

Tunneleffekt und Schrödingergleichung in 3D

3. Übung Optik und Festkörperelektronik

Lichttechnisches Institut (LTI)

Wintersemester 2025

Nils Rosemann

Terminübersicht

Tag/Monat	Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	
1		Allerheiligen	Tutorium 3, FE	Neujahrstag		Wochenende
2						Feiertag
3	Tag d. D. Einheit		Ü5 (LTI-5)			Vorlesung
4			VL12 (LTI-12), VL13 (LTI-13)		VL26 (IAM-3)	Übung
5		Ü1 (LTI-1)			VL27 (IAM-4), Ü11 (IAM-1)	Tutorium
6		VL4 (LTI-4), Ü2 (LTI-1)				Vorlesungsfrei
7				VL18 (LTI-18)		
8			Tutorium 4, FE	VL19 (LTI-19), Frei		
9					Tutorium 9, IAM	
10		Tutorium 1, FE	VL14 (LTI-14)			
11			VL15 (LTI-15), Ü6 (LTI-6)		VL28 (IAM-5)	
12		VL5 (LTI-5)		Tutorium 6, FE	VL29 (IAM-6), Ü12 (IAM-2)	
13		VL6 (LTI-6), VL7 (LTI-7)				
14				VL20 (LTI-20)		
15			Tutorium 5, FE	VL21 (LTI-21), Ü8 (LTI-8)		
16					Tutorium 10, IAM	
17		Tutorium 2, FE	VL16 (LTI-16)			
18			VL17 (LTI-17), Ü7 (LTI-7)		VL30 (IAM-7)	
19		VL8 (LTI-8)		Tutorium 7, BdE	VL31 (IAM-8), Ü13 (IAM-3)	
20		VL9 (LTI-9), Ü3 (LTI-3)				
21				VL22 (LTI-22)	Vorlesungsende	
22				VL23 (LTI-23), Ü9 (LTI-9)		
23						
24			Winterferien			
25			1. Weihnachtsfeiertag			
26		VL10 (LTI-10)	2. Weihnachtsfeiertag	Tutorium 8, BdE		
27	Vorlesungsstart	VL11 (LTI-11), Ü4 (LTI-4)				
28				VL24 (IAM-1)		
29	VL1 (LTI-1)			VL25 (IAM-2), Ü10 (LTI-10)		
30	VL2 (LTI-2), VL3 (LTI-3)					
31						
Mittwochstermine: 08:00 - 09:30, 30.10 Nachrichtentechnik Hörsaal (NTI)				Ausgabe:		
Donnerstagstermine: 09:45 - 11:15, 30.35 Hochspannungstechnikhörsaal				Ü/T wird in ILIAS veröffentlicht		
Donnerstagstermine: 11:30 - 13:00, 11.10 Engelbert-Arnold Hörsaal (EAS)				Stand: 14.10.2025		

Wiederholung Operatoren und Erwartungswert

■ Bekannte Operatoren:

$$\hat{x} = x$$

Ort

$$\hat{p} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Impuls

$$\overbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}^{W_{\text{kin}}} + \overbrace{V(x, t)}^{W_{\text{pot}}}$$

Energie „Hamiltonian“

■ Erwartungswert eines Operators

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\int \psi^*(x, t) \hat{A} \psi(x, t) dx}{\int \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx} \longrightarrow \text{Normierung}$$

Wdh. Normierung

■ Normierte Wellenfunktion

$$\psi_n(x, t) = \frac{\psi(x, t)}{\sqrt{\int \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx}}$$

■ Vereinfachter Erwartungswert

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi_n^*(x, t) \hat{A} \psi_n(x, t) dx$$

Wdh. Aufenthaltswahrscheinlichkeit

- Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit:

$$\rho(x, t) = \psi^*(x, t)\psi(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

$$\int \rho_n(x, t) dx = \int \psi_n^*(x, t)\psi(x, t) dx = 1$$

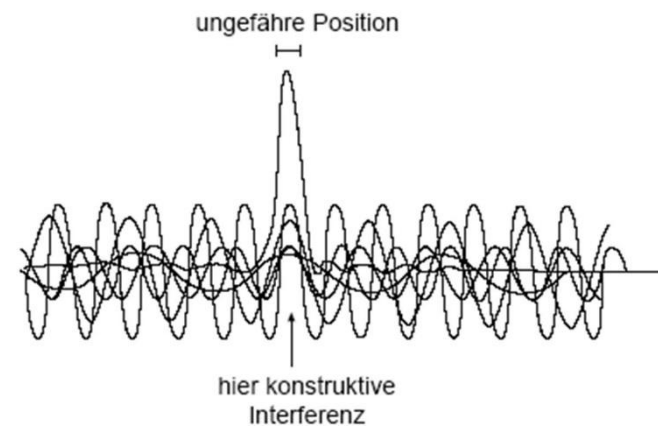
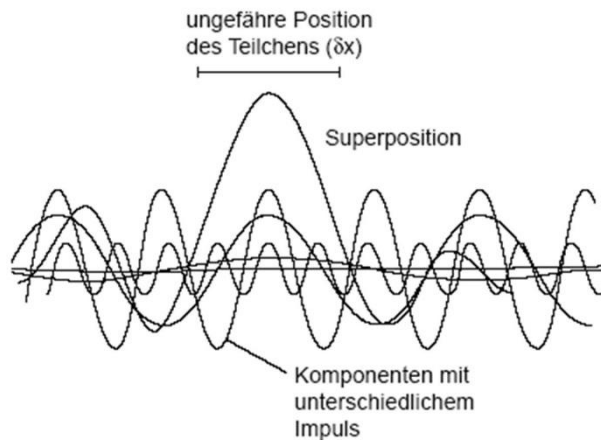
- Ergibt ρ über Ort integriert eins, gilt:
Im betrachteten Raum muss das Teilchen existieren
- Eigentlicher Zustand

Wdh. Wellenpakete

■ Superposition ebener Wellen für lokalisiertes Teilchen

■ Viele verschiedene Frequenzen

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{j(kx - \omega_k t)} dk$$

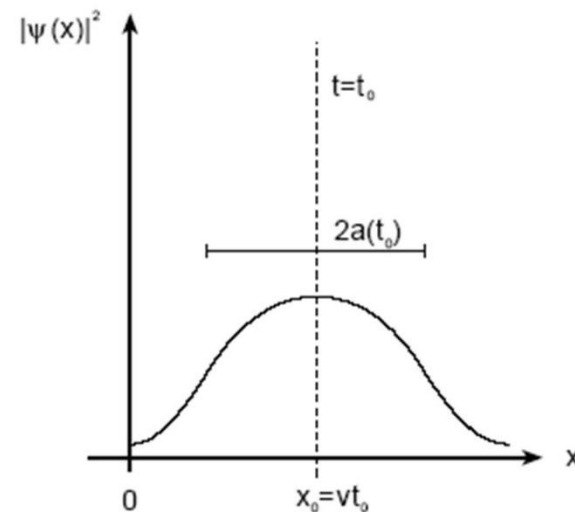
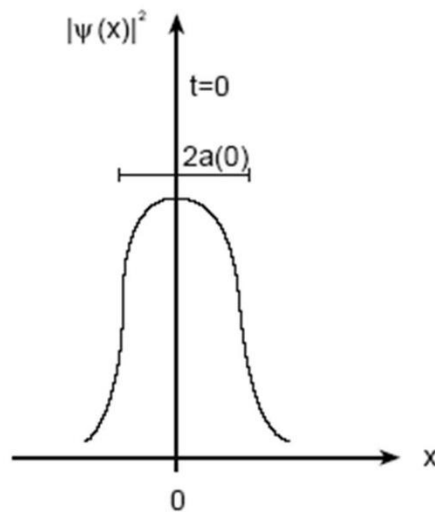


■ Fouriertransformation: Impulsraum \longleftrightarrow Ortsraum

<https://phet.colorado.edu/de/simulation/fourier>

Wdh. Dispersion von Wellenpaketen

- Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit
- Die unterschiedlichen monochromatischen Wellen bewegen sich mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit fort
- Folge: Wellenpakete können zerfließen



Wdh. Dispersion

- Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Wellenpaketes heißt Gruppengeschwindigkeit
- Gruppengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit

- Allgemein:

$$v_G = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$$

$$v_{Ph} = \frac{\omega(k)}{k}$$

- Photonen im Vakuum:

$$v_G = c$$

$$v_{Ph} = c$$

- Freie Elektronen im Vakuum:

$$v_G = \frac{\hbar k}{m}$$

$$v_{Ph} = \frac{\hbar k}{2m}$$

https://www.youtube.com/watch?annotation_id=annotation_2326273631&feature=iv&src_vid=v9DPzMoWpc0&v=tIM9vq-bepA
http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/1/pc/pc_11/pc_11_01/pc_11_01_01.vlu/Page/vsc/de/ch/1/pc/pc_11/pc_11_01/pc_11_01_07.vscml.html

Wdh. Schrödingergleichung

■ Zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right) \psi(x, t)$$

■ Zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$W \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

Wdh. unendlicher Potentialtopf

■ Unendlicher Potentialtopf

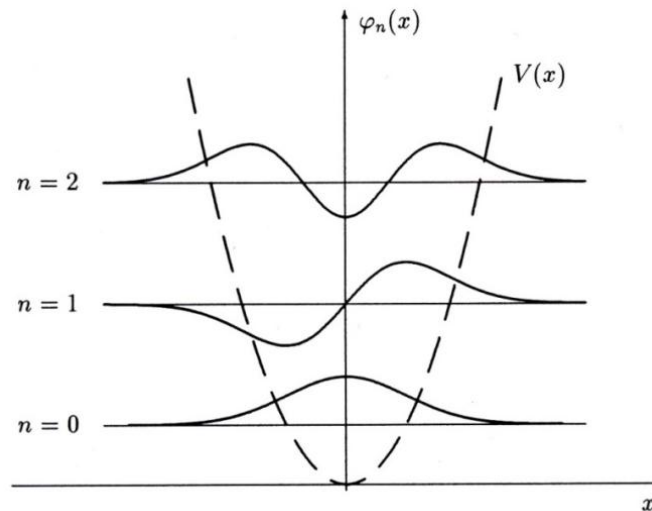
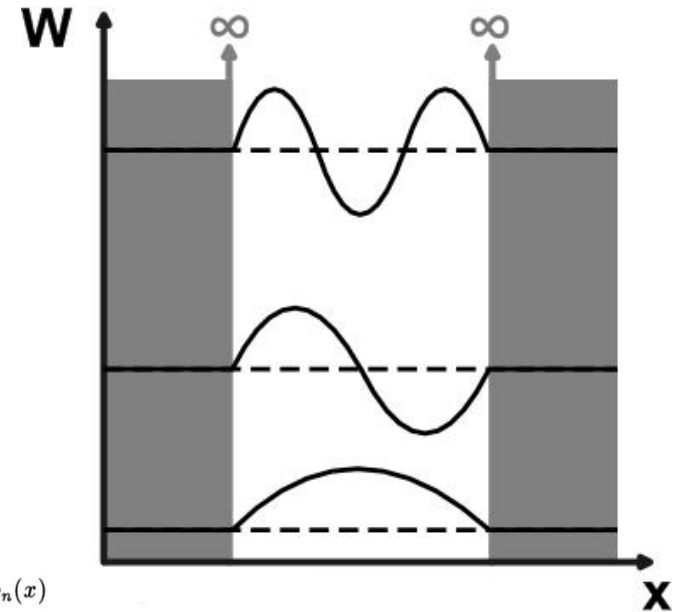
$$W_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2$$

$$W_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 > 0$$

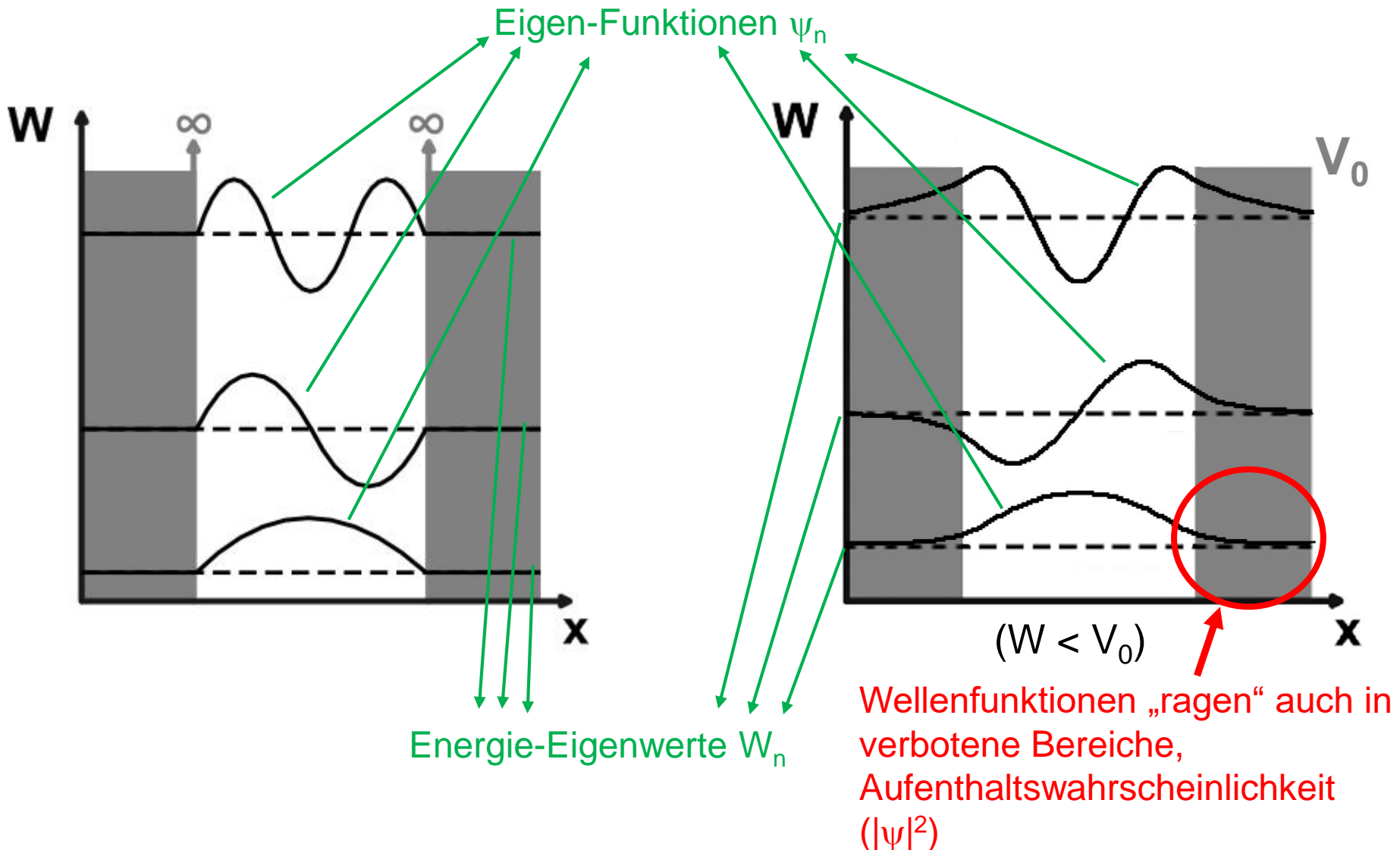
■ Harmonisches Potential

$$W_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega > 0$$



Wdh. endlicher und unendlicher Quantenpotentialtopf



A1 Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

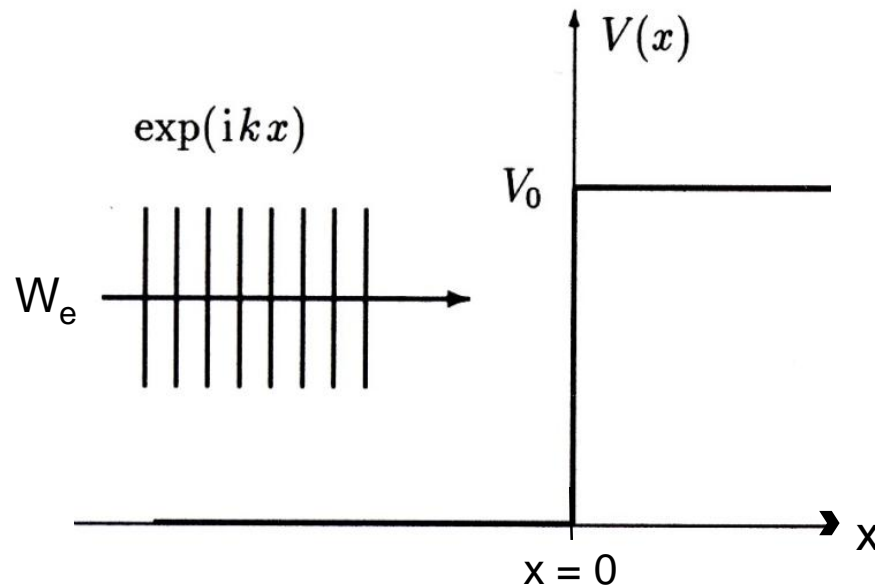
Betrachten Sie die Potentialstufe

$$V_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

Ein Elektron der Energie W_e laufe als Welle von links gegen diese Barriere. Betrachten Sie im Folgenden immer die beiden Fälle $W_e < V_0$ und $W_e > V_0$.

A1 a) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Skizzieren Sie das Potential



A1 b) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Bestimmen Sie die Wellenzahl k des Elektrons in den Bereichen $x < 0$ und $x \geq 0$.

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \Psi(x) = W \Psi(x)$$

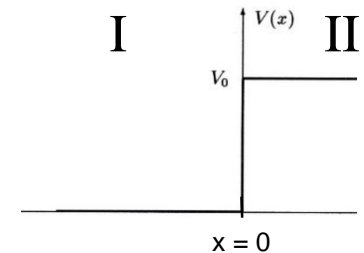
I $\Psi(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$ für: $V(x) = 0$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$$

II $\Psi(x) = C e^{ik_2 x}$ $V(x) = V_0$

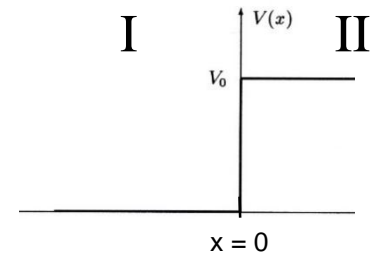
$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(W - V_0)}{\hbar^2}}$$

$$W > V_0 \rightarrow k_2 = \sqrt{2m \cdot \frac{(W - V_0)}{\hbar^2}}$$
$$W < V_0 \rightarrow k_2 = i \sqrt{2m \cdot \frac{(V_0 - W)}{\hbar^2}} =: iq$$



A1 b) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Bestimmen Sie die Wellenzahl k des Elektrons in den Bereichen $x < 0$ und $x \geq 0$.



Zusammenfassung:

Bereich I: $V(x) = 0$, $k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$

Bereich II: $V(x) = V_0$, $k_2 = \sqrt{\frac{2m(W-V_0)}{\hbar^2}}$ Allgemein

für $W > V_0$: $k_2 = \sqrt{\frac{2m(W-V_0)}{\hbar^2}}$

für $W < V_0$: $k_2 = i\sqrt{\frac{2m(V_0-W)}{\hbar^2}} = iq$

A1 c) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Nehmen Sie eine von links einlaufende Welle $\psi_{\text{ein}}(x) = e^{ikx}$ an.
Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionsamplituden r und t in Abhängigkeit der Wellenzahlen.

■ Allgemein: $\psi_I(x) = e^{ik_I x} + r e^{-ik_I x}$ $\psi_{II}(x) = t e^{ik_{II} x}$

■ Fall 1: $W > V_0$

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$$

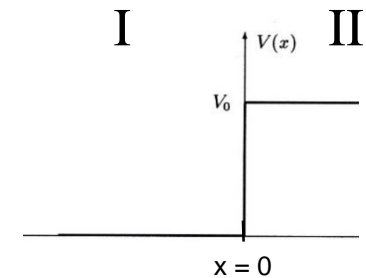
$$\Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0)$$

$$1 + r = t$$

$$ik_1 - ik_1 r = ik_2 t$$

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$t = 1 + r = 1 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$



A1 c) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Nehmen Sie eine von links einlaufende Welle $\psi_{\text{ein}}(x) = e^{ikx}$ an.
Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionsamplituden r und t in Abhängigkeit der Wellenzahlen.

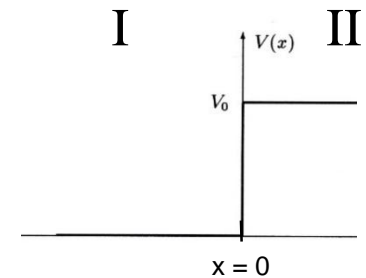
■ Allgemein: $\psi_I(x) = e^{ik_I x} + r e^{-ik_I x}$ $\psi_{II}(x) = t e^{ik_{II} x}$

■ Fall 2: $W < V_0$ $\rightarrow = t e^{-qx}$

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \qquad \Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0)$$

$$1 + r = t \qquad ik_1 + ik_1 r = -qt$$

$$r = \frac{ik_1 + q}{ik_1 - q} \qquad t = \frac{2ik_1}{ik_1 - q}$$



A1 d) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Durch $\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi)$ lässt sich eine Teilchenstromdichte definieren. Obwohl in der Aufgabenstellung nicht danach gefragt wurde, betrachten wir zunächst die quantenmechanische Kontinuitätsgleichung etwas genauer.

- Ansatz: Kontinuitätsgleichung (E-Dynamik) – Erhaltungssatz für elektrische Ladung

Ladungsdichte

Stromdichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

- Teilchenanzahl: Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \psi^* \psi$ statt Ladungsdichte und \vec{j} aus Aufgabenstellung

$$\frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\hbar}{2im} (\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi) = 0$$

Keine Teilchen werden erzeugt oder vernichtet

A1 d) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

- Aus Gründen der Übersichtlichkeit schreiben wir ψ statt $\psi(x, t)$ und V statt $V(x, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \right) \psi$$

- 1. Schritt: SGL für ψ mit ψ^* sowie SGL adjungieren und mit ψ multiplizieren

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}\psi \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar} \hat{H}^* \psi^* \quad (2)$$

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} \psi^* \hat{H} \psi \quad (1')$$

$$\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{-1}{i\hbar} \psi \hat{H}^* \psi^* \quad (2')$$

- 2. Schritt: $(1') + (2')$

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} (\psi^* \hat{H} \psi - \psi \hat{H}^* \psi^*)$$

- 3. Schritt: Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) + \frac{i}{\hbar} (\psi^* \hat{H} \psi - \psi \hat{H}^* \psi^*) = 0$$

A1 d) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

■ 4. Schritt: \hat{H} und \hat{H}^* einsetzen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \frac{i}{\hbar}(\psi^* \hat{H} \psi - \psi \hat{H}^* \psi^*) = 0$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V = \hat{H}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \frac{\hbar}{2im}(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0$$

■ 5. Schritt: erweitern und verallgemeinerte Produktregel anwenden

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \frac{\hbar}{2jm}(\psi^* \nabla^2 \psi + \nabla \psi \nabla \psi^* - \nabla \psi \nabla \psi^* - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \frac{\hbar}{2jm} \nabla(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

Teilchenstromdichte, besser
Wahrscheinlichkeitsstromdichte

„QM-Kontinuitätsgleichung“

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \operatorname{div} \frac{\hbar}{2jm}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0$$

A1 d) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Durch $\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi)$ lässt sich eine Teilchenstromdichte definieren. Berechnen Sie diese für die einlaufenden, reflektierten und transmittierten Teilchen und überprüfen Sie deren Einhaltung.

$$\text{Ansatz: } \psi_0(x) = e^{ik_1 x}, \psi_r(x) = r e^{-ik_1 x}, \psi_t(x) = t e^{ik_2 x}$$

$$J_0 = \frac{\hbar}{2im} (e^{-ik_1 x} (ik_1 e^{-ik_1 x}) - (ik_1 e^{-ik_1 x}) e^{-ik_1 x})$$

$$= \frac{\hbar}{2im} (ik_1 + ik_1) = \frac{\hbar k_1}{m}$$

$$J_r = -\frac{\hbar k_1}{m} |r|^2$$

$$J_t = \frac{\hbar k_2}{m} |t|^2 \quad \text{für } V_0 < W_e$$

$$J_t = 0, \quad \text{da } \psi^* = \psi \quad \text{für } V_0 > W_e$$

A1 d) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt


- Einsetzen in $J_0 + J_r = J_t$ zeigt, dass der Teilchenstrom erhalten ist:

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

- Fall (1) $V_0 < W_e$:

$$\begin{aligned} J_0 + J_r - J_t &= \frac{\hbar k_1}{m} - \frac{\hbar k_1}{m} |r|^2 - \frac{\hbar k_2}{m} |t|^2 \\ &= \frac{\hbar}{m} \left(k_1 - k_1 \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 - k_2 \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

- Fall (2) $V_0 > W_e$:

$$\begin{aligned} J_0 + J_r - J_t &= \frac{\hbar k_1}{m} - \frac{\hbar k_1}{m} |r|^2 - 0 \\ &= \frac{\hbar k_1}{m} \left(1 - \left| \frac{ik_1 + q}{ik_1 - q} \right|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$


A1 e) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit einem „klassischen Elektron als Teilchen“.

Quantenmechanisch

Klassisch

Reflexion an Potentialstufe

Reflexion an Potentialstufe

kann in Potentialstufe eindringen
(Aufenthaltswahrscheinlichkeit nimmt
exponentiell mit Eindringtiefe ab)

kann nicht in Potentialstufe eindringen

auch oberhalb der Potentialstufe Reflexion

oberhalb der Potentialstufe keine Reflexion,
Teilchen würde durch das höhere Potential
nur langsamer werden

Ausbildung einer stehenden Welle vor der
Barriere aufgrund der Reflexion, auch wenn
 $V_0 < W$

Klassisch nicht erklärbar, wenn $V_0 < W$

A1 f) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Eine Elektronen-Welle mit der Energie 0,6 eV trifft eine unendliche dicke Potentialbarriere der Höhe 1,1 eV. Ist es wahrscheinlicher das Elektron im ersten Angström der Barriere zu finden oder weiter innerhalb der Barriere?

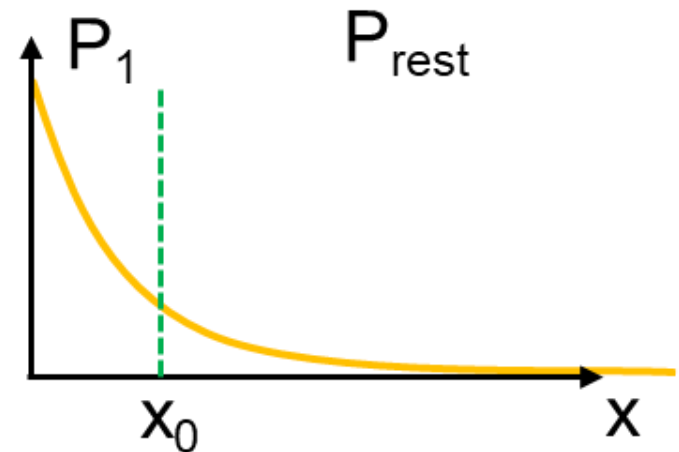
■ Ansatz: $\psi = te^{-qx}$ mit $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - W)}}{\hbar} = 3,62 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}$

$$1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$$

$$P_1 = \int_0^{x_0} |\Psi|^2 dx$$

$$P_{rest} = \int_{x_0}^{\infty} |\Psi|^2 dx$$

$$\rightarrow \frac{P_1}{P_{rest}}$$



A1 f) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Eine Elektronen-Welle mit der Energie 0,6 eV trifft eine unendliche dicke Potentialbarriere der Höhe 1,1 eV. Ist es wahrscheinlicher das Elektron im ersten Angström der Barriere zu finden oder weiter innerhalb der Barriere?

■ Ansatz: $\psi = te^{-qx}$

$$q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - W)}{\hbar^2}} = 3,62 \cdot 10^9 \frac{1}{m}$$

■ Wahrscheinlichkeiten

$$P_1 = \int_0^{x_0} |\psi|^2 dx = \int_0^{x_0} |t|^2 e^{-2qx} dx = |t|^2 \frac{1}{-2q} |e^{-2qx}|_0^{x_0} = \frac{|t|^2}{-2q} (e^{-2qx_0} - 1)$$

$$P_{Rest} = \int_{x_0}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{x_0}^{\infty} |t|^2 e^{-2qx} dx = |t|^2 \frac{1}{-2q} |e^{-2qx}|_{x_0}^{\infty} = \frac{|t|^2}{-2q} (-e^{-2qx_0})$$

$$\frac{P_1}{P_{rest}} = \frac{e^{-2qx_0} - 1}{-e^{-2qx_0}} = -1 + e^{2qx_0} = 1,06$$

A1 g) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

Sei nun $V_1(x) \begin{cases} 0 & : & x < 0 & \text{Bereich I} \\ V_0 & : & 0 \leq x \leq d & \text{Bereich II} \\ 0 & : & d < x & \text{Bereich III} \end{cases}$

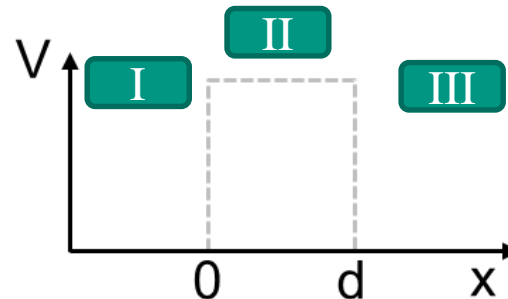
Was ändert sich gegenüber dem vorhergehenden Fall? Stellen Sie mit Hilfe geeigneter Randbedingungen ein Gleichungssystem auf.

■ Ansatz für $W < V_0$

$$\Psi_I(x) = e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}$$

$$\Psi_{II}(x) = Ce^{-qx} + De^{qx}$$

$$\Psi_{III}(x) = te^{jk_{III}x}$$



Randbedingungen:

1. $\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0)$

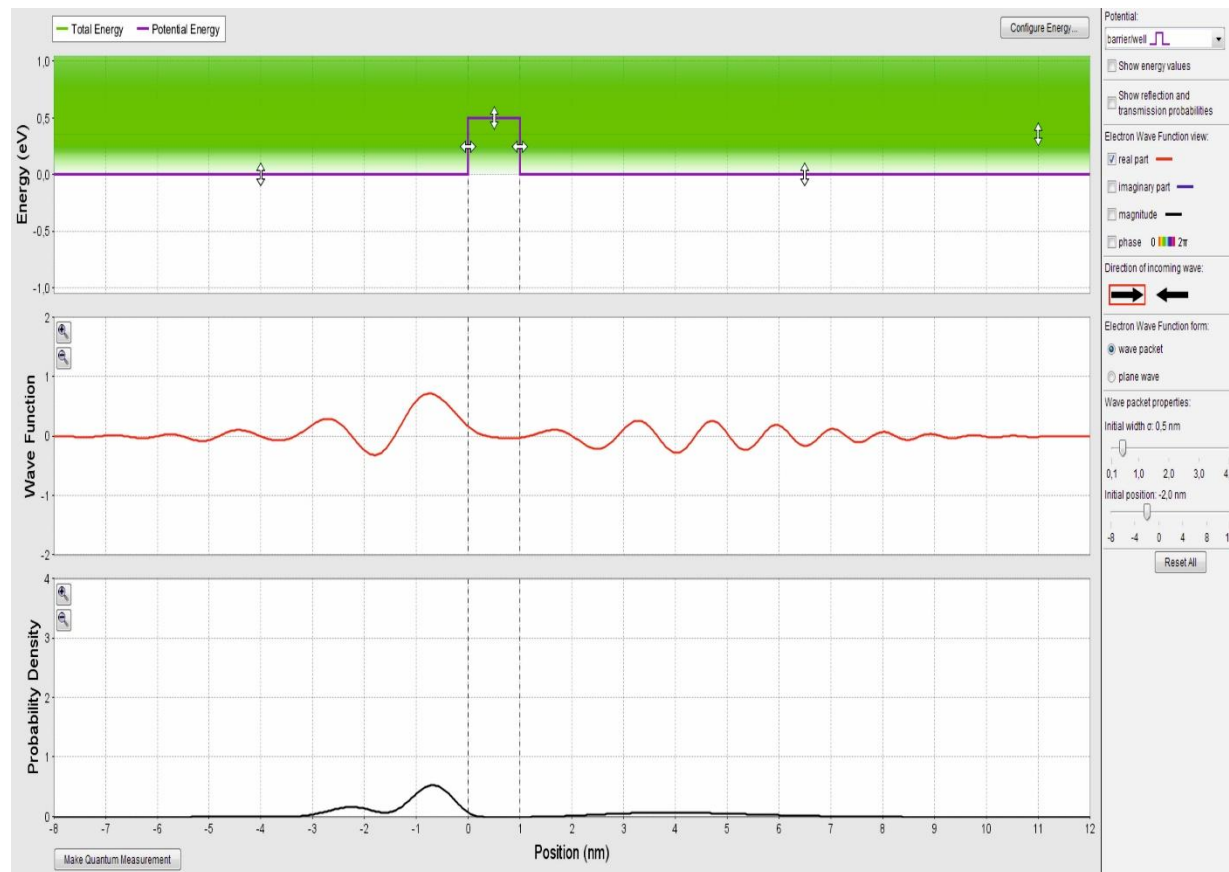
2. $\Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0)$

3. $\Psi_{II}(d) = \Psi_{III}(d)$

4. $\Psi'_{II}(d) = \Psi'_{III}(d)$

A1 g) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

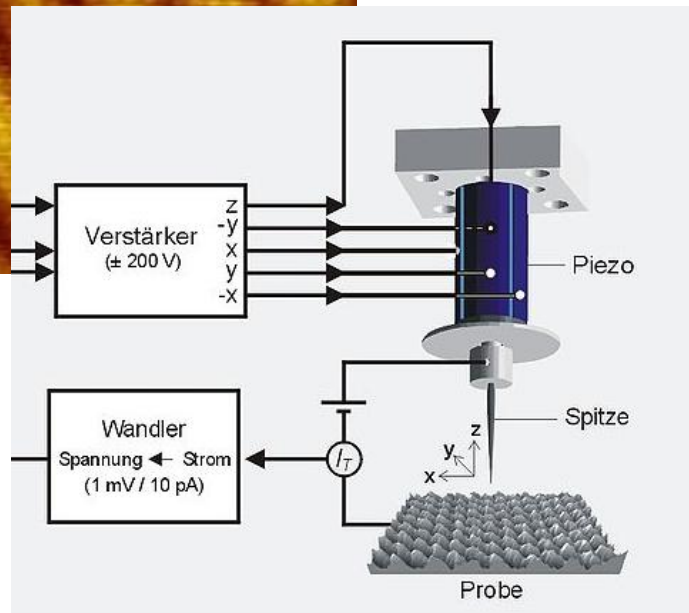
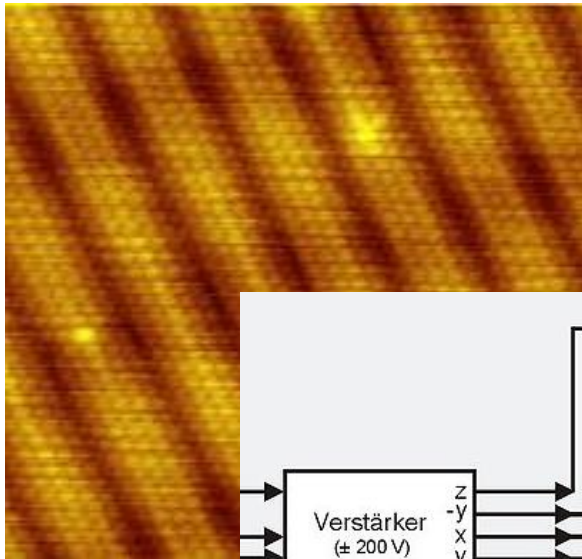
- Simulation zur Veranschaulichung
- <http://phet.colorado.edu/en/simulation/quantum-tunneling>



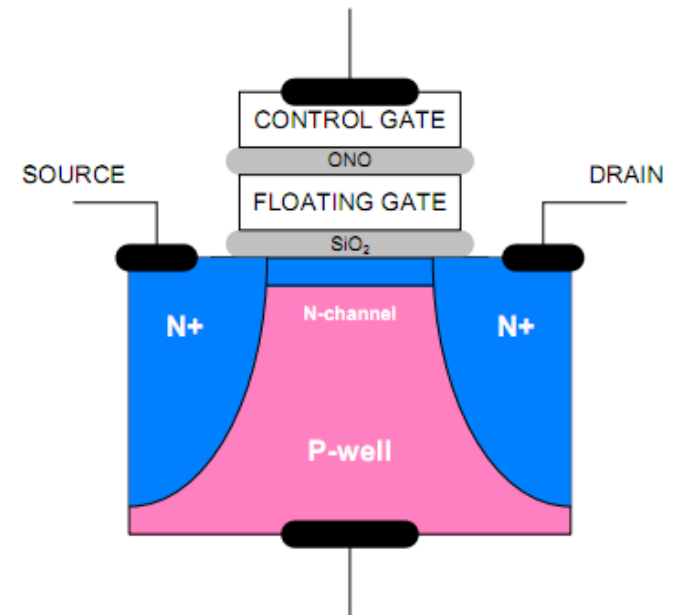
A1 g) Reflexion an Potentialstufe und Tunneleffekt

■ Anwendungen des Tunneleffekts

■ Rastertunnelmikroskop



■ Flash-Speicher



A2 a) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

Für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator sieht der Hamilton-Operator wie folgt aus:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_x^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 \hat{y}^2$$

mit den Ortskoordinaten x und y .

Stellen Sie die stationäre Schrödingergleichung für das Problem auf.

■ Stationäre Schrödingergleichung: $\hat{H}\psi = W\psi$

■ Impulsoperator:

Ortsoperator:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{y} = y$$

■ Es folgt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 \psi(x, y) + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \psi(x, y) = W\psi(x, y)$$

A2 b) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

Machen Sie einen Produktansatz der Form $\psi(x, y) = f(x)g(y)$ und zeigen Sie, wie sich die Gleichung aus a) mit Hilfe dieses Ansatzes lösen lässt.

- Ansatz in SGL einsetzen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x)g(y) + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 f(x)g(y) + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 f(x)g(y) = W f(x)g(y)$$

- Klammer auflösen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} g(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - \frac{\hbar^2}{2m} f(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 f(x)g(y) + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 f(x)g(y) = W f(x)g(y)$$

- Durch $f(x)g(y)$ teilen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{g(y)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) + \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 = W$$

A2 b) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

■ Separation der Variablen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 f(x) = W_x f(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 g(y) = W_y g(y)$$

A2 c) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

Wie sehen die Eigenenergien und Eigenfunktionen des zweidimensionalen Oszillators aus?

- Für den 1D-Oszillator aus Übung 2 galt: $W_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$

- Für den 2D-Oszillator galt die Zurückführung auf zwei 1D-Oszillatoren:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 f(x) = W_x f(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(y) + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 g(y) = W_y g(y)$$

- Überlagerung der Eigenenergien aus den Teillösungen:

$$W_n = W_{nx} + W_{ny} = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right)$$

A2 c) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

- Berechnung der Eigenfunktionen:
- Erinnerung 1D harmonischer Oszillator: Hermite'sche Polynome

$$\psi_n = \frac{c_n}{\sqrt{b}} H_n\left(\frac{x}{b}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right)$$

- Ansatz:

$\psi(x, y) = f(x)g(y)$ mit $f(x)$ und $g(y)$ als Lösungen des 1D-Oszillators

- In 2D folgt dann:

$$\psi(x, y) = f(x)g(y) = \frac{c_{nx}c_{ny}}{\sqrt{b_x b_y}} H_{n_x}\left(\frac{x}{b_x}\right) H_{n_y}\left(\frac{y}{b_y}\right) e^{-\left(\frac{x^2}{2b_x^2} + \frac{y^2}{2b_y^2}\right)}$$

mit

$$b_x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_x}}, \quad b_y = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_y}}$$

A2 d) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

Nun sei $\omega_x = \omega_y$. Erläutern Sie den Begriff „Entartung von Energieniveaus“ am Beispiel des zweidimensionalen Oszillators.

$$W_{n_x n_y} = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2} \right)$$

$$W_{1,2} = \hbar\omega \left(1 + 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = 4\hbar\omega \rightarrow \Psi_{1,2}(x, y)$$

$$W_{2,2} = \hbar\omega \left(2 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = 4\hbar\omega \rightarrow \Psi_{2,1}(x, y)$$

Identisches Ergebnis für unterschiedliche Quantenzahlen = Entartung!

A2 e) Harmonischer Oszillator in 2D und 3D

Stellen Sie den Ausdruck für den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in drei Dimensionen auf. Wie lauten hier die Energieeigenwerte?

■ Erinnerung 1D:
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 \hat{x}^2$$

$$W = W_x = \hbar \omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right)$$

■ Erinnerung 2D:
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 \hat{y}^2$$

$$W = W_x + W_y = \hbar \omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right)$$

■ Lösung 3D:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 \hat{y}^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 \hat{z}^2$$

$$W = W_x + W_y + W_z = \hbar \omega_x \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_y \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right)$$

Zusammenfassende Fragen

- Wie wird ein Elektron an einer Potentialstufe reflektiert und transmittiert?
- Was ist der Tunneleffekt, wie löse ich quantenmechanische Probleme zum Tunneleffekt und in welchen Anwendungen wird der Tunneleffekt ausgenutzt?
- Wie kann ich quantenmechanische 2D- und 3D-Probleme auf einfache 1D-Probleme übertragen?
- Wie wende ich den Separationsansatz an?