8 Systemeigenschaften

Untersuchen Sie die folgenden Systeme auf Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität. Das reelle Eingangssignal ist jeweils mit u, das Ausgangssignal mit y bezeichnet.

a) $y(t) = \cos(u(t))$

b) $y(t) = \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $T \in \mathbb{R}$

c) $y(t) = a\,t^2 + u(t+3)$ mit $a \in \mathbb{R}$

Lösung:

Im Folgenden sei der Systemoperator jeweils $\mathcal{S}$.

a) **Linearität**
Gegenbeispiel: $u(t) = 0 \Rightarrow \mathcal{S}\{u\}(t) = \cos(0) = 1$, aber $\mathcal{S}\{2\,u\}(t) = \cos(0) = 1 \neq 2\,\mathcal{S}\{u\}(t)$.
Zeitinvarianz
Erfüllt, da $v(t) = u(t-t_0) \Rightarrow \mathcal{S}\{v\}(t) = \cos(v(t)) = \cos(u(t-t_0)) = \mathcal{S}\{u\}(t-t_0)$.
Kausalität
Erfüllt, da das Ausgangssignal nur von vergangenen und aktuellen Werten des Eingangssignals abhängt.

b) **Linearität**
Erfüllt, da die Integration eine lineare Operation ist.
Zeitinvarianz
Mittels Integration via Substitution ($\tau' = \tau - t_0, \mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau$, Ersetzen der Grenzen) erhält man

$$v(t) = u(t-t_0) \Rightarrow \mathcal{S}\{v\}(t) = \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u(\tau-t_0)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{t-t_0-\frac{T}{2}}^{t-t_0+\frac{T}{2}} u(\tau')\,\mathrm{d}\tau'$$
$$= y(t-t_0) = \mathcal{S}\{u\}(t-t_0)\,.$$

Die Zeitinvarianz ist also erfüllt.
Kausalität
Nicht erfüllt, da das Ausgangssignal wegen der oberen Integralgrenze von zukünftigen Werten des Eingangssignals abhängt.

c) **Linearität**
Gegenbeispiel für $a = 1$: $u(t) = 0 \Rightarrow \mathcal{S}\{u\}(t) = t^2$, aber $\mathcal{S}\{2\,u\}(t) = t^2 \neq 2t^2 = 2\,\mathcal{S}\{u\}(t)$.
Zeitinvarianz
Die Zeitinvarianz ist nicht erfüllt, da das System wegen des Terms t^2 explizit von der Zeit abhängt.
Kausalität
Nicht erfüllt, da das Ausgangssignal wegen der Zeitverschiebung $t+3$ von zukünftigen Werten des Eingangssignals abhängt.

Zusammengefasst ergibt sich Folgendes:

Teilaufg.	linear	zeitinvariant	kausal
a)	nein	ja	ja
b)	ja	ja	nein
c)	nein	nein	nein

9 Stabilität von Systemen

a) Ist das LTI-System mit der Impulsantwort

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist das System, das auf ein Eingangssignal $u(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = \frac{u(t)}{1 + |u(t)|^2}$$

antwortet, stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Ein LTI-System ist genau dann stabil, wenn die Impulsantwort absolut integrierbar ist. Es gilt also zu prüfen, ob $g \in L^1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \mathrm{d}t = \int_{1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{t}} \right| \mathrm{d}t = \int_{1}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = \left[2t^{\frac{1}{2}} \right]_{1}^{\infty} .$$

Dieser Ausdruck divergiert und damit $g \notin L^1$ und das System ist nicht stabil.

b) Es sei u beschränkt, d. h. $|u(t)| \leq M$. Dann ist

$$|y(t)| = \left| \frac{u(t)}{1 + |u(t)|^2} \right| = \frac{|u(t)|}{1 + |u(t)|^2} \leq \frac{M}{1 + 0} = M$$

ebenfalls beschränkt. Also ist das System stabil.

10 Fourier-Reihe zeitkontinuierlicher Signale

a) Gegeben ist die reelle Funktion

$$y(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{für } -\pi < t \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Funktion $y(t)$ wird periodisch fortgesetzt und bildet die Funktion $x(t)$ mit der Periodendauer $T = 2\pi$ gemäß der folgenden Abbildung 1. Es gilt $x(t) = \mathrm{e}^{-t}$ für $-\pi < t \leq \pi$ und $x(t+n2\pi) = y(t)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

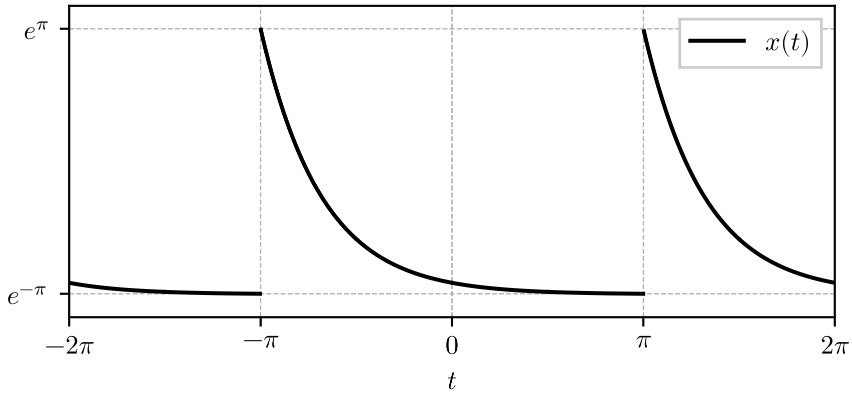

Abbildung 1: Die periodische Funktion $x(t)$.

Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe zu $x(t)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis.

b) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe für das Signal $x(t) = \sin(3t + 2)$.
Hinweis: $\sin(t) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,t}\right)$.

c) Das periodische Signal $x(t) = 2\,\mathrm{e}^{j\omega_0 t} - \mathrm{e}^{4j\omega_0 t}$ hat eine Periodendauer von $T = 2\pi$. Bestimmen Sie die durchschnittliche Leistung des Signals

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t\,.$$

Berechnen Sie dafür das Integral einmal direkt und einmal mittels der Parsevalschen Beziehung.

Lösung:

Für die Fourier-Reihe gilt

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 k t} \qquad \text{mit} \qquad a_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega_0 k t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

a) Zunächst gilt hier $\omega_0 = 2\pi/T = 1$. Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}\,k)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-1-\mathrm{j}\,k}\,\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}\,k)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-1-\mathrm{j}\,k}\left(\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}\,k)\pi} - \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j}\,k)\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+\mathrm{j}\,k}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{j}\,k)\pi} - \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j}\,k)\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+\mathrm{j}\,k}\left(\mathrm{e}^{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi k} - \mathrm{e}^{-\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi k}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+\mathrm{j}\,k}\left(\mathrm{e}^{\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\pi})^k - \mathrm{e}^{-\pi}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\pi})^k\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+\mathrm{j}\,k}\left(\mathrm{e}^{\pi}(-1)^k - \mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+\mathrm{j}\,k}(-1)^k\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\mathrm{j}\,k}(-1)^k \sinh(\pi)\,.
\end{aligned}$$

b) Man erhält

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sin(\omega_0 t + 2) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = 3 \\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{j}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t + 2)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t + 2)} \right) \\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 t} - \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{j}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega_0 t} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\, \mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}}}_{a_1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 1 t} \underbrace{- \frac{1}{2\,\mathrm{j}}\, \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{j}}}_{a_{-1}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 (-1) t}
\end{aligned}
$$

Durch einen Vergleich mit (1) für $w_0 = 3$ ergibt sich insgesamt $a_{-1} = -\frac{1}{2\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{j}}$, $a_1 = \frac{1}{2\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{j}}$ und $a_k = 0$ für alle anderen k.

c) Für die direkte Berechnung des Integrals bestimmen wir zunächst $\omega_0 = 2\pi/T = 1$. Der Integrand ergibt sich zu:

$$
\begin{aligned}
|x(t)|^2 = x(t) \cdot x(t)^* &= \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,t} - \mathrm{e}^{4\,\mathrm{j}\,t}\right)\left(2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,t} - \mathrm{e}^{-4\,\mathrm{j}\,t}\right) \\
&= \left(4 - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,t(1-4)} - 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,t(4-1)} + 1\right) \\
&= 5 - 2\left(\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{j}\,t} + \mathrm{e}^{3\,\mathrm{j}\,t}\right) = 5 - 4\cos(3t)\ .
\end{aligned}
$$

Für das Integral erhält man dann

$$
\begin{aligned}
P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 5 - 4\cos(3t)\mathrm{d}t = 5 - \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(3t)\mathrm{d}t \\
&= 5 - \frac{2}{3\pi}\left[\sin(3t)\right]_0^{2\pi} = 5 - \frac{2}{3\pi}\left[\sin(6\pi) - \sin(0)\right] = 5\,.
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung mittels der Parsevalschen Beziehung ließt man zunächst die Koeffizienten der Fourier-Reihe ab.

$$
x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega_0 k t} \quad \text{mit} \quad a_k = \begin{cases} 2 & \text{für } k = 1 \\ -1 & \text{für } k = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.
$$

Mit der Parsevalschen Beziehung lässt sich nun das Integral ausrechnen:

$$
P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |2|^2 + |-1|^2 = 4 + 1 = 5\,.
$$