

Signale und Systeme

Vorlesung 8: Bode-Diagramme

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

Inhalt

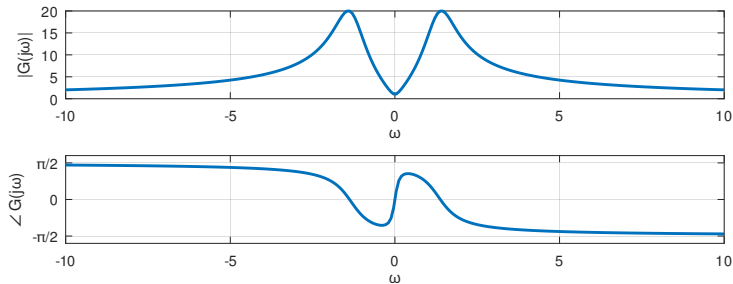
1. Amplituden- und Phasengang

2. Bode-Diagramme

3. Bode-Normalform

4. Bode-Diagramme Zeichnen

Amplituden- und Phasengang



Sei $G(j\omega)$ eine Frequenzantwort. Dann ist $|G(j\omega)|$ der **Amplitudengang** und $\angle G(j\omega)$ der **Phasengang** des entsprechenden LTI Systems.

In einem **Hauptphasengang** ist die Phase so gewählt, dass

$$-\pi < \angle G(j\omega) \leq \pi, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

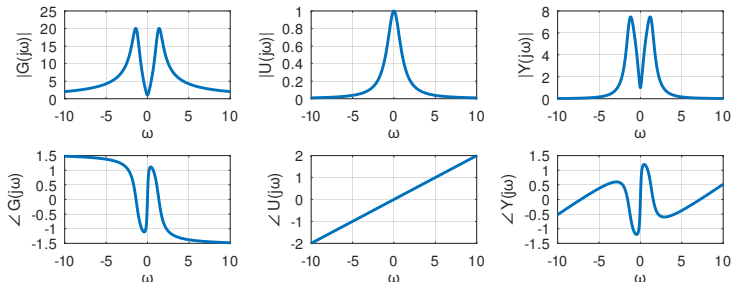
gilt. Ein Phasengang ist **entfaltet**, falls Sprünge in der Phase minimal sind. Im allgemeinen ist die Phase nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt.

Erinnerung:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

Achtung: kein Zusammenhang zur Faltung!

Amplituden-Phasendarstellung von LTI Systemen



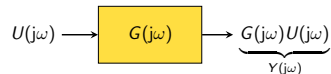
Um die Fouriertransformierte des Ausgangssignals eines LTI Systems,

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega),$$

zu bestimmen, müssen wir **Amplituden multiplizieren** und **Phasen addieren**:

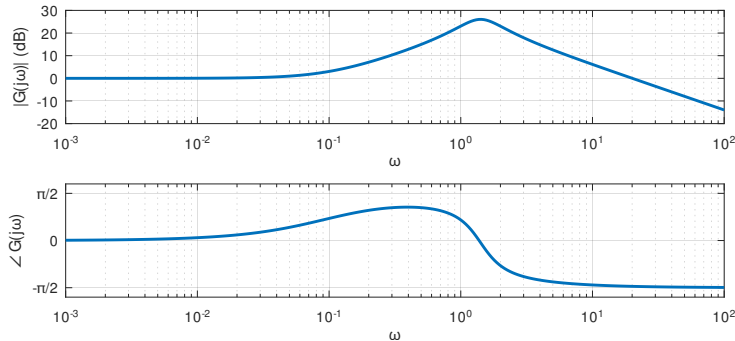
$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)|,$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega).$$



Erinnerung: Für LTI Systeme gleicht die Fouriertransformierte des Ausgangssignals dem Produkt aus Frequenzantwort und der Fouriertransformierten des Eingangssignals.

Bode-Diagramme



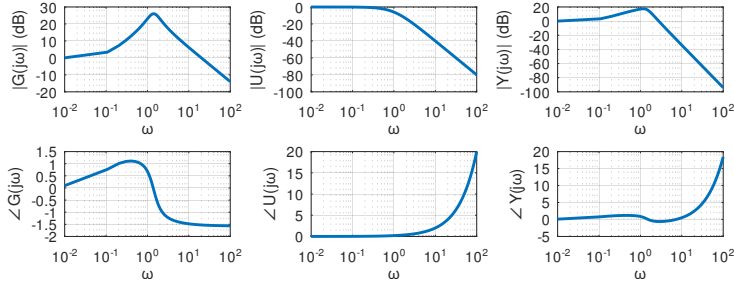
Wir nehmen im Folgenden an, dass Impulsantwort des Systems und das Eingangssignal reell sind. Daher zeigen wir nur positive Frequenzen $\omega > 0$.

Ein **Bode-Diagramm** ist eine graphische Darstellung von Amplituden- und Phasegang. Dabei werden Frequenz und Amplitude logarithmisch aufgetragen, die Frequenz dekadisch und die Amplitude in Decibel (dB):

$$\text{dB}(|G(j\omega)|) = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|).$$

Die Hauptphase wird linear aufgetragen.

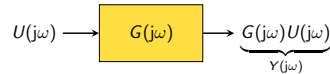
Vorteile von Bode-Diagrammen



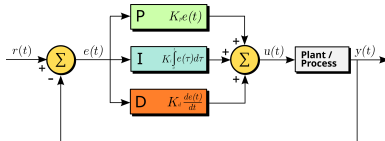
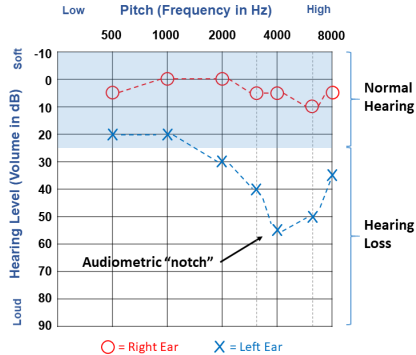
Mit der logarithmischen Darstellung des Amplitudengangs gilt für LTI Systeme:

$$\begin{aligned} \text{dB}(|Y(j\omega)|) &= \text{dB}(|G(j\omega)|) + \text{dB}(|U(j\omega)|), \\ \angle Y(j\omega) &= \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega). \end{aligned}$$

- Mit Bode-Diagrammen müssen wir also lediglich jeweils Amplituden und Phasen addieren, um das System auf das Eingangssignal anzuwenden!
- Das asymptotische Verhalten des Systems wird beobachtbar
- Insgesamt ist es einfach, Bode-Diagramme zu zeichnen



Bode-Diagramme in der Praxis



Der Plan

Das Ziel: Bode-Diagramme per Hand zeichnen

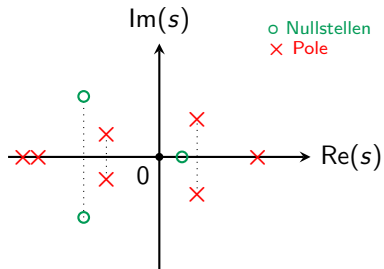
↓ Warum per Hand? ↓

Um Intuition für den Zusammenhang zwischen Nullstellen
und Polen und dem Frequenzgang zu entwickeln

↓ Wie machen wir das? ↓

Durch Reduktion auf einfache Fälle → **Bode-Normalform**

Die Idee



Beispielhaftes Pol-Nullstellen Diagramm eines reellen Systems.

Ein LTI System ist **reell**, falls seine Impulsantwort reell ist.

Für reelle LTI Systeme mit rationaler Systemfunktion gilt $G(s) = G^*(s^*)$. Jede Nullstelle & Pol ist entweder reell oder Teil eines komplex-konjugierten Paares.

- Daher können wir solche Systemfunktionen so faktorisieren, dass

$$G(s) = K \frac{(s - n_1) \cdots (s - n_M)}{(s - p_1) \cdots (s - p_N)} = K G_1(s) G_2(s) \cdots G_L(s), \quad K \in \mathbb{C}$$

- Jeder Faktor G_n realisiert entweder eine einzelne reelle Nullstelle (oder einen Pol) oder ein komplex-konjugiertes Paar (Nullstelle oder Pol)

Bode-Normalform

Jedes rationale $G(s) = G^*(s^*)$ können wir in **Bode-Normalform**

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_L(j\omega)$$

schreiben, wobei jeder Faktor $G_k(j\omega)$ eine der folgenden Formen hat.

Zur Betrachtung der Frequenzantwort wählen wir $s = j\omega$.

Konstante

$$K$$



Pol bei Null

$$\frac{1}{j\omega}$$



Nullstelle bei Null

$$j\omega$$



Reeller Pol

$$\frac{1}{j\omega\tau + 1}$$



Reelle Nullstelle

$$j\omega\tau + 1$$



Komplexes Pol-Paar

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}$$



Komplexes Nullstellen-Paar

$$1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2$$



Bode-Normalform bestimmen

- 1 Bestimme die Nullstellen und Pole von $G(s)$
- 2 Für jede(n) Nullstelle/Pol bei Null, wähle einen Faktor der Form

$$G_n(j\omega) = [j\omega]^{\pm 1}$$

- 3 Für jede(n) reelle Nullstelle/Pol bei $s_0 \neq 0$, wähle einen Faktor der Form

$$G_n(j\omega) = [j\omega\tau + 1]^{\pm 1}, \quad \tau = -\frac{1}{s_0}$$

- 4 Für jedes komplexe Nullstellen/Pol-Paar s_0 und s_0^* , wähle einen Faktor

$$G_n(j\omega) = \left[1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{\pm 1}, \quad \omega_0 = |s_0|, \quad \zeta = -\frac{\operatorname{Re}(s_0)}{|s_0|}.$$

- 5 Füge eine Konstante

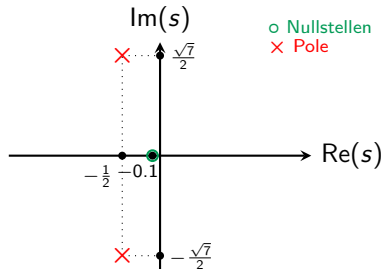
$$G_n(j\omega) = K$$

zu, so dass das Produkt der anderen Blöcke mit $G(s)$ übereinstimmt

Wir wählen „+1“ für Nullstellen
und „-1“ für Pole.

Bode-Normalform bestimmen

Beispiel



Die Bode-Normalform von

$$G(s) = \frac{20s + 2}{s^2 + s + 2}$$

lautet

$$G(s) = \underbrace{(j\omega \cdot 10 + 1)}_{G_1(j\omega)} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 + 2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{j\omega}{\sqrt{2}} \right)^2}_{G_2(j\omega)}}$$

Bode-Diagramme Zeichnen

Methode

- Für $G(j\omega)$ in Bode-Form gilt

$$\begin{aligned}\text{dB}[|G(j\omega)|] &= \text{dB}[|G_1(j\omega)|] + \dots + \text{dB}[|G_L(j\omega)|], \\ \angle G(j\omega) &= \angle G_1(j\omega) + \dots + \angle G_L(j\omega)\end{aligned}$$

- Wir bestimmen daher nun einfach zeichenbare Approximationen der grundlegenden Faktoren in der Bode-Normalform
- Am Ende addieren wir diese Approximationen auf um das endgültige Bode-Diagramm zu erhalten

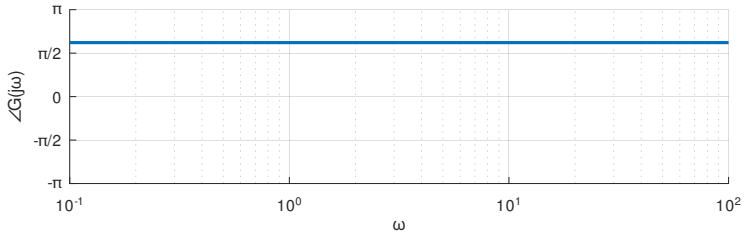
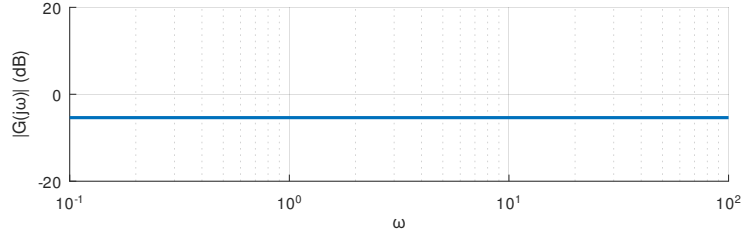
(sh. Folie 4)

Zum Zeichnen beschränken wir uns auf Systemfunktionen, deren Nullstellen und Pole alle in der linken Halbebene liegen (d.h. $\tau, \zeta, \omega_0^2 > 0$).

Die Methode funktioniert auch im allgemeinen Fall, allerdings muss man sich dann mehr Approximationen merken.

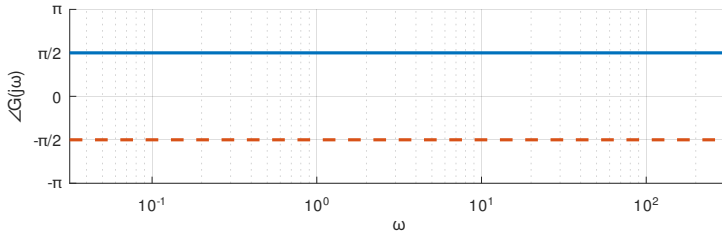
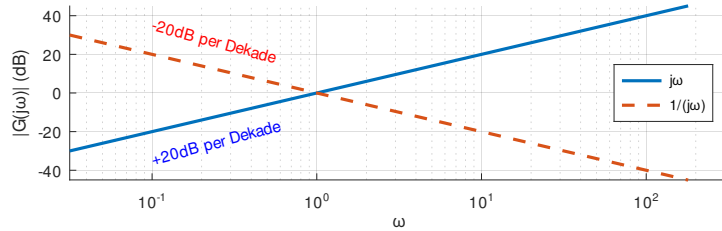
Approximation der grundlegenden Bode-Faktoren

Konstante K



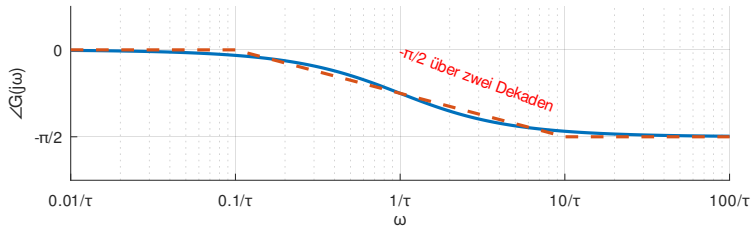
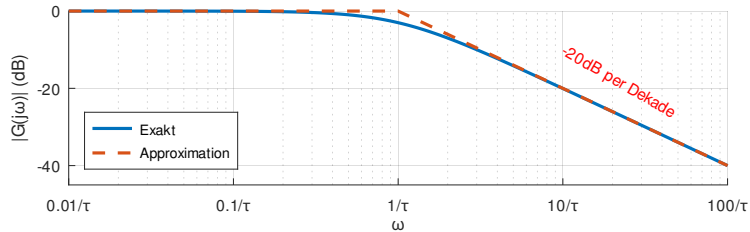
Approximation der grundlegenden Bode-Faktoren

Nullstelle/Pol bei Null: $[j\omega]^{\pm 1}$



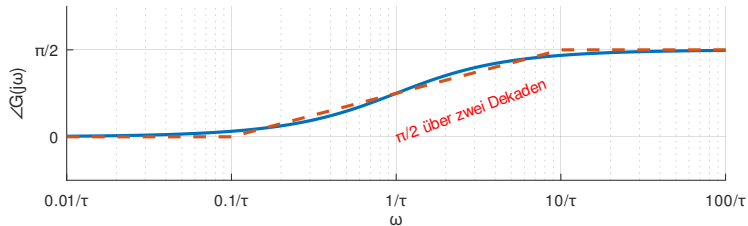
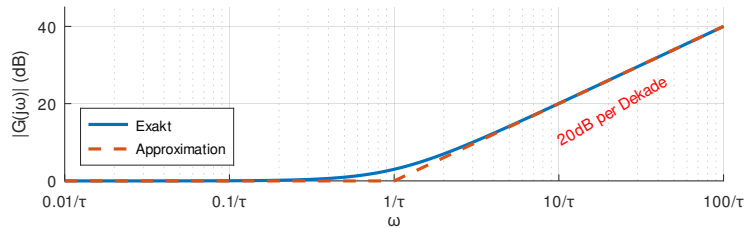
Approximation der grundlegenden Bode-Faktoren

Reeller Pol bei $s \neq 0$: $[j\omega\tau + 1]^{-1}$ mit $\tau > 0$



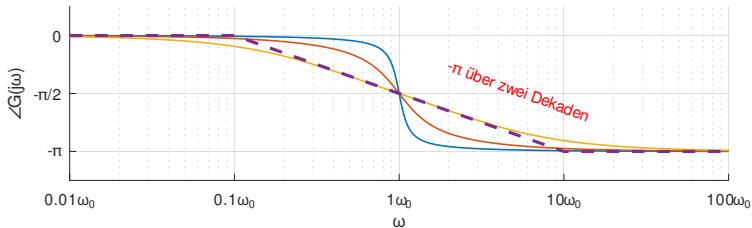
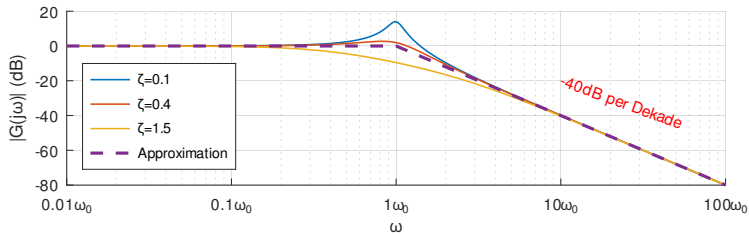
Approximation der grundlegenden Bode-Faktoren

Reelle Nullstelle bei $s \neq 0$: $[j\omega\tau + 1]^{+1}$ mit $\tau > 0$



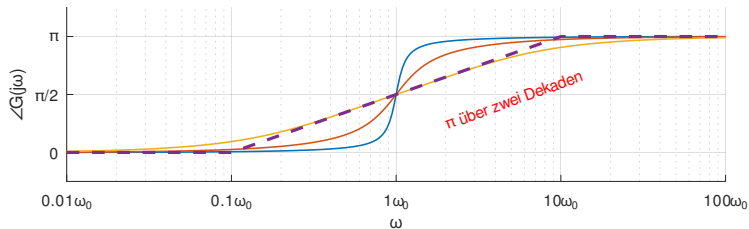
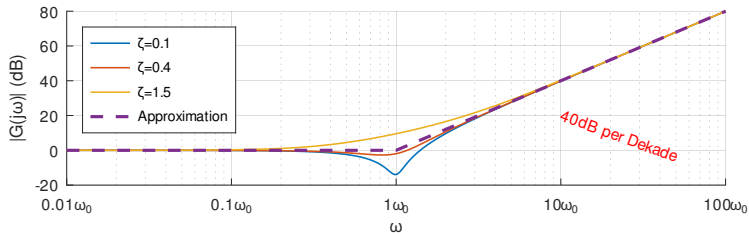
Approximation der grundlegenden Bode-Faktoren

Komplexes Pol-Paar: $\left[1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{-1}$ mit $\zeta, \omega_0 > 0$



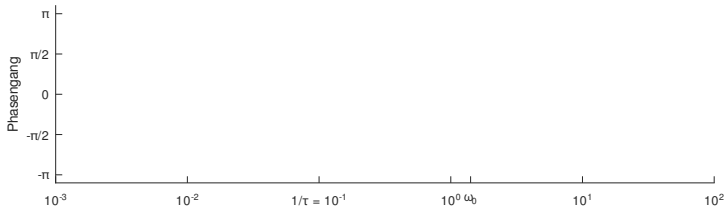
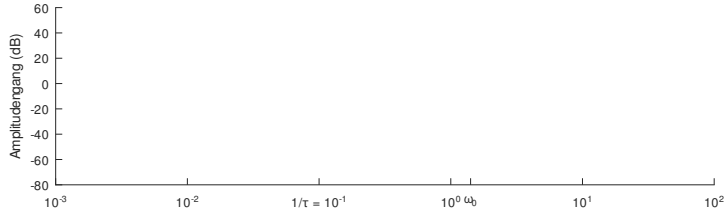
Approximation der grundlegenden Bode-Faktoren

Komplexes Nullstellen-Paar: $\left[1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{+1}$ mit $\zeta, \omega_0 > 0$



Bode-Diagramme Zeichnen

Beispiel $G(s) = \frac{20s+2}{s^2+s+2}$



Wir haben die Bode-Normalform bereits auf Folie 10 bestimmt:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega),$$

Endgültige Bode-Phasenzantwort

Wie trägt die Approximation

von $G(j\omega)$ (auf Folie 10 auf.

Phasengang.

Der Amplitudengang lässt sich

Wichtiger, dass insbesondere

die Approximation bei

Amplitudengangs recht gut ist.

dB/Dekade wechselt

von +20 auf -20

dB/Dekade wechselt

Ähnliches gilt für den

Literaturverzeichnis I

- [1] C. L. Themann, "File:Typical audiometric noise notch.png - Wikimedia Commons, the free media repository," https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Typical_audiometric_%22noise_notch%22.png&oldid=954527180, 2022, [Online; accessed 18-November-2024].
- [2] A. Urquizo, "File:PID en.svg - Wikimedia Commons, the free media repository," https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:PID_en.svg&oldid=763201426, 2011, cC BY-SA 3.0 [Online; accessed 18-November-2024].