Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Industrielle Informationstechnik

IIIT

Signale und Systeme

Vorlesung 1: Einleitung, zeitkontinuierliche Signale

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

Inhalt

Organisatorisches

Vorlesungsunterlagen und weitere Informationen (z.B. zur Klausur)

- ILIAS (Passwort "SuS25-26") $\rightarrow$ `https://ilias.studium.kit.edu/goto.php/crs/2763754`
- Vorlesungshomepage $\rightarrow$ `https://www.iiit.kit.edu/sus.php`
- Werde versuchen, eigene Vorlesungen aufzunehmen (ohne Garantie)

Termine

- I.d.R. Montags und Freitags Vorlesung, Dienstags Übung
- Kann wechseln, bitte Homepage und Zeitplan auf ILIAS beachten

Workshop

- Der Workshop findet im Sommersemester statt
- Für Studierende im Bachelor ETIT/MIT/MT Pflicht
- Mehr Infos: `https://www.iiit.kit.edu/weui.php`

Team

Vorlesungen

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls
sander.wahls@kit.edu

Prof. h.c. Dr.-Ing. Mathias Kluwe
mathias.kluwe@kit.edu

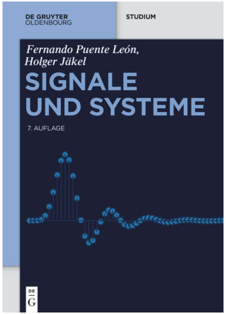
Übungen

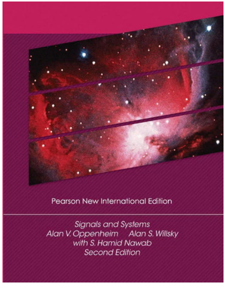
Dr. rer. nat. Hamza Gardi
hamza.gardi@kit.edu

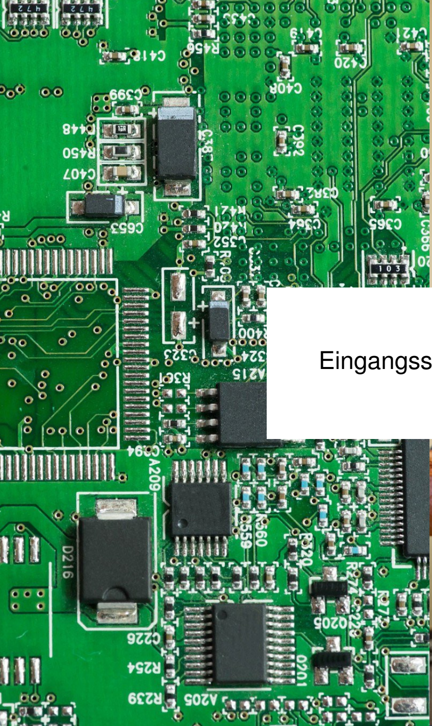
M.Sc. Jochen Illerhaus
jochen.illerhaus@kit.edu

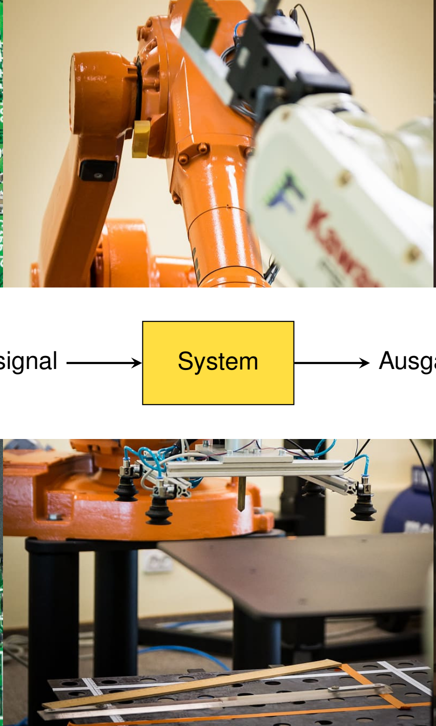
Literatur

- Die meisten Inhalte sind im Buch „Signale und Systeme“ von Puente León und Jäkel (De Gruyter, 7. Auflage, 2019) zu finden (gratis im KIT-Intranet)
- Die Vorlesung folgt allerdings z.Z. oft „Signals and Systems“ von Oppenheim, Willsky und Nawab (Pearson New International Ed., 2013)
- Andere empfehlenswerte, frei verfügbare Texte:
  - „Foundations of Signal Processing“ von Vetterli, Kovačević und Goyal (2014)
    `https://www.fourierandwavelets.org/`
  - „Signals and Systems“ by Ulaby and Yagle (2nd ed.)
    `https://ss2-2e.eecs.umich.edu/`
  - „Signals and Systems“ by Adams (ed. 5.0)
    `https://www.ece.uvic.ca/~frodo/sigsysbook/`









Eingangssignal → **System** → Ausgangssignal

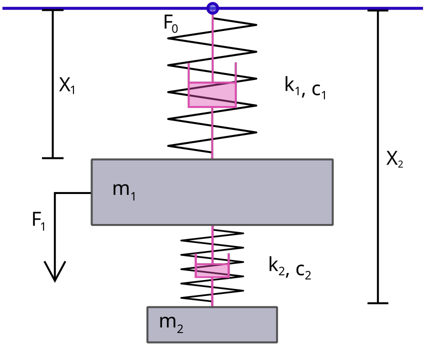
Bildquelle(n): [3, 4, 5]

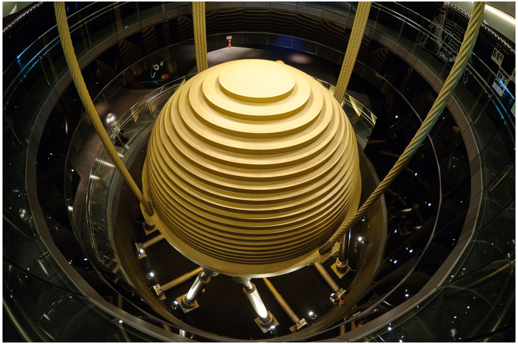
Signale und Systeme

- **Abstraktion:** Systeme verarbeiten Signale
- Enorm viele Anwendungsgebiete:
  - Elektronik
  - Mechanik
  - Medizintechnik
  - Strömungsmechanik
  - Akustik
  - Photonik
  - Wirtschaft
  - ...
- Mathematisch gesehen können verschiedenste Systeme identisch sein
- In diesem Kurs lernen Sie, Signale und Systeme mathematisch zu beschreiben, zu analysieren und zu entwerfen

(Tatsächlich konzentrieren wir uns auf die verbreiteste Klasse, sogenannte linear zeitinvariante Systeme.)

Beispiel: Abgestimmte Massendämpfer





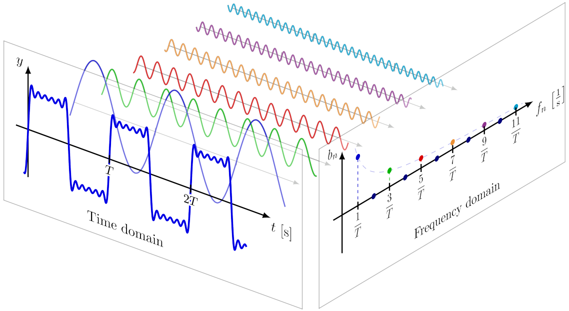
- Gleiches mathematisches Modell auch für Dämpfer in Autos, Brücken, elektrische Oberleitungen ... aber auch komplett andere Anwendungen
- Daher befassen wir uns hauptsächlich mit den mathematischen Modellen

Bildquelle(n): [6, 7, 8]

Grundlegender Ansatz

Der Ansatz zum Umgang mit Systemen ist in dieser Vorlesung immer gleich:

1. Systeme reagieren auf bestimmte „Eigensignale“ besonders einfach
2. Es reicht, die Reaktion des Systems auf diese Eigensignale zu kennen
3. Allgemeine Signale zerlegen wir in Eigensignale mit „Transformationen“



Bildquelle(n): [9]

Kursinhalte

1. Signale (zeitkontinuierlich und -diskret)
   - Prototypische Signale
   - Eigenschaften
   - Signalräume
   - Transformationen
2. Systeme (zeitkontinuierlich und -diskret)
   - Eigenschaften
   - Beschreibung im Zeitbereich
   - Beschreibung im Frequenzbereich
   - Beschreibung im Laplacebereich
3. Analyse und Entwurf von Systemen (zeitkontinuierlich und -diskret)
4. Signalabtastung und -interpolation
5. Einige mathematische Grundlagen, insb. aus der komplexen Analysis

Signale

Signale beschreiben zeitlich veränderliche Größen (i.a. komplex-wertig). Mathematisch gesehen ist ein Signal $x = x(t)$ eine Funktion der Form

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \text{(zeitkontinuierlich)} \quad \text{oder} \quad x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \quad \text{(zeitdiskret)}$$

$\mathbb{R}$ = reele Zahlen
$\mathbb{Z}$ = ganze Zahlen
$\mathbb{C}$= komplexe Zahlen

- Wir betrachten zunächst zeitkontinuierliche Signale
- „x" steht immer für das gesamte Signal, während „$x(t)$" sowohl für das gesamte Signal als auch für den Signalwert zur Zeit t stehen kann
- Es gibt allgemeinere Definitionen von Signalen (z.B. muss t nicht die Zeit sein, es kann mehrere Variablen oder Werte geben, ...)

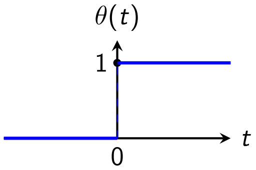
Beispiele

- $x(t)$ = gemessene Temperatur zur Zeit t
- $x(t)$ = gemessene Spannung eines elektrischen Schaltkreises zur Zeit t
- $x(t)$ = gemessene Auslenkung eines Masse-Feder-Dämpfers zur Zeit t
- $x(t)$ = gemessener Blutdruck am Finger zur Zeit t

Prototypische Signale
Einheitssprung, Rechteck und Dreieck

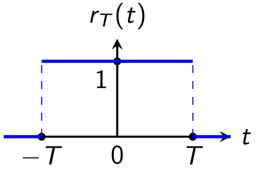
Der Einheitssprung ist gegeben durch

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



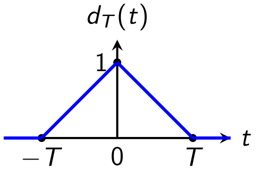
Das Rechtecksignal der Breite $2T$ ist gegeben durch

$$r_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Das Dreieckssignal der Breite $2T$ ist gegeben durch

$$d_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & \text{falls } |t| \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Prototypische Signale
Harmonische Schwingung

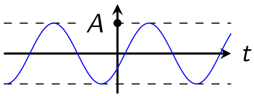
Eine harmonische Schwingung ist ein Signal der Form

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi).$$

Dabei bezeichnet

- $A \geq 0$ die Amplitude,
- $\omega \in \mathbb{R}$ die Kreisfrequenz und
- $\phi \in \mathbb{R}$ die Phase.

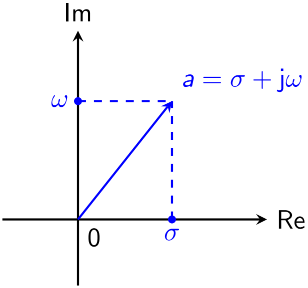
Die übliche Frequenz f erhält man aus der Beziehung $\omega = 2\pi f$.



- Frequenzänderungen sorgen für mehr oder weniger Schwingungen per Zeiteinheit
- Phasenänderungen verschieben das Signal nach links oder rechts

Komplexe Zahlen

Eine kurze Wiederholung...

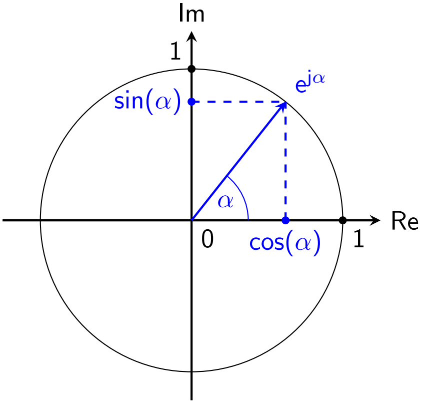


Eine komplexe Zahl ist eine Zahl der Form

$$a = \sigma + j\omega,$$

wobei $\sigma \in \mathbb{R}$ der Realteil, $\omega \in \mathbb{R}$ der Imaginärteil und j die imaginäre Einheit ist, welche $j^2 = -1$ erfüllt. Wir schreiben auch $\sigma = \mathrm{Re}(a)$ und $\omega = \mathrm{Im}(a)$.

Komplexe Zahlen
Eulersche Formel

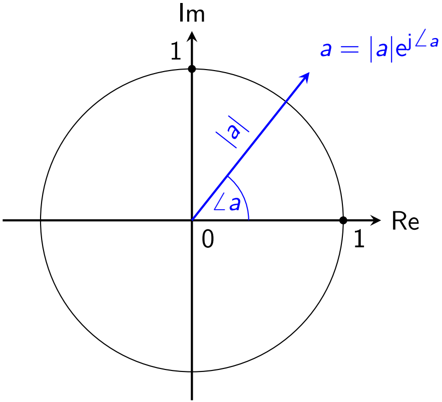


Eulersche Formel

Es bezeichne e die Eulersche Zahl. Für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{j}\sin(\alpha).$$

Komplexe Zahlen
Polardarstellung



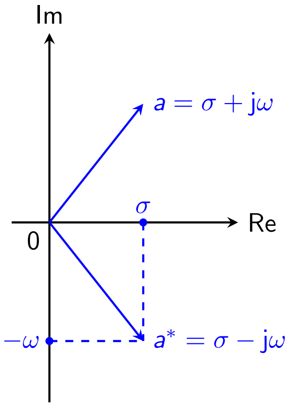
Die Polardarstellung einer komplexen Zahl $a = \sigma + j\omega$ ist

$$a = |a|e^{j\angle a},$$

wobei $|a| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ der Betrag ist. Die Phase $\angle a$ bezeichnet den eingezeichneten Winkel im Bogenmaß (d.h. $2\pi = 360°$).

Die Phase ist eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π.

Komplexe Zahlen
Komplexe Konjugation



Die zu einer komplexen Zahl $a = \sigma + \mathrm{j}\omega$ konjugierte Zahl ist

$$a^* = \sigma - \mathrm{j}\omega = |a|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle a}.$$

Es gilt $aa^* = |a|^2$ für jede komplexe Zahl a.

Es gilt $\mathrm{Re}(a) = \frac{1}{2}(a + a^*)$ und $\mathrm{Im}(a) = \frac{1}{2\mathrm{j}}(a - a^*)$ für jede komplexe Zahl a.

→ Anschrieb 1.1

Prototypische Signale
Komplexe Exponentialsignale

Ein komplexes Exponentialsignal ist gegeben durch

$$x(t) = A\mathrm{e}^{at}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad A > 0$$

Jedes komplexe Exponentialsignal kann man in der Form

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\sigma t}[\cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)]$$

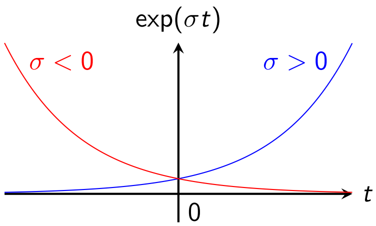
schreiben, wobei σ der Realteil und ω der Imaginärteil von a ist.

- Komplexe Exponentialsignale sind wichtige Grundbausteine
- Betrachten wir zwei Spezialfälle ...

→ Anschrieb 1.2

Prototypische Signale

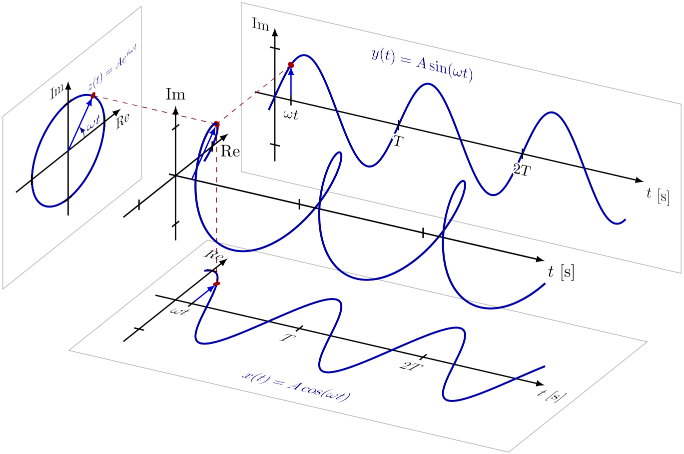
Komplexe Exponentialsignale mit *a* reell



Für $a = \sigma$ reell beschreibt das komplexe Exponentialsignal $x(t) = Ae^{at}$ eine reelle exponentiell wachsende ($\sigma > 0$) bzw. fallende ($\sigma < 0$) Funktion:

$$x(t) = Ae^{\sigma t}$$

Prototypische Signale
Komplexe Exponentialsignale mit *a* imaginär



Falls $a = \mathrm{j}\omega$ imaginär ist, so beschreibt x eine komplexe Schwingung:

$$x(t) = Ae^{\mathrm{j}\omega t} = A[\cos(\omega t) + \mathrm{j}\sin(\omega t)]$$

Dies folgt direkt aus der Eulerschen Formel...

Eigenschaften von zeitkontinuierlichen Signalen

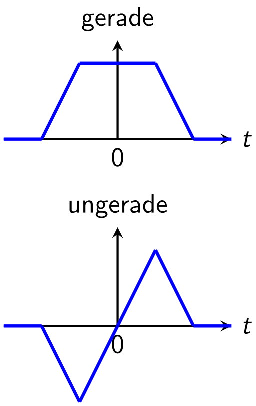
Gerade und ungerade Signale

Ein zeitkontinuierliches Signal x ist

- gerade, falls $x(-t) = x(t)$ und
- ungerade, falls $x(-t) = -x(t)$.

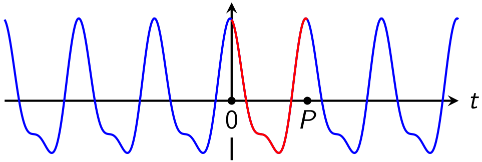
Jedes Signal x kann in einen geraden und einen ungeraden Teil zerlegt werden:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]}_{\text{ungerade}}.$$



→ Anschrieb 1.3

Eigenschaften von zeitkontinuierlichen Signalen
Periodische Signale



Ein zeitkontinuierliches Signal x ist periodisch mit Periode $P > 0$, falls

$$x(t+P) = x(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Das kleinstmögliche P ist die Fundamentalperiode eines periodisches Signals.

Falls die Periode beliebig klein gewählt werden kann, so ist die Fundamentalperiode gleich Null.

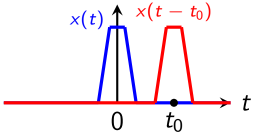
Operationen auf zeitkontinuierlichen Signalen

Das Signal $y(t) = x(t - t_0)$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$ fest entspricht einer Zeitverschiebung.

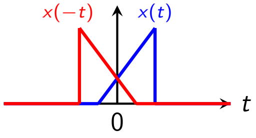
Das Signal $y(t) = x(-t)$ entspricht einer Zeitumkehr.

Das Signal $y(t) = x(at)$, $a > 0$ entspricht einer Zeitstreckung bzw. -stauchung.

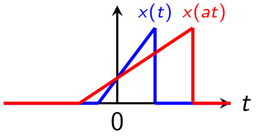
Zeitverschiebung



Zeitumkehr



Zeitstreckung: $a < 1$



Literaturverzeichnis I

[1] De Gruyter, “Signale und Systeme,” https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110626322/html, accessed: 2024-13-24.

[2] P. International, “Signals and Systems,” https://www.pearson.com/en-gb/subject-catalog/p/signals-and-systems-pearson-new-international-edition/P200000005151/9781292025902, accessed: 2024-13-24.

[3] S. Nandi, “Improving Quality With Proper Printed Circuit Board Design,” https://technofaq.org/posts/2019/10/improving-quality-with-proper-printed-circuit-board-design/ (CC BY-NC-SA 4.0), Oct. 2019, accessed: 2024-13-24.

[4] https://www.piqsels.com/en/public-domain-photo-jyovb, accessed: 2024-13-24.

Literaturverzeichnis II

[5] L. Nescolarde, E. Roca, P. Bogonez–Franco, J. Hernandez–Hermoso, A. Bayes–Genis, and J. Ara, “Relationship between bioimpedance vector displacement and renal function after a marathon in non-elite runners,” *Frontiers in physiology*, vol. 11, p. 352, 2020.

[6] Rswarbrick, “File:Spring-mass-damper system.svg - Wikimedia Commons, the free media repository,” https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Spring%E2%80%93mass%E2%80%93damper_system.svg&oldid=682398672 (GNU FDL), 2008, [Online; accessed 13-October-2024].

[7] Sinsyuan, “File:Taipei 101 from Xiangshan 20240729.jpg - Wikimedia Commons, the free media repository,” https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Taipei_101_from_Xiangshan_20240729.jpg&oldid=934557099 (CC BY-SA 4.0), 2024, [Online; accessed 13-October-2024].

Literaturverzeichnis III

[8] A. du Plessis, “File:Taipei 101 Tuned Mass Damper 2010.jpg - Wikimedia Commons, the free media repository,” https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper_2010.jpg&oldid=489344551 (CC BY 3.0), 2010, [Online; accessed 13-October-2024].

[9] I. Neutelings, “Fourier series & synthesis,” https://tikz.net/fourier_series/ (CC BY-NC-SA 4.0), accessed: 2024-13-24.

[10] ——, “Complex plane & oscillator,” https://tikz.net/fourier_series/ (CC BY-NC-SA 4.0), accessed: 2024-13-24.