Vorlesung

Elektromagnetische Felder (EMF)

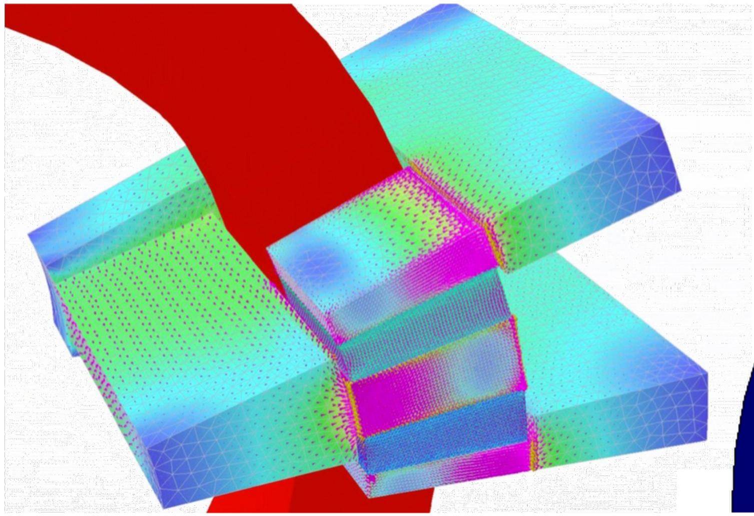
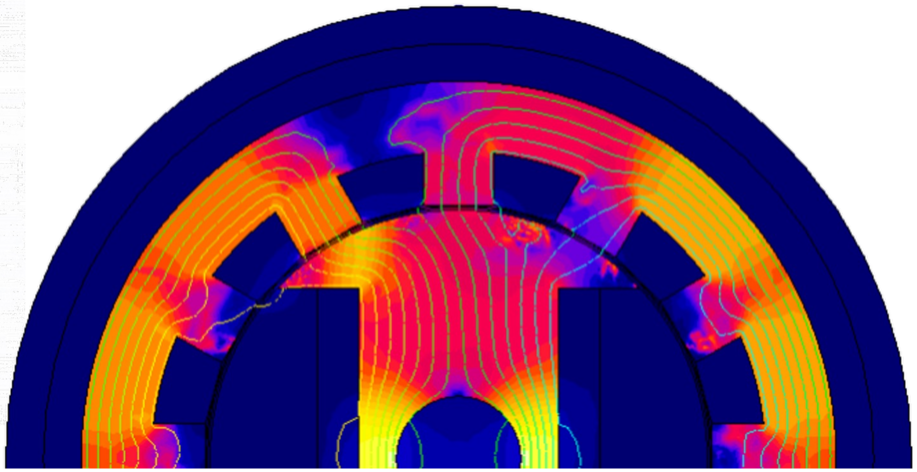
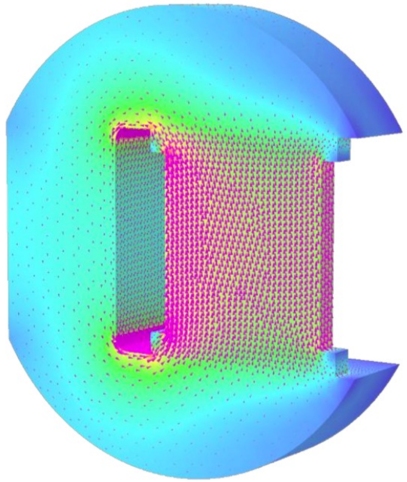
WS 2025/26

Kapitel 1: Mathematische und physikalische Grundlagen

Karlsruher Institut für Technologie

Elektrotechnisches Institut

Elektrotechnisches Institut (ETI)

Gliederung

1. **Größen, Einheiten und Schreibweisen**
2. **Ableitungsregeln**
3. **Skalarfelder und Vektorfelder**
4. **Koordinatensysteme**
5. **Differentialoperatoren in der Feldtheorie**
6. **Integrale in der Feldtheorie**
7. **Integralsätze (Gaußscher Satz, Stokescher Satz)**

SI-Basiseinheiten

(Système international d'unités, Gesetz seit 1969)

Basisgröße	Basiseinheit	Formelzeichen (exemplarisch)	Einheitenzeichen (genormt)
Länge	Meter	ℓ	m
Masse	Kilogramm	m	kg
Zeit	Sekunde	t	s
Stromstärke	Ampere	I	A
Temperatur	Kelvin Grad Celsius*	T, ϑ	K °C
Stoffmenge	Mol		mol
Lichtstärke	Candela		cd

*es gilt: 0 K = -273,15 °C und 0 °C = +273,15 K

Vorsätze für Maßeinheiten

(SI-Präfixe)

z	Zepto	10^{-21}
a	Atto	10^{-18}
f	Femto	10^{-15}
p	Piko	10^{-12}
n	Nano	10^{-9}
µ	Mikro	10^{-6}
m	Milli	10^{-3}
c	Zenti	10^{-2}
d	Dezi	10^{-1}
-		
da	Deka	10^{1}
h	Hekto	10^{2}
k	Kilo	10^{3}
M	Mega	10^{6}
G	Giga	10^{9}
T	Tera	10^{12}
P	Peta	10^{15}
E	Exa	10^{18}
Z	Zetta	10^{21}

Abgeleitete Größe	Abgeleitete Einheit	Formelzeichen (exemplarisch)	Einheitenzeichen (genormt)
Leistung	Watt	P	W
Arbeit, Energie, Wärmemenge	Joule	W	1 J = 1 W·s 1 W·h = 3600 W·s 1 kW·h = 3,6 MW·s
Energiedichte		w	J/m^3
Kraft	Newton	F	$1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$
Drehmoment		M	N·m
Frequenz	Hertz	f	1 Hz = 1/s
Druck, mechanische Spannung	Pascal	p	$1\ Pa = 1\ N/m^2$
Luftdruck	Bar	p	$1\ bar = 10^5\ Pa$
Winkel, Bogenmaß, Bogenwinkel	Radiant	φ	1 rad = 1 m / 1 m = 1 (dimensionslos)
Grad, Bogengrad	Grad	φ	$1° = \pi/180$ rad $\cong$ 0,0175 rad

1. Größen und Einheiten III

Abgeleitete Größe	Abgeleitete Einheit	Formelzeichen (exemplarisch)	Einheitenzeichen (genormt)
Spannung	Volt	U	V
Stromdichte		J	A/m^2
Elektrischer Widerstand	Ohm	R	$1\ \Omega = 1$ V/A
Elektrischer Leitwert	Siemens	G	$1\ S = 1/\Omega = 1$ A/V
Elektrische Leitfähigkeit		γ	$1\ (S \cdot m)/m^2 = 1\ S/m$
Elektrische Ladung (elektrischer Fluss)	Coulomb	Q	$1\ C = 1\ A \cdot s$
Raumladungsdichte		ρ	$(A \cdot s)/m^3$
Flächenladungsdichte		σ	$(A \cdot s)/m^2$
Elektrische Feldstärke		E	V/m = N/C
Verschiebungsdichte (elektrische Flussdichte)		D	$(A \cdot s)/m^2$
Elektrisches Potential	Volt	Φ	V
Elektrische Kapazität	Farad	C	$1\ F = 1\ (A \cdot s)/V$

1. Größen und Einheiten IV

Abgeleitete Größe	Abgeleitete Einheit	Formelzeichen (exemplarisch)	Einheitenzeichen (genormt)
Magnetischer Fluss	Weber	Φ	1 Wb = 1 V·s
Magnetische Flussdichte (sehr veraltet: Induktion)	Tesla	B	1 T = 1 (V·s)/m²
Magnetische Feldstärke		H	A/m
Induktivität	Henry	L	1 H = 1 (V·s)/A

Feldkonstanten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (V·s)/(A·m) (magnetische Permeabilität)

$\varepsilon_0 = 8{,}854188... \cdot 10^{-12}$ (A·s)/(V·m) (elektrische Permittivität)

ε_0 wird auch dielektrische Leitfähigkeit oder Dielektrizitätskonstante genannt

es gilt: $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = 1 / c^2$

daraus: $\varepsilon_0 = 1 / (\mu_0 \cdot c^2)$

mit: c = 299 792 458 m/s (Lichtgeschwindigkeit)

Wir verwenden grundsätzlich keine nicht-metrischen Einheiten (Zoll, Inch, Feet, Pounds, Miles, Knoten, Horsepower, Duckpower, psi (pounds per square inch) usw.).
Drehzahlen werden als **1/s** oder **1/min** oder **min⁻¹** angegeben. Die Einheiten **rpm** (revolutions per minute) und **rev** existieren nicht und diese Schreibweise wird daher nicht verwendet!

Richtige Schreibweise (schon seit über 50 Jahren gemäß DIN 461, DIN 1313 und **ISO 80000-1**):

***U* = 5 V**	*U* ist das **Symbol** der Größe 5 ist die Maßzahl, der **Wert** der Größe (engl.: *numerical value of a quantity*) V ist die Maßeinheit, die **Einheit** der Größe (engl.: *measurement unit*)

Größe = Zahlenwert · Einheit

$$U_0 = 5\ \mathrm{V}$$

Arial, gerade

Times New Roman, kursiv

Kursivschrift *mit Serifen* *(z.B. Times)*	- Formelzeichen für physikalische Größen, z.B. m (Masse); U (Spannung) - Formelzeichen für Variablen, z.B. x; n - Funktions- und Operatorzeichen mit frei wählbarer Bedeutung, z.B. $f(x)$
Steilschrift ohne Serifen (z.B. Arial)	- Einheiten und ihre Vorsätze, z.B. m; kg; s; pF; V; dB - Zahlen, z.B. 4,5; 67; 8fach; ½ - Funktions- und Operatorzeichen mit feststehender Bedeutung, z.B. sin; lg; π - Chemische Elemente und Verbindungen, z.B. Cu; $\mathrm{H_2O}$

Quelle: https://karriere.rohde-schwarz.de/fileadmin/customer/downloads/PDF/Der_korrekte_Umgang_mit_Groessen_Einheiten_und_Gleichungen_bro_de_01.pdf

1. Größen und Einheiten VI

[U] = V — [] heißt: „Die **Einheit von…**“, also hier: „Die Einheit von U ist Volt“

Alternative Schreibweisen: dim U = V
U in Volt
U / V

{U} = 5 — {} heißt: „Der **Wert von …**“, also hier: „Der Wert von U ist 5“

U = {U} · [U] — **Größe = Zahlenwert · Einheit**

Tabellen und Achsen müssen so beschriftet werden, dass die Werte nur Zahlen sind.

Tabelle 6: Beschriftung von Tabellenköpfen und Koordinatenachsen

richtig					falsch [2)]		
U	U/V	U in V	E/(V/m)	E in V/m	U [V]	U [V]	U in [V]
0,1 V	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,2 V	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
…	…	…	…	…	…	…	…

[V] bedeutet: „Die Einheit von V ist Volt…“???
Einheiten gehören nicht in rechteckige Klammern!

Ebenso falsch: „ x (mm) “
Die Klammern sind hier bedeutungslos, letztlich steht da „x mm“. Was soll das ???

Quelle: https://karriere.rohde-schwarz.de/fileadmin/customer/downloads/PDF/Der_korrekte_Umgang_mit_Groessen_Einheiten_und_Gleichungen_bro_de_01.pdf

Addieren, Subtrahieren

Es können nur Summanden gleicher Einheit addiert oder subtrahiert werden, daher ändern sich die Einheiten bei der Addition und Subtraktion nicht. Diese Eigenschaft kann auch als Prüfverfahren benutzt werden, um Gleichungen auf Plausibilität zu untersuchen. Für die Ermittlung der Einheit einer Summe braucht man also nur einen einzigen Term zu berücksichtigen.

Beispiel: 2,5 m + 3,5 m = 6 m Formal: $Q_1 + Q_2 = (\{Q_1\} + \{Q_2\}) \cdot [Q_1] = (\{Q_1\} + \{Q_2\}) \cdot [Q_2]$

Multiplikation, Division

Bei der Multiplikation und Division werden die Einheiten gleichermaßen multipliziert und dividiert. Die Multiplikation mit einer einheitenlosen Konstanten hat keinen Einfluss auf die Einheit des Ergebnisses.

Beispiel: a = v / t = (100 km/h) / (5 s) = (100.000 m/h) / (5 s)
= (27,8 m/s) / (5 s) = 5,6 m/s^2

Formal: $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{\{Q_1\}}{\{Q_2\}} \cdot \dfrac{[Q_1]}{[Q_2]}$

Potenzieren

Beim Potenzieren ($x = a^n$) muss der Exponent n einheitenlos sein. Das Ergebnis $[x]$ hat die Einheit der Basis $[a]$ in der n-ten Potenz:

Beispiel: $s = ½ \cdot a \cdot t^2$ = ½ · 5,6 m/s^2 · (5 s)^2 = 70 m

Formal: $Q_1^n = \{Q_1\}^n \cdot [Q_1]^n$

Logarithmieren

Beim Logarithmieren ($n = \log_a x$) ist das Ergebnis n einheitenlos. Die Einheiten von Basis $[a]$ und Argument $[x]$ müssen der Bedingung $[x] = [a]^n$ genügen, sonst kann man den Logarithmus nicht bilden.

Beispiel: Schalldruckpegel $L_\mathrm{p} = 20 \cdot \log (p/p_0)$ mit p_0 = 20 µPa
beispielsweise für p = 100.000 µPa ergibt sich $L_\mathrm{p} = 20 \cdot \log$ (100.000 µPa / 20 µPa) = 74 dB
Das Dezibel (dB) ist eine dimensionslose Größe und daher in Europa auch keine Einheit, sondern nur ein Hinweis, wie die davor stehende Zahl zu interpretieren ist.
Ausnahme: In Österreich und der Schweiz ist das Dezibel jedoch eine gesetzliche Einheit.

Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen können nur von dimensionslosen Größen gebildet werden. Winkel in Grad (0 bis 360°) müssen in der Technik meist in Radiant (0 bis 2π) umgerechnet werden. Grad und rad sind zwar Einheiten jedoch gleichzeitig dimensionslos.

Beispiel: $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$ mit $\omega = 2\pi \cdot f$
beispielsweise für f = 50 Hz, t = 0,1 s, I_0 = 12 A und φ_0 = 12°
ergibt sich I = 10 A $\cdot$ sin($2\pi \cdot$ 50 /s $\cdot$ 0,1 s + 12° $\cdot$ π/180°) = 2,08 A

Wie wir später noch lernen werden, gilt die Gleichung:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E}$$

Wie sind die Einheiten von ε_0 und von ε_r?

Nach den Rechenregeln kann man schreiben:

$$[D] = [\varepsilon_0] \cdot [E] + [P] = [\varepsilon_0] \cdot [E] = [\varepsilon_0] \cdot [\varepsilon_r] \cdot [E]$$

Zur Erinnerung: $[x]$ bedeutet „die Einheit von x“

$$[\varepsilon_0] = \frac{[D]}{[E]} = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{m^2}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}}$$

Und weiter:

$$[\varepsilon_r] = \frac{[D]}{[\varepsilon_0] \cdot [E]} = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{m^2}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}} \cdot \frac{\mathrm{V \cdot m}}{\mathrm{A \cdot s}} = 1$$

ε_r und ebenso μ_r sind also einheitenlose (dimensionslose) Konstanten.

Material (technisch verarbeitet)	**Elektrische Leitfähigkeit γ bei 20 °C**	**Temperatur-koeffizient α_{20}**
Silber	$61 \cdot 10^6$ Sm/m²	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	**56** $\cdot 10^6$ Sm/m²	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Gold	$45 \cdot 10^6$ Sm/m²	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	**33** $\cdot 10^6$ Sm/m²	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$
Elektroblech (4% Si)	$9 \cdot 10^6$ Sm/m²	$0{,}9 \cdot 10^{-3}$

Alternative Angabe statt Leitfähigkeit: Spezifischer Widerstand $\rho = 1 / \gamma$ mit $[\rho] = 1\ \Omega\mathrm{m}^2/\mathrm{m}$

Bestimmung des Widerstands R eines Drahtes der Länge ℓ mit Querschnitt A und Leitfähigkeit γ :

$$\boxed{R = \ell / (\gamma \cdot A)}$$

Änderung des elektrischen Widerstandes mit der Temperatur ϑ:

$$\boxed{R_\vartheta = R_{20} \cdot \left(1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta_{20}\right)}$$

$\Delta\vartheta_{20}$ = Abweichung der Temperatur von 20 °C (+293,15 K) in Kelvin.

Für Kupfer gilt: Pro 10 K Temperaturerhöhung steigt der elektrische Widerstand um rund 4%.

Beispiele zur partiellen Ableitung

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{d}{dx} f(x,const,const) = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{d}{dy} f(const,y,const) = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{d}{dz} f(const,const,z) = 2z + 2xy$$

Ein Beispiel mit Kettenregel: $f(x,y,z) = 4z \cdot \sin(2x+3y)$

Substitution:
$u=2x+3y$
$d/du\ k \cdot \sin(u) = k \cdot \cos(u)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{d}{dx} f(x,const,const) = 4z \cdot \cos(2x+3y) \cdot 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{d}{dy} f(const,y,const) = 4z \cdot \cos(2x+3y) \cdot 3$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{d}{dz} f(const,const,z) = 4 \cdot \sin(2x+3y)$$

Skalarfelder

Luftdruck	$p(x,y,z)$
Temperatur	$\vartheta(x,y,z)$
Elektrisches Potenzial	$\Phi(x,y,z)$
Raumladungsdichte	$\rho(x,y,z)$

Diskrete Beschreibung

x in mm	y in mm	z in mm	Φ in V
1	0	0	0,1
0	1	0	0,2
0	0	1	0,2
1	1	0	0,3

Analytische Beschreibung

$$\Phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Phi(\vec{r})$$

Skalarfeld Ortsvektor

Vektorfelder

Luft-/Wasserströmung $\vec{v}(x,y,z)$

Vektorfelder der Elektrodynamik $\vec{E},\vec{D},\vec{P},\vec{H},\vec{B},\vec{M},\vec{J}$

$$\vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Vektorfeld Ortsvektor

Diskrete Beschreibung

x in mm	y in mm	z in mm	E_x in V/m	E_y in V/m	E_z in V/m
1	0	0	10	10	0
0	1	0	20	10	0
0	0	1	30	10	0
1	1	0	40	10	0

Komponenten des Ortsvektors | Komponenten des Vektorfeldes

Analytische Beschreibung

$$E_x = 0; \; E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \; E_z = 0$$

Vektorfeld durch 6 Größen gekennzeichnet:

- 3 Größen für den Ort
- 3 Größen für den Wert in den drei Raumrichtungen

Skalarprodukt

Zwei Vektoren wird eine Zahl (Skalar) zugeordnet

(inneres Produkt, Punktprodukt)

Beispiel: $\vec{F} \bullet \vec{s} = W \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = F_x \cdot s_x + F_y \cdot s_y + F_z \cdot s_z$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist null, wenn sie senkrecht zueinander stehen, und maximal, wenn sie die gleiche Richtung haben.

Vektorprodukt

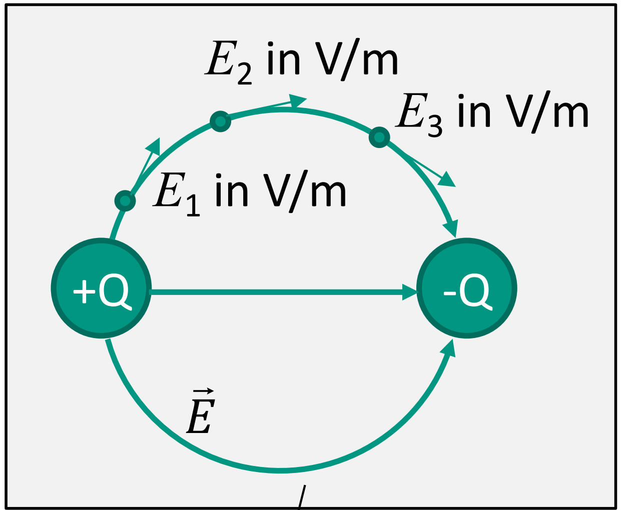
Zwei Vektoren wird wieder ein Vektor zugeordnet

(Kreuzprodukt, vektorielles Produkt)

Beispiel: $i \cdot \left(\vec{l} \times \vec{B} \right) = \vec{F} \quad \rightarrow \quad i \cdot \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x = i \cdot \left(l_y B_z - l_z B_y \right) \\ F_y = i \cdot \left(l_z B_x - l_x B_z \right) \\ F_z = i \cdot \left(l_x B_y - l_y B_x \right) \end{pmatrix}$

Der Ergebnisvektor steht senkrecht auf der Ebene, die durch die ursprünglichen Vektoren definiert wird. Der Betrag gibt den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms an.

Gibt es krumme Vektoren?



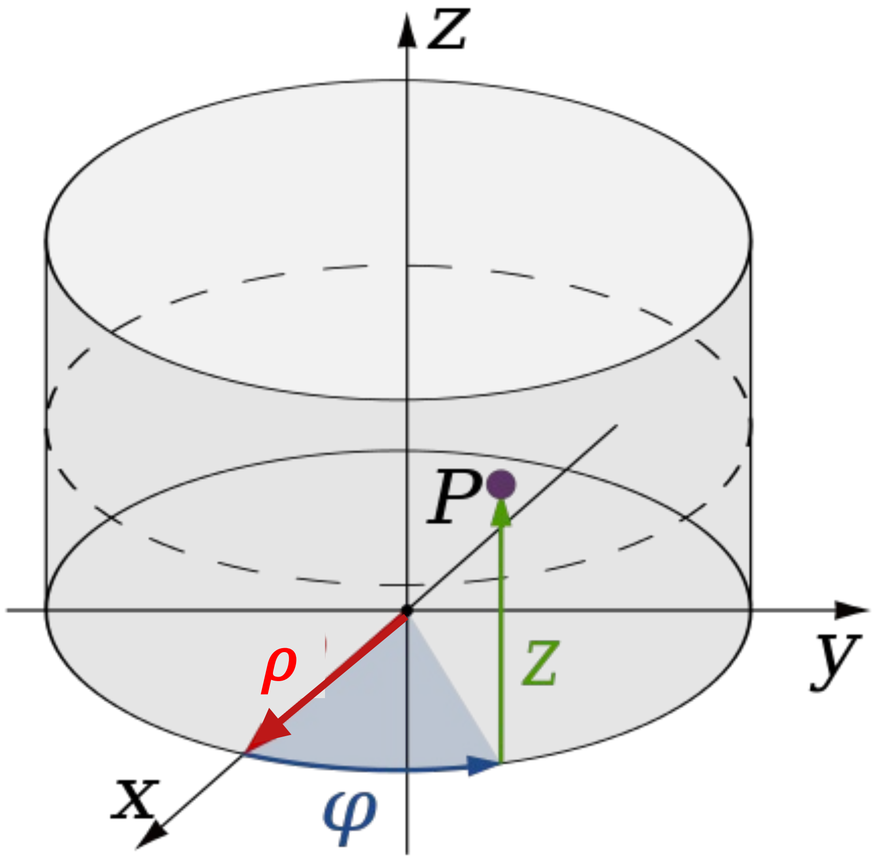
$\vec{E}$ ist nicht eine krumme Linie (Polygonlinie), die bei +Q beginnt und bei –Q endet.

$\vec{E}$ ist vielmehr ein Vektorfeld:
An jeder Stelle im Raum, gekennzeichnet durch einen Ortsvektor $\vec{r}$, gibt es einen elektrischen Feldvektor $\vec{E}_i\left(\vec{r}_i\right)$ der individuellen Länge E_i in V/m und der Richtung $\vec{e}_i$:

$$\vec{E}_i\left(\vec{r}_i\right) = E_i \cdot \vec{e}_i$$

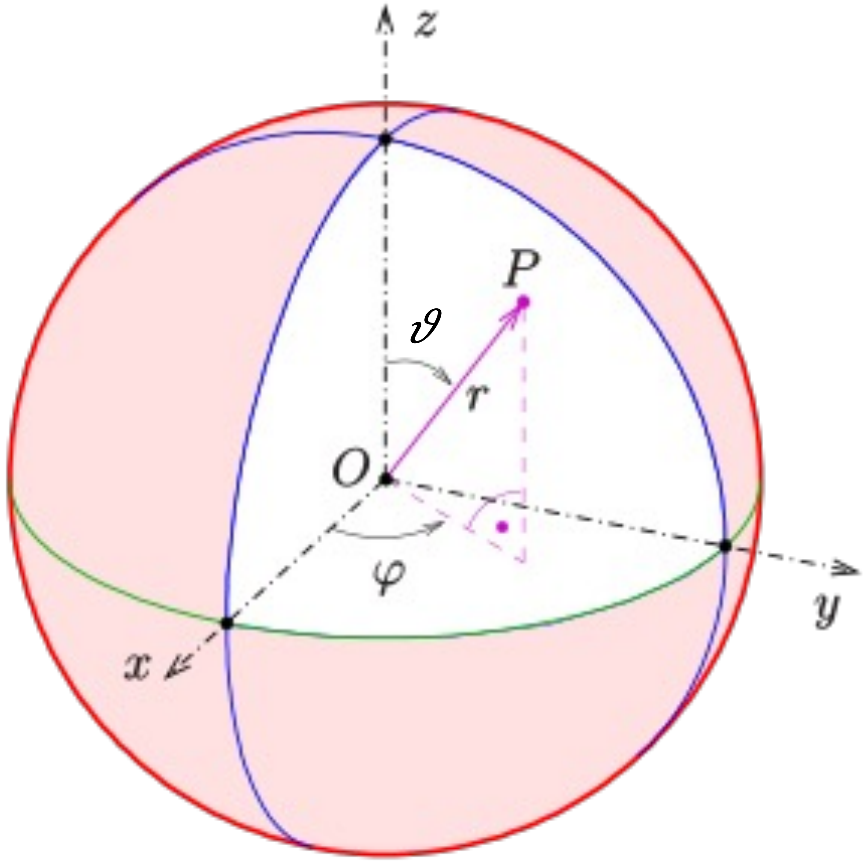
Die Krümmung der Feldlinien in der Zeichnung entsteht aus der Hintereinanderzeichnung der Folge von Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ an den Orten $\vec{r}$.

Zylinderkoordinaten



(ρ, φ, z)

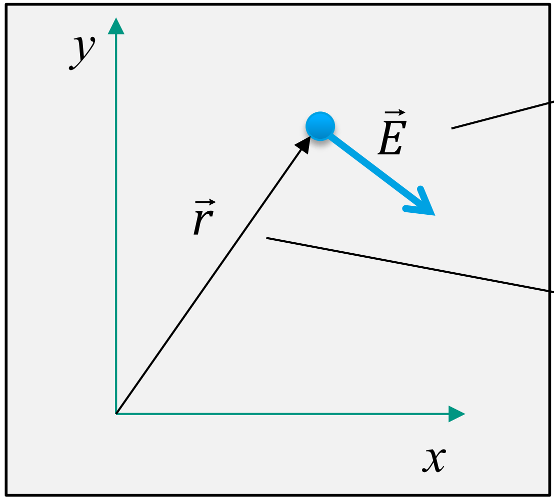
Kugelkoordinaten



(r, ϑ, φ)

Quelle: Wikipedia

Ortsvektor und Vektorfeld



Vektor des Vektorfeldes:
- Länge in V/m
- Richtung (Winkel) im Raum

Ortsvektor:
- Länge in m zum Raumpunkt
- Richtung (Winkel) zum Raumpunkt

Kartesische Koordinaten

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x,y,z)\cdot\vec{e}_x \\ +E_y(x,y,z)\cdot\vec{e}_y \\ +E_z(x,y,z)\cdot\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{r} = x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y + z\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_x\cdot\vec{e}_x + E_y\cdot\vec{e}_y + E_z\cdot\vec{e}_z$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho,\varphi,z)\cdot\vec{e}_\rho \\ +E_\varphi(\rho,\varphi,z)\cdot\vec{e}_\varphi \\ +E_z(\rho,\varphi,z)\cdot\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{r} = \rho\cdot\vec{e}_\rho + \varphi\cdot\vec{e}_\varphi + z\cdot\vec{e}_z$$

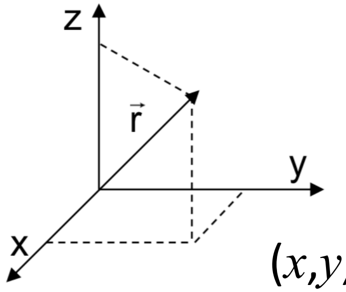
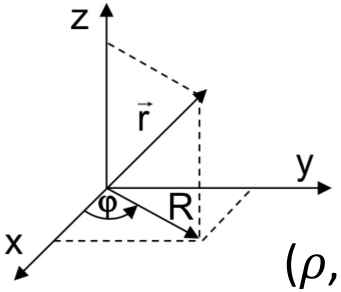
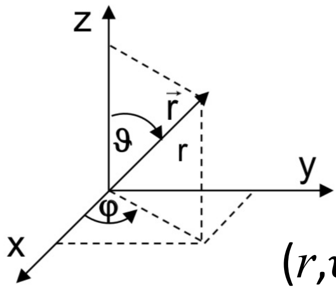
$$\vec{E} = E_\rho\cdot\vec{e}_\rho + E_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + E_z\cdot\vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten

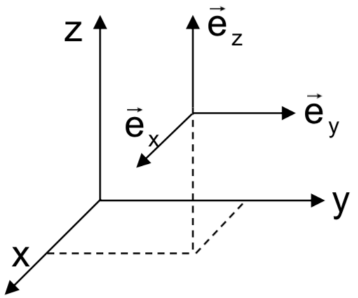
$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_r \\ +E_\vartheta(r,\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_\vartheta \\ +E_\varphi(r,\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

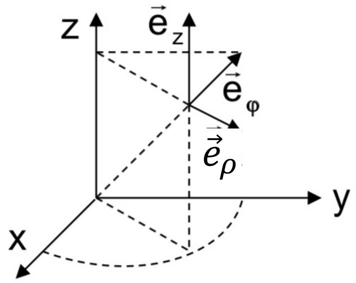
$$\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r + \vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + \varphi\cdot\vec{e}_\varphi$$

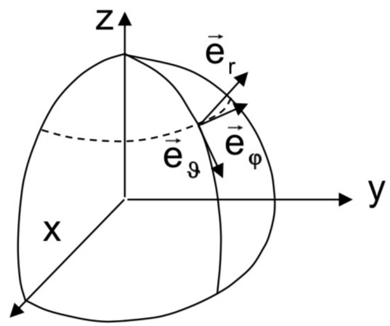
$$\vec{E} = E_r\cdot\vec{e}_r + E_\vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + E_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi$$

Kartesische Koordinaten		**Zylinderkoordinaten**		**Kugelkoordinaten**
 (x,y,z)		 (ρ,φ,z)		 (r,ϑ,φ)
x	=	$\rho \cdot \cos\varphi$	=	$r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi$
y	=	$\rho \cdot \sin\varphi$	=	$r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$
z	=	z	=	$r \cdot \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	=	ρ	=	$r \cdot \sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	=	φ	=	φ
z	=	z	=	$r \cdot \cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	=	$\sqrt{\rho^2+z^2}$	=	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	=	$\arctan\frac{\rho}{z}$	=	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	=	φ	=	φ

Kartesische Koordinaten | **Zylinderkoordinaten** | **Kugelkoordinaten**







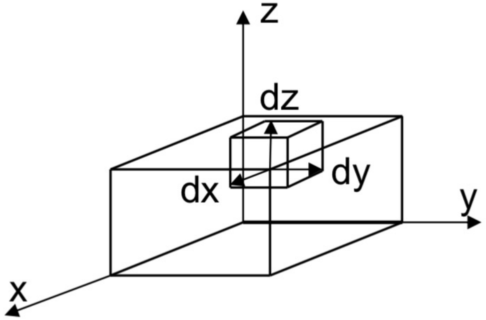
$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \qquad A_\rho\vec{e}_\rho + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z \qquad A_r\vec{e}_r + A_\vartheta\vec{e}_\vartheta + A_\varphi\vec{e}_\varphi$$

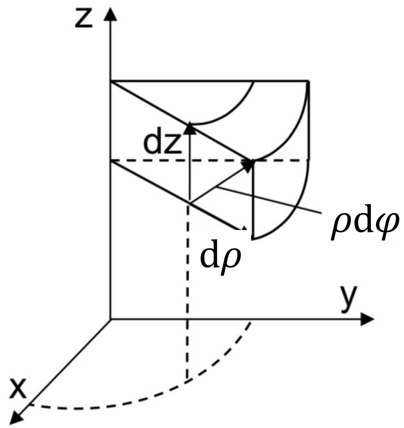
$$\begin{aligned}
A_x &= A_\rho\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi = A_r\sin\vartheta\cos\varphi + A_\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \\
A_y &= A_\rho\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi = A_r\sin\vartheta\sin\varphi + A_\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \\
A_z &= A_z = A_r\cos\vartheta - A_\vartheta\sin\vartheta
\end{aligned}$$

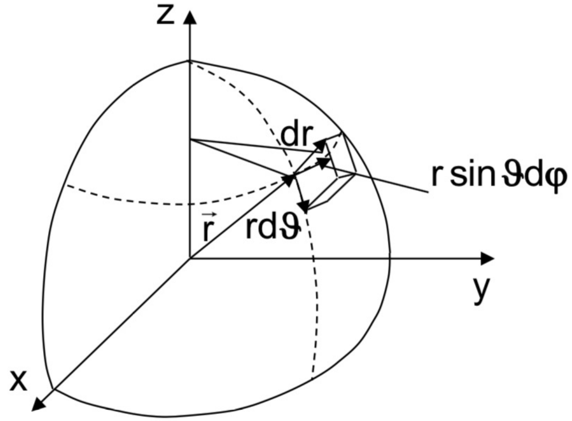
$$\begin{aligned}
A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi &= A_\rho = A_r\sin\vartheta + A_\vartheta\cos\vartheta \\
-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi &= A_\varphi = A_\varphi \\
A_z &= A_z = A_r\cos\vartheta - A_\vartheta\sin\vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_x\sin\vartheta\cos\varphi + A_y\sin\vartheta\sin\varphi + A_z\cos\vartheta &= A_\rho\sin\vartheta + A_z\cos\vartheta = A_r \\
A_x\cos\vartheta\cos\varphi + A_y\cos\vartheta\sin\varphi - A_z\sin\vartheta &= A_\rho\cos\vartheta - A_z\sin\vartheta = A_\vartheta \\
-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi &= A_\varphi = A_\varphi
\end{aligned}$$

Kartesische Koordinaten | **Zylinderkoordinaten** | **Kugelkoordinaten**







$$d\vec{s} = \vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy + \vec{e}_z\, dz = \vec{e}_\rho \cdot d\rho + \vec{e}_\varphi \cdot \rho \cdot d\varphi + \vec{e}_z \cdot dz = \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot d\vartheta + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot d\varphi$$

$$d\vec{f} = \vec{e}_x \cdot dy\,dz + \vec{e}_y \cdot dx\,dz + \vec{e}_z \cdot dx\,dy = \vec{e}_\rho \cdot \rho \cdot d\varphi\, dz + \vec{e}_\varphi \cdot d\rho\, dz + \vec{e}_z \cdot \rho \cdot d\rho\, d\varphi = \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta\, d\varphi + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot dr\, d\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot dr\, d\vartheta$$

$$dv = dx\,dy\,dz = \rho \cdot d\rho\, d\varphi\, dz = r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

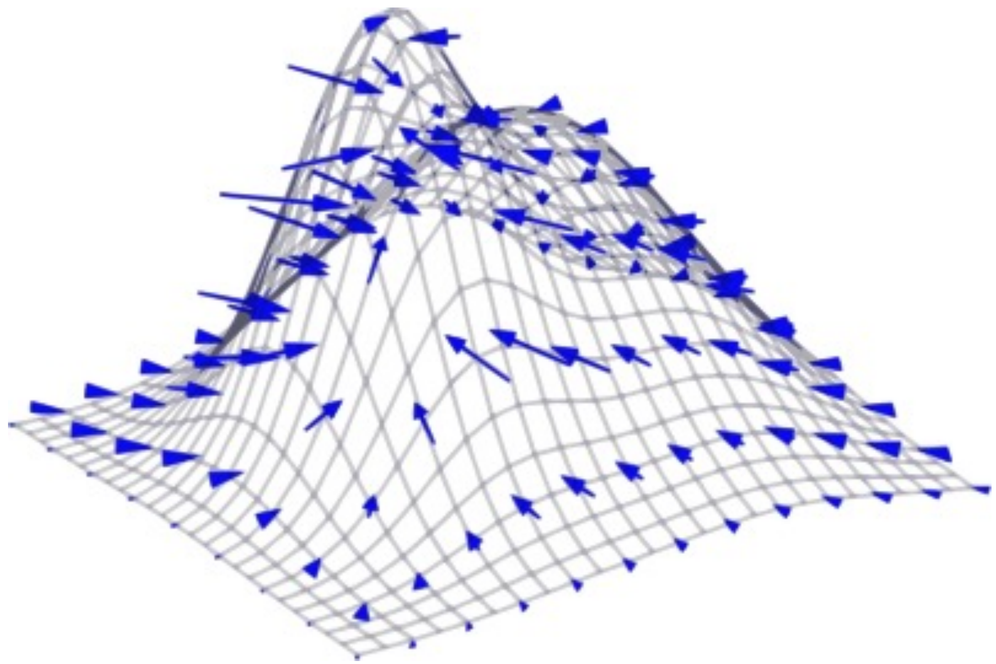
Gradient (engl.: Gradient)

grad Φ gibt an, wie stark sich ein Skalarfeld räumlich ändert (Steigung).
Er zeigt in jedem Punkt in die Richtung der stärksten lokalen Änderung.

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{e}_z$$

Φ ist ein Skalarfeld
grad Φ ist ein Vektorfeld

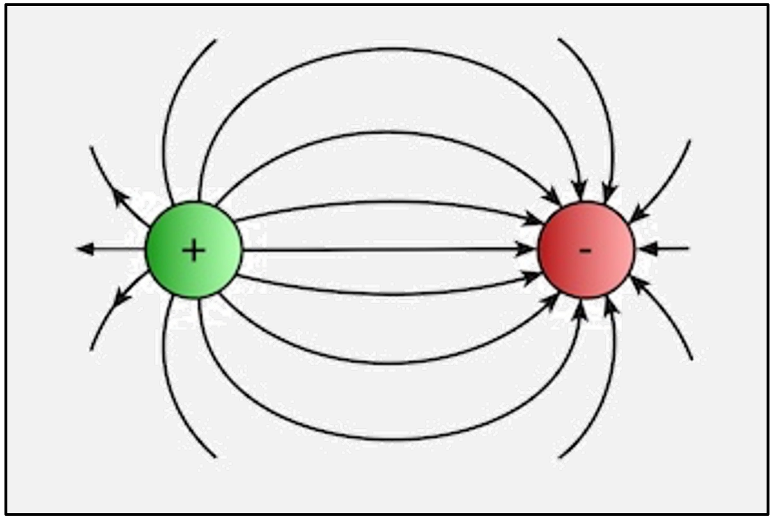
$$d\Phi = \operatorname{grad}\Phi\cdot d\vec{r}$$



Bildquelle: http://lp.uni-goettingen.de/get/image/2320

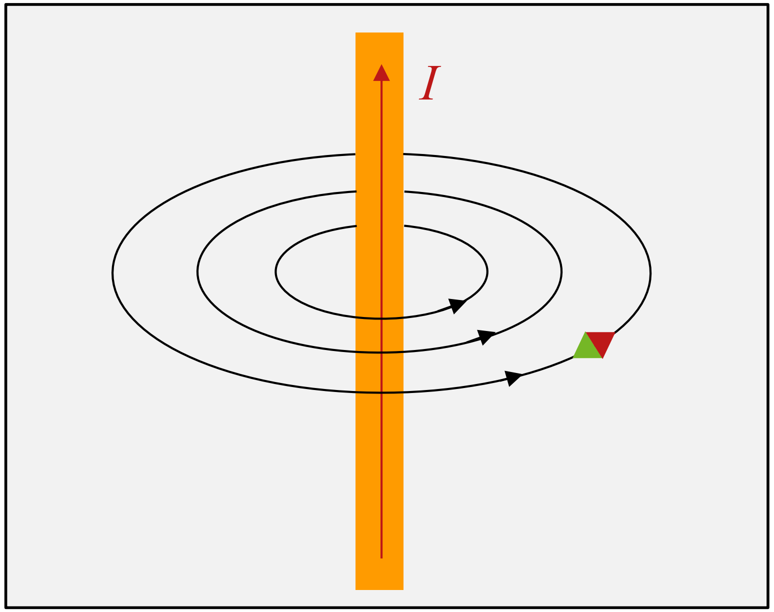
Quellenfelder und Wirbelfelder

Quellenfelder sind Vektorfelder mit einem Anfang und einem Ende.
Das gilt beispielsweise für elektrostatische Felder zweier Punktladungen.



Die **Divergenz** ist Ursache für Quellenfelder: Feldlinien haben einen Anfang (Quelle) und ein Ende (Senke).

Wirbelfelder sind Vektorfelder mit geschlossenen Feldlinien. Sie haben eine Richtung, aber keinen Anfang und kein Ende.
Ihre Divergenz ist daher Null.
Das gilt beispielsweise für alle Magnetfelder.



Die Wirbeldichte oder **Rotation** ist die Ursache für Wirbelfelder. Das kann beispielsweise der Strom in einem Draht sein.

Divergenz (engl.: Divergence)

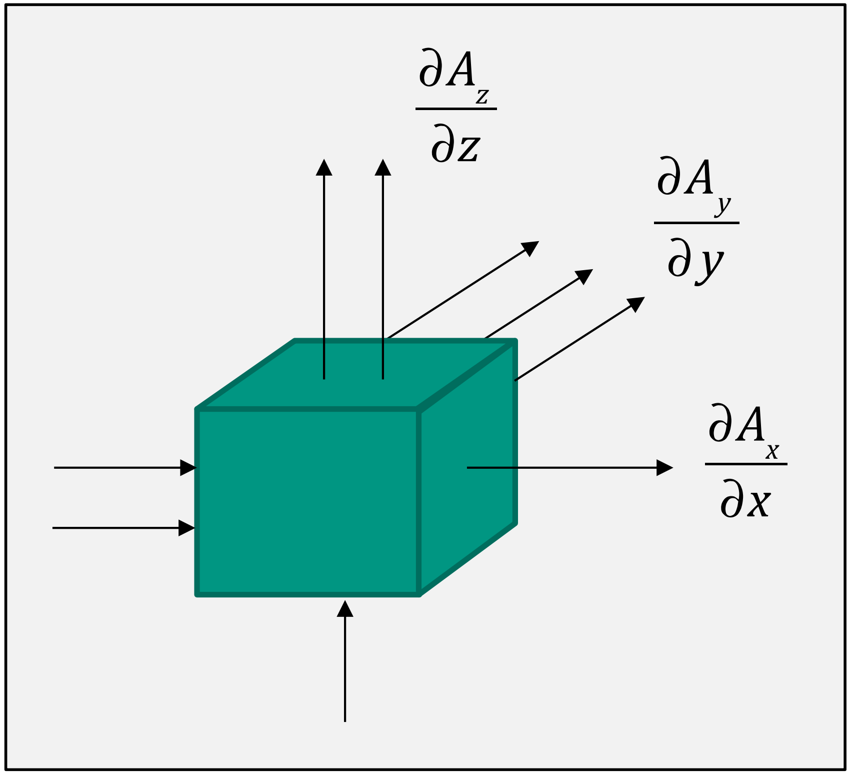
$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\vec{A}$ ist ein Vektorfeld
$\operatorname{div}\vec{A}$ ist ein Skalarfeld

$\operatorname{div}\vec{A}$ gibt die Dichte der Quellen in einem Vektorfeld an.

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{v\to 0}\frac{1}{V}\cdot\oiint_s \vec{A}\bullet d\vec{s}$$

globale, integrale Bilanz



Rotation (engl.: Curl)

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten

$\vec{A}$ ist ein Vektorfeld
$\operatorname{rot}\vec{A}$ ist ein Vektorfeld

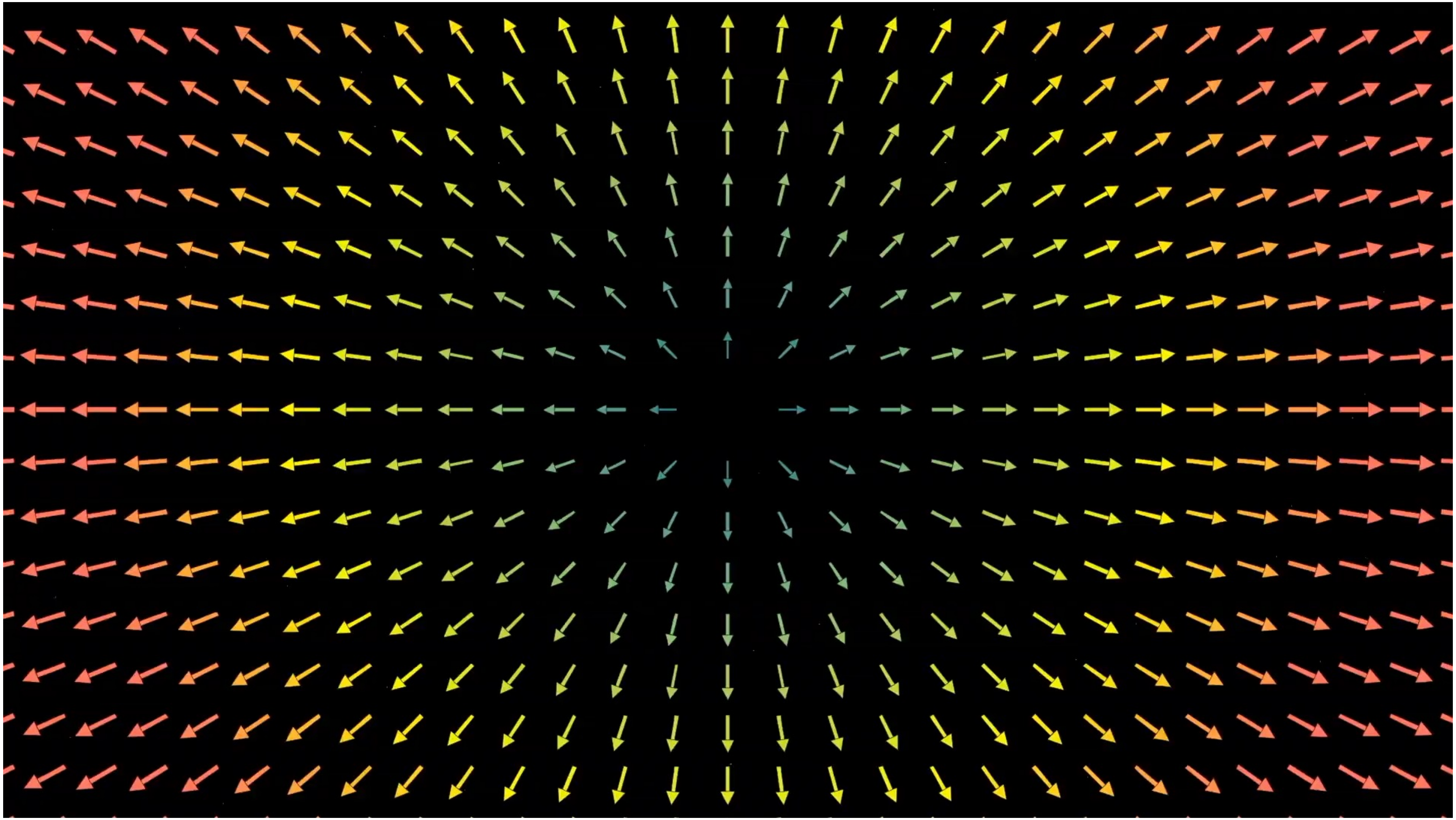
$\operatorname{rot}\vec{A}$ gibt die Dichte von Wirbelursachen an und zeigt in die Normalrichtung der Fläche mit dem stärksten Wirbel

$$\vec{e}_n \cdot \operatorname{rot}\vec{A} = \lim_{f\to 0}\frac{1}{f}\cdot\oint_{\partial f}\vec{A}\bullet d\vec{s}$$

Umlaufintegral über den Rand der Fläche f

5. Differentialoperatoren: grad, div, rot, Nabla und Laplace V

Quelle: https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE



Nabla-Operator (Vektoroperation)

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten

$\mathrm{grad}\,\Phi = \vec{\nabla}\cdot\Phi$	Produkt von Skalar mit Vektor	➞ Der Gradient erzeugt einen Vektor
$\mathrm{div}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\bullet\vec{D}$	Skalarprodukt von Vektor mit Vektor	➞ Die Divergenz erzeugt einen Skalar
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$	Kreuzprodukt von Vektor mit Vektor	➞ Die Rotation erzeugt einen Vektor

Laplace-Operator (Skalaroperation)

$$\Delta = \vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in kartesischen Koordinaten

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\Phi\right) = \Delta\cdot\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Φ ist ein Skalarfeld
$\Delta\cdot\Phi$ ist ein Skalarfeld

Der Laplace-Operator gibt die Krümmung eines Skalarfeldes an

Rechenregeln

$\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\,\Phi\right)=0$ Lässt sich ein Vektorfeld als Gradient einer Potentialfunktion darstellen, so hat es keine Wirbel (Beweis siehe folgende Folien).

$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=0$ Lässt sich ein Vektorfeld als Rotation eines Vektorfeldes darstellen, so hat es keine Quellen (Beweis siehe folgende Folien).

$\mathrm{div}(\Phi\cdot\vec{A})=\vec{A}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi+\Phi\cdot\mathrm{div}\,\vec{A}$ Produktregel für Vektoroperatoren

$\mathrm{rot}\left(\Phi\cdot\vec{A}\right)=\Phi\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}+\left(\mathrm{grad}\,\Phi\right)\times\vec{A}$ Kettenregel für Vektoroperatoren

$\Delta\cdot\vec{A}=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)-\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)$ Laplace-Operator für ein Vektorfeld

$$\Delta\cdot\vec{A}=\begin{bmatrix}\Delta\cdot A_x\\ \Delta\cdot A_y\\ \Delta\cdot A_z\end{bmatrix}=\Delta\cdot A_x\cdot\vec{e}_x+\Delta\cdot A_y\cdot\vec{e}_y+\Delta\cdot A_z\cdot\vec{e}_z$$

In kartesischen Koordinaten

5. Differentialoperatoren in unterschiedlichen Koordinatensystemen

Kartesische Koordinaten | **Zylinderkoordinaten** | **Kugelkoordinaten**

$$\operatorname{grad}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \vec{e}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R \cdot A_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot A_r\right) + \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(A_\vartheta \cdot \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

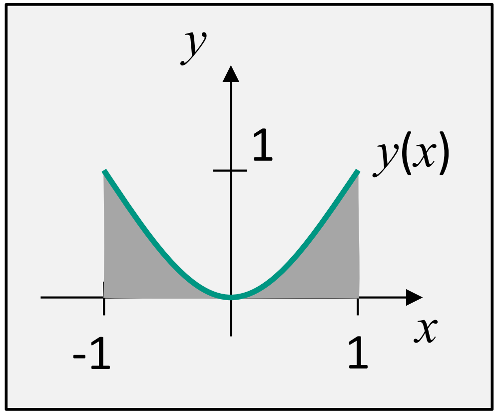
$$= \vec{e}_R\left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R \cdot A_\varphi) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}(A_\varphi \cdot \sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot A_\varphi)\right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right)$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

Wegintegral

Einfaches Integral



Fläche unter der Kurve

Beispiel

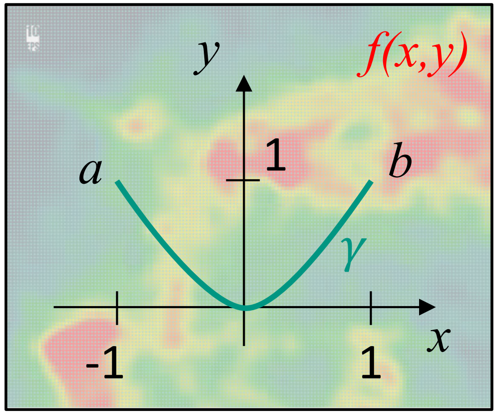
$$y(x) = x^2$$

$$\int y(x)\,dx = \int_{x=-1}^{x=1} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\big(1-(-1)\big) = \frac{2}{3}$$

Kurvenintegral 1. Art

f ist ein Skalar



Wegintegral einer Funktion $f(x,y)$

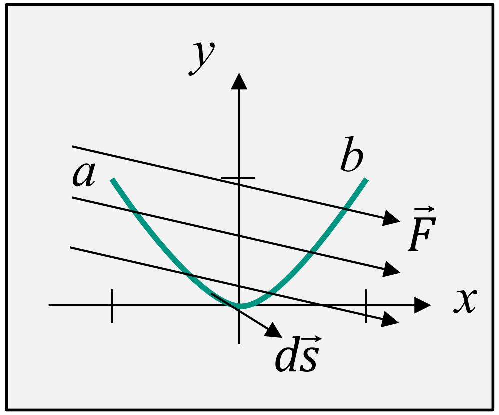
(Linien-, Weg- oder Konturintegral)

$$\boxed{\int_\gamma f\cdot ds = \int_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right)\cdot\left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right|\cdot dt}$$

t ist eine Laufvariable, die die Position entlang des Wegs γ angibt
f ist die Skalarfunktion (z.B. Temperaturverteilung im Raum)

Kurvenintegral 2. Art

$\vec{F}$ ist ein Vektorfeld



Wegintegral eines Vektorfeldes $\vec{F}(x,y)$

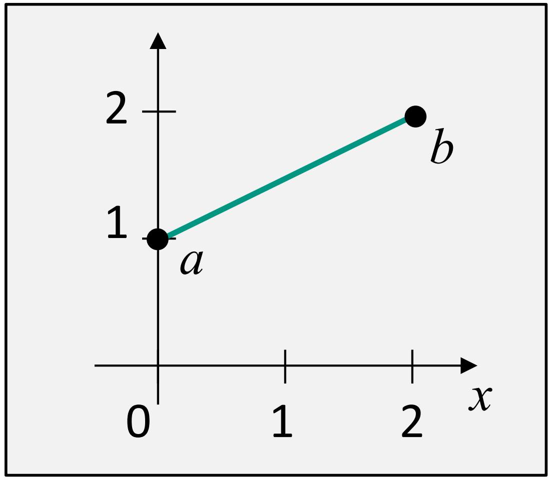
$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}\left(\vec{\gamma}(t)\right)\bullet\dot{\vec{\gamma}}(t)\cdot dt}$$

Hierbei muss das Skalarprodukt von $\vec{F}\left(\vec{\gamma}(t)\right)$ und $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ gebildet werden.

Wegintegral

$$\int_{\gamma} f \cdot ds = \int_{a}^{b} f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt$$

Beispiel Kurvenintegral 1. Art
(Weg in einem konstanten Skalarfeld)



Die Skalarfunktion sei konstant: $f = 1 = const.$

Der Weg als Funktion von t ist: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 + t/2 \end{pmatrix}$

Ableitung: $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Betrag: $\left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| = \sqrt{1^2 + (1/2)^2} = \sqrt{5/4}$

Wegintegral: $$\int_{a}^{b} f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt = \int_{t=0}^{t=2} 1 \cdot \sqrt{5/4} \cdot dt = \sqrt{5/4} \cdot t\Big|_0^2 = 2 \cdot \sqrt{5/4} = \sqrt{5}$$

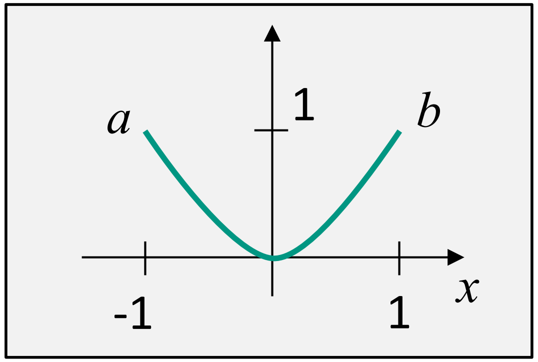
Gegenrechnung mit Satz von Pythagoras: $s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

q.e.d.

Wegintegral

Beispiel Kurvenintegral 1. Art
(Weg in einem veränderlichen Skalarfeld)

$$\boxed{\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt}$$



Wanderung entlang eines parabelförmigen Weges auf einer von links nach rechts ansteigenden Ebene

Die Skalarfunktion steigt mit t: $f = t + 1$
(von links nach rechts)

Der Weg als Funktion von t ist: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Ableitung: $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

Betrag: $\left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| = \sqrt{1^2 + 4t^2}$

Wegintegral: $\int_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt = \int_{t=-1}^{t=1} (t+1) \cdot \sqrt{1+4t^2} \cdot dt$

mit der Abkürzung:

Stammfunktion: $\int (t+1) \cdot \sqrt{1+4t^2} \cdot dt = \frac{1}{12}\left[4t^2 \cdot X + 6t \cdot X + X - 3\ln\left(X - 2t\right)\right]$ $\qquad X = \sqrt{1+4t^2}$

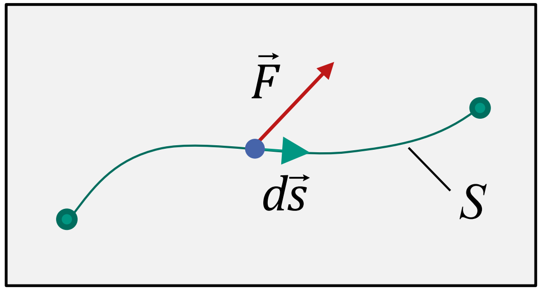
$$\int_{t=-1}^{t=1} (t+1) \cdot \sqrt{1+4t^2} \cdot dt = \frac{1}{12}\left[4t^2 \cdot \sqrt{5} + 6t \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\ln\left(\sqrt{5} - 2t\right)\right]_{-1}^{1} \cong 2{,}96$$

Lösung:

Wegintegral

Beispiel Kurvenintegral 2. Art
(Weg in einem Vektorfeld)

Energie = Kraft · Weg $W = \int_s \vec{F} \bullet d\vec{s}$



allgemein

S = Strecke

Allgemein gilt:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Beispiel: $\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y$

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x$$

damit $\int_s \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_s \left(F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y\right) \bullet \left(dx \cdot \vec{e}_x\right)$

Sonderfall F = const.:

$$\int_s \vec{F} \bullet d\vec{s} == F_x \cdot S$$

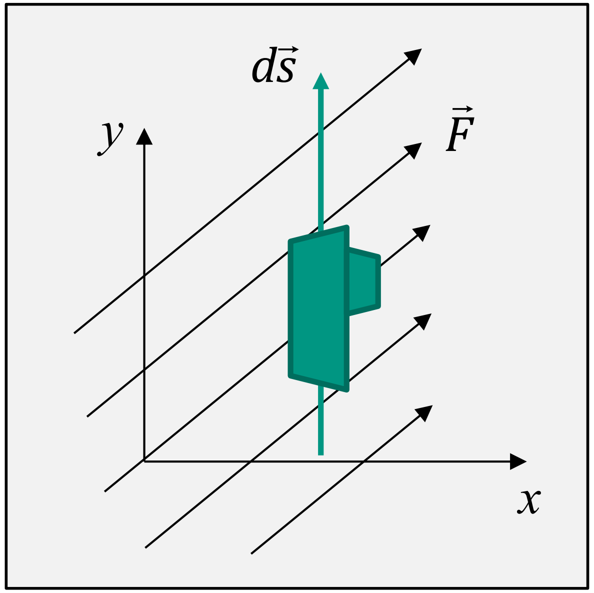
Wegintegral

Beispiel Kurvenintegral 2. Art
(Weg in einem Vektorfeld)

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}\left(\vec{\gamma}\left(t\right)\right)\bullet\dot{\vec{\gamma}}\left(t\right)\cdot dt}$$

$$\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{s} = \int_\gamma \begin{pmatrix} F_x\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right) \\ F_y\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right) \\ F_z\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} d\dot{x}\left(t\right) \\ d\dot{y}\left(t\right) \\ d\dot{z}\left(t\right) \end{pmatrix} = \int_t F_x\left(t\right)\cdot d\dot{x}\left(t\right)\cdot dt + \int_t F_y\left(t\right)\cdot d\dot{y}\left(t\right)\cdot dt + \int_t F_z\left(t\right)\cdot d\dot{z}\left(t\right)\cdot dt$$

Beispiel: Schiff mit konstantem Seitenwind



$$\vec{F}\left(t\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konstante Kraft in diagonaler Richtung, keine Abhängigkeit vom Ort

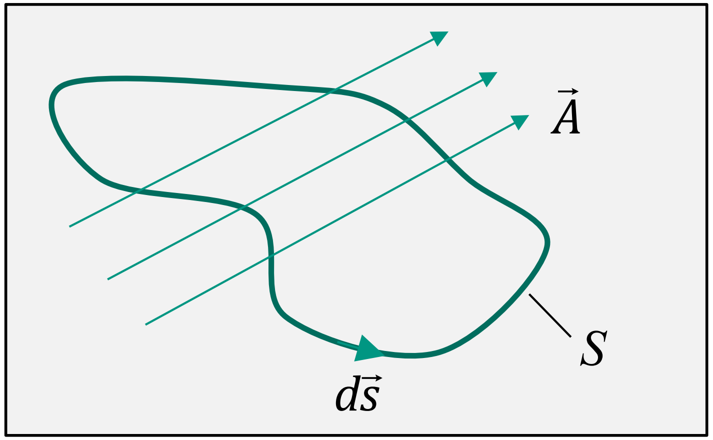
$$d\vec{s}\left(t\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Schiff fährt senkrecht nach oben

$$d\dot{\vec{s}}\left(t\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

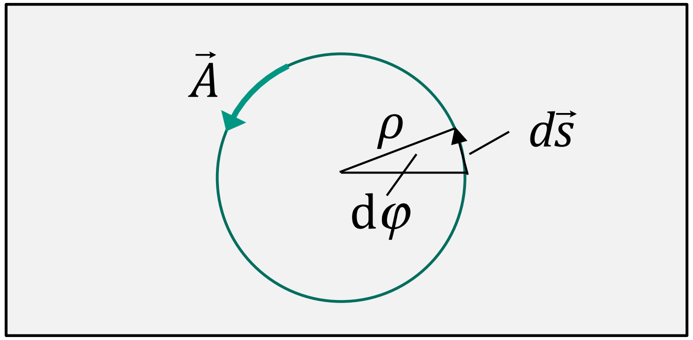
$$\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{s} = \int_t \vec{F}\left(t\right)\bullet d\dot{\vec{s}}\left(t\right)\cdot dt = \int_t \left(1\cdot 0+1\cdot 1\right)dt = t$$

Umlaufintegral (geschlossenes Wegintegral)



Wegintegral über geschlossene Schleife $\oint_s \vec{A} \bullet d\vec{s}$

Beispiel: $\vec{A}$ sei kreisförmig mit Radius ρ und entlang des Kreises konstant.



Dann gilt: $\mathrm{d}\vec{s} = \rho \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ (Folie 28)

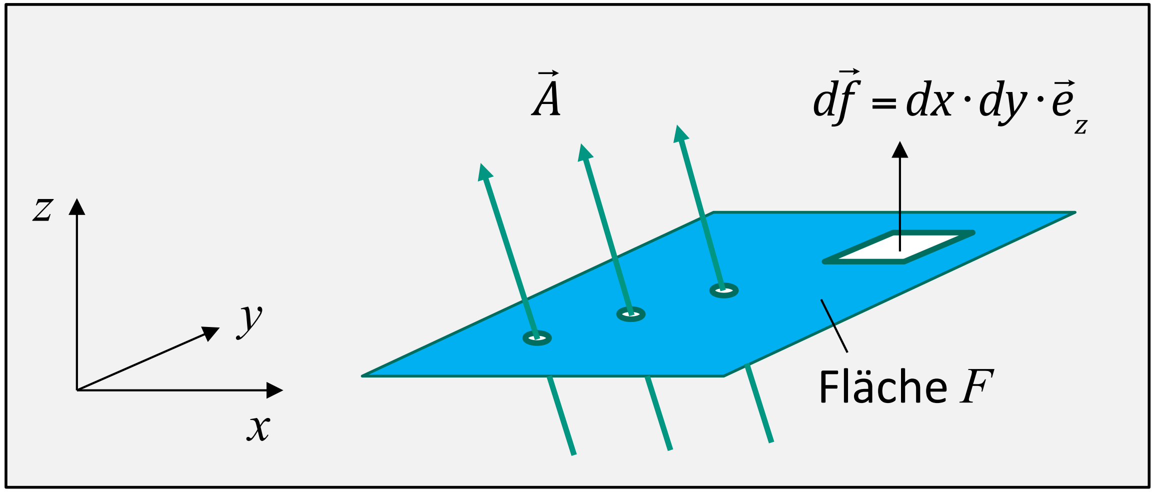
Und: $\vec{A} = A_\varphi(\rho) \cdot \vec{e}_\varphi$

Damit:
$$\oint_s \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_s \left(A_\varphi(\rho) \cdot \vec{e}_\varphi\right) \cdot \left(\rho \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\right)$$
$$= \int_0^{2\pi} A_\varphi(\rho) \cdot \rho \cdot \mathrm{d}\varphi$$
$$= A_\varphi(\rho) \cdot \rho \cdot \oint_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$
$$= A_\varphi(\rho) \cdot 2\pi\rho$$

Allgemein gilt:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$
$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Flächenintegral



$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z$$

Frage: Wie groß ist die Summe der senkrechten Komponente von A durch F ?

$$\iint_F \vec{A} \bullet d\vec{f} \qquad \text{Flächenintegral}$$

$$= \iint_F \left(A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z\right) \cdot \left(dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z\right)$$

$$= \iint_F A_z \cdot dx \cdot dy = A_z \cdot F$$

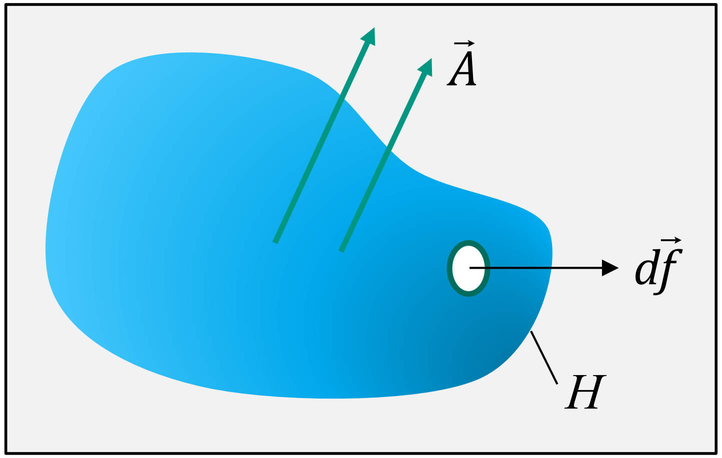
Für den Spezialfall A = const.

Allgemein gilt:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Hüllflächenintegral

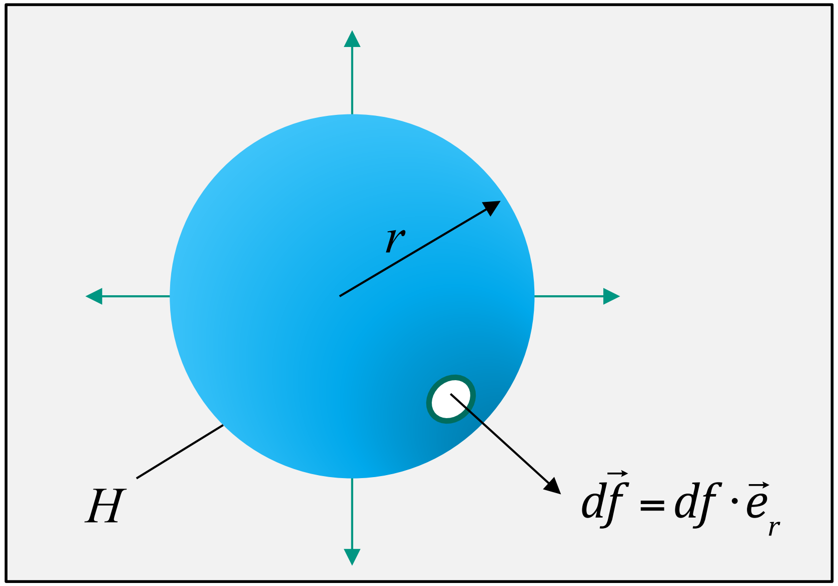


senkrecht auf H
zeigt nach außen

Integral über eine geschlossene Hüllfläche

$$\oiint_H \vec{A} \bullet d\vec{f}$$

Beispiel: Kugel mit radialsymmetrischem Feld $\vec{A} = A_r(r)\cdot\vec{e}_r$



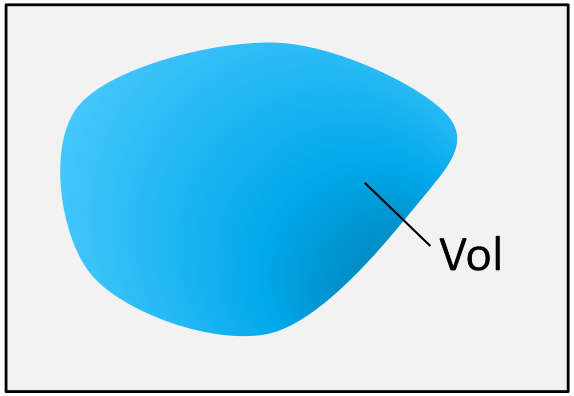
$$\oiint_H \left(A_r(r)\cdot\vec{e}_r\right)\cdot\left(df\cdot\vec{e}_r\right)$$

$$= \oiint_H \left(A_r(r)\cdot\vec{e}_r\right)\cdot\left(r^2\cdot\sin\delta\cdot d\delta\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_r\right) \qquad \vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = 1$$

$$= A_r(r)\cdot r^2\cdot\oiint_H \sin\delta\cdot d\delta\cdot d\varphi$$

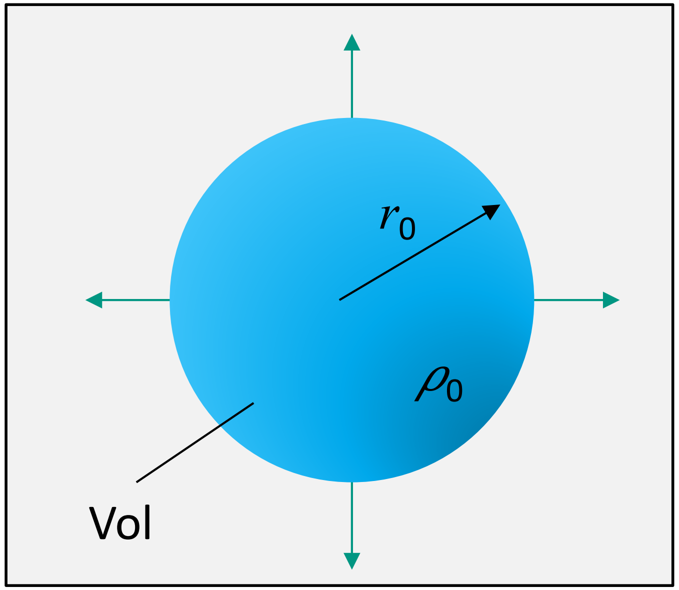
$$= A_r(r)\cdot 4\pi r^2$$

Volumenintegral



$$Q = \iiint \rho(x,y,z) \cdot dv = \iiint \rho(x,y,z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Beispiel: Kugel mit Radius r_0 und konstanter Ladungsdichte ρ_0

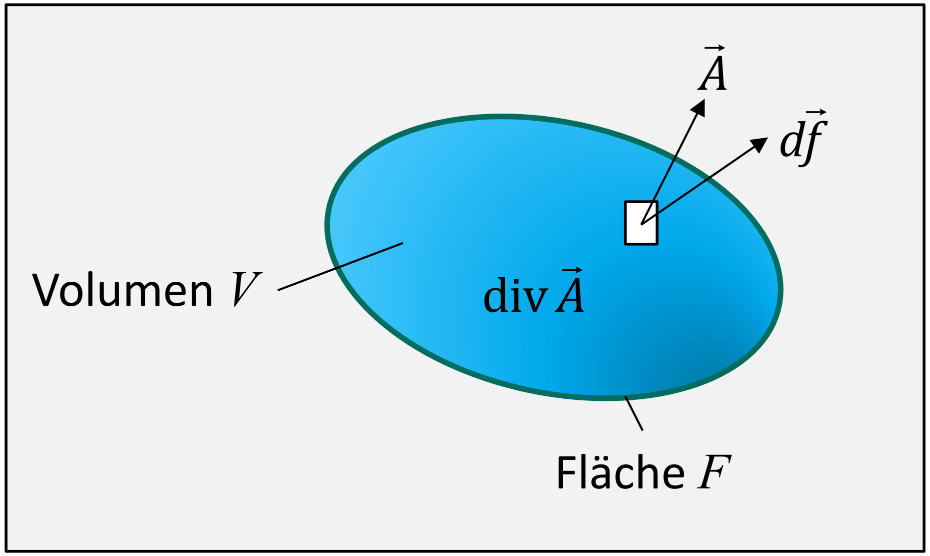


$$\iiint \rho(\vec{r}) \cdot dv = \iiint \rho_0 \cdot r^2 \cdot \sin\delta \cdot dr \cdot d\delta \cdot d\varphi$$

$$= \rho_0 \iiint r^2 \cdot \sin\delta \cdot dr \cdot d\delta \cdot d\varphi = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3$$

Hüllflächenintegral eines Vektorfeldes (Gaußscher Satz)

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

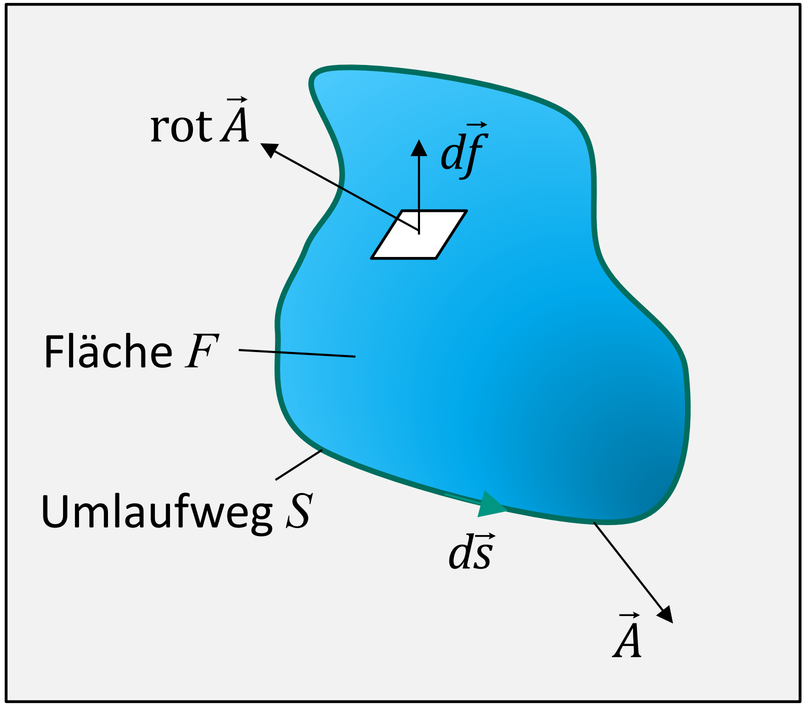


$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\cdot dv = \oiint_F \vec{A}\bullet d\vec{f}}$$

Das **Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes** ist gleich dem **Flächenintegral** des Vektorfeldes **über die geschlossene Oberfläche** seines Volumens.

Umlaufintegral eines Vektorfeldes (Stokesscher Satz)

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{e}_z$$



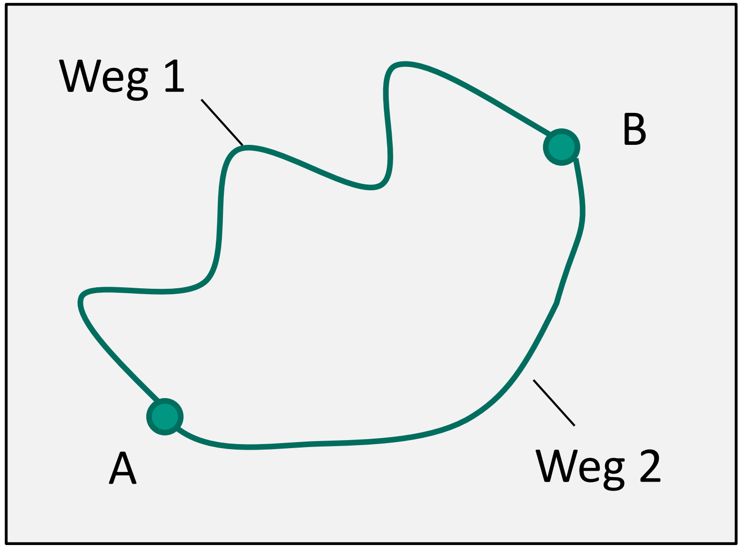
$$\boxed{\iint_F \operatorname{rot}\vec{A}\bullet d\vec{f} = \oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s}}$$

Das Flächenintegral über die Komponente von rot $\vec{A}$ in Richtung der Flächennormalen ist gleich dem Linienintegral längs des Randes der Fläche über die Komponenten von $\vec{A}$ in Richtung der Linienelemente.

Linienintegral eines Gradientenfeldes

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{e}_z$$

$$\boxed{\int_A^B (\operatorname{grad}\Phi)\bullet d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A)}$$



Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes
vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte
der Potentialfunktion an den beiden Punkten A und B
unabhängig vom Verlauf des Integrationswegs zwischen den Punkten.