Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Industrielle Informationstechnik

Signale und Systeme

Vorlesung 4: Fourierreihen

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

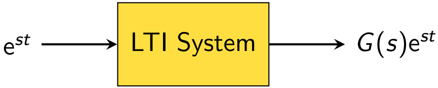
Inhalt

1. Definition der Fourierreihe

2. Konvergenz von Fourierreihen

3. Eigenschaften

Motivation
Komplexe Exponentialsignale sind Eigensignale von LTI Systemen



Ein LTI System reagiert auf ein Eingangssignal der Form

$$u(t) = \mathrm{e}^{st}, \quad s \in \mathbb{C}$$

mit einem Ausgangssignal der Form

$$y(t) = G(s)e^{st}, \quad G(s) \in \mathbb{C}.$$

- LTI Systeme reagieren auf $u(t) = \mathrm{e}^{st}$ also auf eine sehr einfache Weise
- Komplexe Exponentialsignale sind *Eigenfunktionen*
- Linearität $\Rightarrow$ Antwort auf lineare Überlagerungen ist ebenfalls einfach
- Daher ist es nützlich, Signale in komplexe Exponentialsignale zu zerlegen

$\longrightarrow$ Anschrieb 4.1

Komplexe Fourierreihen
Definition

Fourier (1768 - 1830)

Eine komplexe Fourierreihe ist ein Signal der Form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Es gilt $T > 0$ und $a_k \in \mathbb{C}$. Wir nennen ω_0 die Grundfrequenz.

Komplexe Fourierreihen sind periodisch mit Periode T.

- Fourier behauptete, jede periodische Funktion kann so dargestellt werden
- Das stimmt nicht ganz, aber für Signale im Ingenieursbereich meist schon

→ Anschrieb 4.2

Komplexe Fourierreihen
Illustration

https://youtu.be/LznjC4Lo7lE

Komplexe Fourierreihen
Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Die Koeffizienten einer Fourierreihe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$ lauten

$$a_n = \frac{1}{T}\langle x, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}\rangle = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t.$$

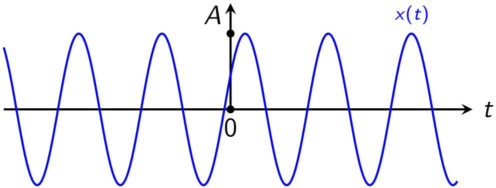
Falls $x \in L^1([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$, so existieren die Integrale für alle $k \in \mathbb{Z}$.

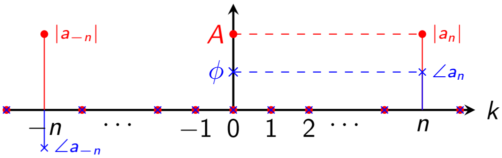
- Wir nutzen hier also, dass die $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$ orthogonal sind (gezeigt in VL 2)
- Da $x(t)$ periodisch mit Periode T ist, können wir anstatt über $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ auch über jedes andere Intervall der Form $[c, c+T]$ integrieren

→ Anschrieb 4.3

Beispiel

Harmonische Schwingung





Die harmonische Schwingung

$$x(t) = A\cos(n\omega_0 t + \phi), \qquad A \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \omega_0, \phi \in \mathbb{R}$$

hat die Fourierkoeffizienten

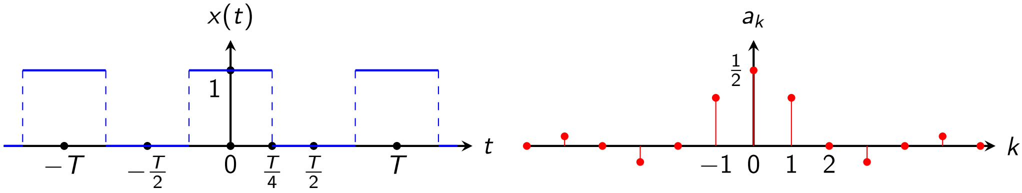
$$a_n = a_{-n}^* = \frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}, \quad a_k = 0 \text{ für } k \neq \pm n.$$

- Wir können die Amplitude und Phase einer harmonischen Schwingung mit Frequenz $\omega = n\omega_0$ also direkt aus dem Fourierkoeffizienten a_n ablesen!

$A = 2|a_n|$
$\phi = \angle a_n$

→ Anschrieb 4.4

Beispiel
Periodischer Rechteckpuls



Der T-periodische Rechteckpuls

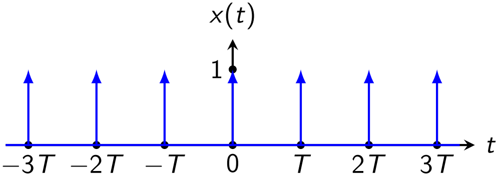
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{\frac{T}{4}}(t - nT)$$

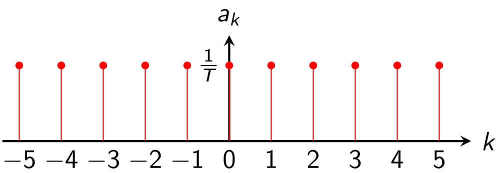
hat folgende Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_k = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{k\pi}, \quad k \neq 0.$$

$\longrightarrow$ Anschrieb 4.5

Beispiel
Dirac-Kamm





Der Dirac-Kamm

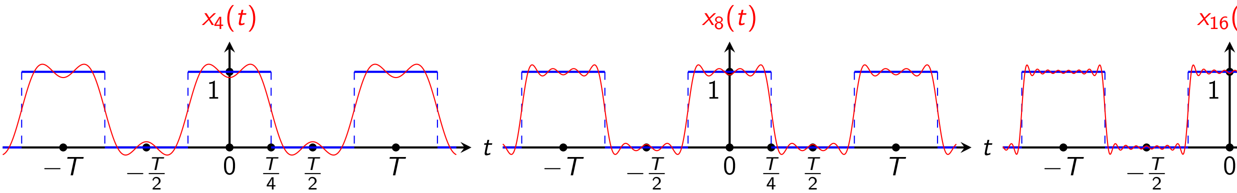
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

ist T-periodisch und hat die Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{1}{T}.$$

→ Anschrieb 4.6

Beispiel
Periodischer Rechteckpuls



Wir betrachten nun am Beispiel des periodischen Rechteckpulses, in welchem Sinne die endliche Fourierreihe

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_0 kt}$$

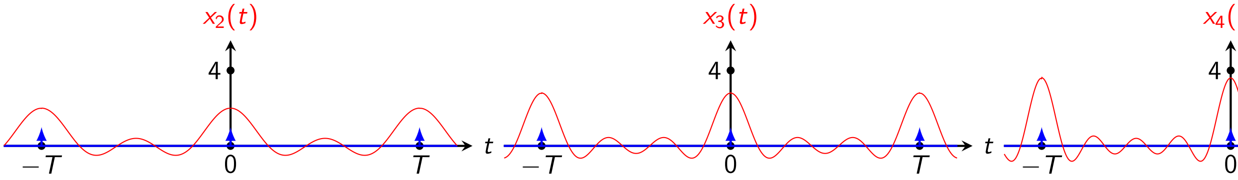
gegen $x(t)$ konvergiert, wenn wir $N \to \infty$ laufen lassen

- Die Amplituden der Überschwinger gehen nicht gegen Null für $N \to \infty$
- Dies nennt man Gibbs'sches Phänomen

d.h., die Fourierreihe konvergiert hier nicht gleichmässig

Beispiel

Dirac-Kamm



Für die endliche Fourierreihe des Dirac-Kamms gilt

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_0 kt} = \frac{1}{T} \frac{\sin\left((N + \frac{1}{2})\omega_0 t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega_0 t\right)}$$

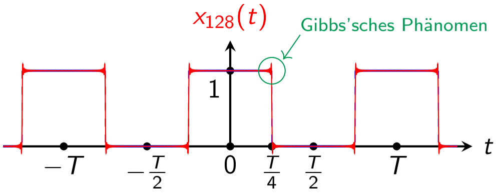
- Mit steigendem N entstehen immer kürzere und steile Impulse
- Man kann zeigen, dass diese sich für $N \to \infty$ wie Dirac-Impulse verhalten
- Illustriert graphisch, dass die Fourierreihe des Dirac-Kamms konvergiert:

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 kt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Dies ist die sogenannte Poisson'sche Summenformel.

→ Anschrieb 4.7

Punktweise Konvergenz



- Die Fourierreihe des periodischen Rechteckpulses konvergiert zwar nicht gleichmässig, aber immerhin punktweise
- Für unsere Zwecke reicht folgender Satz

Falls das periodische Signal $x(t) = x(t+T)$ stückweise stetig differenzierbar ist, so konvergiert die Fourierreihe von x punktweise:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_0 kt} \xrightarrow{N\to\infty} \begin{cases} x(t), & \text{falls } x \text{ stetig in } t \\ \frac{1}{2}[x(t^-) + x(t^+)], & \text{sonst} \end{cases}.$$

$\rightarrow$ [2, Satz 136.3]

$x(t^-)$ und $x(t^+)$ sind die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von x an der Stelle t.

$\rightarrow$ Anschrieb 4.8

Konvergenz im quadratischen Mittel

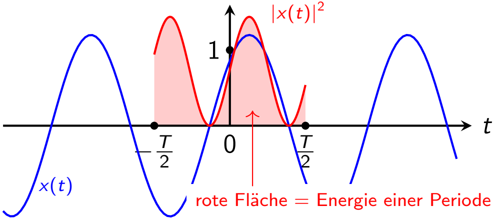
Es sei $x(t) = x(t+T)$ ein periodisches Signal, dessen Energie über eine Periode gemessen endlich ist. D.h., $x \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$. Dann konvergiert die Fourierreihe im quadratischen Mittel:

$$\|x_N - x\|_2 = \sqrt{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_N(t) - x(t)|^2 \mathrm{d}t} \xrightarrow{N \to \infty} 0,$$

wobei wieder $x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$.

→ [2, Satz 141.1]

Parsevalsche Beziehung



Für jedes periodische Signal mit $x \in L^2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ gilt

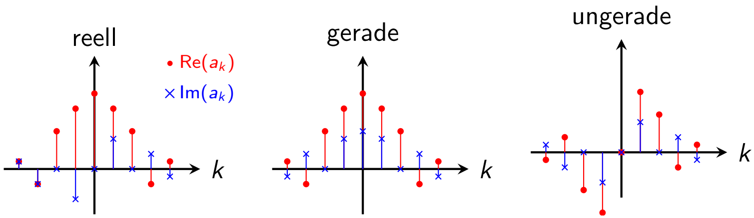
$$\frac{1}{T}\|x\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2.$$

Die Leistung des Signals über eine Periode entspricht also der Summe der Quadrate der Fourierkoeffizienten a_k.

d.h., die Energie einer einzelnen Periode ist endlich

→ Anschrieb 4.9

Reelle, gerade und ungerade Signale



Beispielhafte Fourierkoeffizienten für ein reelles, ein gerades und ein ungerades Signal. Die Signale sind selbst nicht abgebildet.

Für die Fourierkoeffizienten a_k eines Signals $x(t)$ gilt Folgendes.

- Ist $x(t)$ reell, so gilt $a_{-k} = a_k^*$
- Ist $x(t)$ gerade, so gilt $a_{-k} = a_k$
- Ist $x(t)$ ungerade, so gilt $a_{-k} = -a_k$

$\longrightarrow$ Anschrieb 4.10

Fourierreihen für reelle Signale

Die Fourierreihe $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$ sei reell, d.h. $x = x^*$. Dann gilt

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos(k\omega_0 t) + C_k \sin(k\omega_0 t)\right]$$

mit a_0 reell. Die Koeffizienten sind

$$B_k = \mathrm{Re}(a_k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t,$$

$$C_k = -\,\mathrm{Im}(a_k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t.$$

Dies ist die trigonometrische Form der Fourierreihe.

Beachte: Die Koeffizienten B_k und C_k sind also ebenfalls reell.

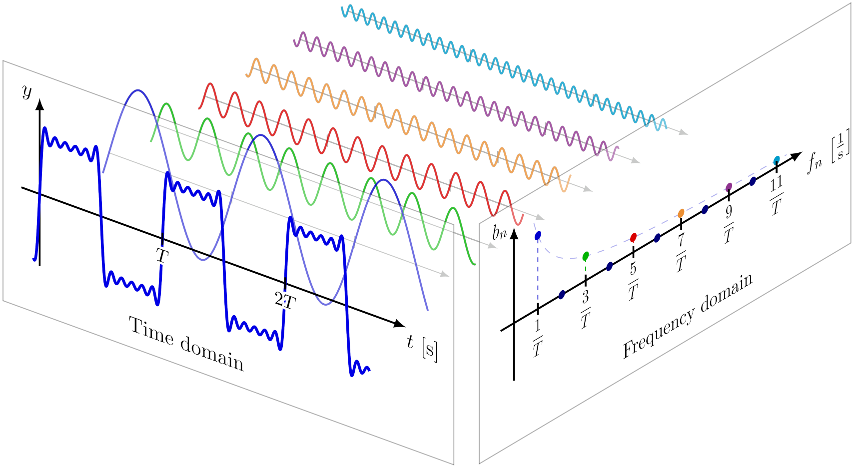
Weiterhin gilt

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k), \qquad A_k = |a_k|, \quad \phi_k = \angle a_k.$$

Dies ist die Amplituden-Phasen Form der Fourierreihe.

→ Anschrieb 4.11

Fourierreihen für reelle Signale
Illustration



- Die Fourierreihe zerlegt also reelle Signale in Sinus- und Kosinuswellen
- Hier wird ein ungerader periodischer Rechteckpuls in Sinuswellen zerlegt

Literaturverzeichnis I

[1] A. Geille and Bammesk, “File:Fourier2 - restoration1.jpg – Wikimedia Commons, the free media repository,” https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Fourier2_-_restoration1.jpg&oldid=878648534, early 19th century, [Online; accessed 30-October-2024].

[2] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis: Teil 2*, 12th ed. Springer-Verlag, 2002.

[3] I. Neutelings, “Fourier series & synthesis,” https://tikz.net/fourier_series/ (CC BY-NC-SA 4.0), accessed: 2024-13-24.