Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Industrielle Informationstechnik

Signale und Systeme

Vorlesung 7: Zweiseitige Laplacetransformation

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

Einleitung

- Wir werden heute eine Verallgemeinerung der Fouriertransformierten kennen lernen, die (zweiseitige) Laplacetransformation
- Die Laplacetransformation bietet Vorteile für die Analyse von Systemen:
    - Einfache Charakterisierung von Systemeigenschaften mittels Polen
    - Analyse instabiler Systeme wird möglich
- Es gibt auch eine einseitige Laplacetransformation, welche später im Kurs detailliert behandelt wird
- Viele Eigenschaften sind im ein- und zweiseitigem Fall gleich
- Wir konzentrieren uns daher auf Kernaspekte des zweiseitigen Falls

Pierre-Simon Laplace
(1749–1827)

Inhalt

Zweiseitige Laplacetransformation

Die (zweiseitige) Laplacetransformation eines Signals $x(t)$ lautet

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, \quad s \in \mathrm{ROC} := \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{array}{c}\text{das Integral} \\ \text{konvergiert}\end{array} \right\},$$

wobei ROC den Konvergenzbereich bezeichnet.

ROC = engl. „region of convergence“

Für $s = \mathrm{j}\omega$ erhalten wir die Fouriertransformation.

- Beispiele für Konvergenzbereiche: $\mathrm{Re}(s) > 0$, $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$
- Der Konvergenzbereich ist ein kritischer Teil der Transformierten. Es reicht aber i.d.R., einen Teil des Konvergenzbereichs zu kennen
- Wir schreiben wieder

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} X(s), \ \mathrm{ROC}}$$

Das „$\mathcal{L}$“ lassen wir oft weg.

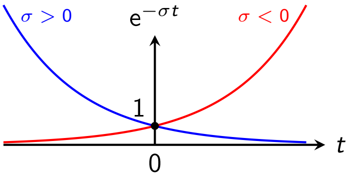
Zweiseitige Laplacetransformation
Beziehung zur Fouriertransformation

Die Laplacetransformation $X(s)$ entspricht der Fouriertransformation eines gedämpften bzw. verstärkten Signals:

$$z(t) = \mathrm{e}^{-\sigma t} x(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad Z(\mathrm{j}\omega) = X(s)\big|_{s=\sigma+\mathrm{j}\omega}.$$

- Der Faktor $\mathrm{e}^{-\sigma t}$ verstärkt eine Hälfte des Signals und dämpft die andere:

	$t < 0$	$t > 0$
$\sigma > 0$	Verstärkung	Dämpfung
$\sigma < 0$	Dämpfung	Verstärkung



- Dieser Zusammenhang kann zur Inversion der Laplacetransformation genutzt werden, das ist aber oft nicht praktisch

→ Anschrieb 7.1

Zweiseitige Laplacetransformation
Beispiel: Abgeschnittenes Exponential

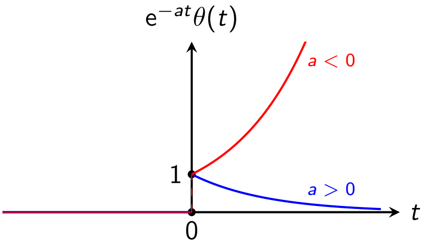
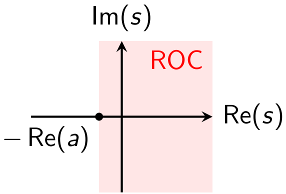


Illustration des Falls a reell.

Beachte: Während die Fouriertransformierte für $\mathrm{Re}(a) < 0$ nicht existiert, können wir die Laplacetransformierte bilden.

Für beliebige $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$x(t) = e^{-at}\theta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$$



→ Anschrieb 7.2

Zweiseitige Laplacetransformation

Beispiel: Gespiegeltes abgeschnittenes Exponential

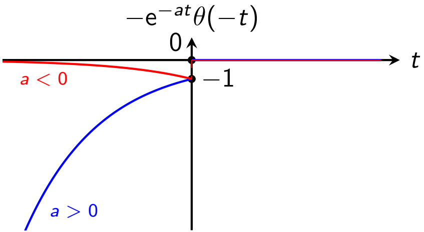
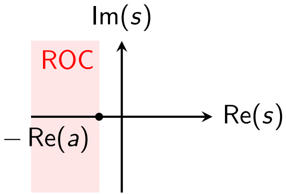


Illustration des Falls a reell.

Für beliebige $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$x(t) = -e^{-at}\theta(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$$



- Die Transformierte ist wie im vorherigen Beispiel $\frac{1}{s+a}$
- Lediglich der Konvergenzbereich ist unterschiedlich
- Ohne den Konvergenzbereich können wir also nicht invertieren

$\longrightarrow$ Anschrieb 7.3

Zweiseitige Laplacetransformation
Eigenschaften

- Die Laplacetransformation hat im Grunde die gleichen Eigenschaften wie die Fouriertransformation
- Man muss aber zusätzlich die Konvergenzbereiche betrachten

Die Linearitätseigenschaft wird z.B.

$$x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(s),\ \mathrm{ROC}_1, \quad x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(s),\ \mathrm{ROC}_2$$

$$\Downarrow$$

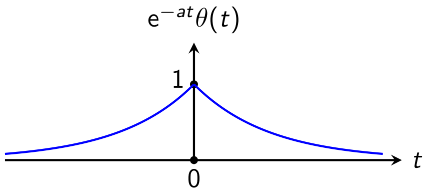
$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha X_1(s) + \beta X_2(s), \quad \mathrm{ROC} \supseteq \mathrm{ROC}_1 \cap \mathrm{ROC}_2$$

- Siehe das Formelblatt für weitere Eigenschaften

$\mathrm{ROC} \supseteq \mathrm{ROC}_1 \cap \mathrm{ROC}_2$ bedeutet, dass der ROC von $\alpha x_1 + \beta x_2$ mindestens alle s enthält, die sowohl im ROC von x_1 als auch im ROC von x_2 enthalten sind.

Zweiseitige Laplacetransformation

Beispiel



Für $a > 0$ gilt

$$e^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2a}{a^2 - s^2}, \quad -\mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(s) < \mathrm{Re}(a)$$

→ Anschrieb 7.4

Rationale Laplacetransformatierte

Eine Funktion $X(s)$ ist rational, falls

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\text{Zählerpolynom}}{\text{Nennerpolynom}}$$

Hier einige Beispiele:

$$X(s) = \frac{s+2}{4s^2+3s-1}, \quad X(s) = \frac{0.5s^7 - s^3 + 100s - 10}{1}, \quad X(s) = \frac{1}{s^4-1}$$

- Wir werden später oft Systeme betrachten, bei denen die Laplacetransformierte der Impulsantwort rational ist
- Mit diesen kann man besonders effektiv arbeiten (auch numerisch)
- Es gibt aber auch Systeme mit irrationaler transformierter Impulsantwort

Rationale Laplacetransformatierte

Nullstellen und Pole

Die Nullstellen einer rationalen Funktion

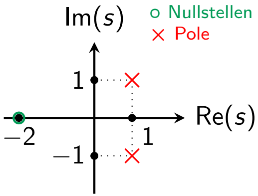
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

sind die Nullstellen des Zählerpolynoms, also alle $s \in \mathbb{C}$ mit $N(s) = 0$. Die Pole sind die Nullstellen des Nennerpolynoms, also alle $s \in \mathbb{C}$ mit $D(s) = 0$.

Die rationale Funktion

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 2} = \frac{s+2}{[s-(1+\mathrm{j})][s-(1-\mathrm{j})]}$$

hat die Nullstelle -2 und Pole $1 \pm \mathrm{j}$.



Dies ist ein sog. Pol-Nullstellen-Diagramm, welches die Nullstellen und Pole der rationalen Funktion zeigt.

Rationale Laplacetransformatierte

Pol-Nullstellenkompensation

Rationale Funktionen $X(s)$ sind durch ihre Nullstellen $n_1, \ldots, n_M$ und Pole $p_1, \ldots, p_N$ bis auf eine Konstante K eindeutig bestimmt:

$$X(s) = K \frac{(s - n_1)(s - n_2) \cdots (s - n_M)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)}.$$

- Es ist manchmal möglich, Pole und Nullstellen zu kürzen:

$$\frac{(s-1)\cancel{(s-2)}}{\cancel{(s-2)}(s+3)} = \frac{s-1}{s+3}$$

- In solchen Fällen spricht man von Pol-Nullstellenkompensation
- Das Kürzen beeinflusst die inverse Laplacetransformation nicht

Wir nehmen immer an, dass gemeinsame Pol- und Nullstellen gekürzt wurden.

Rationaler Laplacetransformatierte

mit einfachen Nullstellen und Polen und $M < N$

Es sein $X(s)$ rational mit Nullstellen n_i und Polen p_j:

$$X(s) = K\frac{(s-n_1)(s-n_2)\cdots(s-n_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}.$$

Eine Nullstelle n_i ist einfach, falls $n_i \neq n_j$ für alle $i \neq j$. Ebenso ist ein Pol p_i einfach, falls $p_i \neq p_j$ für alle $i \neq j$.

Falls $X(s)$ rational ist mit $M < N$ und nur einfache Pole hat, so gilt

$$X(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_N}{s-p_N}.$$

Die Konstanten A_i bestimmt man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

- Jeder Summand entspricht einem der beiden Paare

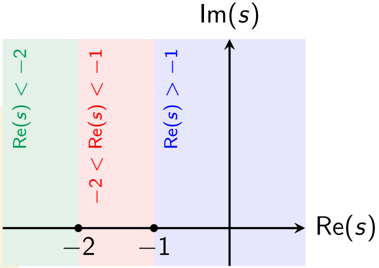
$$\mathrm{e}^{-at}\theta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$$

$$-\mathrm{e}^{-at}\theta(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$$

- Der ROC sagt uns, welches Paar wo angewandt werden muss ...

Rationaler Laplacetransformatierte

mit einfachen Nullstellen und Polen und $M < N$ – Beispiel



Wir betrachten die rationale Laplacetransformierte

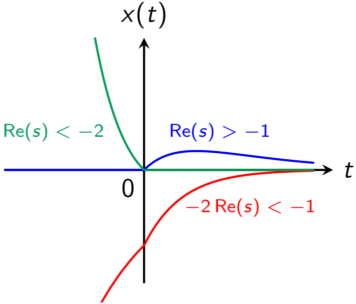
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \underbrace{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}}_{\text{Partialbruchzerlegung}}.$$

Es gibt drei mögliche Konvergenzbereiche:

$$\mathrm{Re}(s) > -1, \quad -2 < \mathrm{Re}(s) < -1, \quad \mathrm{Re}(s) < -2.$$

Mit Hilfe der Paare erhalten wir die Zeitbereichssignale:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(s) > -1 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = [\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}]\theta(t), \\
-2 < \mathrm{Re}(s) < -1 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = -\mathrm{e}^{-t}\theta(-t) - \mathrm{e}^{-2t}\theta(t), \\
\mathrm{Re}(s) < -2 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = [-\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}]\theta(-t).
\end{aligned}$$



- Einfache Methode, um rationale Laplacetransformierte zu invertieren

→ Anschrieb 7.5

Rationale Laplacetransformatierte

Mögliche Konvergenzbereiche

Durch Verallgemeinerung des Beispiels erhält man folgendes Ergebnis.

Der Konvergenzbereich einer rationalen Laplacetransformierten $X(s) = N(s)/D(s)$ wird von Polen begrenzt.

Mögliche Formen sind vertikale Streifen, Halbebenen, ganz $\mathbb{C}$ und die leere Menge.

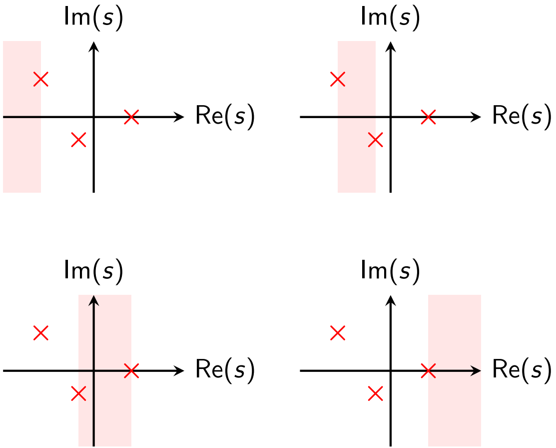


Illustration der möglichen Konvergenzbereiche einer rationalen Laplacetransformierte mit drei Polen.

Analyse von LTI Systemen im Laplacebereich

Faltungseigenschaft und Systemfunktion

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI System}} \longrightarrow y(t) = (g * u)(t)$$

Eine Faltung reduziert sich im Laplacebereich auf eine simple Multiplikation:

$$(g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) \mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G(s)U(s), \quad \mathrm{ROC} \supseteq \mathrm{ROC}_g \cap \mathrm{ROC}_u$$

Es sei $y = S\{u\}$ ein LTI System. Dann ist die Laplacetransformierte der Impulsantwort $g = S\{\delta\}$ die Systemfunktion des Systems:

$$g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G(s), \ \mathrm{ROC}.$$

Wir müssen nun nicht mehr annehmen, dass S stabil ist!

Die Laplacetransformierte des Ausgangssignals erhalten wir durch Multiplikation der Systemfunktion mit der Laplacetransformierten des Eingangssignals:

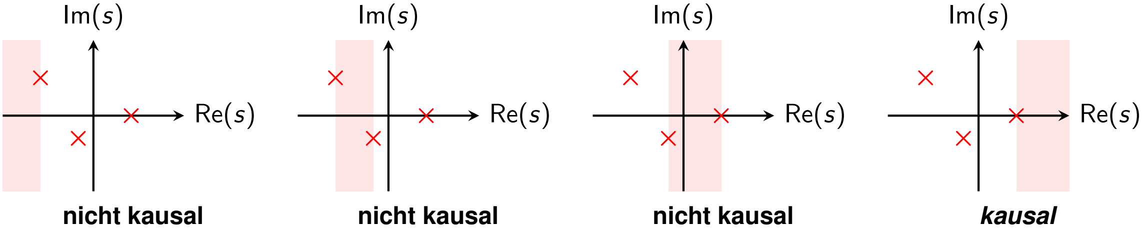
$$Y(s) = G(s)U(s), \quad \mathrm{ROC} \supseteq \mathrm{ROC}_g \cap \mathrm{ROC}_u$$

Analyse von LTI Systemen im Laplacebereich

Kausale Systeme

- Wir erinnern uns, dass LTI Systeme kausal sind, g.d.w. die Impulsantwort $g(t) = 0$ für $t < 0$ erfüllt. Die Impulsantwort ist dann rechtsseitig mit $t_0 = 0$.

LTI Systeme mit rationaler Systemfunktionen sind genau dann kausal, wenn der Konvergenzbereich die Halbebene rechts des rechtesten Pols ist.



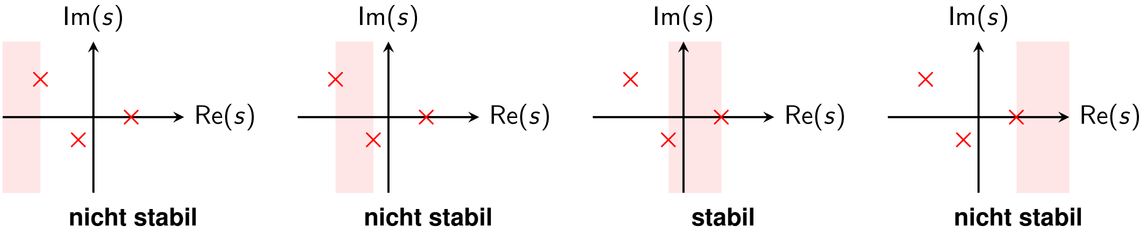
→ Anschrieb 7.6

Analyse von LTI Systemen im Laplacebereich

Stabile Systeme

Ein LTI System mit rationaler Systemfunktion ist stabil genau dann, wenn der Konvergenzbereich der Systemfunktion die imaginäre Achse enthält:

$$\{j\omega : \omega \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{ROC}.$$



→ Anschrieb 7.7