Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Industrielle Informationstechnik

Signale und Systeme

Vorlesung 2: Signalräume

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

Inhalt

1. Signalräume, innere Produkte und Normen

2. Der Signalraum L^2 – Signale mit endlicher Energie

3. Bemerkungen zum Lebesgue-Integral

4. Weitere Signalräume und -mengen

Linearer Raum und Signalraum

Eine Menge $\mathcal{V}$ bildet einen linearen Raum wenn sie abgeschlossen gegenüber einer Addition und Multiplikation mit einem Skalar ist. D.h.

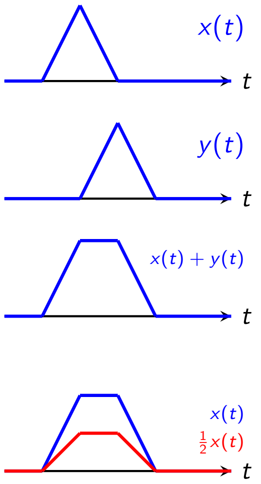
$$x, y \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad x + y \in \mathcal{V}, \qquad x \in \mathcal{V},\ \alpha \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in \mathcal{V}.$$

- In einem linearen Raum können wir Elemente also ohne Sorge addieren und skalieren

Ein Signalraum ist ein linearer Raum bestehend aus Signalen. Die Addition und Multiplikation mit einem Skalar sind dabei punktweise definiert:

$$\begin{aligned} z = x + y \quad &\Rightarrow \quad z(t) = x(t) + y(t), \quad \forall t, \\ y = \alpha x \quad &\Rightarrow \quad y(t) = \alpha x(t), \quad \forall t. \end{aligned}$$

Die stetigen Signalen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bilden einen Signalraum.



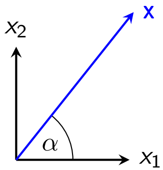
Inneres Produkt

Ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ auf einem linearen Raum $\mathcal{V}$ ist

1. positiv-definit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. hermitsch: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$,
3. linear im ersten Argument: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Die Eigenschaften gelten für alle $x, y, z \in \mathcal{V}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ beschreibt das innere Produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$ den Winkel α zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha$.



- Innere Produkte erscheinen in vielen weiteren Kontexten, wie z.B. Signalen oder Zufallsvariablen. Intuitiv beschreiben sie „Ähnlichkeit“.
- Durch die klare Definition des Begriffs können wir bereits bekannte Argumente in neuen Kontexten ohne erneuten Beweis nutzen

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Es gilt $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

→ Anschrieb 2.1

Orthogonalität

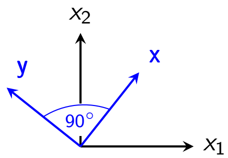
Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ von Elementen aus einem linearen Raum $\mathcal{V}$ mit inneren Produkt heißt orthogonal falls

$$\langle x, x \rangle \neq 0 \quad \text{und} \quad \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{M} \text{ mit } x \neq y.$$

Falls zusätzlich $\langle x, x \rangle = 1$ für alle $x \in \mathcal{M}$, ist die Menge orthonormal.

Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ mit dem inneren Produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$ sind zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal, falls der Winkel zwischen Ihnen 90° beträgt:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$



- Für uns später relevant, da sich die Koeffizienten orthogonaler Basisfunktionen besonders einfach bestimmen lassen
- Das ist die konzeptionelle Grundlage der Fourierreihe

Norm

Eine Norm $\|\cdot\|: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ auf einem linearen Raum $\mathcal{V}$ ist

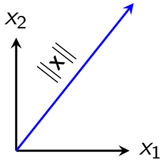
1. positiv-definit: $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. homogen: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3. erfüllt die Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Diese Eigenschaften gelten für alle $x, y \in \mathcal{V}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.

Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ beschreibt die Norm

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}$$

den Abstand zum Nullpunkt.



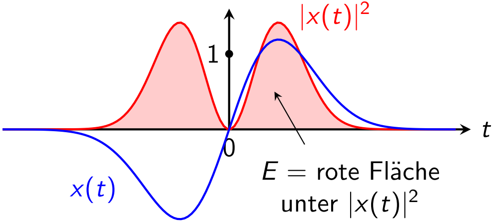
Jedes innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert eine Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

$\rightarrow$ Anschrieb 2.2

Der Signalraum L^2

Der Signalraum $L^2(\mathcal{I})$, wobei z.B. $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ oder $\mathcal{I} = [a, b]$, umfasst alle quadratintegrierbaren Signale $x : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ mit endlicher „Energie“:

$$E = \int_{\mathcal{I}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty.$$



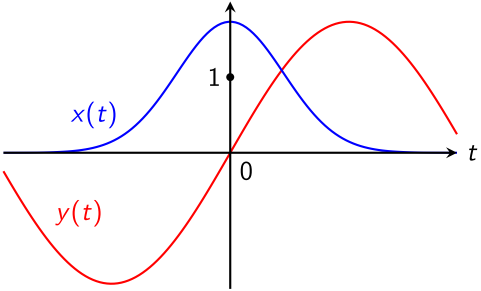
Wir nennen die Signale in L^2 auch Energiesignale.

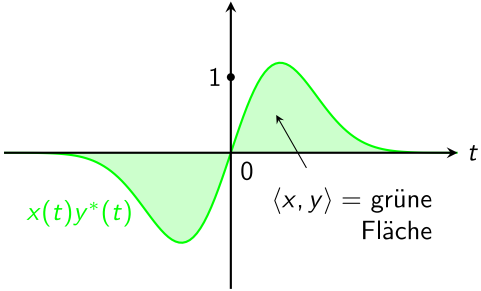
Das „L“ gibt an, dass kein Riemann-Integral, sondern ein Lebesgue-Integral verwendet wird. Dazu später mehr.

Gelegentlich werden wir das Integrationsintervall $\mathcal{I}$ nicht mit angeben und schreiben L^2.

Der Signalraum L^2

Inneres Produkt





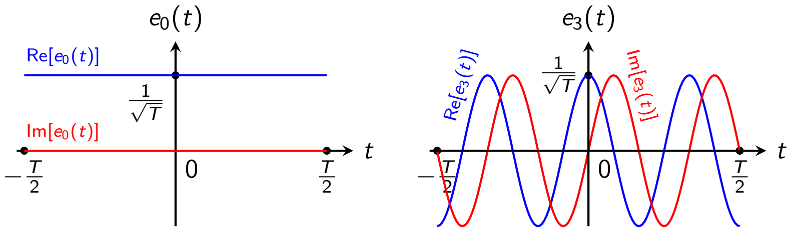
Auf $L^2(\mathcal{I})$ haben wir folgendes inneres Produkt:

$$\langle x, y\rangle = \int_{\mathcal{I}} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t.$$

Die „Energie“ ist die durch dieses innere Produkt entsprechende Norm:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\int_{\mathcal{I}} |x(t)|^2\mathrm{d}t}.$$

Der Signalraum L^2
Orthogonalität komplexer Schwingungen



Sei $T > 0$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Die Signale

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 nt} = \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\cos(\omega_0 nt) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 nt)\right], \quad n \in \mathbb{Z}$$

sind orthonormal in $L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$.

Beachte: Die e_n sind periodisch mit Periode T. Daher reicht es, sie auf $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ zu betrachten.

- Dieses Ergebnis wird der Schlüssel zur Fourierreihe sein ...

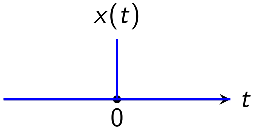
→ Anschrieb 2.3

Der Signalraum L^2

Gleichheit im quadratischen Mittel

- Das Signal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



  hat Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t} = 0$$

- Intuitiv, da die Fläche unter der 1 Null ist $\rightarrow$ dies widerspricht unserer Definition einer Norm, nach welcher nur das Nullsignal Norm Null hat

Zwei Signale x, y werden in L^2 als gleich betrachtet, falls

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\int_{\mathcal{I}} |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t} = 0.$$

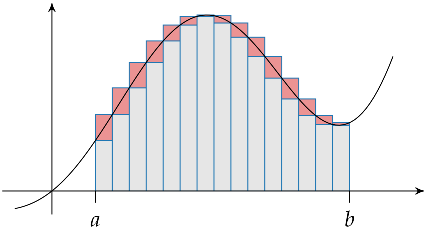
Nur am Rande: Technisch gesehen sind die Elemente in L^2 daher Äquivalenzklassen.

Wir arbeiten am Ende mit Repräsentanten der Äquivalenzklassen.

- Notwendig, da wir später Transformationen mittels Integralen realisieren
- Ausreißer mit Fläche Null interessieren uns daher (meistens) nicht ...

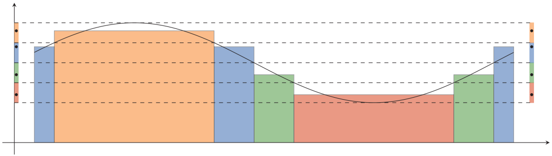
Idee des Lebesgue-Intergrals

Riemann-Integral



- Diskretisiere „x"-Achse
- Approximation der Fläche durch Ober- und Untersummen

Lebesgue-Integral



- Diskretisiere „y"-Achse
- Falls das Riemann-Integral existiert, gleiches Ergebnis
- Nutzt Maße zur Bestimmung der „x"-Länge pro „y"-Abschnitt

Wie Lebesgue sein Integral beschrieb ...

„Man kann sagen, dass man sich bei dem Vorgehen von Riemann verhält wie ein Kaufmann ohne System, der Geldstücke und Banknoten zählt in der Reihenfolge, wie er sie in die Hand bekommt; während wir vorgehen wie ein umsichtiger Kaufmann, der sagt:

- *Ich habe $m(E_1)$ Münzen zu einer Krone, macht $1 \cdot m(E_1)$,*
- *ich habe $m(E_2)$ Münzen zu zwei Kronen, macht $2 \cdot m(E_2)$,*
- *ich habe $m(E_3)$ Münzen zu fünf Kronen, macht $5 \cdot m(E_3)$,*

usw., ich habe also insgesamt $S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \ldots$.

Die beiden Verfahren führen sicher den Kaufmann zum gleichen Resultat, weil er – wie reich er auch sei – nur eine endliche Zahl von Banknoten zu zählen hat; aber für uns, die wir unendlich viele Indivisiblen zu addieren haben, ist der Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen wesentlich.“ [2]

Henri Léon Lebesgue
(1875–1941)

Vorteile des Lebesgue-Integrals

- Kann „exotischere“ Funktionen integrieren als das Riemann-Integral
  $\rightarrow$ in der Praxis weniger relevant
- Aber: Grenzwert integrierbarer Funktionen ist integrierbar
- Und: Können Integrale und Summen vertauschen

$$\sum_n \int x_n(t)\mathrm{d}t = \int \left(\sum_n x_n(t) \right) \mathrm{d}t$$

- Beides ist elementar für die Theorie der Signaltransformationen:

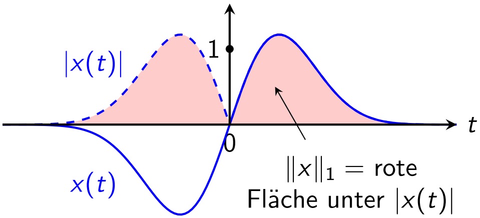
  „The Riemann integral remained the dominant definition of the integral until it was replaced by the Lebesgue integral [III.55] after 1902, which is better adapted to capturing the way the behavior of a function affects its Fourier series“ [3, p. 775]

Absolut Integrierbare Signale – L^1

Der Signalraum $L^1(\mathcal{I})$ umfasst alle absolut integrierbaren Signalen $x : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ mit

$$\|x\|_1 = \int_{\mathcal{I}} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty.$$

Der große Vorteil des L^1 wird sein, dass die Konvergenz der Fouriertransformation dort sehr einfach zu zeigen ist.



Auf $L^1(\mathcal{I})$ ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm.

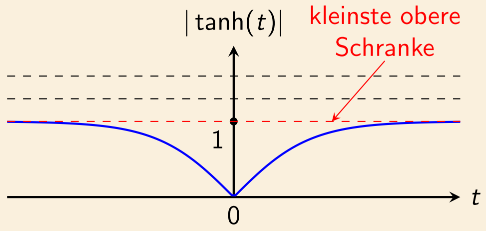
→ Anschrieb 2.4

Beschränkte Signale – L^∞
Supremum

Das Supremum des Betrags eines Signals x ist die kleinste obere Schranke:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| = \min\{A \geq 0 : |x(t)| \leq A \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}.$$

Für $x(t) = \tanh(t)$ ist die kleinste obere Schranke für $|x(t)|$ $\|x\|_\infty = 1$.

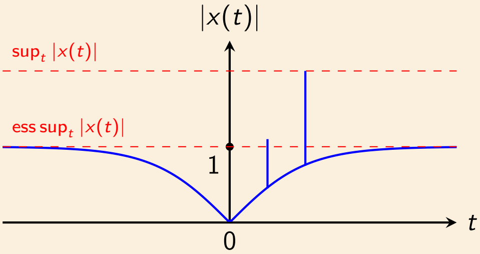


In diesem Beispiel müssen wir das Supremum verwenden, da $|\tanh(t)|$ kein Maximum hat.

Beschränkte Signale – L^∞

Wesentliches Supremum

Informell ist das wesentliche Supremum $\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}|x(t)|$ ein Supremum, welches Ausreißer mit einer Fläche von Null ignoriert.



Das Signal in diesem Beispiel ist

$$x(t) = \begin{cases} 1,1 & \text{falls } t = 0.5 \\ 2 & \text{falls } t = 1 \\ \tanh(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir geben keine formale Definition des wesentlichen Supremums. Für unsere Zwecke ist folgendes Ergebnis ausreichend.

Für stückweise stetige Signale entspricht das wesentliche Supremum dem gewöhnlichen Supremum.

Beschränkte Signale – L^∞

Definition und Norm

Der Signalraum $L^\infty(\mathcal{I})$ umfasst alle integrierbaren Signalen $x : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ mit

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty.$$

- Der Raum L^∞ enthält also die (wesentlich) beschränkten Signale
- Wir können kein einfaches Maximum statt des Supremums verwenden, da beschränkte Signale nicht unbedingt eines haben (sh. Folie 13)

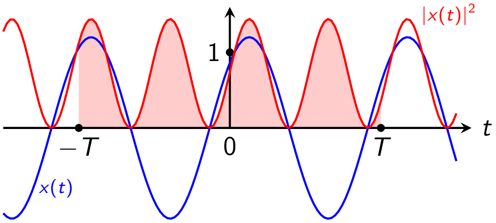
Auf $L^\infty(\mathcal{I})$ ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm.

- Wir auch in L^2 identifizieren wir also Signale miteinander, deren Differenzbetrag die Fläche Null hat

ess sup ist das sogenannte wesentliche Supremum

→ Anschrieb 2.5

Leistungssignale – $\mathcal{P}$



Wir definieren die Leistung eines Signals $x(t)$ als

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Achtung: P ist *keine* Norm!

Die Menge $\mathcal{P}$ der Leistungssignale besteht aus allen Signalen mit endlicher Leistung größer Null. D.h., $0 < P < \infty$.

Es handelt sich bei $\mathcal{P}$ und keinen Raum, da dass Nullsignal nicht enthalten ist.

Signal, die weder Energie- noch Leistungssignale sind, nennen wir sonstige Signale.

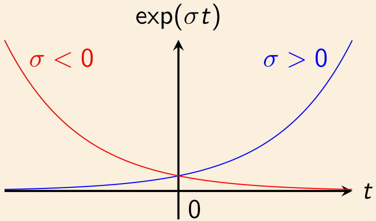
$\longrightarrow$ Anschrieb 2.6

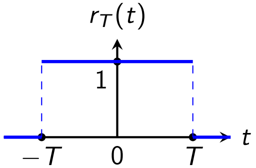
Einige Beispiele

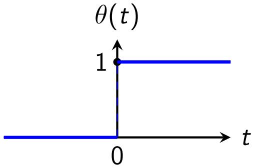
Das Rechtecksignal r_T ist in L^2, L^1 und L^∞, aber nicht in $\mathcal{P}$.

Der Einheitssprung θ ist in L^∞ und $\mathcal{P}$, aber nicht in L^1 oder L^2.

Reelle Exponentialfunktionen $x(t) = \mathrm{e}^{\sigma t}$, $\sigma \neq 0$ sind nicht in L^2, L^1, L^∞ oder $\mathcal{P}$.







Literaturverzeichnis I

[1] E. Weitz, *Konkrete Mathematik (nicht nur) für Informatiker*. Springer, 2018.

[2] Wikipedia, “Lebesgue-Integral — Wikipedia, die freie Enzyklopädie,” https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lebesgue-Integral&oldid=239099539, 2023, [Online; Stand 17. Oktober 2024].

[3] T. Gowers, J. Barrow-Green, and I. Leader, *The Princeton companion to mathematics*. Princeton University Press, 2010.