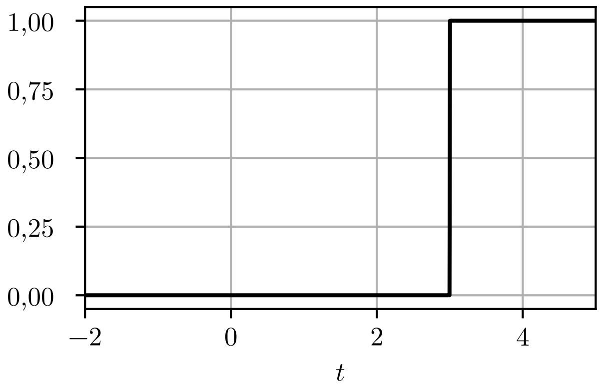
ein Dreiecksignal der Breite $2T$ ist.

d) Harmonische Schwingung:

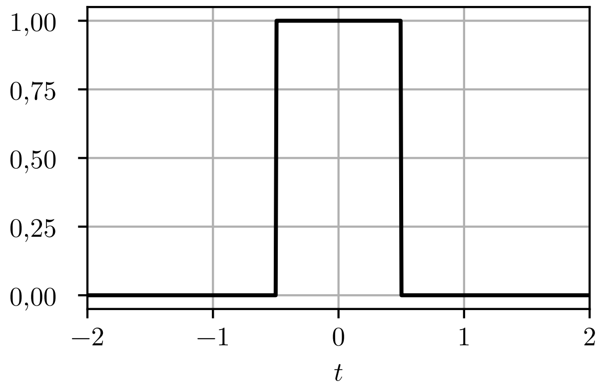
$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(\omega(t - t_0))\,,$$

mit $A = 3$, $\omega = 2\pi$ und $\phi = \omega/4$. Markieren Sie A in Ihrer Zeichung. Geben Sie außerdem die Fundamentalperiode T sowie die Zeitverschiebung t_0 der harmonischen Schwingung an und markieren Sie sie ebenfalls in Ihrer Zeichnung.

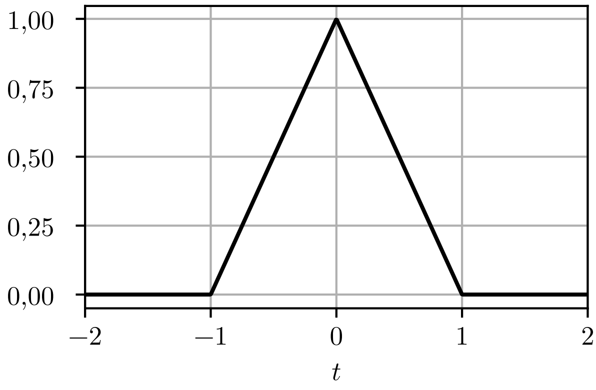
Lösung:



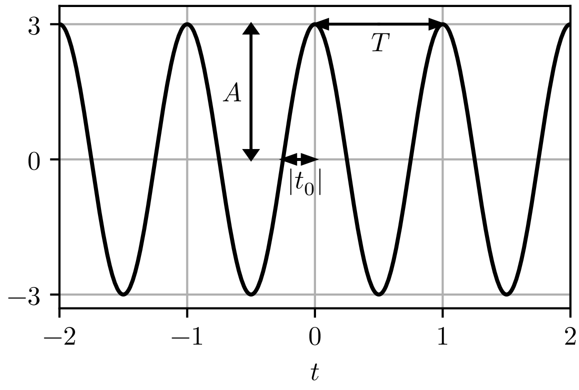
(a) Einheitssprung mit Zeitverschiebung.



(b) Rechtecksignal mit Zeitumkehr.



(c) Dreieckssignal mit Zeitstauchung.



(d) Harmonische Schwingung mit Fundamentalperiode $T = 2\pi/\omega = 1$ sowie Zeitverschiebung $t_0 = -\phi/\omega = -1/4$.