Elektromagnetische Felder und Wellen Tutorium 3

Christoph Lubert
uxyls@student.kit.edu

Elektrotechnisches Institut

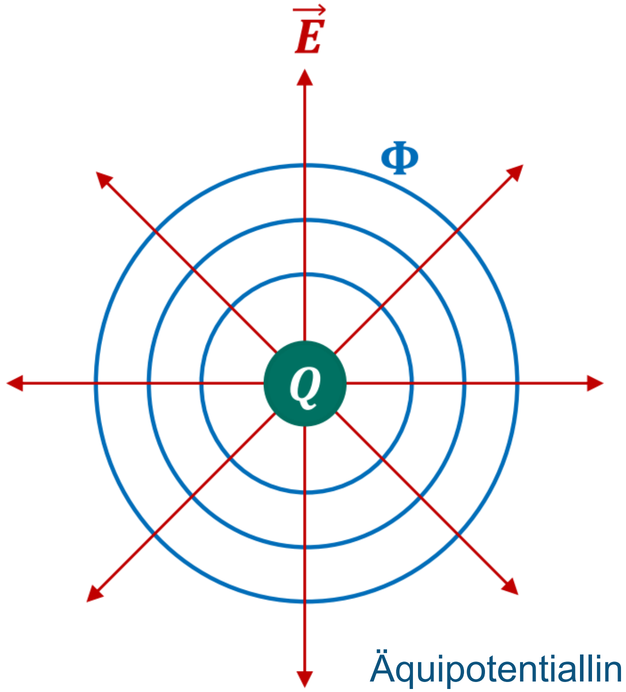
1. Elektrisches Potential
2. Coulombintegral

Das elektrische Potential Φ

- Mathematisches **Skalarfeld** $\boldsymbol{\Phi(\vec{r})}$ zur Beschreibung des physikalischen **Vektorfeldes** $\vec{\boldsymbol{E}}$
  - Gibt an, wie viel **potentielle Energie** eine Ladung an einem bestimmten Ort besitzt
  - $\vec{\mathrm{E}}$-Feld: Gibt an wie **stark** und in **welche Richtung** eine **Kraft** auf eine Ladung wirkt

- Definition: $\vec{\mathrm{E}} = -\mathrm{grad}(\Phi)$

- In EMF: $\Phi_{\mathrm{el}}(\vec{\mathrm{r}}_2) - \Phi_{\mathrm{el}}(\vec{\mathrm{r}}_1) = -\int_{\vec{\mathrm{r}}_1}^{\vec{\mathrm{r}}_2} \vec{\mathrm{E}}\, \mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}$
  - Meistens gegeben: $\Phi(\infty) = 0$
  - Potential ist wegunabhängig



Das elektrische Potential Φ
Anwendung

	Tabelle 12: Skalarpotential	
Elektrostatik	$\Phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r}_2) - \Phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s};$	$\mathbf{E} = -\nabla\Phi_{\mathrm{el}}$

- Formelsammlung:
- Potential berechnen:
  - 1. $\vec{E}$-Feld in allen Bereichen berechnen. Am besten von innen nach außen
  - 2. Potential berechnen von **außen nach innen**, da Potential im Unendlichen zu 0 angenommen wird: $\Phi(\infty) = 0$

$$\Phi(\vec{r}) - \Phi(\infty) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{s} \Leftrightarrow \Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{s} + \Phi(\infty) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{s}$$

- Mit der Potentialfunktion Φ kann die elektrische Energie berechnet werden, die benötigt wird, um eine Ladung q zum Punkt P zu bringen

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Potential einer um den Ursprung zentrierten, homogen geladenen Kugel mit der Dielektrizitätskonstante ε_0, der Ladungsdichte ϱ_0 und dem Radius R_0 im ganzen Raum. Es gilt die Randbedingung $\Phi(\infty) = 0$.

Hinweise:

- 1. E-Feld in allen Bereichen berechnen
  - E-Feld der Kugel $(r > R_0)$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ mit $Q = \frac{4\pi R_0^3}{3}\varrho_0$
- 2. Potential von außen nach innen berechnen

$$\Phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r}_2) - \Phi_{\mathrm{el}}(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s};$$

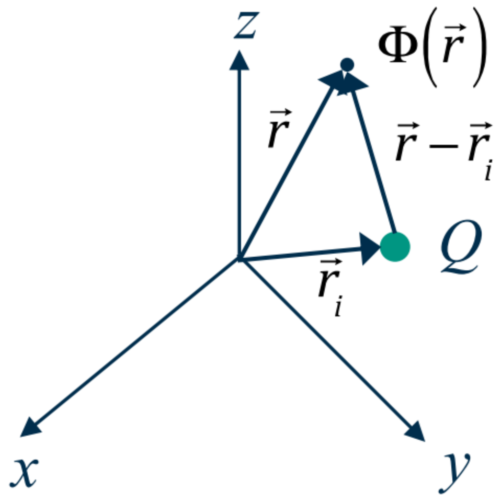
Coulombintegral

- Annahme von beliebig vielen, beliebig platzierten Punktladungen in einer beliebigen Anordnung (keine Symmetrie zur Anwendung des Satz vom Hüllenfluss)

$$\Phi_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

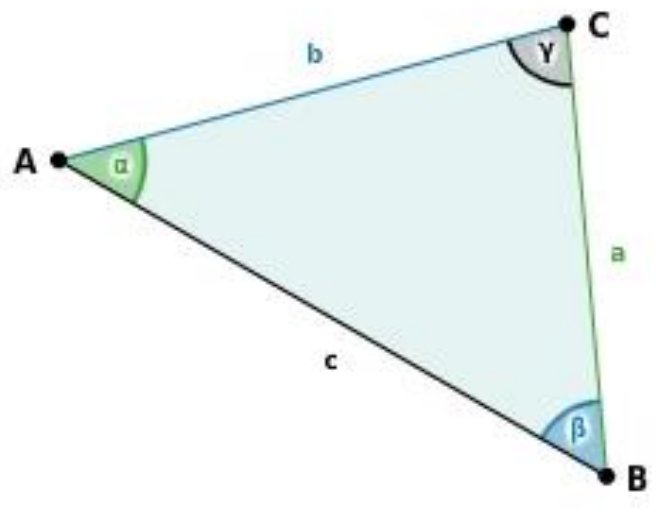
- $\vec{r}'$: Ort, an dem sich die Ladung befindet
- $\vec{r}$: Ort, an dem das Potential berechnet werden soll

- Wichtigster Schritt: Korrekte Richtungsvektoren ($\vec{r}$, $\vec{r}'$, $|\vec{r}-\vec{r}'|$) definieren



Cosinussatz

- Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras und gilt im Gegensatz zu diesem für alle Dreiecke, nicht nur für rechtwinklige
  - Wird oft gebraucht, um $|\vec{r}-\vec{r}'|$ zu definieren



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

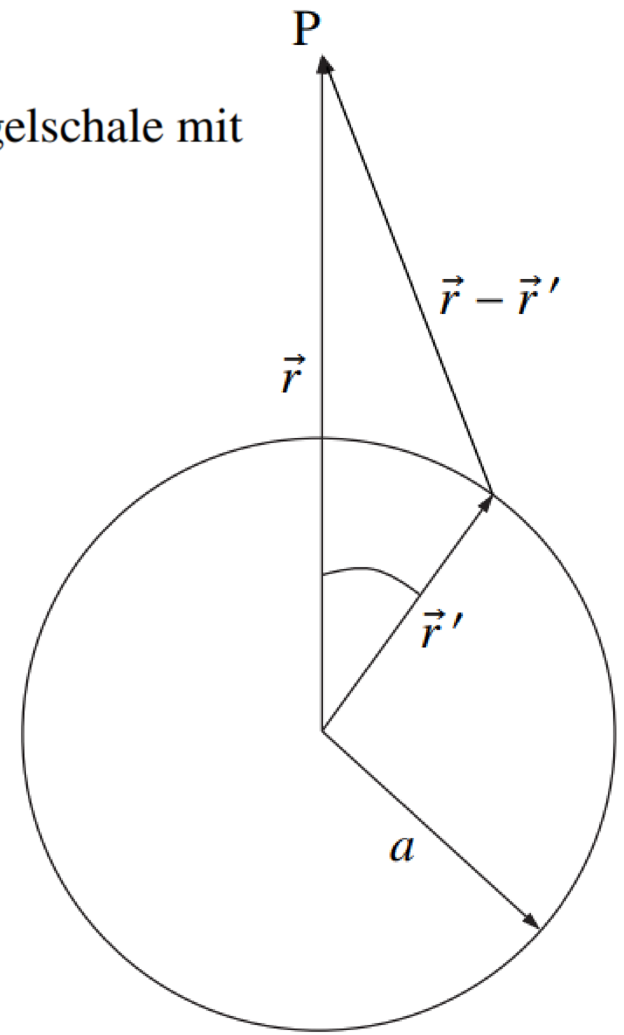
Wegintegral über das $\vec{E}$-Feld und Coulombintegral

	Wegintegral über das $\vec{E}$-Feld	Coulombintegral
Gegeben ist:	Elektrisches Feld $\vec{E}$ z.B. berechnet durch Satz vom Hüllfluss	Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r}\,')$
Formel	$\Phi_{el}(\vec{r}_2) - \Phi_{el}(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\, d\vec{s}$	$\Phi_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \iiint \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{\lvert\vec{r} - \vec{r}\,'\rvert} dv'$

Aufgabe 2 a)

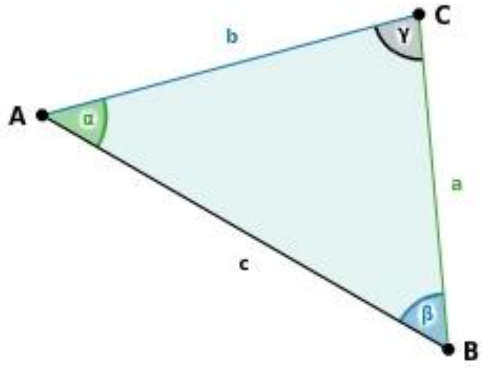
a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential Φ einer gleichförmig geladenen Kugelschale mit vernachlässigbarer Dicke und dem Radius a mit Hilfe des Coulomb-Integrals.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \mathrm{d}v'$$



Hinweise:

- Punkt P auf z-Achse (wegen Symmetrie möglich)
- Variablen $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$, $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ definieren
  - Cosinussatz benutzen



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$

Aufgabe 2 b)

b) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$.

Hinweise:

- $\vec{E} = -\text{grad}\,\Phi_{el}$

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{r} & \text{für} \quad r \geq a \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{a} & \text{für} \quad r < a \end{cases}$$

Elektrische Leitfähigkeit

Berechnung aus E-Feld im stationären Strömungsfeld:

- Formelsammlung in Tabelle 14: $\vec{J} = \kappa\vec{E}$

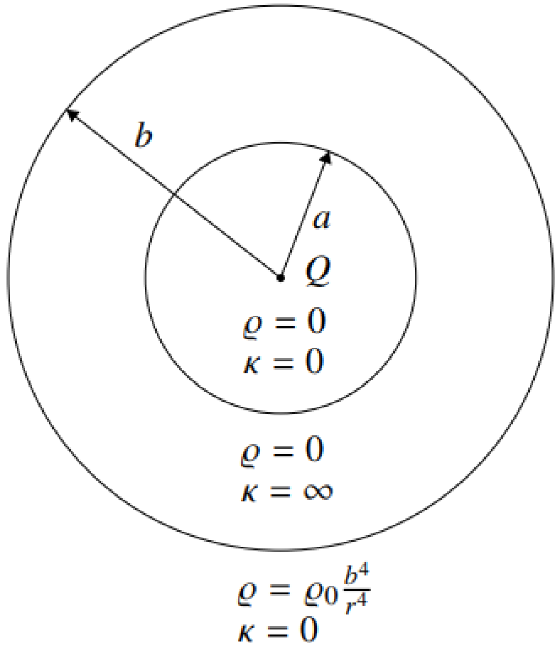
Anordnungen mit idealem Leiter:

- In idealem Leiter gilt $\kappa \rightarrow \infty \Rightarrow Keine\ Felder\ in\ idealem\ Leiter\ (Kein\ \vec{E}/\vec{D}\ Feld)$
- Dadurch unsymmetrische Ladungsverteilung durch Influenzladungen
- Potential Φ konstant im Idealen Leiter

Aufgabe 3 a)

Im Koordinatenursprung befindet sich eine Punktladung Q in einer auf dem Koordinatenursprung zentrierten Kugel aus einem nicht leitenden, ungeladenen Dielektrikum. Diese wird konzentrisch von einer Kugelschale aus einem unendlich gut leitenden Metall im Bereich $a \leq r < b$ umschlossen. Außerhalb des Metalls befindet sich eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit $\varrho = \varrho_0 \frac{b^4}{r^4}$. Die Permittivität ε ist überall gleich.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld im ganzen Raum und skizzieren Sie den Betrag seiner radialen Komponente.



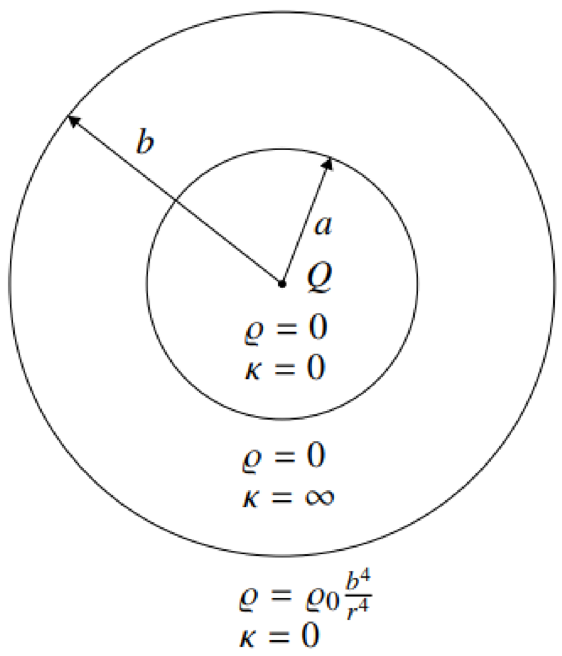
Hinweise:

- $\vec{E}$-Feld von innen nach außen berechnen
  - E-Feld einer Punktladung: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Aufgabe 3 b)

Im Koordinatenursprung befindet sich eine Punktladung Q in einer auf dem Koordinatenursprung zentrierten Kugel aus einem nicht leitenden, ungeladenen Dielektrikum. Diese wird konzentrisch von einer Kugelschale aus einem unendlich gut leitenden Metall im Bereich $a \leq r < b$ umschlossen. Außerhalb des Metalls befindet sich eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit $\varrho = \varrho_0 \frac{b^4}{r^4}$. Die Permittivität ε ist überall gleich.

b) Berechnen und skizzieren Sie das elektrostatische Potential ϕ im ganzen Raum unter der Voraussetzung $\phi(\infty) = 0$.
Hinweis: starten Sie bei der Berechnung des Potentials bei $r = \infty$.



Danke für eure Aufmerksamkeit!!

Christoph Lubert
uxyls@student.kit.edu

Elektrotechnisches Institut