Karlsruhe Institute of Technology

WT Tutorium 1

Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsraum

Richard Frohmüller

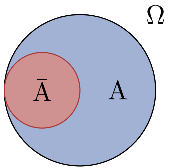
Einleitung: Ergebnisraum

Definition: Ergebnisraum

Ein *endlicher Ergebnisraum* wird durch die nicht-leere Menge

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

beschrieben. Die Elemente $\omega_i \in \Omega$ heißen *Ergebnisse*.
Die Teilmengen $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ heißen *Ereignisse*.
Teilmengen von ω_i sind *Elementarereignisse*,
Ω das *sichere Ereignis*, und $\emptyset$ das *unmögliche Ereignis*.



Dabei ist $\bar{\mathrm{A}}$ das *entgegengesetzte* oder *komplementäre Ereignis*

$$\bar{\mathrm{A}} = \Omega \setminus \mathrm{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin \mathrm{A}\}$$

Einleitung: Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Definition: Laplace'sches Zufallsexperiment

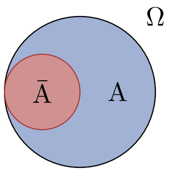
Ω ist eine *endliche* Menge, und alle Elementarereignisse $\omega_i \in \Omega$ treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, bzw.

$$P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Definition: Ereigniswahrscheinlichkeit nach Laplace

Ein Ereignis $\mathrm{A} \in \Omega$ hat demnach die folgende Wahrscheinlichkeit

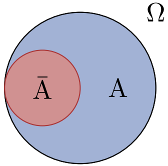
$$P(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl "günstige" Möglichkeiten}}{\text{Anzahl Möglichkeiten}}$$



Einleitung: Wahrscheinlichkeit nach Laplace

Wichtige Rechenregeln:

$$P(\Omega) = 1$$
$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$$
$$\bar{\mathrm{A}} = \Omega \setminus \mathrm{A}$$



Einleitung: Hypergeometrische Verteilung

Definition: Kombinationen

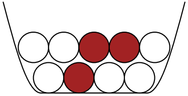
Anzahl möglicher Anordnungen, *ohne Zurücklegen*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definition: Hypergeometrische Verteilung

N Elemente, R davon sind "günstig"
n werden gezogen, r davon waren "günstig"

$$P_r = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$



$N = 9$

$R = 3$

Einleitung: Hypergeometrische Verteilung

Karlsruhe Institute of Technology

Definition: Kombinationen

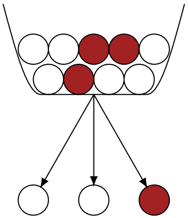
Anzahl möglicher Anordnungen, *ohne Zurücklegen*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Definition: Hypergeometrische Verteilung

N Elemente, R davon sind "günstig"
n werden gezogen, r davon waren "günstig"

$$P_r = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$



$$N = 9, \quad n = 3$$
$$R = 3, \quad r = 1$$

$$P_1 = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{15}{28} \approx 0.536$$

Aufgabe 1: Ergebnisraum & Hypergeometrische Verteilung

Bei einem Kartenspiel erhält ein Spieler 5 Karten aus einem Deck von 52 Karten (bestehend aus 13 Arten mit je 4 Farben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler:

a) mindestens ein Ass hat?

b) genau ein Ass hat?

c) mindestens zwei Karten der gleichen Art (“Paar”) hat?

$$P_r = \frac{\binom{R}{r}\binom{N-R}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$$

Einleitung: Ereignisse

Definition: Potenzmenge

Ereignisse sind Teilmengen von dem Ereignisraum Ω, wobei *alle möglichen Teilmengen* durch die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert werden

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\mathrm{A} : \mathrm{A} \subseteq \Omega\}$$

Ein *Zufallsexperiment* ist dann wie folgt beschrieben

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$$

Damit ist $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$, und $\omega \in \mathrm{A}$

Einleitung: Kombinatorik

Szenario: Bei N Elementen gibt es K Ziehungen, die Anzahl der Ereignisse wird durch folgende Betrachtungen ermittelt

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	$\tilde{\mathrm{V}}_N^{(K)} = N^K$	$\mathrm{V}_N^{(K)} = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge	$\tilde{\mathrm{C}}_N^{(K)} = \binom{N+K-1}{K}$	$\mathrm{C}_N^{(K)} = \binom{N}{K}$

Generell, sieht man Reihenfolgen als *Permutationen*

$$\left|\Pi_N\right| = N!$$

$$\left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{N!}{L!} \quad := \text{Bei } L \text{ nicht unterscheidbaren Elementen}$$

$$\left|\Pi_N^{(L_1,L_2,\dots,L_M)}\right| = \frac{N!}{L_1!L_2!\dots L_M!} \quad := \text{Bei mehreren einzeln ununterscheidbaren Elementen}$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

a) Die Ergebnismenge sei $\Omega = \{\mathrm{S}, \mathrm{K}, \mathrm{T}, \mathrm{P}\}$. Wie lautet die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$?

Erinnere, *Potenzmenge* $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge *aller Teilmengen*.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \dots\}$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

b) Für einen normalen Burger werden 3 der 4 möglichen Zutaten ausgewählt und in einer bestimmten Reihenfolge auf das Burgerbrötchen gelegt. Wie viele verschiedene normale Burger gibt es?

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	$\left\lvert\tilde{\mathrm{V}}_N^{(K)}\right\rvert = N^K$	$\left\lvert\mathrm{V}_N^{(K)}\right\rvert = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge	$\left\lvert\tilde{\mathrm{C}}_N^{(K)}\right\rvert = \binom{N+K-1}{K}$	$\left\lvert\mathrm{C}_N^{(K)}\right\rvert = \binom{N}{K}$

$$|\Pi_N| = N!, \qquad \left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{N!}{L!}, \qquad \left|\Pi_N^{(L_1,L_2,\ldots,L_M)}\right| = \frac{N!}{L_1!L_2!\ldots L_M!}$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

c) Ein Burger „Spezial“ besteht ebenfalls aus 3 Zutaten. Jedoch können Tomate und Salat doppelt vorkommen. Wie viele verschiedene Burger „Spezial“ gibt es?

	Mit Zurücklegen		Ohne Zurücklegen	
Mit Reihenfolge	$\tilde{\mathrm{V}}_N^{(K)}$	$= N^K$	$\mathrm{V}_N^{(K)}$	$= \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge	$\tilde{\mathrm{C}}_N^{(K)}$	$= \binom{N+K-1}{K}$	$\mathrm{C}_N^{(K)}$	$= \binom{N}{K}$

$$|\Pi_N| = N!, \qquad \left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{N!}{L!}, \qquad \left|\Pi_N^{(L_1,L_2,\dots,L_M)}\right| = \frac{N!}{L_1!L_2!\dots L_M!}$$

Aufgabe 2: Variationen & Permutationen

Ein Burgerrestaurant bietet verschiedene Burger mit den Zutaten Salat (S), Käse (K), Tomate (T) und Patty (P) an. Diese werden zufällig für die Zubereitung eines Burgers ausgewählt.

d) Der Burger „Jumbo“ enthält die folgende Menge an Zutaten: $\{\mathrm{S}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{P}, \mathrm{P}, \mathrm{P}\}$ die alle verwendet werden. Wie viele mögliche Belegungen des Burgers „Jumbo“ gibt es?

	Mit Zurücklegen		Ohne Zurücklegen	
Mit Reihenfolge	$\left\|\tilde{\mathrm{V}}_N^{(K)}\right\|$	$= N^K$	$\left\|\mathrm{V}_N^{(K)}\right\|$	$= \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge	$\left\|\tilde{\mathrm{C}}_N^{(K)}\right\|$	$= \binom{N+K-1}{K}$	$\left\|\mathrm{C}_N^{(K)}\right\|$	$= \binom{N}{K}$

$$|\Pi_N| = N!, \qquad \left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{N!}{L!}, \qquad \left|\Pi_N^{(L_1, L_2, \ldots, L_M)}\right| = \frac{N!}{L_1! L_2! \ldots L_M!}$$

Zusammenfassung

Lernziele

- Ergebnisraum Ω
- Wahrscheinlichkeit nach Laplace $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
- Rechnen mit Mengen $P(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$
- Hypergeometrische Verteilung
- Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathrm{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$
- Kombinatorik (*Variation*, *Kombination*, *Permutation*)

	Mit Zurücklegen	Ohne Zurücklegen
Mit Reihenfolge	$\left\|\tilde{\mathrm{V}}_N^{(K)}\right\| = N^K$	$\left\|\mathrm{V}_N^{(K)}\right\| = \frac{N!}{(N-K)!}$
Ohne Reihenfolge	$\left\|\tilde{\mathrm{C}}_N^{(K)}\right\| = \binom{N+K-1}{K}$	$\left\|\mathrm{C}_N^{(K)}\right\| = \binom{N}{K}$

$$|\Pi_N| = N!, \qquad \left|\Pi_N^{(L)}\right| = \frac{N!}{L!}, \qquad \left|\Pi_N^{(L_1, L_2, \ldots, L_M)}\right| = \frac{N!}{L_1! L_2! \ldots L_M!}$$