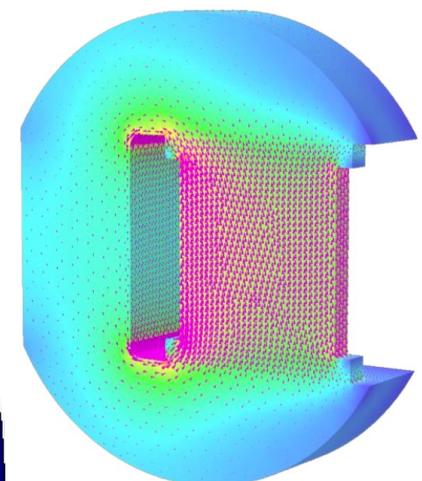
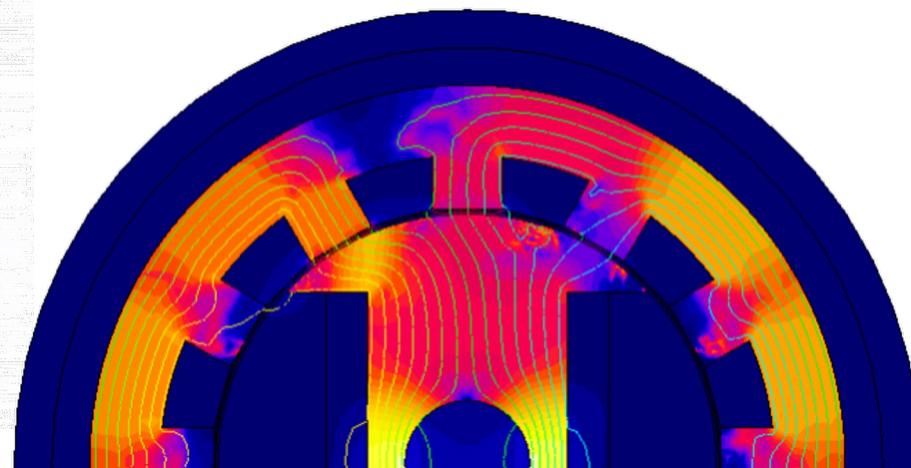
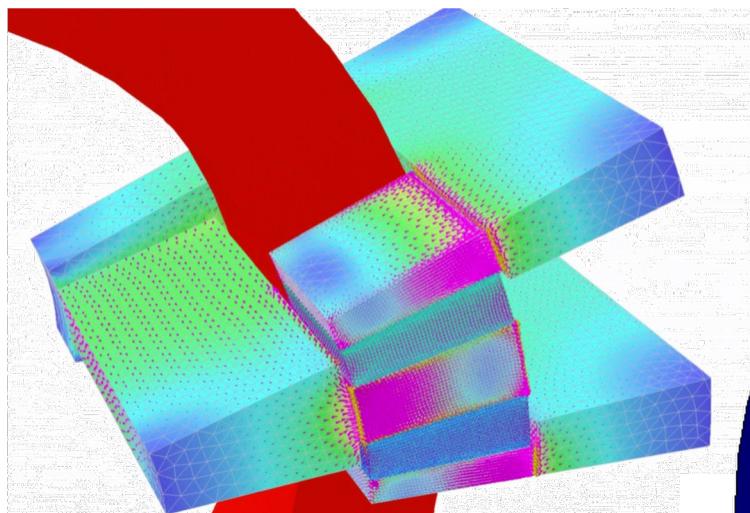


Vorlesung Elektromagnetische Felder (EMF)

WS 2025/26

Kapitel 5: Stationäre Magnetfelder

Elektrotechnisches Institut (ETI)



Gliederung

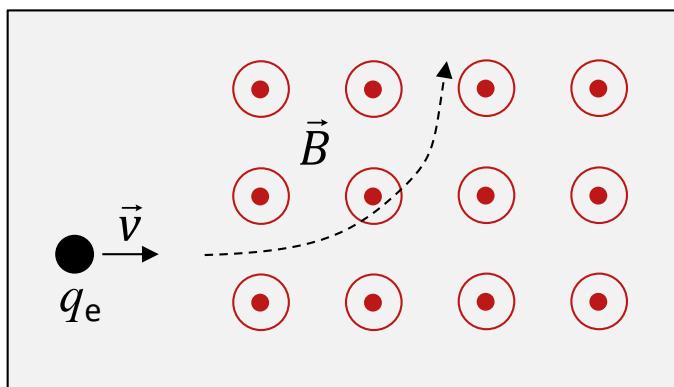
1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter
2. H - und B -Materialgleichungen
3. Ferromagnete
4. Übergänge an Grenzflächen
5. Durchflutungsgesetz und Symmetrie
6. Berechnung von H in verschiedenen Spulenkonfigurationen
7. Magnetische Kräfte
8. Vektorpotential A
9. Magnetischer Dipol
10. Biot-Savart Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrien

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter I

Magnetische Flussdichte B

Definiert durch Kraft
auf bewegte Ladung q

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$



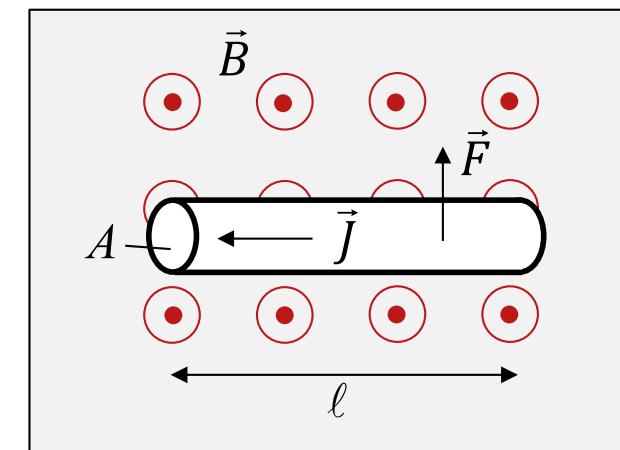
Ursprünglich definiert durch Kraft auf Leiter,
durchflossen vom Strom I (Lorentzkraft)

$$\vec{F} = \ell \cdot A \cdot (\vec{J} \times \vec{B})$$

\leftrightarrow

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned} &= \ell \cdot A \cdot \rho_{el} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \ell \cdot A \cdot \frac{q}{\ell \cdot A} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$



$$[\vec{B}] = \frac{\text{Ns}}{\text{As} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \left| \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right| = \text{T}$$

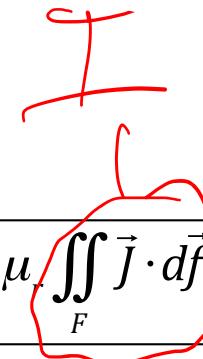
Tesla; Magnetfeld der Erde rund $50 \mu\text{T}$

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter II

Stationäre magnetische Flussdichte \vec{B}
erzeugt durch alle Ströme (frei und gebunden)

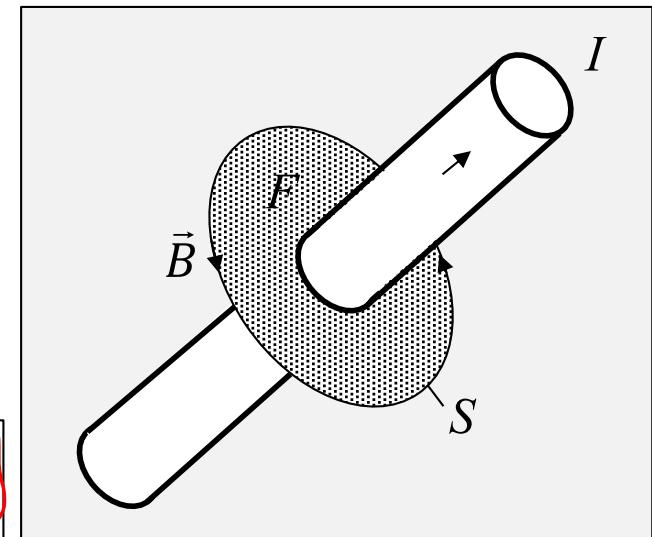
Maxwell:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J} + \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$\partial / \partial t = 0 \rightarrow$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{J} \Leftrightarrow \iint_F \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \mu_r \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

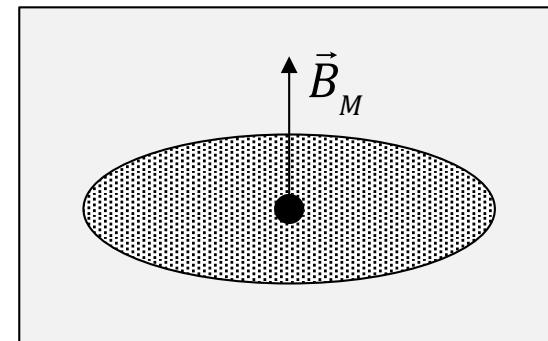


$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \quad \text{Permeabilitätskonstante des Vakuums}$$

Magnetisierung B_M

erzeugt durch den gemittelten, summierten Betrag aller atomaren Kreisströme der um Atomkerne kreisenden Elektronen und aller Drehungen der Elektronen um ihre Achsen (Elektronenspin)

= **Ferromagnetismus** (Eisen, Permanentmagnete)

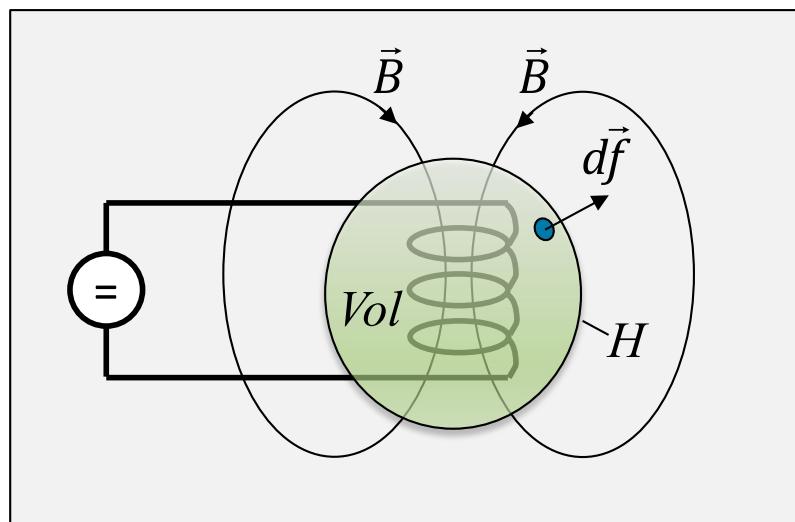


Mikroskopischer Beitrag
der Magnetisierung

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter III

Quellenfreiheit des Magnetfeldes

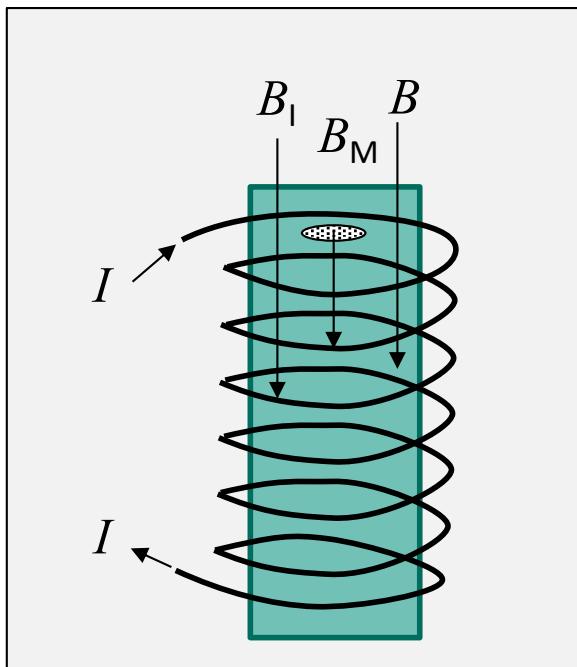
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \iiint_{Vol} \operatorname{div} \vec{B} dv = \iint_H \vec{B} d\vec{f} = 0$$



- Durch die Hüllfläche H eines Volumens Vol gehen genauso viele Feldlinien des Magnetfeldes B hinein wie heraus – die Bilanz ist Null.
- Magnetische Feldlinien haben keinen Anfang und kein Ende – sie sind immer geschlossen.
- Magnete treten immer paarweise als Nord- und Südpol auf. Es gibt keine magnetischen Unipoles und keine magnetischen Elementarladungen.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen I

Zusammenspiel von freien Strömen (Leiter) und atomaren Kreisströmen in ferromagnetischen Materialien



Die Überlagerung

- des durch freie Ströme I erzeugten Feldes B_I
- und der durch gebundene atomare Kreisströme erzeugten Magnetisierung B_M (bzw. M) liefert das effektiv messbare Gesamtfeld:

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$$

Die gemeinsame Wirkung äußerer, freier Ströme und atomarer, gebundener Kreisströme ergibt das messbare Gesamtfeld.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen II

Für alle Stoffe gilt (stark vereinfachtes Modell):

Jedes Elektron läuft entlang einer geschlossenen Bahn um den Atomkern und rotiert um seine Achse (Elektronenspin).

- Elektrischer Ringstrom
- Magnetischer Dipol

In manchen Stoffen (z.B. Wismut, Kohlenstoff, Kunststoff) sind die Dipole völlig ungeordnet. Ihre Wirkung hebt sich daher im Mittel auf und das Material ist unmagnetisch. Kommt ein äußeres Magnetfeld ins Spiel, dann werden auf die rotierenden Elektronen Kräfte ausgeübt, die letztlich zu einer Beschleunigung führen, wodurch im Material ein Feld umgekehrter Richtung entsteht. Das äußere Feld wird also geschwächt → **Diamagnetismus** $\mu_r < 1$

In anderen Materialien ist ein Überschuss von Dipolen in eine Richtung vorhanden, weil sich gleichgerichtete Dipole in großen Haufen zusammenballen. Diese inneren Magnete werden durch ein äußeres Feld ausgerichtet und verstärken dieses → **Paramagnetismus** $\mu_r > 1$
Besonders ausgeprägt ist der Effekt in Eisen und den meisten Legierungen von Eisen
→ **Ferromagnetismus** $\mu_r \gg 1$

Praktische Bedeutung hat vor allem der Ferromagnetismus. Er wird in Elektromotoren, Transformatoren, Linearaktoren, Hubmagneten, magnetischen Filtern etc. angewendet.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen III

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$$

Materialgleichung, allgemein gültig,
nicht zwingend linear

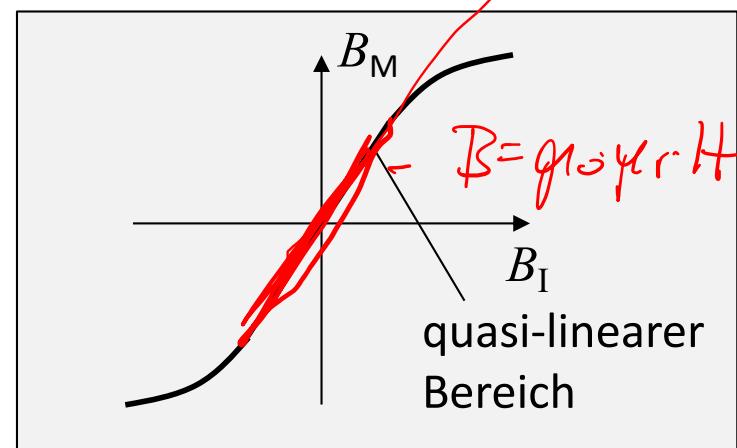
Im Falle einer linearen Abhängigkeit (isotrope Materialien)
von B_M und B gilt:

$$\vec{B}_M = \chi \cdot \vec{B}_I \quad \text{Proportionalitätskonstante } \chi \\ (\text{experimentell bestimmt})$$

$$\rightarrow \chi = \frac{\vec{B}_M}{\vec{B}_I}$$

$$\rightarrow \vec{B} = (1 + \chi) \cdot \vec{B}_I \quad \text{mit} \quad \mu_r \stackrel{\text{Def}}{=} 1 + \chi \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \mu_r \vec{B}_I \quad \text{mit } \mu_r \geq 1$$

Ferromagnetisches Material



(idealisierte Darstellung)

Die **magnetische Suszeptibilität** χ (chi, von lateinisch susceptibilitas „Übernahmefähigkeit“) ist eine einheitenlose physikalische Größe, die die Magnetisierbarkeit von Materie in einem externen Magnetfeld angibt.

Die **relative magnetische Permeabilität** μ_r (mue) ist eine einheitenlose physikalische Größe, die die gesamte resultierende Magnetisierung, herrührend aus den Anteilen der Materie und des Stroms einer Spule (Durchflutung), angibt.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen IV

Zusammenhang der Größen H , M mit B_I , B_M und B

Historisch: Magnetische Feldstärke H und Magnetisierung M

$$\vec{H} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\vec{B}_I}{\mu_0}$$

$$\vec{M} \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$$

Der Magnetisierungsvektor M kennzeichnet den Zustand der Materie.

Gerade bei Permanentmagneten kann M kompliziert von der Vorgeschichte abhängen.

Mit $\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$ ergibt sich die bekannte Schreibweise der Materialgleichung $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

Im Falle eines linearen Zusammenhangs zwischen B_M und B mit $\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$ ergibt sich daraus die ebenfalls bekannte Schreibweise

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H} \quad [H] = \text{A/m} \text{ und } [B] = \text{Vs/m}^2 = \text{T}$$

Die **magnetische Feldstärke H** ist die Ursache für die Entstehung einer magnetischen Flussdichte B (ähnlich wie die Spannung U die Ursache für den Stromfluss I in einem Leiter ist). Der Term $1/(\mu_r \mu_0)$ wird daher auch als **magnetischer Widerstand** bezeichnet. Die **magnetische Flussdichte B** beschreibt die Wirkung der Magnettfelder, zum Beispiel durch Entstehen einer Kraft.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen V

In **isotropen Medien** (normales, weiches Eisen) haben M und H immer die gleiche Richtung, so dass μ ein Skalar ist. Es genügt dann die Darstellung $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

In **anisotropen Medien** haben M und H nicht zwangsläufig

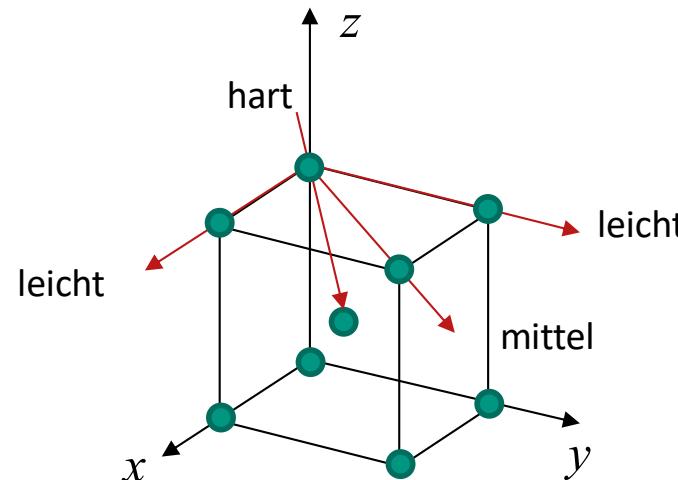
die gleiche Richtung und μ wird dann ein Tensor:

Beispiel Kornorientiertes Elektroblech für Transformatoren,
alle Arten von Hartmagneten (Permanentmagneten).

Die Magnetisierung ist auch von der Vorgeschichte des Materials
abhängig (vorhergehende Aufmagnetisierung)

$$\|\boldsymbol{\mu}\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{yy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}$$

Ein einzelner Eisenkristall ist immer anisotrop, d.h. er hat bestimmte Vorzugsrichtungen. Aber man hat oft eine Anhäufung von Kristallen, so dass diese, makroskopisch gesehen, in Weichmagneten meistens als isotrop betrachtet werden können.



2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen VI

Wie kann man die Bestimmung der atomaren Ringströme in ferromagnetischen Materialien umgehen (praktisch sowieso unmöglich) und anstelle dessen den einfach messbaren Zusammenhang zwischen B und H nutzen?

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_{\text{Atom}}) = ?$$

J_{frei} = freie Ströme ungebundener Ladungen

J_{atom} = Kreisströme innerhalb von Atomen

(Drehung der Elektronen – Elektronenspin)

Superposition: $\text{rot} \vec{B}_I = \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}}$

$$\text{rot} \vec{B}_M = \mu_0 \vec{J}_{\text{Atom}}$$

J_{frei} ist bekannt aus dem Strom in den Leitern, damit lässt sich B_I berechnen.

$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$, wobei μ_r den Anteil von B_M am Gesamtfeld beinhaltet.

Mit der Definition $\vec{H} = \vec{B}_I / \mu_0$ ergibt sich:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}}$$

\leftrightarrow

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}$$

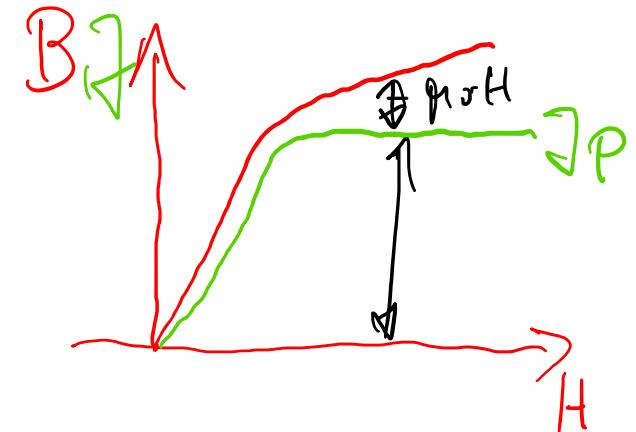
Zur Berechnung von B sind jetzt nur noch freie Ströme und der Verlauf von μ_r erforderlich, aber keine atomaren Ringströme mehr.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen VII

Magnetische Polarisation J_p

Die magnetische Polarisation kennzeichnet die magnetische Flussdichte innerhalb eines Magnetwerkstoffs abzüglich des Anteils des magnetischen Feldes im Vakuum. Sie wird daher auch als intrinsische magnetische Flussdichte bezeichnet.

$$\vec{J}_p \stackrel{\text{Def}}{=} \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_M$$
$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}_p = \mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}$$



Achtung: Die Polarisation J_p ist nicht mit der elektrischen Stromdichte J (J_{frei} und J_{atom}) zu verwechseln, auch wenn die gebräuchlichen Symbole leider gleich sind!

Es gilt	Polarisation	$[J_p] = [B] = \text{Vs / m}^2 = \text{Tesla}$
Aber	Stromdichte	$[J] = \text{A / m}^2$

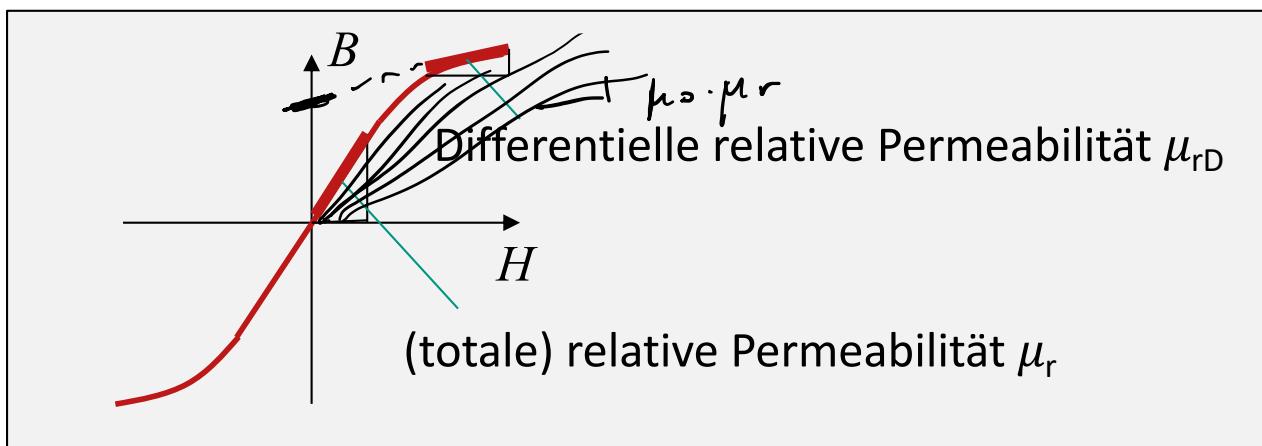
Die Polarisation wird von Herstellern von Weich- und Hartmagneten benutzt, um die Eigenschaften des Produktes zu beschreiben.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen VIII

Allgemein: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ und auch $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}$

(allgemeine Darstellung) (lineare Näherung nur im Anfangsbereich der Kurve)

Offenbar ist: $\mu = \mu_0 \cdot \left(1 + \frac{\vec{M}}{\vec{H}}\right)$ Darin ist $\frac{\vec{M}}{\vec{H}} = \chi$ die bereits früher eingeführte magnetische Suszeptibilität $\chi = \mu_r - 1$



Die (totale) relative Permeabilität μ_r beschreibt die Steigung im linearen Bereich. Im nichtlinearen Bereich verwendet man manchmal die differentielle relative Permeabilität μ_{rD} . Es gilt $\mu_r > \mu_{rD}$. Für große H wird $\mu_{rD} = 1$.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen IX

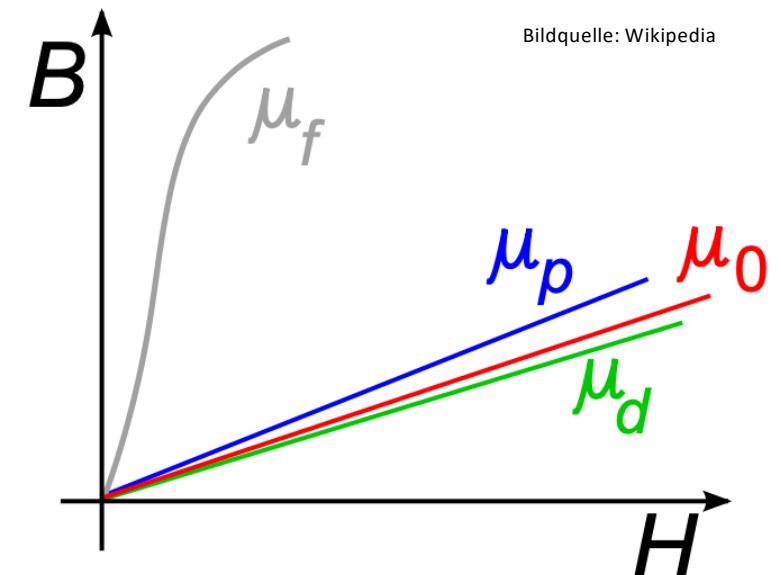
Im **Vakuum** (weitgehend auch in Luft) ist $\mu_r = 1$

Ferromagnetismus: Der Ferromagnet wird von einem Magnetfeld stark angezogen, hat also eine starke magnetische Wirkung $\mu_r \gg 1$. Er behält seine magnetischen Eigenschaften teilweise nach dem Entfernen des äußeren Feldes, kann also selbst zum Permanentmagneten werden. Oberhalb einer bestimmten Temperatur (Curie-Temperatur) wird ein Ferromagnet zum Paramagneten. Er verliert dabei weitgehend seine magnetischen Eigenschaften.
Beispiele: Eisen, Nickel, Kobalt und Mischformen wie Ferritmagnete, Seltenerdmagnete, AlNiCo

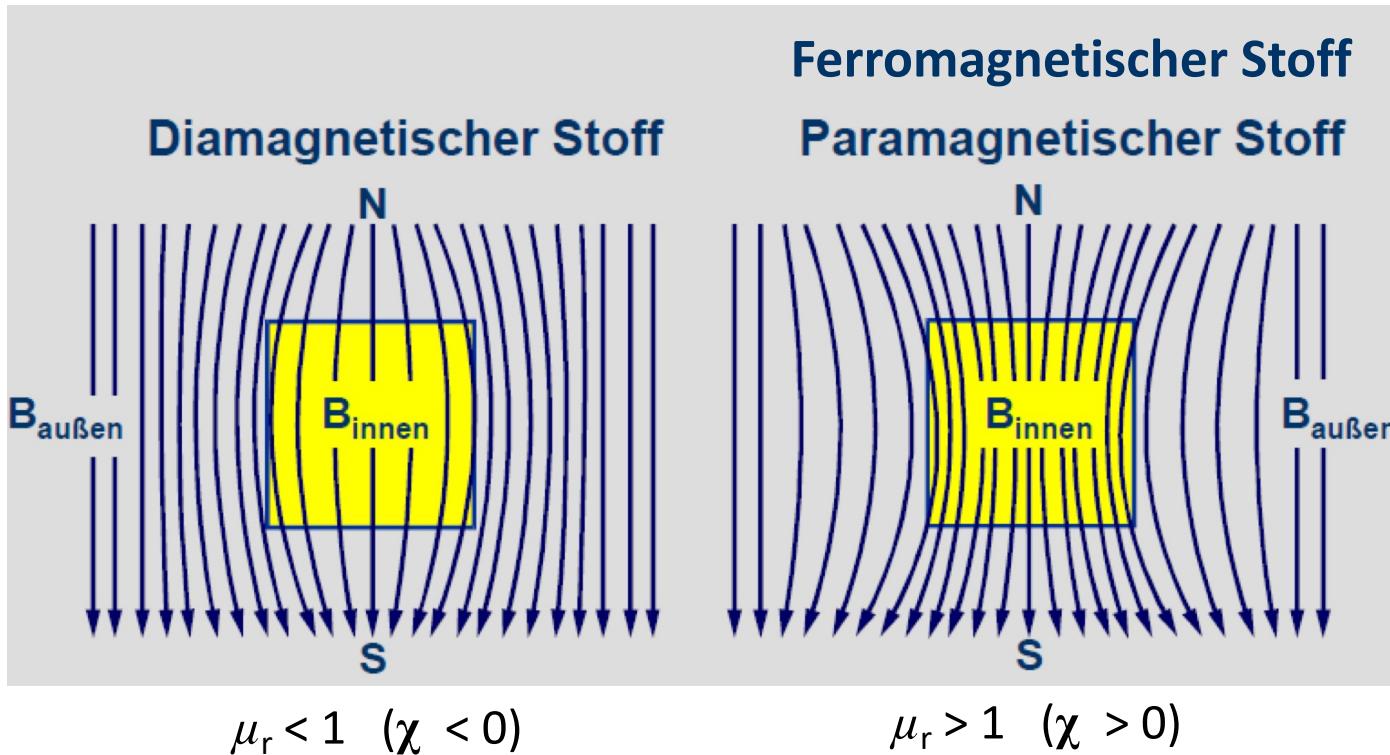
Paramagnetismus: Der Paramagnet wird von einem Magnetfeld ganz leicht angezogen, hat also nur eine schwache magnetische Wirkung $\mu_r > 1$. Er verliert diese bei Entfernen des äußeren Feldes vollständig.
Beispiel: flüssiger Sauerstoff, Platin, Chrom

Diagmagnetismus: Der Diamagnet wird von einem Magnetfeld ganz leicht abgestoßen $\mu_r < 1$.
Beispiel: Wasser, Bismut, Edelgase

In der Technik werden nahezu ausschließlich Ferromagneten verwendet.
Einige Ausnahme: Stromdurchflossene Supraleiter verhalten sich ideal diamagnetisch ($\mu_r = 0$).



2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen X

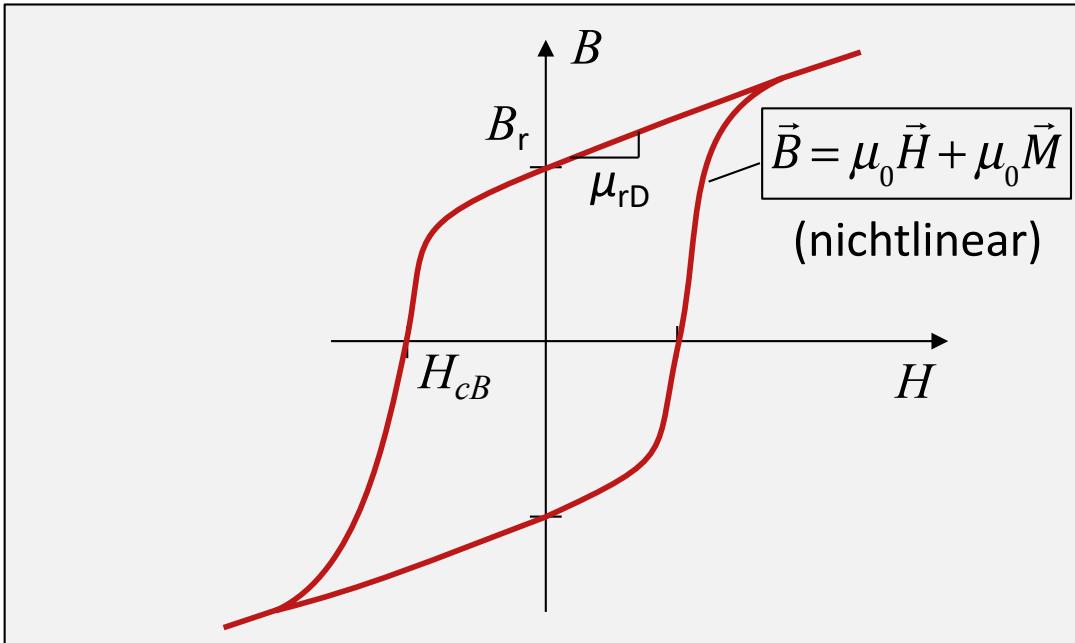


- Seltenerd-Permanentmagnete (NdFeB, SmCo, SmFeN) sind zwar ferromagnetisch, haben aber lediglich ein differenzielles μ_{rD} knapp über 1 ($\mu_{rD} = 1,04 \dots 1,12$, typisch 1,05).
- Ferritmagnete können ein ähnlich hohes μ_r wie Eisen haben ($\mu_r = 10 \dots 20.000$), je nach Materialzusammensetzung und Sättigungszustand.

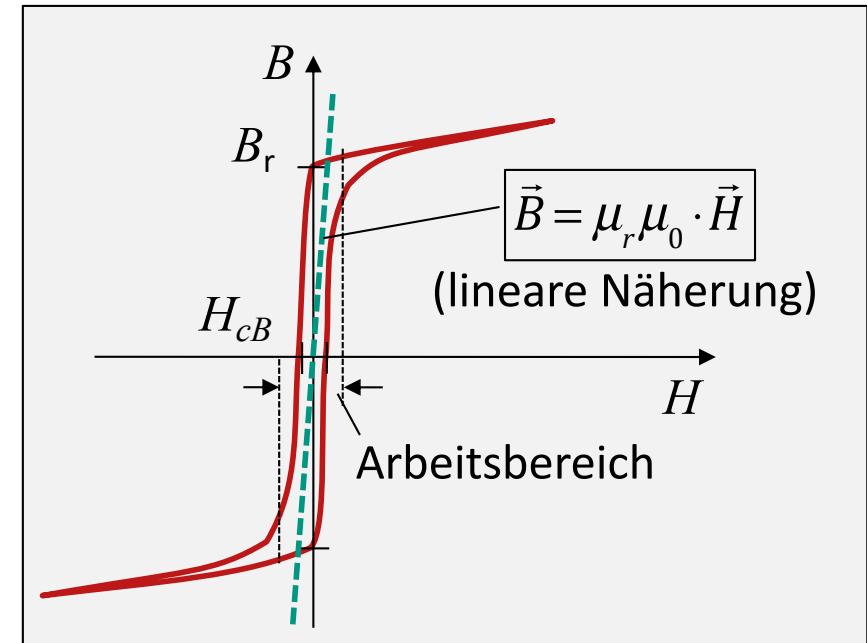
Quelle: AC-Skript, Universität Kiel

3.1 Ferromagnete I

Hartmagnete
(Permanentmagnete)

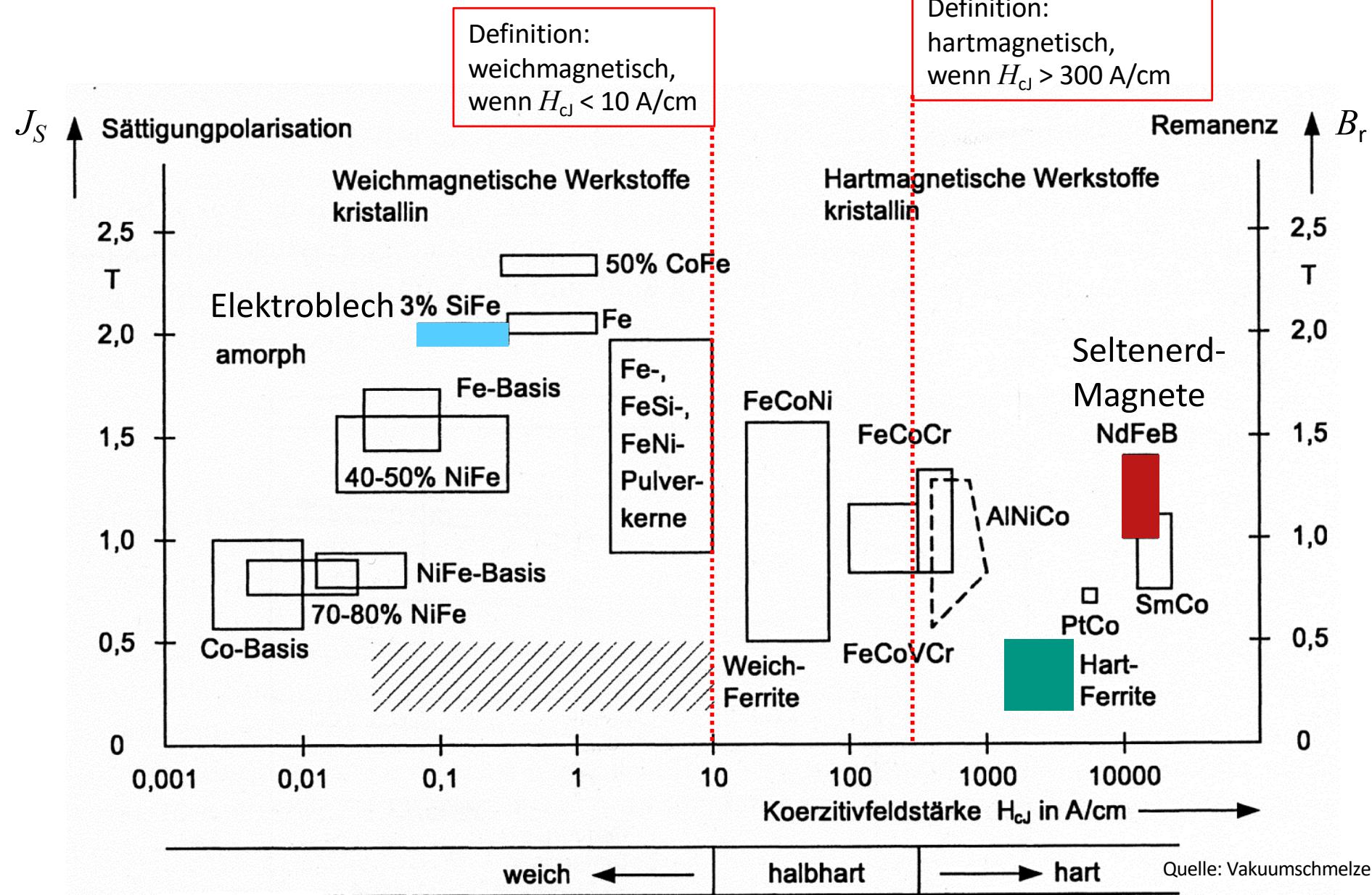


Weichmagnete
(Elektroblech)



- Hartmagnete werden einmalig aufmagnetisiert (1. Quadrant, sehr starker Stromstoß) und danach nur noch im 2. Quadranten betrieben (quasistationärer Arbeitspunkt), z.B. im Rotor von Elektromotoren. Sie eignen sich also nur für Gleichfelder.
- Die Hysteresekurve von Weichmagneten wird kontinuierlich mit der Frequenz des Stromes durchlaufen (z.B. 50 Hz bei Transformatoren und Statorn von Elektromotoren). Die Fläche zwischen den Kennlinien entspricht den Hystereseverlusten. Weichmagnete eignen sich daher für Gleich- und Wechselfelder.

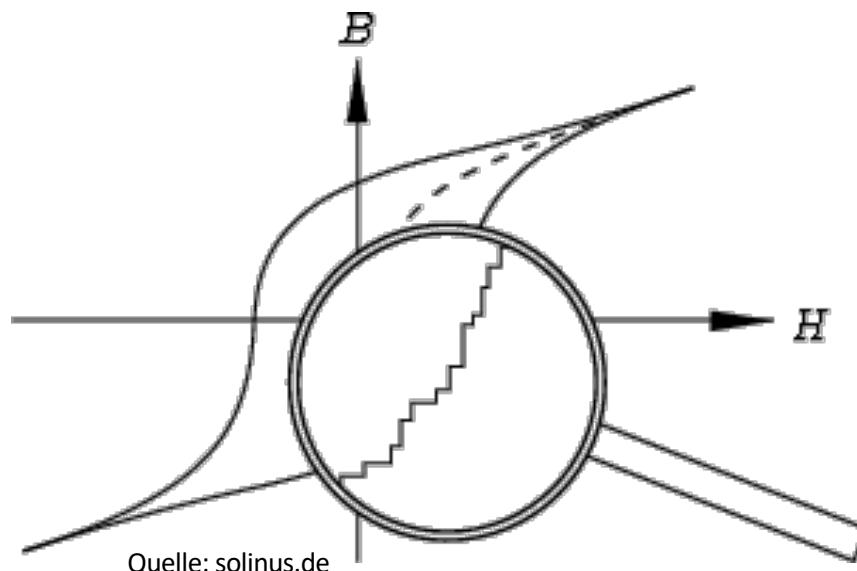
3.1 Ferromagnete II



Ablauf der Ummagnetisierungsvorgänge

Die Hysteresekurve entsteht, wenn sich mehr und mehr Elektronen unter dem Einfluss des äußeren Magnetfeldes ausrichten. Sind alle Elektronen ausgerichtet, so ist Sättigung erreicht. Das Umklappen der Elektronenspins erfolgt nicht individuell. Vielmehr ändern sich immer größere Gruppen zusammen – **Weiss'sche Bezirke** ($10 \mu\text{m}$ bis 1 mm Ausdehnung). Entdeckt 1907 durch Pierre-Ernest Weiss.

Die Hysteresekurve verläuft nicht stetig sondern als Treppenfunktion: Das Umklappen der Elektronenspins geschieht sprunghaft. Dieses Verhalten wurde erstmals 1919 von **Heinrich Barkhausen** festgestellt, indem er die sprunghaften Ummagnetisierungen mit Hilfe einer Induktionsspule und eines Verstärkers als Knacken hörbar machte.



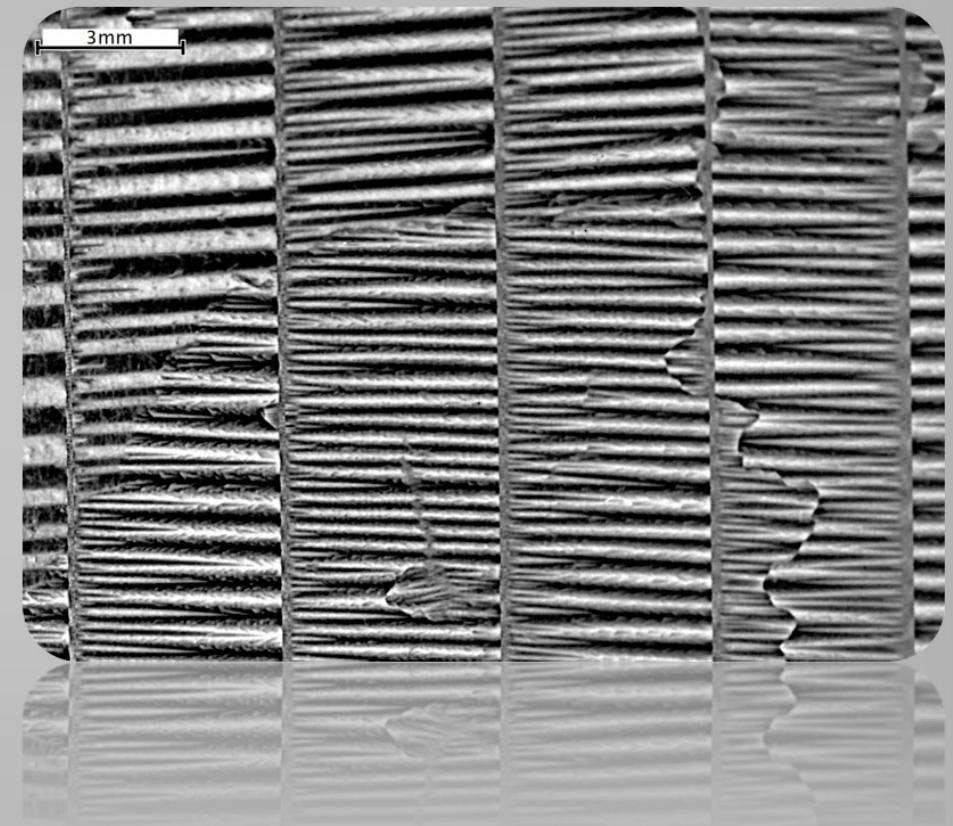
3.2 Ferromagnete – Weichmagnete II

Barkhausensprünge



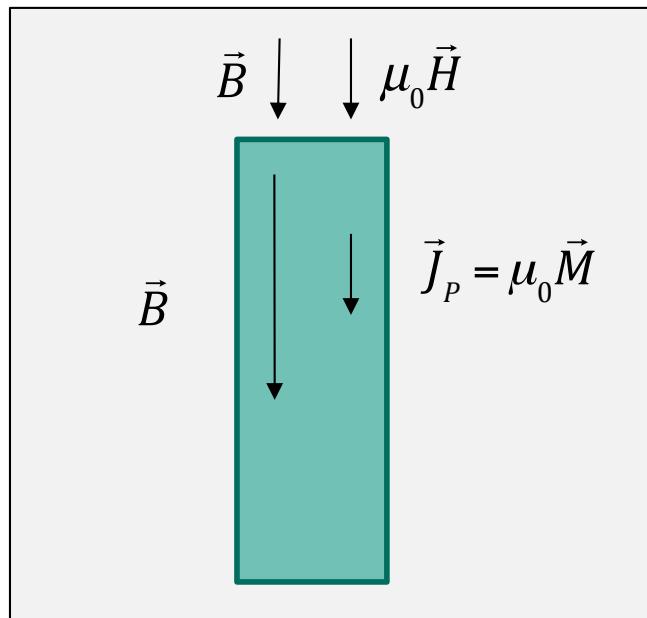
Quelle: <https://www.youtube.com/watch?v=4GLdCEQii5A&t=449s>

Magneto-optical testing for domain observation of grain-oriented SiFe alloys (GOES)



© INNOVENT Technology Development

3.3 Ferromagnete – Hartmagnete I



Spontane Magnetisierung großer Bereiche unterhalb T_C (Curie Temperatur)

Ungerade Elektronenzahl, überschüssiges „d-Elektron“:
Cr, Mn, Fe, Co, Ni, ...
Magnetit Fe_3O_4 , Neodym-Eisen-Bor NdFeB,
Samarium-Cobalt SmCo_5 und $\text{SM}_2\text{Co}_{17}$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Der Magnetisierungsvektor \vec{M} kennzeichnet den Zustand der Materie.

äußeres Feld

Es gilt: $\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}$

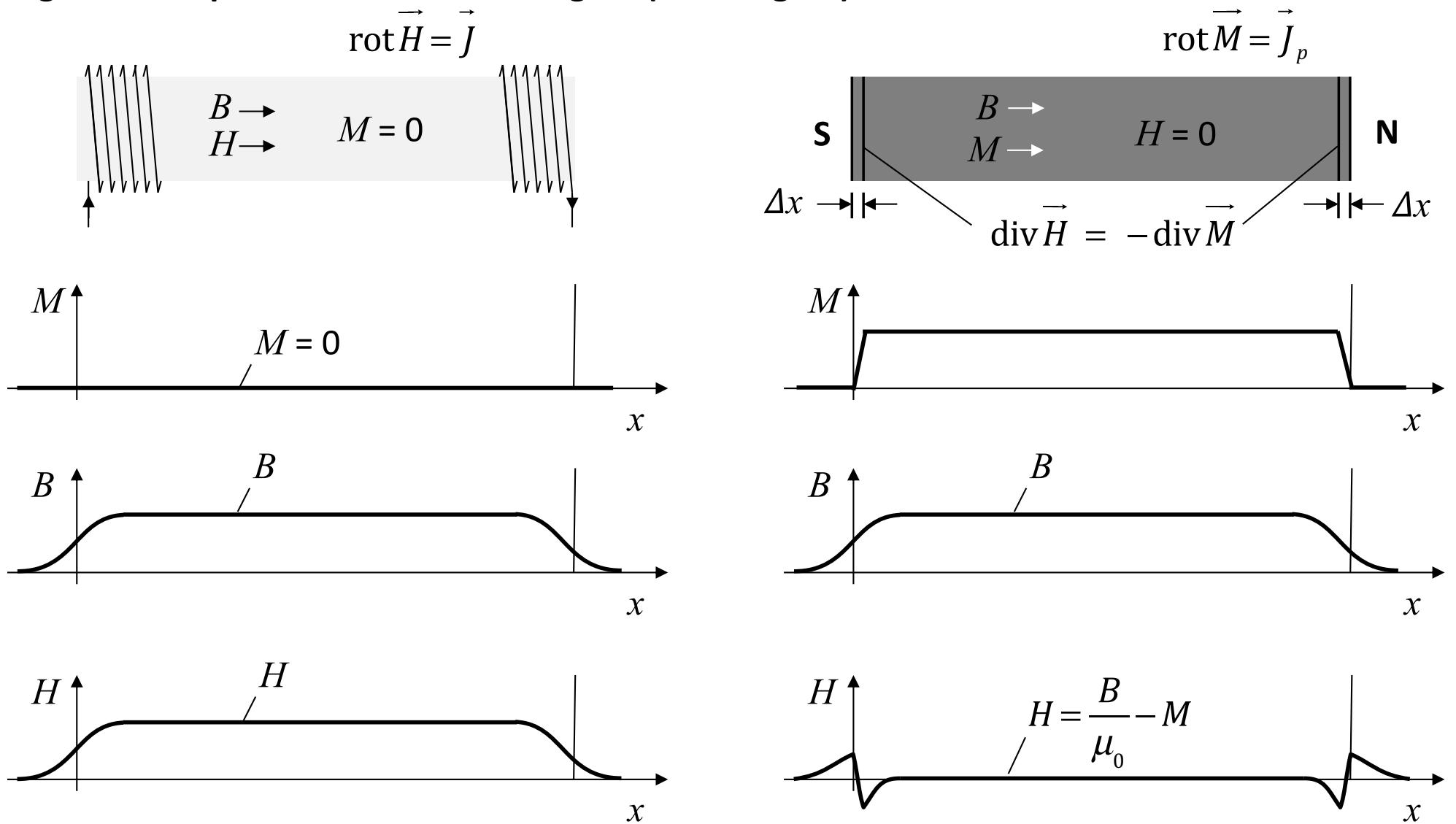
Die H - und M -Felder sind also, im Gegensatz zum B -Feld, nicht quellenfrei.

Die H -Feldlinien beginnen dort, wo die M -Feldlinien enden und umgekehrt. Im Inneren eines Hartmagneten gibt es nur ein M -Feld und kein H -Feld, im Äußeren ist es umgekehrt.

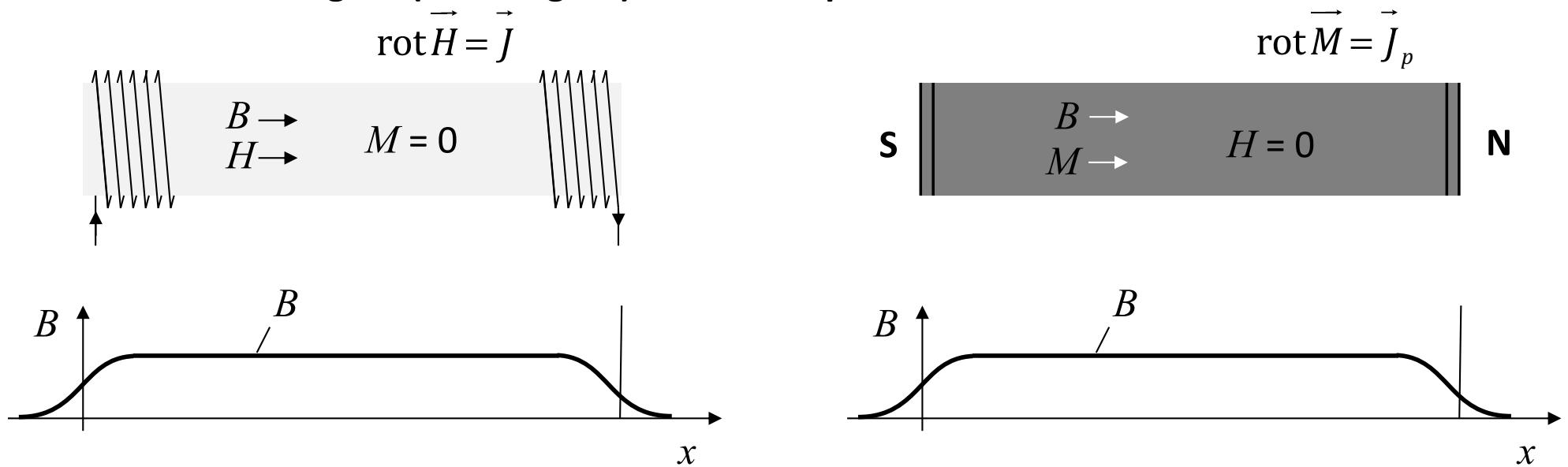
B -Feldlinien hingegen sind immer geschlossen, denn $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

3.3 Ferromagnete – Hartmagnete II

Vergleich Luftspule und Permanentmagnet (Hartmagnet)

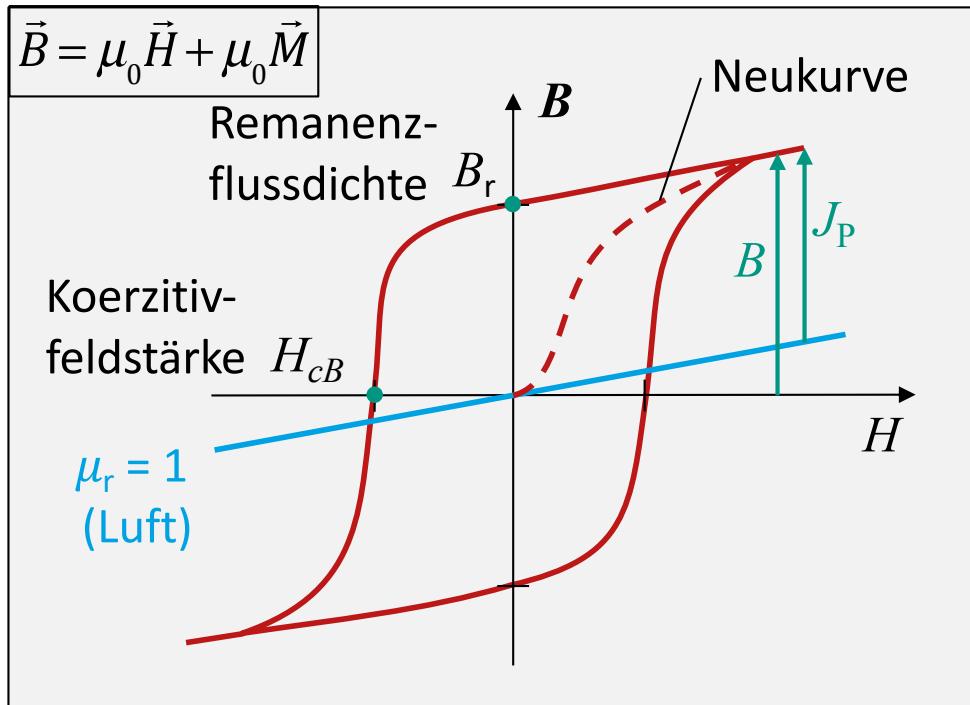


Ersatz Permanentmagnet (Hartmagnet) durch Luftspule

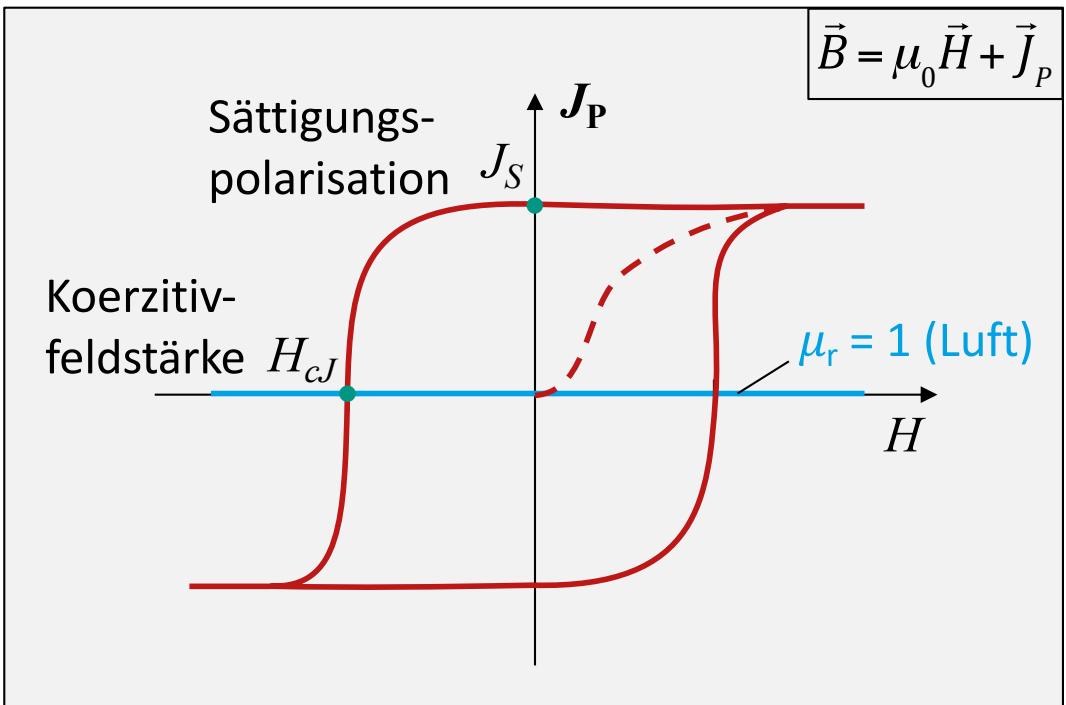


Die Verläufe der Flussdichte B in einer Luftspule und einem Hartmagneten sind gleich.
Daher kann man in Berechnungen (numerische Feldberechnung) den Dauermagneten durch Luft plus eine stromführende Schicht ersetzen.

Hysteresekurven $B = f(H)$ und $J_P = f(H)$ bei Hartmagneten



Die Neukurve wird nur beim allerersten Aufmagnetisieren aus dem magnetisch neutralen Zustand durchlaufen.

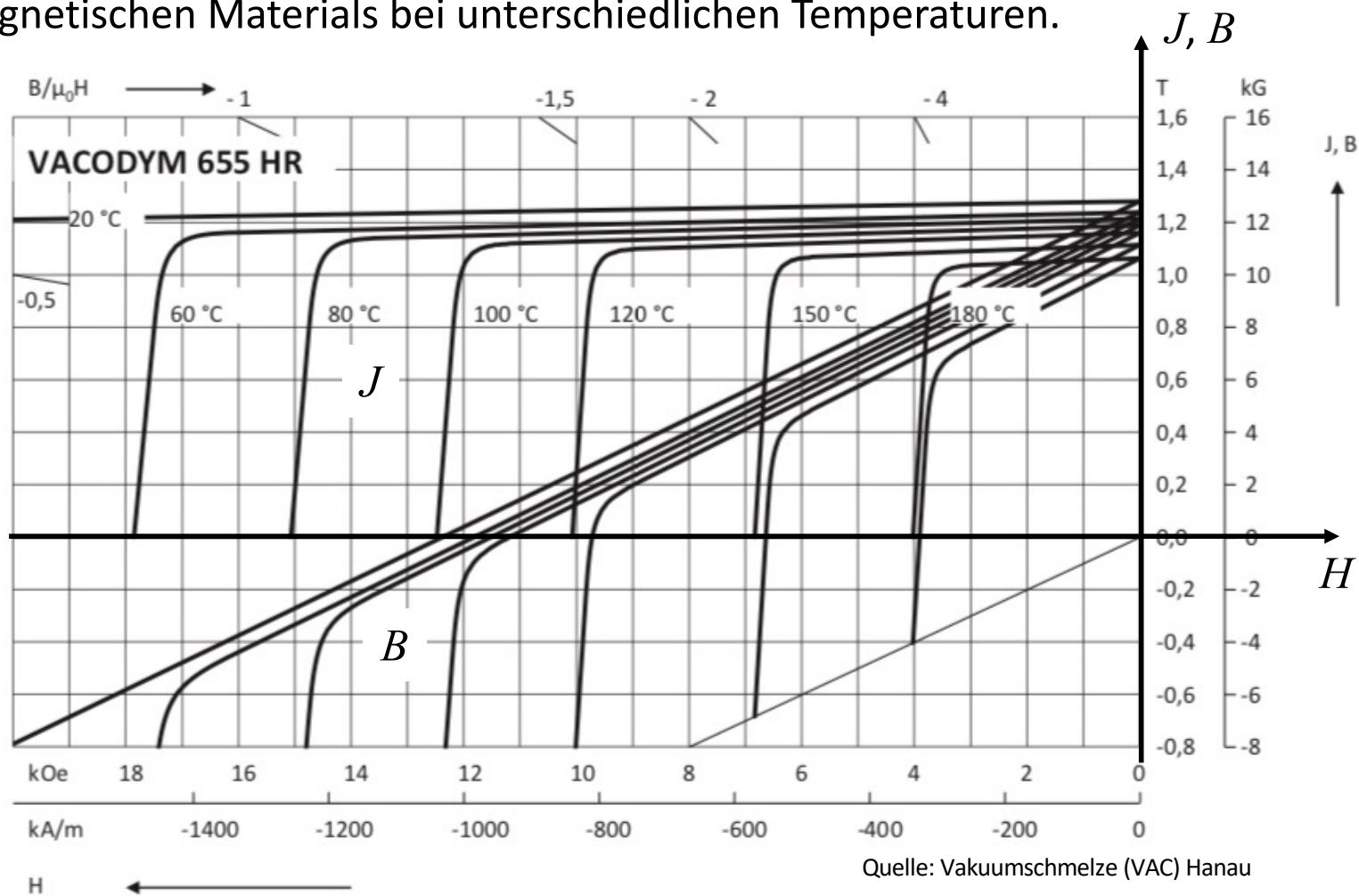


Bei ferromagnetischen Werkstoffen ist $J_S = B_r$ und $H_{cJ} > H_{cB}$

Die beiden Kurven $B = f(H)$ und $J_P = f(H)$ stellen denselben Zusammenhang dar, sie sind also redundant. Stahlhersteller verwenden in den Datenblättern meist J_P . Bei der Berechnung von Magnetkreisen (Transformatoren, E-Magnete, E-Maschinen) wird meist nur mit B gerechnet.

3.3 Ferromagnete – Hartmagnete V

Typische Entmagnetisierungskurven $B(H)$ und $J_p(H)$
eines hartmagnetischen Materials bei unterschiedlichen Temperaturen.

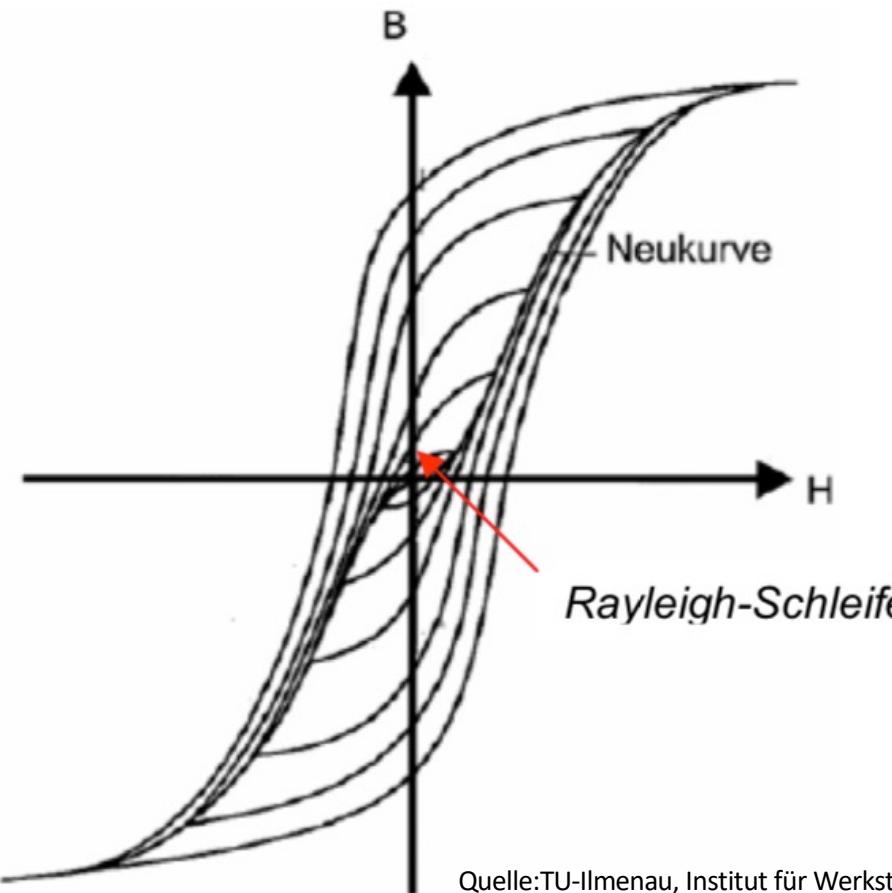


Quelle: Vakumschmelze (VAC) Hanau

Oe = Oersted (alte Einheit für magnetische Feldstärke), es gilt: 1 Oe = 79,5775 A/m

G = Gauß (alte Einheit für magnetische Flussdichte), es gilt: 10.000 G = 1 T

Zyklische Magnetisierung



Quelle: TU Ilmenau, Institut für Werkstofftechnik

Je nach Aussteuerung (H -Feld = Spulenstrom), ergeben sich unterschiedliche Hystereseschleifen. Die volle Remanenzflussdichte und Koerzitivfeldstärke erhält man nur, wenn das H -Feld ausreichend groß gemacht wird, um das Material in die Sättigung zu treiben. Das ist beim Aufmagnetisieren von Hartmagneten wichtig.

Über die Rolle von Permanentmagneten in Elektromotoren

Permanentmagnete stellen das **Erregerfeld** zur Verfügung, mit dem die Kraft vom Stator auf den Rotor übertragen wird. Das kann man sich ähnlich wie ein **Abschleppseil** vorstellen: Die Energie wird vom vorausfahrenden Fahrzeug (= Strom der Statorspulen) aufgewendet, das Seil (= Permanentmagnete) überträgt sie auf das gezogene Fahrzeug. Genau wie ein Abschleppseil nutzen sich die Magnete bei der Kraftübertragung nicht ab, sie werden also im Laufe der Zeit nicht schwächer und verlieren keinen Magnetismus.



Bildquelle: Bloomberg

Bei der Produktion werden die Permanentmagnete einmalig im Herstellwerk aufmagnetisiert. Das geschieht, indem man sie kurzzeitig, rund 1 bis 2 Sekunden lang, einem starken magnetischen Feld aussetzt. Dadurch wird die Remanenzflussdichte erreicht und die Magnete erhalten ihre magnetische Wirkung. Für das Aufmagnetisieren wird nur eine geringe Energie benötigt, die anschließend im magnetischen Feld der Permanentmagnete gespeichert ist und dauerhaft dort bleibt.



Permanentmagnete in einem Elektromotor im Tesla Model 3

3.3 Ferromagnete – Hartmagnete VIII

Beispiel:

Die Größe eines typischen Permanentmagneten für Elektromotoren aus NdFeB beträgt beispielsweise 3 cm auf 5 cm bei einer Dicke von 1 cm. Die Remanenzflussdichte B_r ist etwa 1,3 T. Damit kann man grob abschätzen, welche Energie im Magneten gespeichert ist.

$$\text{Die Energiedichte beträgt: } \rho_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$$

Mit $\mu_r = 1,05$ ergibt sich $\rho_m = 640 \cdot 10^3 \text{ Ws/m}^3$. Das Magnetplättchen enthält also eine Energie von 9,6 Ws. Hinzu kommt die Energie im Außenraum (Luft), die aber wegen B^2 viel kleiner ist.

Der PM-Motor eines Tesla Model 3 hat sechs magnetische Pole, die jeweils V-förmig von zwei Magneten gebildet werden. Die aktive Länge des Motors beträgt rund 20 cm (geschätzt). Insgesamt sind also 48 Magnete im Rotor eingebaut. Diese haben zusammen eine magnetische Energie von rund 460 Ws oder 0,000128 kWh.

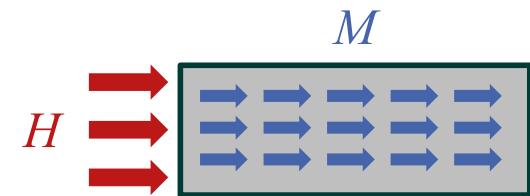
Würde es theoretisch gelingen, die in den Magneten gespeicherte Energie zum Antrieb des Fahrzeugs zu nutzen, dann könnte man damit gerade einmal 64 cm weit fahren (Verbrauch 20 kWh/100km).

An diesem Beispiel kann man erkennen, dass die in den Magneten gespeicherte magnetische Energie im Verhältnis zu der vom Motor umgesetzten elektrischen und mechanischen Energie äußerst gering ist.

3.4 Ferromagnete – Antiferromagnete, Ferrimagnete und Altermagnete

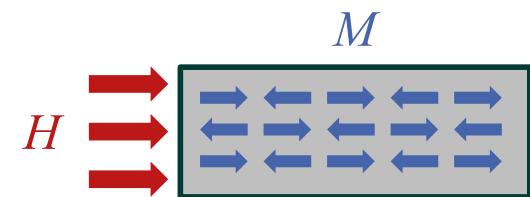
Ferromagnetismus

Die magnetischen Momente benachbarter Atome richten sich unter Einfluss eines äußeren Feldes gleichgerichtet aus (hohe resultierende Magnetisierung).



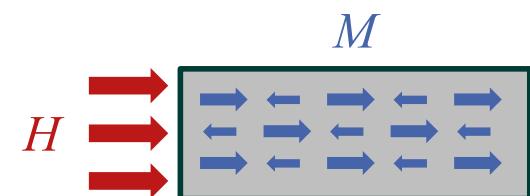
Antiferromagnetismus

Die magnetischen Momente benachbarter Atome richten sich unter Einfluss eines äußeren Feldes gegengerichtet aus (keine resultierende Magnetisierung, aber dennoch interne Magnetisierung einzelner Bereiche). Beispiele: Mangan oder Chrom.



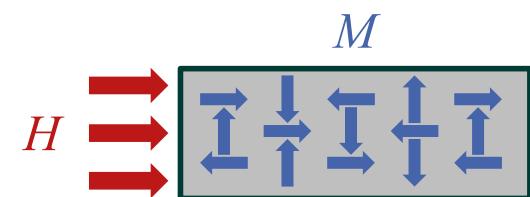
Ferrimagnetismus

Wie Antiferromagnetismus, aber die gegengerichteten Momente heben sich nicht vollständig auf, da die magnetischen Momente in einer Richtung stärker sind. Beispiel: Ferrite.

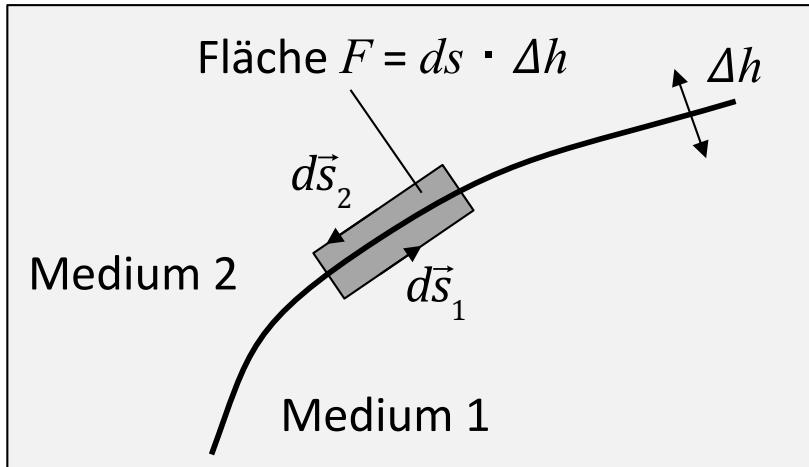


Altermagnetismus

Neu entdeckt in 2024: Wie Antiferromagnetismus, aber nicht nur die Atommomente an benachbarten Atomen, sondern auch die Ausrichtung der Atome im Kristall ändert sich. Beispiel: MnTe, RuO₂



4. Übergänge an Grenzflächen I



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{f} \quad \text{Stationärer Fall}$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$; keine Oberflächenströme

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \vec{H}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \vec{H}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iint_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0$$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{H}_i = H_{ti} \vec{e}_t + H_{ni} \vec{e}_n \quad i = 1, 2$$

Wegelemente $d\vec{s}_1$ und $d\vec{s}_2$:

$$d\vec{s}_1 = ds \cdot \vec{e}_t$$

$$d\vec{s}_2 = ds \cdot (-\vec{e}_t)$$

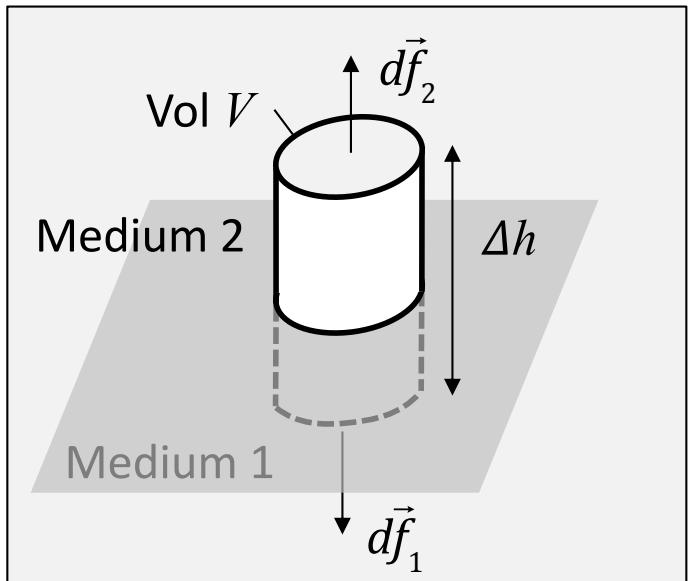
$$\vec{H}_1 \cdot d\vec{s}_1 = (H_{t1} \vec{e}_t + H_{n1} \vec{e}_n) \cdot ds \cdot \vec{e}_t = H_{t1} ds$$

$$\vec{H}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -H_{t2} \cdot ds$$

$$H_{t1} \cdot ds - H_{t2} \cdot ds = 0 \rightarrow H_{t1} = H_{t2}$$

Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke ist (bei Abwesenheit von Oberflächenströmen) stetig.

4. Übergänge an Grenzflächen II



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten: $\vec{B}_i = B_{ti} \vec{e}_t + B_{ni} \vec{e}_n \quad i=1,2$

Oberflächenelemente $d\vec{f}$:

$$\text{Oben: } d\vec{f} = d\vec{f} \cdot \vec{e}_n$$

$$\text{Unten: } d\vec{f} = d\vec{f} \cdot (-\vec{e}_n)$$

$$\text{Rand: } \Delta h \rightarrow 0 \rightarrow F_{rand} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{f} = B_{n2} d\vec{f} - B_{n1} d\vec{f} = 0 \quad \rightarrow \quad B_{n1} = B_{n2}$$

Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte ist an Grenzflächen stetig.

4. Übergänge an Grenzflächen III

Voraussetzungen: Linearer Zusammenhang von B und H ($B = \mu_0 \mu_r H$), keine Oberflächenströme

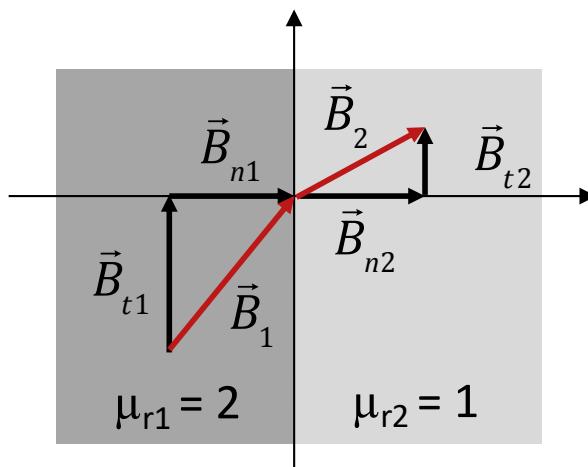
Dann gilt:

$$B_{n2} = B_{n1}$$

$$H_{t2} = H_{t1}$$

$$\frac{B_{t2}}{\mu_{r2}} = \frac{B_{t1}}{\mu_{r1}}$$

$$B_{t2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \cdot B_{t1}$$



5. Durchflutungsgesetz und Symmetrie

Beispiel: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

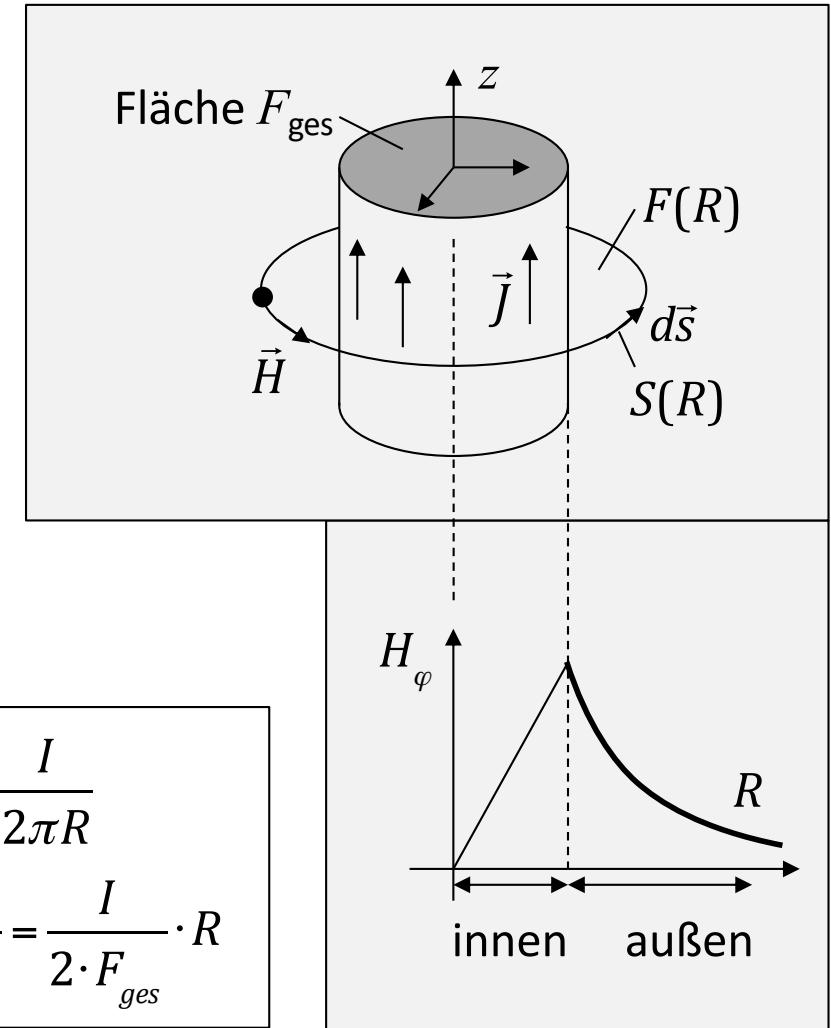
$$\vec{J} = 0 \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + J_z \cdot \vec{e}_z$$

Symmetrie $\rightarrow \vec{H} = H_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi$

$$\oint_{S(R)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

Maxwell

$$\begin{aligned} \oint_{S(R)} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \oint_{S(R)} (H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot (R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \\ &= \oint_{S(R)} H_\varphi(R) \cdot R \cdot d\varphi = 2\pi \cdot H_\varphi(R) \cdot R \end{aligned}$$



Außen:

$$\iint_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f} = I \rightarrow 2\pi H_{\varphi a}(R) \cdot R \rightarrow H_{\varphi a}(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

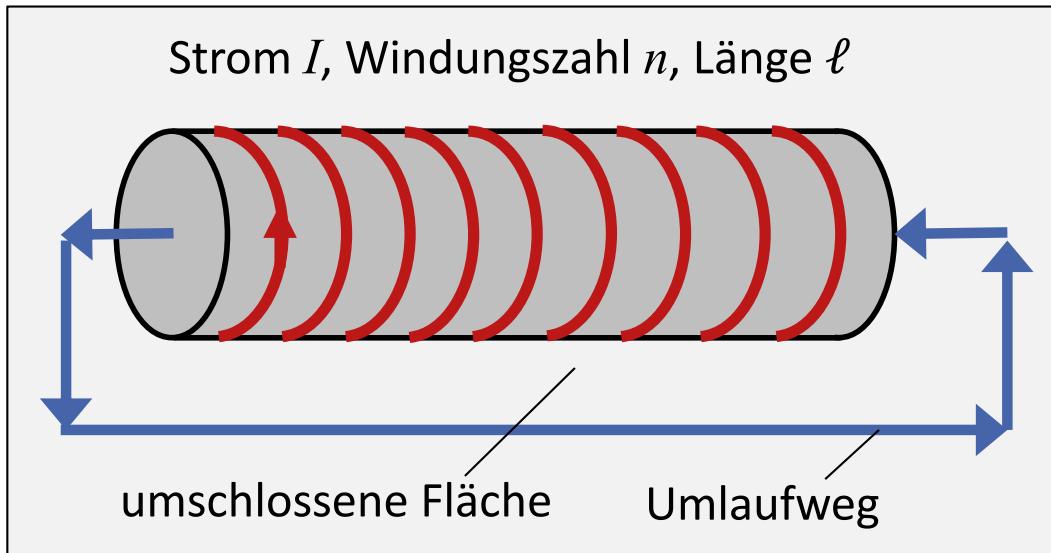
Innen:

$$\iint_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f} = \frac{I}{F_{ges}} \cdot \pi \cdot R^2 \rightarrow H_{\varphi i}(R) = \frac{I \cdot \pi \cdot R^2}{F_{ges} \cdot 2\pi R} = \frac{I}{2 \cdot F_{ges}} \cdot R$$

6.1 Berechnung von H in verschiedenen Spulenkonfigurationen

Beispiel: Lange Spule

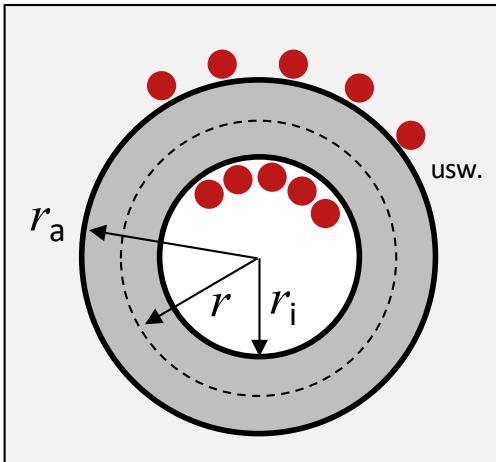
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{f}$$



Näherungen:

- Inneres Feld ist homogen
→ $H_{\text{innen}} = \text{const.}$
 - Äußeres Feld ist Null
→ $H_{\text{außen}} = 0$
- $H \cdot \ell \cong n \cdot I$
- $H_z = \frac{n \cdot I}{\ell}$

Beispiel: Toroidspule



In der Zentralebene $r_i < r < r_a$:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_\varphi(r) \cdot 2\pi r = n \cdot I$$

$$H_\varphi(r) = \frac{n \cdot I}{2\pi r}$$

Innen $0 < r < r_i$ und außen $r > r_a$:

$$H_\varphi = 0$$

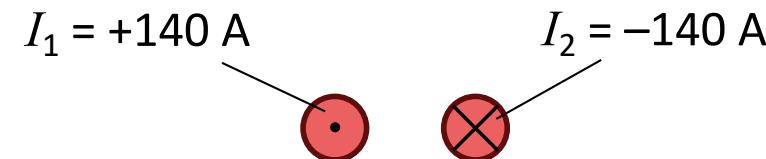
6.2 Beispiel Oberleitung auf der A5 bei Frankfurt I

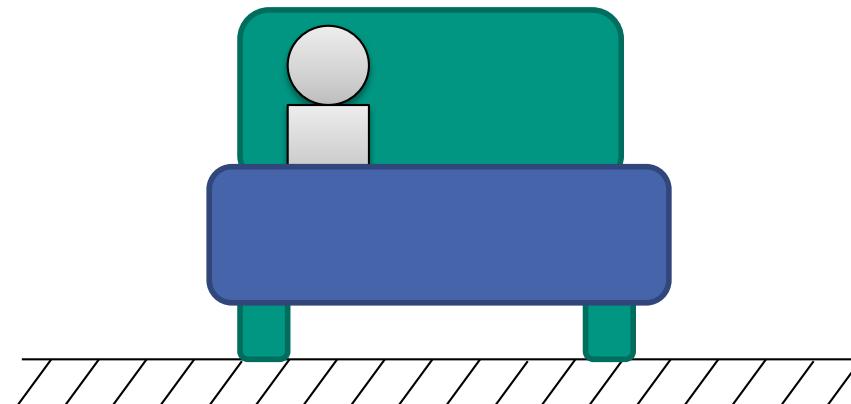


Welchen magnetischen Feldern sind die Menschen in den Autos ausgesetzt?

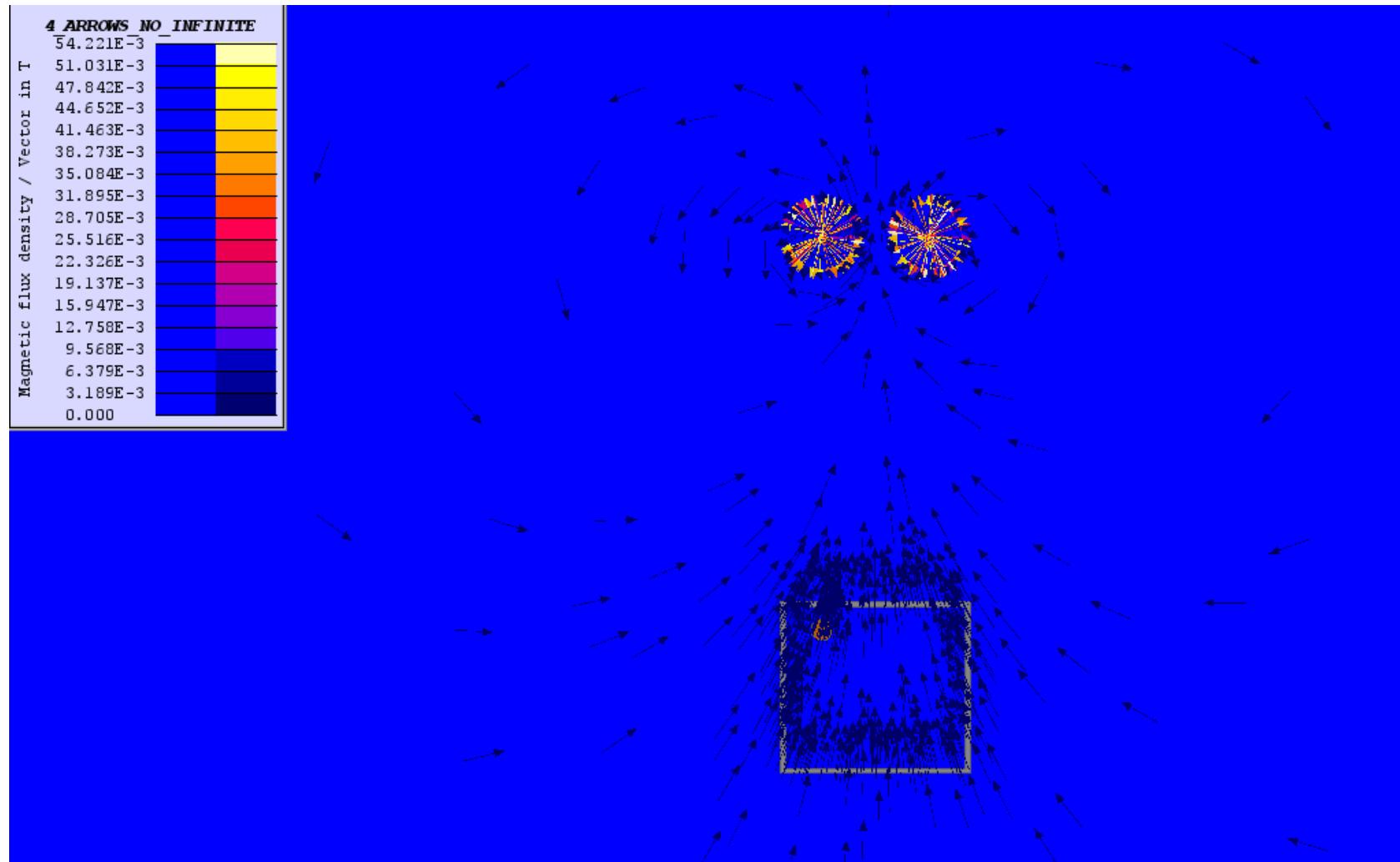
Bildwelle FAZ

6.2 Beispiel Oberleitung auf der A5 bei Frankfurt II

$$I_1 = +140 \text{ A} \quad I_2 = -140 \text{ A}$$




6.2 Beispiel Oberleitung auf der A5 bei Frankfurt III



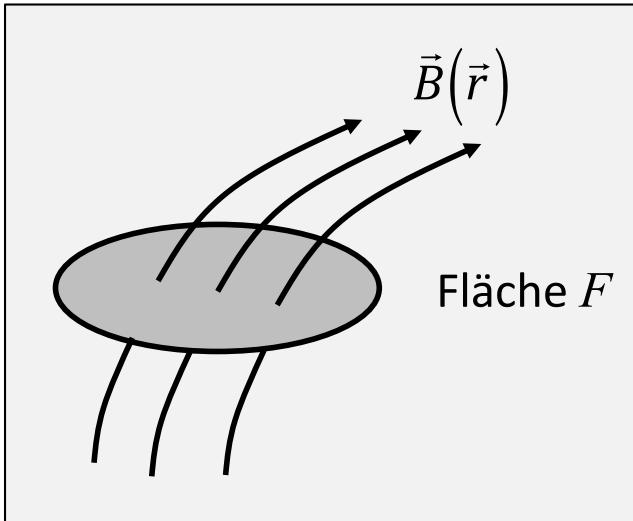
Magnetische Flussdichte im Kopfbereich (Pkw) ca. **4 μ T**, auf der Nachbarspur ca. **15 μ T**
Allerdings ist das ein **Gleichfeld**, also keine Induktionswirkung

6.3 Berechnung magnetischer Kreise I

Definition Magnetischer Fluss

$$\Phi_m = \iint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$$

$$[\Phi_m] = \text{Vs} = \text{Wb} \text{ (Weber)}$$



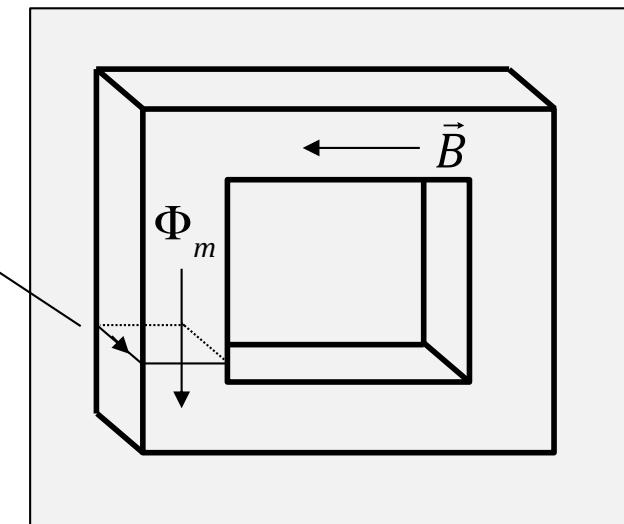
Aus $\operatorname{div} B = 0$ folgt, dass der magnetische Fluss nicht verloren gehen oder erzeugt werden kann. Der magnetische Fluss läuft im Kreis und schließt sich vollständig.

Vereinfachung, wenn $B = \text{const.}$ über der gesamten Fläche:

$$\Phi_m = B \cdot F$$

Wäre hier eine Leiterschleife (mindestens eine Windung), dann ergäbe sich eine induzierte Spannung

$$U_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

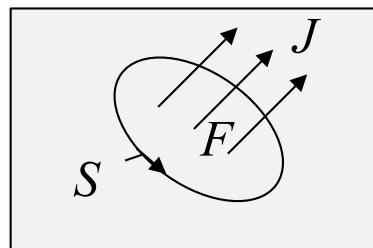


6.3 Berechnung magnetischer Kreise II

Ziel: Berechnung von H aus J

1. Schritt: Nutzung der Integralform des Durchflutungsgesetzes

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$



Wenn H konstant ist:

$$H_\varphi \cdot \oint_S d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f} \rightarrow H_\varphi = \frac{\iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}}{\oint_S d\vec{s}}$$

Aber wenn H beliebig und nicht konstant ist, funktioniert das so nicht!

Hier kann man sich oft behelfen, wenn H zumindest **abschnittsweise konstant** ist:

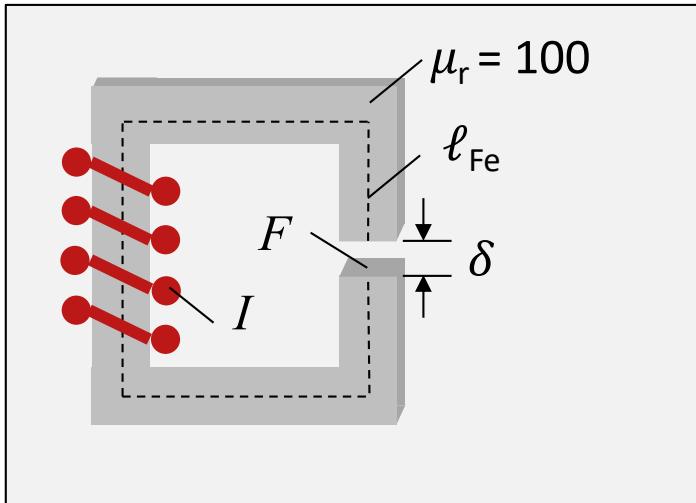
$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{S1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \dots = \Theta$$

Man nennt Θ die **Durchflutung** und die einzelnen Summanden die **magnetischen Spannungen** V :

$$V_1 + V_2 + \dots = \Theta \quad \text{mit } [V] = [\Theta] = \text{A}$$

6.3 Berechnung magnetischer Kreise III

Beispiel: Magnetischer Kreis mit Spule und Luftspalt



Hier kann man den Umlauf in zwei jeweils konstante Abschnitte aufteilen:

$$H_\delta = \text{const.}$$

$$H_{Fe} = \text{const.}$$

H ist überall dort abschnittsweise konstant, wo sich die magnetische Flussdichte nicht (wesentlich) ändert, also konstantes μ_r , keine Geometrieänderung, kein Streufluss. Im Beispiel reichen also zwei Abschnitte: H_{Fe} und H_δ .

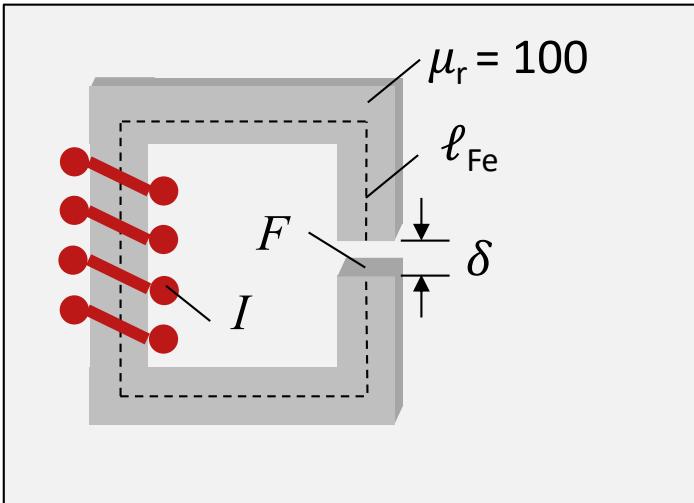
Damit ergibt das Durchflutungsgesetz:
$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + H_\delta \cdot \delta = n \cdot I$$

Offenbar gibt es noch zu viele Unbekannte (H_{Fe} , H_δ) in dieser Gleichung, so dass zusätzliche Bestimmungsgleichungen erforderlich sind.

Diese erhält man aus der Maxwell-Gleichung $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.

6.3 Berechnung magnetischer Kreise IV

2. Schritt: Zusätzliche Gleichungen aus Kontinuität des magn. Flusses



Der magnetische Fluss Φ_m muss im gesamten Kreis erhalten bleiben. Daher kann man die Flüsse beim Übergang der Feldlinien aus einem Material in ein anderes, z.B. aus Eisen in Luft, oder an Stellen von Geometrieänderungen, z.B. Aufweitungen oder Verengungen, gleichsetzen.

Die Flussdichten B verhalten sich dann wie die Flächen.

In diesem einfachen Beispiel sind die Flächen in Luftspalt F_δ und in Eisen F_{Fe} gleich. Streufluss wird vernachlässigt, d.h. wir nehmen (vereinfachend) an, dass der gesamte Fluss der Spule durch den Luftspalt geht.

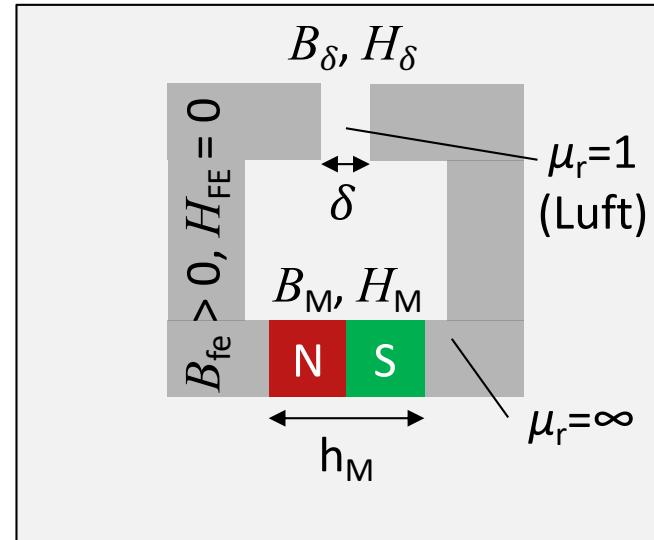
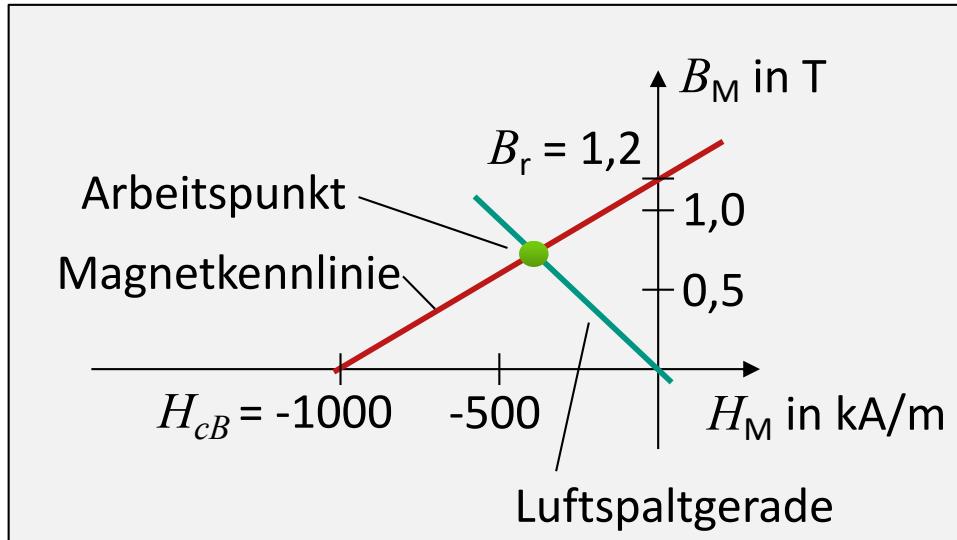
Unter diesen Bedingungen gilt: $B_{Fe} = B_\delta \rightarrow \mu_0 \mu_r H_{Fe} = \mu_0 H_\delta$

Damit ist eine weitere Bestimmungsgleichung gefunden, die nun in das Durchflutungsgesetz eingesetzt werden kann: $\rightarrow H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + \mu_r H_{Fe} \cdot \delta = n \cdot I$

$$\text{Umgeformt: } \rightarrow H_{Fe} = \frac{n \cdot I}{\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta} \quad \text{bzw.} \quad \rightarrow H_\delta = \frac{n \cdot I}{\ell_{Fe} / \mu_r + \delta}$$

6.3 Berechnung magnetischer Kreise mit Hartmagneten V

Beispiel: Magnetischer Kreis mit Hartmagnet und Luftspalt



$$(1) \quad \oint_S \vec{H} d\vec{s} = \iint_F \vec{J} d\vec{F} \rightarrow H_M \cdot h_M + H_\delta \cdot \delta = 0 \rightarrow H_\delta = -h_M / \delta \cdot H_M$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow B_M \cdot F_M = B_{Fe} \cdot F_{Fe} = B_\delta \cdot F_\delta$$

Hier sind die Querschnittsflächen F gleich, also $F_M = F_\delta \rightarrow B_M = B_\delta \rightarrow B_M = \mu_0 \cdot H_\delta$

Eingesetzt: $B_M = -\frac{\mu_0 \cdot h_M}{\delta} \cdot H_M \rightarrow$ abfallende Ursprungsgerade (Luftspaltgerade)

7. Magnetische Kräfte I

Wir kennen insgesamt vier Kraftwirkungen aufgrund des magnetischen Feldes:

$$\vec{F} = \iiint \left\{ \vec{J} \times \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{H}^2 \operatorname{grad} \mu - \vec{H} \operatorname{div} \vec{J}_{PM} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\vec{H}^2 \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \right\} dv$$

1. Kräfte auf stromdurchflossene Leiter (**Lorentzkräfte**) $\vec{F}_{Lorentz} = \iiint \vec{J} \times \vec{B} dv \approx I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$

Eine Kraftwirkung entsteht, wenn sich ein von Strom durchflossener Leiter im magnetischen Feld befindet. Die angegebene Vereinfachung gilt nur dann, wenn die elektrische Stromdichte J homogen über die gesamte Leiterfläche verteilt ist.

2. Maxwellsche Grenzflächenkräfte $\vec{F}_{Grenzfläche} = -\frac{1}{2} \iiint \vec{H}^2 \operatorname{grad} \mu dv \approx \frac{1}{2\mu_0} B_n^2 \cdot A \cdot \vec{e}_n$

Eine Kraftwirkung entsteht, wenn das Magnetfeld aus einem Gebiet hoher relativer Permeabilität μ_r , zum Beispiel Eisen, in ein Gebiet niedriger relativer Permeabilität, zum Beispiel Luft, übertritt. Die Kräfte stehen senkrecht auf der Oberfläche und zeigen in Richtung des Gebietes niedriger Permeabilität.

Die angegebene Vereinfachung gilt für einen Fluss durch die Fläche A unter der Voraussetzung, dass $\mu_{r1} = \infty$ (ideales Eisen) und $\mu_{r2} = 1$ (Luft) ist.

7. Magnetische Kräfte II

Andere Namen: Reluktanzkräfte, Maxwellsche Kräfte

Beim Übergang zwischen Medien mit unterschiedlichem μ entstehen an der Grenzfläche Zugkräfte, die immer senkrecht (normal) zur Fläche gerichtet sind.

Ganz allgemein gilt: $\vec{F} = -\frac{1}{2} \iiint \vec{H}^2 \cdot \text{grad } \mu \cdot dv$

Man erhält die Zugspannung aus: $\sigma_n = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) \left(H_{t1}^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}^2 \right)$

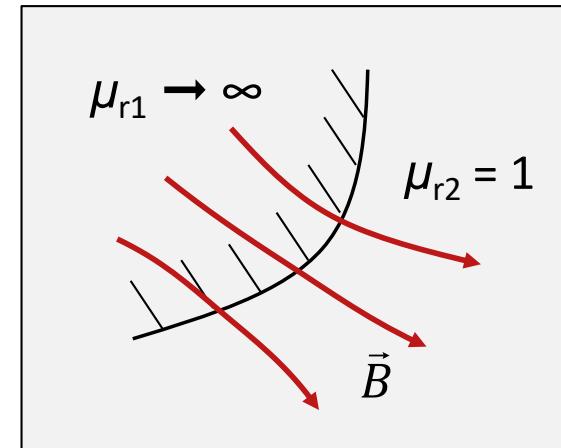
Und die Kraft:

Darin ist A die Fläche, aus der die Feldlinien austreten.

Im häufigen Sonderfall mit $\mu_{r1} \rightarrow \infty$ und $\mu_{r2} = 1$ ergibt sich:
(Übergang Eisen zu Luft)

$$\vec{F} = A \cdot \sigma_n \cdot \vec{e}_n$$

$$\vec{F} \cong \frac{B_n^2}{2\mu_0} \cdot A \cdot \vec{e}_n$$



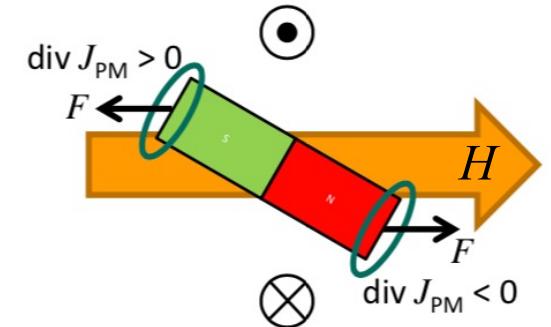
Praxis: Die höchsten Flussdichten in Elektroblech sind etwa 2 Vs/m^2 . Daher beträgt die höchste magnetische Zugspannung $\sigma_n = 1,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, was einem Gewicht von rund 160 t pro Quadratmeter entspricht. In eisenlosen Anwendungen (MRT, CERN) sind weit höhere magnetische Flussdichten möglich.

7. Magnetische Kräfte III

3. Kräfte auf Permanentmagnete

$$\vec{F}_{PM} = - \iiint \vec{H} \operatorname{div} \vec{J}_{PM} dv$$

An der Austrittsfläche des Nordpols ist die Divergenz der Permanentmagnet-Polarisierung J_{PM} negativ, am Südpol positiv. Der Permanentmagnet richtet sich also in Richtung des externen Feldes aus.



4. Magnetostriktion

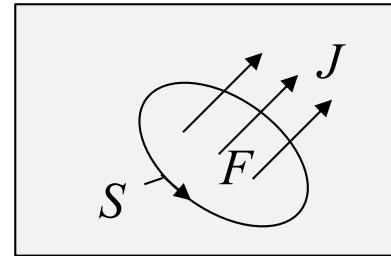
$$\vec{F}_{\text{Magnetostriktion}} = \iiint \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(\vec{H}^2 \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) dv$$

Magnetostriktion entsteht durch Ausrichtung der magnetischen Domänen (Weißsche Bezirke) parallel zu einem anliegenden Magnetfeld: Der Magnetkörper der Dichte ρ dehnt sich aus (Formänderung des Kristalles). Die Kraft ist bei ferromagnetischen Materialien am größten und führt beispielsweise zum bekannten Trafo-Brummen. Es gibt magnetostriktive Aktoren, die auf diesem Prinzip beruhen.

8. Vektorpotential I

Ziel: Berechnung von \vec{H} aus \vec{J}

Versuch mit differentieller Form



$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}} \quad \leftrightarrow \quad \iint_F \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= J_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= J_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= J_z \end{aligned} \right\}$$

- Gekoppeltes System partieller DGLn
- Keine analytische Lösung bekannt
- Numerisch schwierig

Einführung des
magnetischen
Vektorpotentials \vec{A}

Analog zum
elektrostatischen
Potential Φ

8. Vektorpotential II

Weiterhin bleibt das Ziel die Verknüpfung von Magnetfeld und Strömen

$$\vec{J} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{B} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{A}$$

elektrische magnetische magnetisches
Stromdichte Flussdichte Vektorpotential

Stationäre Verhältnisse ($\partial/\partial t=0$):

Für das magnetische Feld gilt:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Maxwell

Def.

$$\text{rot } \vec{A} \stackrel{\text{Def.}}{=} \vec{B}$$

magnetisches
Vektorpotential

Die Definition ist erlaubt, da immer gilt: $\text{div} \text{rot } \vec{A} = 0$ für beliebige Vektorfunktionen A

8.1 Vektorpotential – Coulomb-Eichung I

Definition:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

vergleiche:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \Phi) \equiv 0$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Psi$$

$$\operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$$

beliebige Eichung von \vec{A}

$$\text{Coulomb Eichung: } \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

$$\Phi' = \Phi + C$$

$$\operatorname{grad} \Phi' = \operatorname{grad} \Phi$$

beliebige Lage des Nullpunktes von Φ

$$\text{Coulomb Eichung: } \Phi(\infty) = 0$$

8.2.1 Vektorpotential – Poisson-Gleichung I

Voraussetzung: Medium linear und isotrop $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Maxwell: $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$

Definition: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

Poisson-Gleichung für das magnetische Vektorpotential

$$\rightarrow \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J}$$

$$\text{rot} (\text{rot } \vec{A}) = \mu \cdot \vec{J}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}}$$

μ = stückweise konstant

$$\text{rot} (\text{rot } \vec{A}) = \cancel{\text{grad div } \vec{A}} - \Delta \vec{A}$$

Coulomb-Eichung!

Zur Erinnerung aus der Formelsammlung: $\Delta \cdot \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{A})$

8.2.1 Vektorpotential – Poisson-Gleichung II

Voraussetzung: Medium linear und isotrop $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Poisson – Gleichung für das Vektorpotential

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}$$

In kartesischen
Koordinaten

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x$$
$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y$$
$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z$$

- 3 ungekoppelte, partielle DGLn
- Poisson Gleichungen
- Analytische Lösung vorhanden:
Coulomb-Integral

Zur Erinnerung (Abschnitte 4.5 und 7.8 im Kapitel 3): Eine partikuläre Lösung der Poisson-Gleichung ist das Coulomb Integral:

$$\Phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

8.2.2 Vektorpotential – Coulomb Integral als Lösung der Poisson-Gleichung I

Coulomb-Integral als Lösung der Poisson-Gleichung

Differentialgleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \cdot \vec{J}(\vec{r})$$

Analytische Lösung:

A_x, J_x

A_y, J_y

A_z, J_z

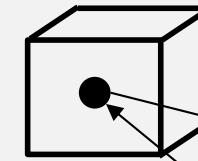
$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

„laufender“ Punkt

$$J_x(\vec{r}') dv'$$



$$\vec{r} - \vec{r}'$$

Messpunkt

$$A_x(\vec{r}) = ?$$

$$dv'$$

$$\vec{r}'$$

Koordinaten-
ursprung

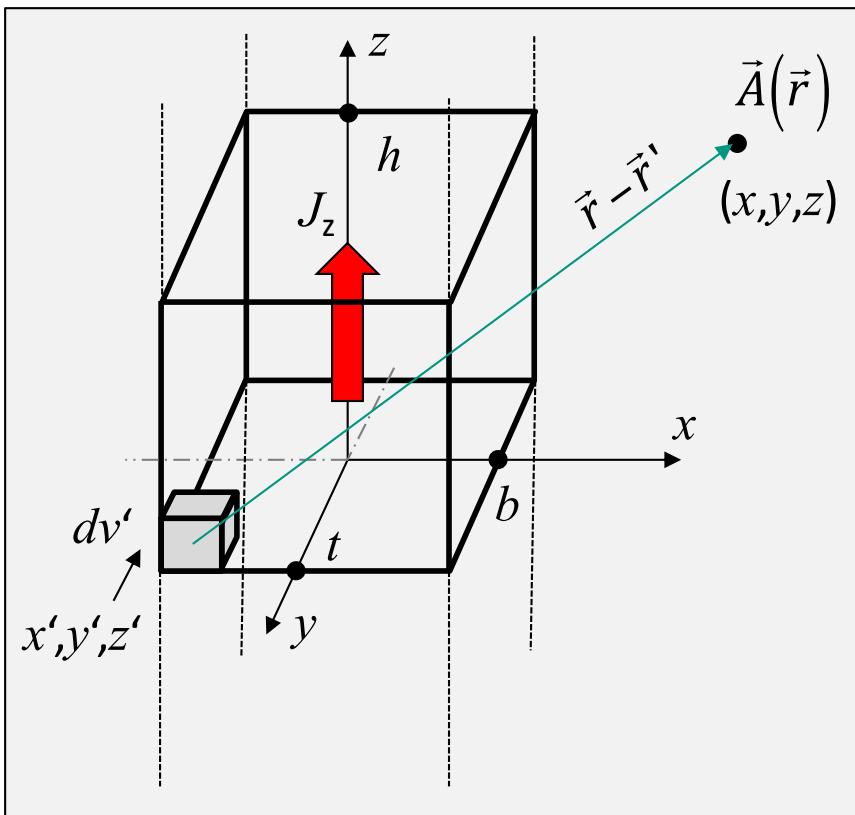
x, y, z – Komponenten unabhängig
voneinander, daher einzeln lösbar

8.2.2 Vektorpotential – Coulomb Integral als Lösung der Poisson-Gleichung II

Beispiel für

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Leiter mit rechteckigem Querschnitt, Vektorpotential am Messpunkt $\vec{A}(\vec{r})$ außerhalb des Leiters.



$J_z = \text{const. angenommen}$

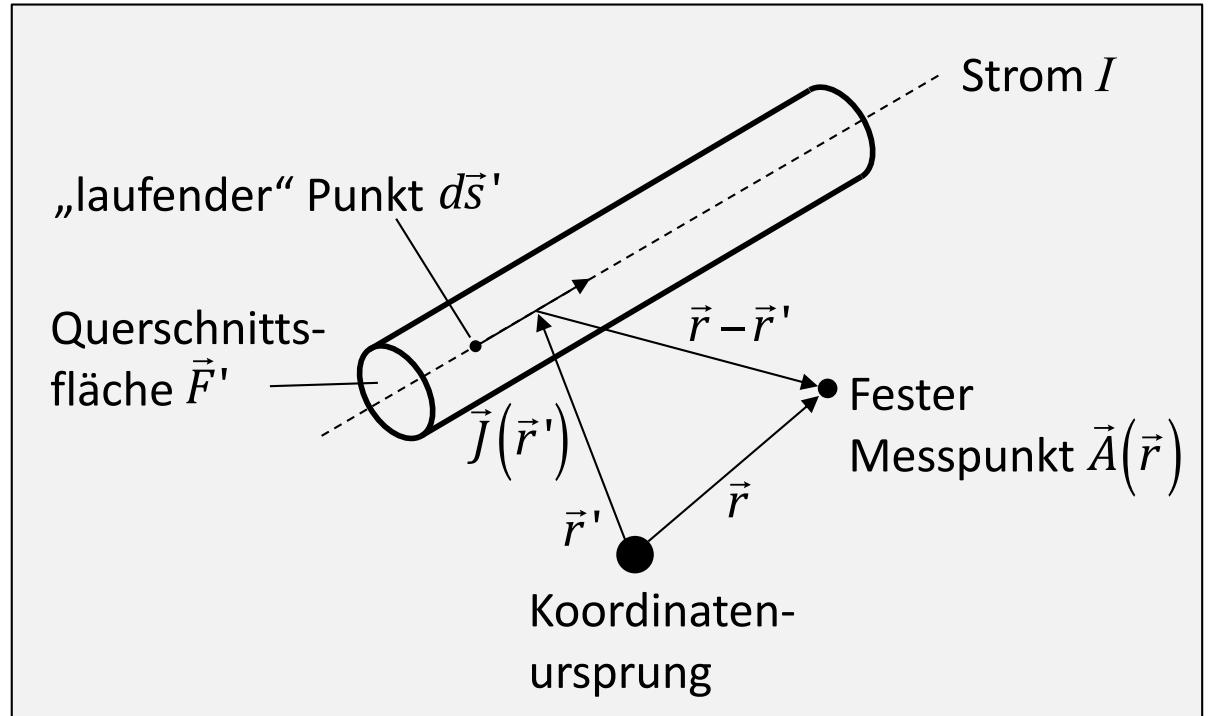
$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} J_z \cdot \int_{-b}^b \int_{-t}^t \int_0^h \frac{dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$\rightarrow \vec{A} = A_z(x, y, z) \cdot \vec{e}_z$$

Das Integral wird hier nicht weiter aufgelöst.

8.2.2 Vektorpotential – Coulomb Integral als Lösung der Poisson-Gleichung III

Spezialfall: Magnetisches Vektorpotential \vec{A} für dünne Leiter



Für dünne Leiter gilt näherungsweise

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{v}' = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{F}' \cdot d\vec{s}' = I \cdot d\vec{s}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}'$$

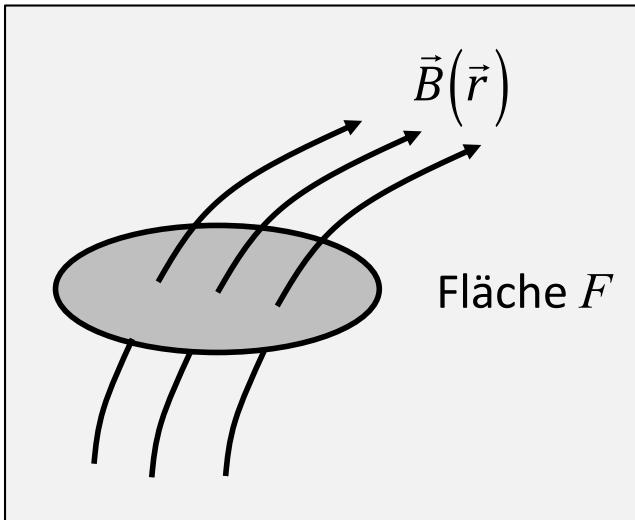
Allgemeiner Fall

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

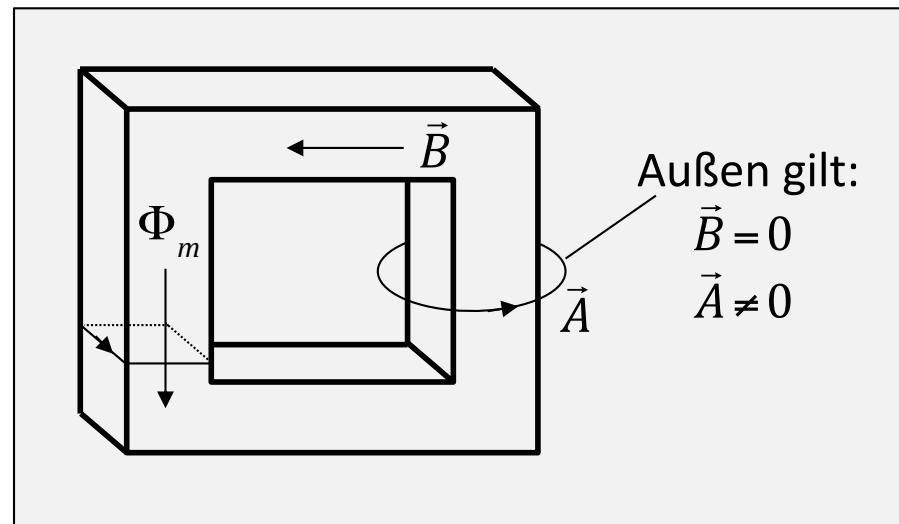
Spezialfall für dünne Leiter

8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential I

Berechnung Magnetischer Fluss aus Vektorpotential

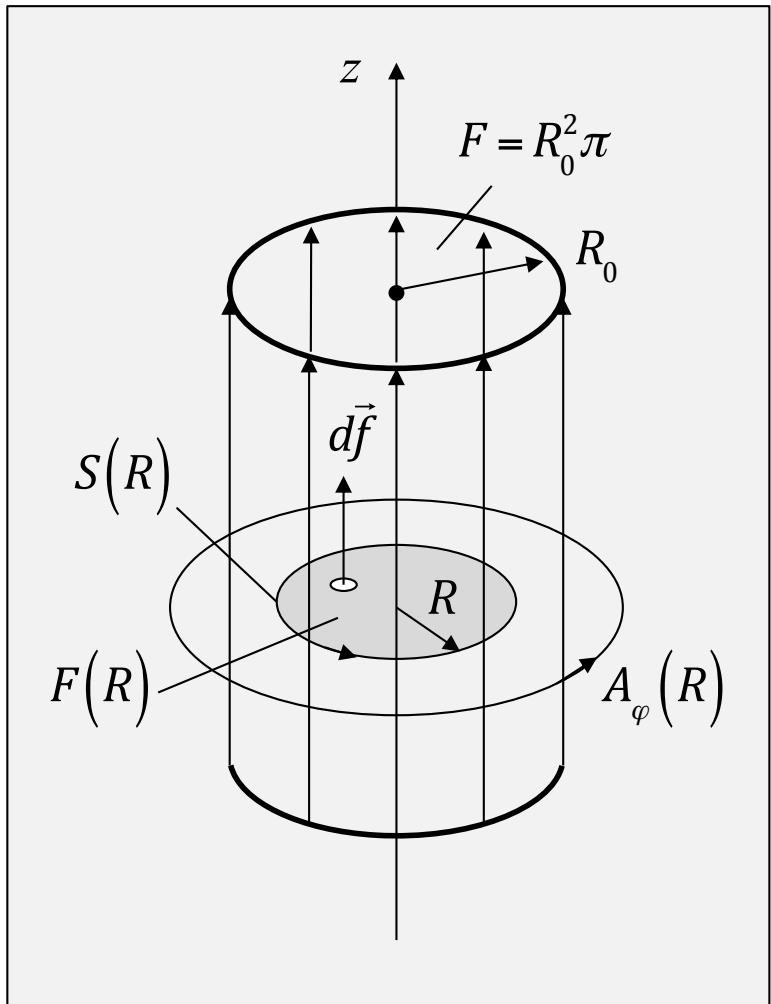


$$\Phi_m = \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f} \quad \text{mit } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$
$$\Phi_m = \int \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{f} \quad \text{mit Satz von Stokes}$$
$$\Phi_m = \oint_S \vec{A} d\vec{s} \quad \text{hohe praktische Bedeutung!}$$



8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential II

Beispiel: Vektorpotential eines zylindrischen homogenen Magnetfeldes



$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \cdot \vec{e}_z & R \leq R_0 \\ 0 & R > R_0 \end{cases}$$

$$\Phi_m \stackrel{\text{Def.}}{=} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\Phi_{mges} = B_0 R_0^2 \pi$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\rightarrow \iint_{F(R)} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \iint_{F(R)} \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_{S(R)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \Phi_m(R)$$

8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential III

Berechnung von A aus B

Innen $R \leq R_0$

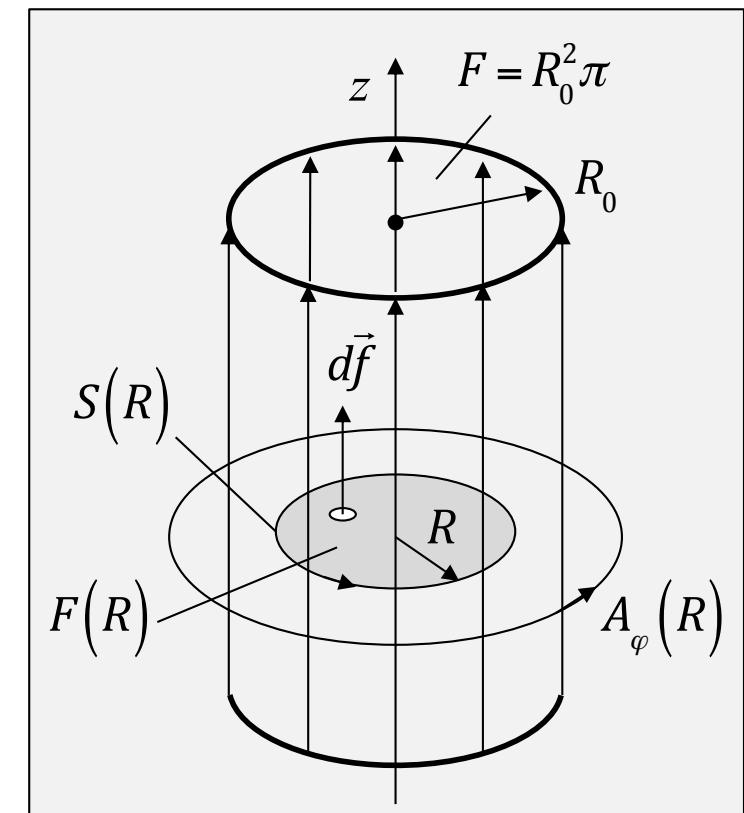
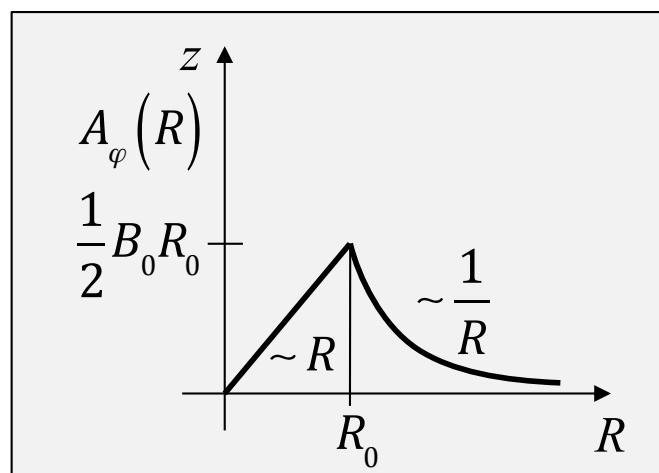
$$\begin{aligned} \iint_{F(R)} (B_0 \cdot \vec{e}_z) \cdot (df \cdot \vec{e}_z) &= B_0 R^2 \pi \\ &= \oint_{S(R)} (A_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot (R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) = A_\varphi(R) 2\pi R \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{A}(R) = \frac{1}{2} B_0 R \cdot \vec{e}_\varphi$$

Außen $R > R_0$

$$\begin{aligned} \iint_{F(R)} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= B_0 R_0^2 \pi = \Phi_{mges} \\ &= A_\varphi(R) \cdot 2\pi R \end{aligned}$$

$$\rightarrow \vec{A}(R) = \frac{1}{2} B_0 R_0^2 \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_\varphi$$



A ist mathematisch außerhalb der Spule ungleich Null.
Trotzdem existiert dort keine physikalisch messbare Größe:
 $\vec{B} = 0$ und damit $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$

8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential IV

Umkehrung: Berechnung von B aus A

Innen $R \leq R_0$

$$\begin{aligned}\vec{B}(R) &= \text{rot } \vec{A}(R) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R \cdot A_\varphi(R)) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{1}{2} B_0 R \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2} B_0 2R \cdot \vec{e}_z = B_0 \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

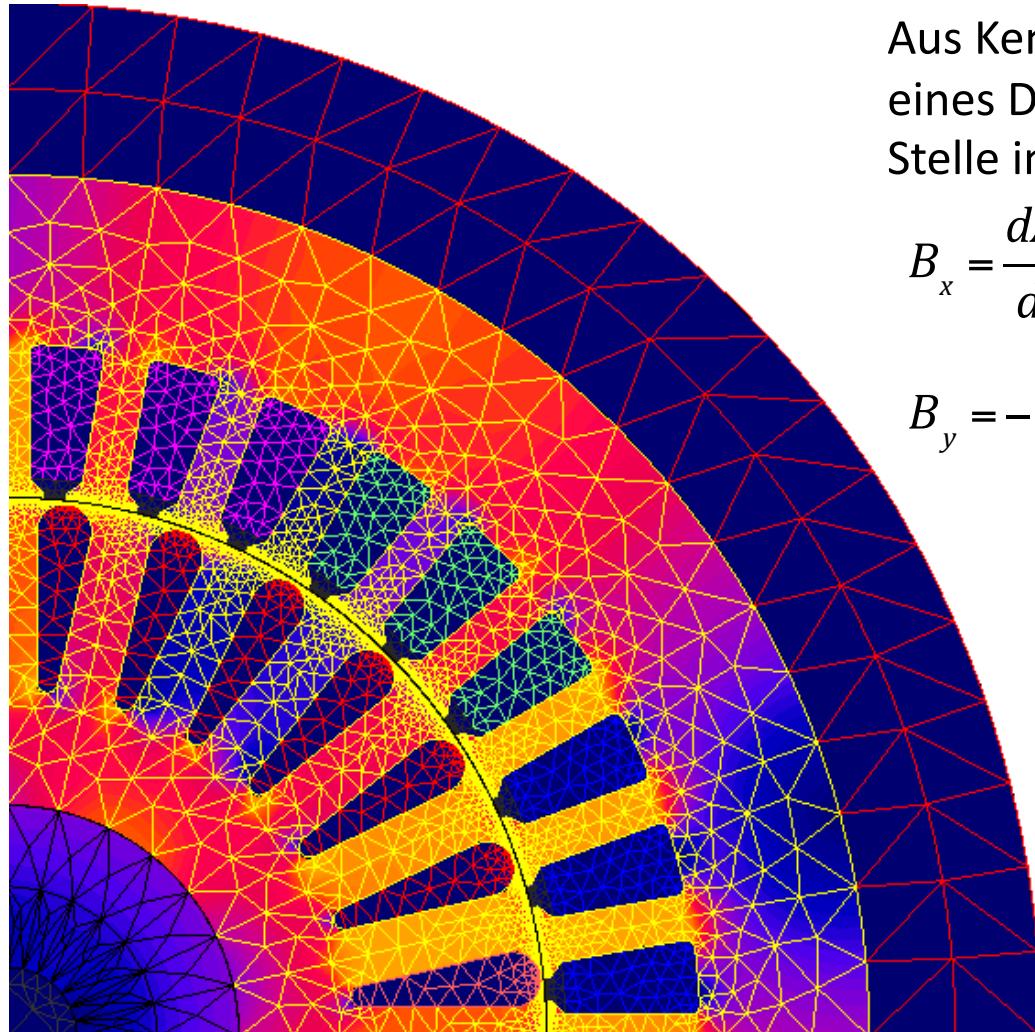
Außen $R > R_0$

$$\begin{aligned}\vec{B}(R) &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{1}{2} B_0 R_0^2 \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} B_0 R_0^2 \right) \cdot \vec{e}_z = 0 \\ \iint_{F(R>R_0)} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= \Phi_{mges} = \oint_{S(R>R_0)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_{2\pi} \left(\frac{1}{2} B_0 R_0^2 \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_\varphi \right) \cdot (R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} B_0 R_0^2 \cdot d\varphi = B_0 R_0^2 \pi = \Phi_{mges}\end{aligned}$$

- Außen messbares physikalisches Feld $B = 0$
- Außen nicht messbares Vektorpotential $A \neq 0$
- Kenntnis von A außen genügt, um den Fluss innen zu berechnen

8.3 Vektorpotential – Numerische Feldberechnung (Finite Elemente) I

Eine komplexe geometrische Anordnung wird in Dreiecke zerlegt. Wenn in z -Richtung (Länge ℓ) Symmetrie besteht, reicht eine 2D-Berechnung. Dann wird das Vektorpotential A_z in jedem Knotenpunkt durch eine numerische Optimierungsrechnung iterativ bestimmt.



Aus Kenntnis der Vektorpotentiale A_z an den Ecken i, j, k eines Dreiecks kann man die Flussdichten B_x, B_y an jeder Stelle im Inneren berechnen:

$$B_x = \frac{dA_z}{dy} = \frac{1}{2S} \left(A_i \cdot (x_k - x_j) + A_j \cdot (x_i - x_k) + A_k \cdot (x_j - x_i) \right)$$

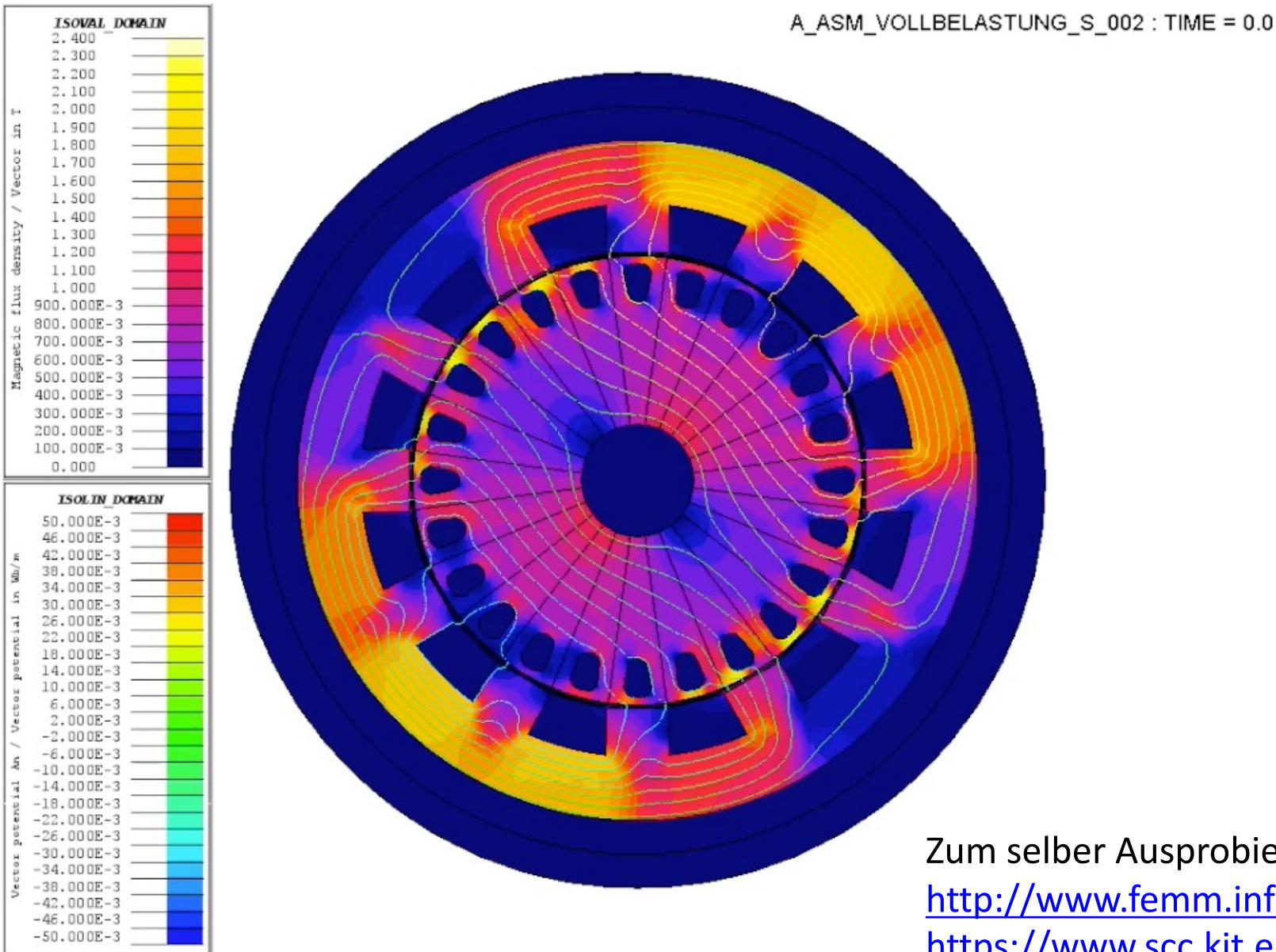
$$B_y = -\frac{dA_z}{dx} = \frac{1}{2S} \left(A_i \cdot (y_k - y_j) + A_j \cdot (y_i - y_k) + A_k \cdot (y_j - y_i) \right)$$

Der magnetische Fluss zwischen zwei beliebigen Punkten ergibt sich zu:

$$\Phi = \ell \cdot \left(A_z(x_1, y_1) - A_z(x_2, y_2) \right)$$

Vorteil: Für 2D-Anordnungen muss nur eine Komponente des Vektorpotentials in z -Richtung bestimmt werden. Bei 3D-Anordnungen hat man keinen Vorteil mehr.

8.3 Vektorpotential – Numerische Feldberechnung (Finite Elemente) II



Zum selber Ausprobieren:
<http://www.femm.info/wiki/HomePage>
<https://www.scc.kit.edu/produkte/6678.php>

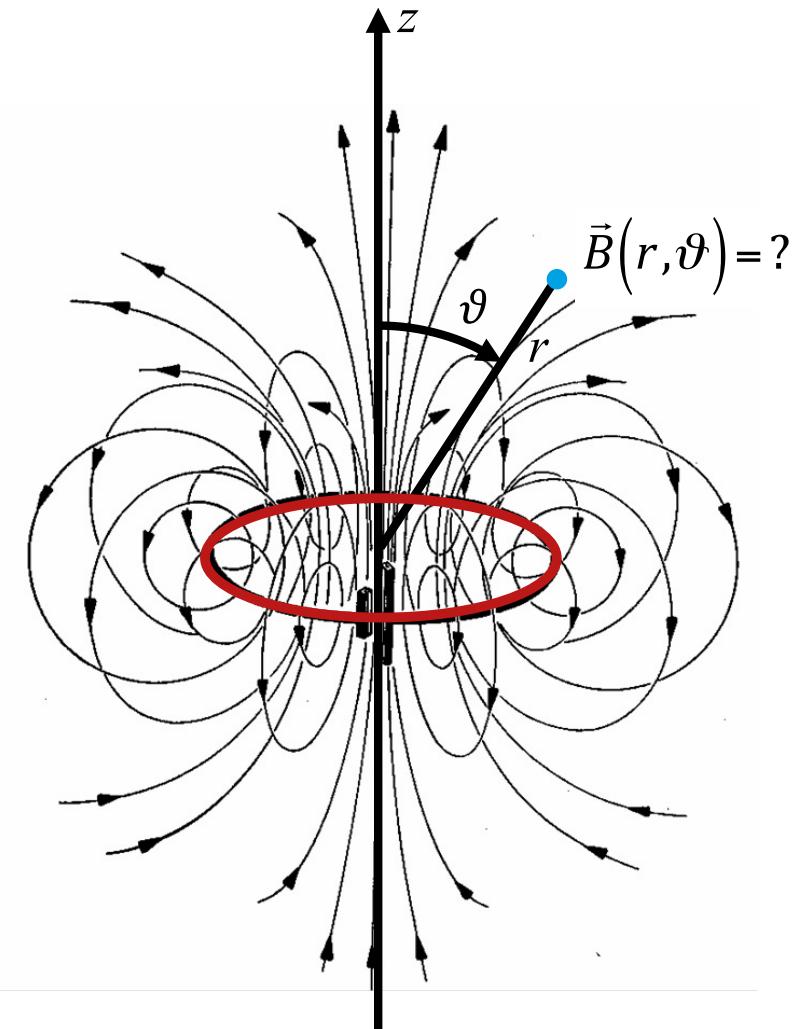
Lösung der Poisson-Gleichung für einen einfachen magnetischen Dipol

Ziel:

Berechnung des Magnetfeldes des magnetischen Dipols $\vec{B}(r, \vartheta)$ in Abhängigkeit vom Abstand r und dem Winkel ϑ .

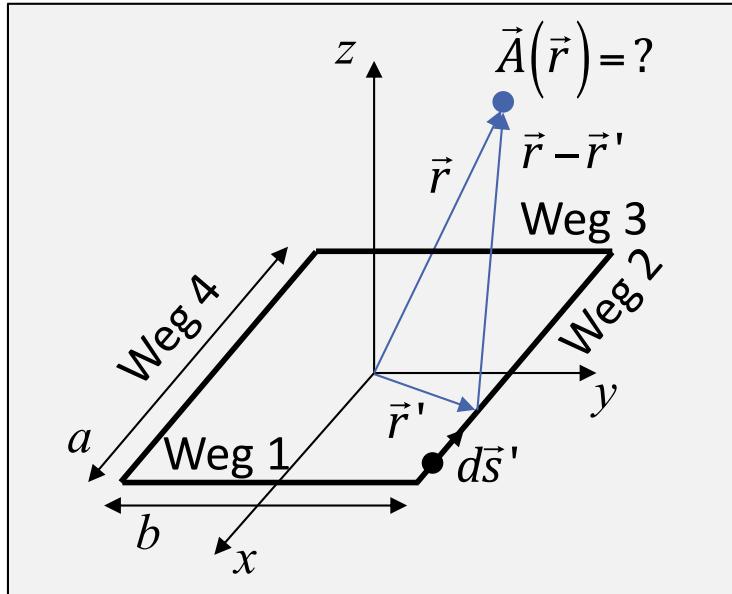
Methode:

1. Vereinfachung durch Betrachtung einer rechteckigen Leiterschleife anstelle einer runden,
2. Berechnung des Vektorpotentials in kartesischen Koordinaten,
3. Näherung für sehr kleine Abmessungen der Leiterschleife,
4. Nachweis der Äquivalenz der Lösung auch für runde Schleifen,
5. Transformation in Kugelkoordinaten,
6. Berechnung der magnetischen Flussdichte B .



9. Magnetischer Dipol II

1.+2. Vektorpotential einer rechteckigen Leiterschleife in kartesischen Koordinaten



Kleine Schleife bei $z=0$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Spezialfall dünne Leiter,
siehe Abschnitt 8.2.2

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{Weg1} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_y + \int_{Weg2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_x + \int_{Weg3} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_y + \int_{Weg4} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_x \right)$$

$$A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{Weg2}^{-a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{Weg4}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{Weg1}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{Weg3}^{-b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad A_z = 0$$

3. Berechnung für sehr kleine Schleifen

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 + z^2}} \\
 &\approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy'}} \\
 &= \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{2xx' + 2yy'}{r^2}}} \\
 &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{xx' + yy'}{r^2} \right)
 \end{aligned}$$

dabei ist $z' = 0$

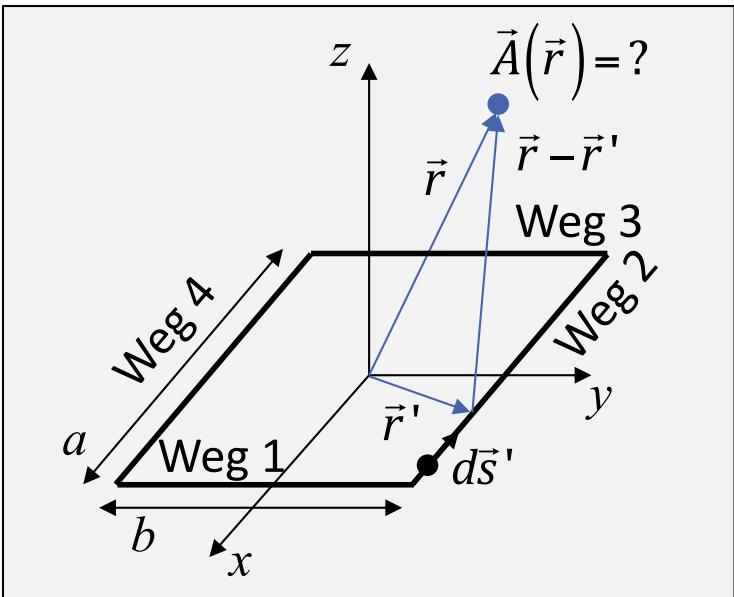
es gilt $x', y' \ll x, y$

es gilt $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Näherung $\frac{1}{\sqrt{1+\sigma}} \approx 1 - \frac{1}{2}\sigma$
 $\sigma \ll 1$

(Binomische Reihe (Potenzreihe))

9. Magnetischer Dipol IV



$$A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{Weg2}^{-a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{Weg4}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

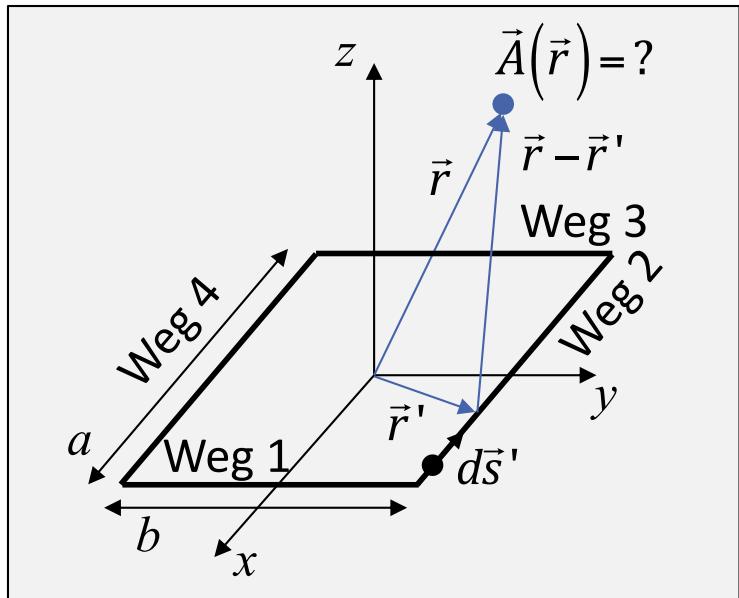
$$\rightarrow A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left\{ \int_{Weg2}^{-a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot x' + y \cdot (+b/2)}{r^2} \right) dx' + \int_{Weg4}^{+a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot x' + y \cdot (-b/2)}{r^2} \right) dx' \right\}$$

$$= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{y \cdot (b/2)}{r^3} \cdot (-2a) + \frac{x}{r^3} \cdot \underbrace{\left[\int_{Weg2}^{-a/2} x' dx' + \int_{Weg2}^{+a/2} x' dx' \right]}_{} \right\} = -\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot a \cdot b \cdot y$$

$a \cdot b = F$ Fläche

$$= 0$$

9. Magnetischer Dipol V



$$A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{Weg1}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{Weg3}^{-b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Weg 1: $x' = +a/2$

Weg 3: $x' = -a/2$

$$\begin{aligned} \rightarrow A_y &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left\{ \int_{Weg1}^{+b/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot (+a/2) + y \cdot y'}{r^2} \right) dy' + \int_{Weg3}^{-b/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot (-a/2) + y \cdot y'}{r^2} \right) dy' \right\} \\ &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{x \cdot (a/2)}{r^3} \cdot (+2b) + \frac{y}{r^3} \cdot \underbrace{\left[\int_{Weg1}^{+b/2} y' dy' + \int_{Weg3}^{-b/2} y' dy' \right]}_{=0} \right\} = +\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot a \cdot b \cdot x \end{aligned}$$

$a \cdot b = F$ Fläche

4. Nachweis der Lösung auch für runde Schleifen

Lösung $\vec{A}(x, y, z)$ für Drahtschleife:

$$A_x = -\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F \cdot y$$

$$A_y = +\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F \cdot x$$

$$A_z = 0$$

mit $a \cdot b = F$

- Das Ergebnis ist aufgrund der Annahme sehr kleiner Abmessungen unabhängig von den Abmessungen a und b der Schleife
- Sowohl eine sehr schmale Schleife mit $a < b$, als auch eine quadratische Schleife mit $a = b$ liefert das gleiche Ergebnis für gleiche Schleifenflächen $F = a \cdot b$
- Daher gilt dieses Ergebnis auch für eine runde Schleife

5. Transformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten

$$A_x(x, y, z) = -k \cdot y$$

$$A_y(x, y, z) = +k \cdot x$$

$$A_z(x, y, z) = 0$$

mit der Abkürzung $k = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F$

1. Schritt Ortsvektoren $(x, y, z) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi)$

mit $\begin{cases} x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ z = r \cdot \cos \vartheta \end{cases}$
(aus Formelsammlung)

$$A_x(r, \vartheta, \varphi) = -k \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

$$A_y(r, \vartheta, \varphi) = +k \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$A_z(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

9. Magnetischer Dipol VIII

2. Schritt Vektorfeld $A_x, A_y, A_z \rightarrow A_r, A_\vartheta, A_\varphi$

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin \vartheta \cos \varphi + A_y \sin \vartheta \sin \varphi + 0 \quad (\text{aus Formelsammlung}) \\ &= -kr \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + kr \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\vartheta &= A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi + 0 \quad (\text{aus Formelsammlung}) \\ &= -kr \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + kr \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (\text{aus Formelsammlung}) \\ &= +kr \sin \vartheta \sin^2 \varphi + kr \sin \vartheta \cos^2 \varphi \\ &= kr \sin \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = kr \sin \vartheta \end{aligned}$$

Zur Erinnerung vorige Folie:

$$\begin{aligned} A_x(r, \vartheta, \varphi) &= -k \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ A_y(r, \vartheta, \varphi) &= +k \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ A_z(r, \vartheta, \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung:

$$k = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F$$

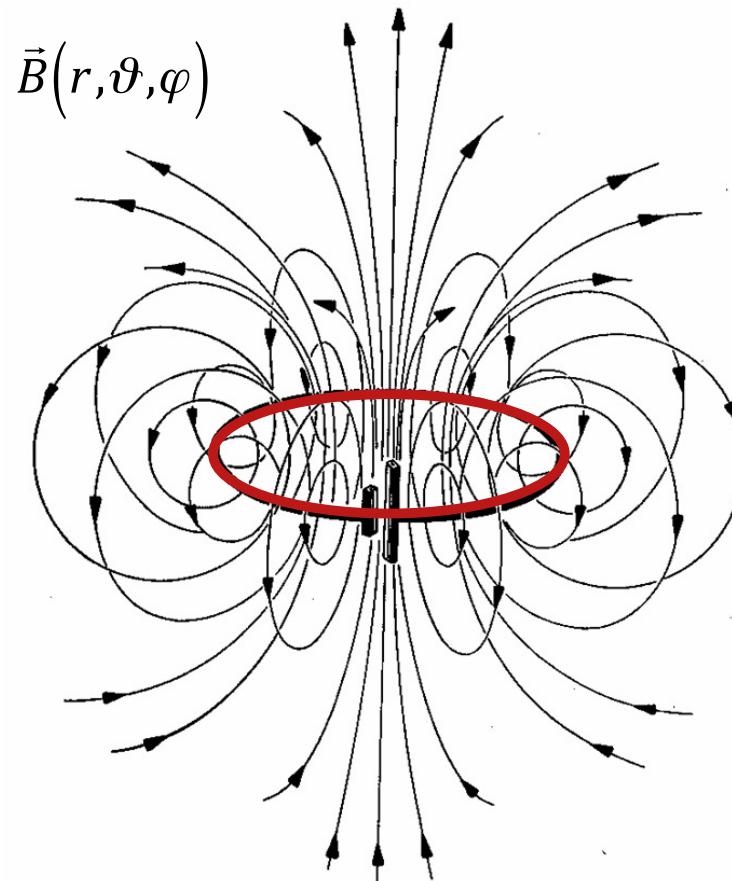
$$\rightarrow \vec{A}(r, \vartheta) = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi$$

6. Berechnung der magnetischen Flussdichte B

$$\vec{A}(r, \vartheta) = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \vec{B}(r, \vartheta) &= \text{rot} \left(A_\varphi \vec{e}_\varphi \right) \\
 &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \cdot F \cdot \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \sin \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \right] \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \cdot F \cdot \left[\left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{1}{r^2} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \sin \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \right] \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \cdot F \cdot \left[\frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sin \vartheta}{r^3} \vec{e}_\vartheta \right]
 \end{aligned}
 \quad (\text{aus Formelsammlung})$$

9. Magnetischer Dipol X



$$B_r = \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot F \cdot \frac{2\cos\vartheta}{r^3}$$

$$B_\vartheta = \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot F \cdot \frac{\sin\vartheta}{r^3}$$

$$B_\varphi = 0$$

Ziel: Direkte Berechnung von B aus J ohne magnetisches Vektorpotential A

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Lösung der Poisson-Gleichung für A ;
 A ist hier nur eine mathematische Zwischenlösung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \vec{A}(\vec{r})$$

$\operatorname{rot}_{(\vec{r})}$ Differentiation bezüglich der ungestrichenen Koordinaten

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) &= \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \vec{J}(\vec{r}') + \operatorname{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dV' \end{aligned}$$

Mathematik

$$\operatorname{rot}(\Psi \cdot \vec{G}) = \Psi \cdot \operatorname{rot} \vec{G} + \operatorname{grad} \Psi \times \vec{G}$$

hier

$$\Psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{G} = \vec{J}$$

10. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie II

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \text{rot}_{(\vec{r}')} \vec{J}(\vec{r}') + \text{grad}_{(\vec{r}')} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) d\vec{v}' \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(0 + \text{grad}_{(\vec{r}')} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) d\vec{v}' \quad \xrightarrow{\text{rot}_{(\vec{r}')} \vec{J}(\vec{r}') = 0} \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) d\vec{v}' \quad \xrightarrow{\vec{J}(\vec{r}') \text{ ist } \underline{\text{keine}} \text{ Funktion der ungestrichenen Koordinate } \vec{r}}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{v}'}$$

Biot-Savart Gesetz für beliebige Leiter

Damit ist die magnetische Flussdichte B direkt aus der Stromdichte J per Integration berechenbar.

10. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie III

Nebenrechnung

$$\text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = ?$$

mit

$$\vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\vec{e}_x + (y - y')\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\dots}} \\ &= \vec{e}_x \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} 2(x - x') + \vec{e}_y \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\dots}^3} 2(y - y') + \vec{e}_z \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\dots}^3} 2(z - z') \\ &= -\vec{e}_x \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} - \vec{e}_y \frac{(y - y')}{\sqrt{\dots}^3} - \vec{e}_z \frac{(z - z')}{\sqrt{\dots}^3} \\ &= -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

10. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie IV

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Biot-Savart
allgemein

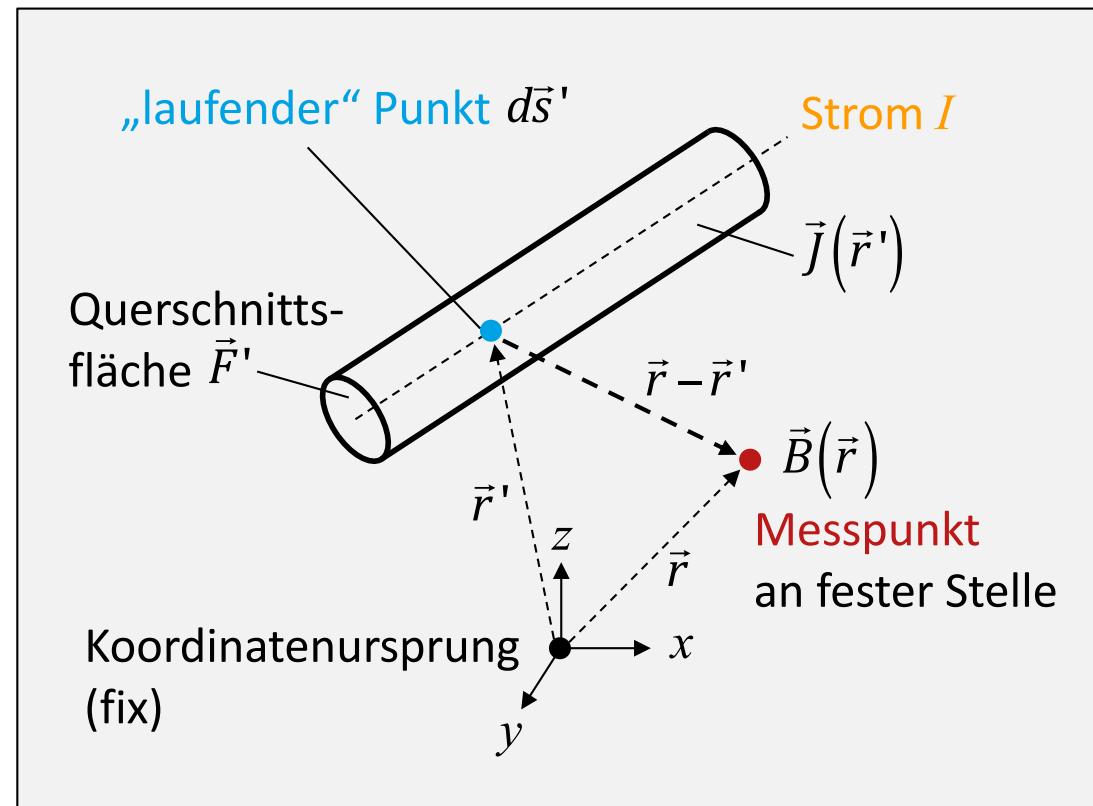
Für dünne Leiter gilt:

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot dV' = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{F}' \cdot d\vec{s}' = I \cdot d\vec{s}'$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{I \cdot d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot-Savart Gesetz für dünne Leiter



Magnetische Flussdichte B als Funktion des Leitungsstroms I und der Leitergeometrie

Beispiel: Gerader Leiter in z -Richtung

$$\vec{B}(\vec{r}) =$$

$$\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0$$

$$\vec{r}' \Rightarrow \begin{cases} x' = x_0 & \text{fest} \\ y' = y_0 & \text{fest} \\ z' & \text{variabel} \end{cases}$$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\vec{e}_z \times ((x - x_0)\vec{e}_x + (y - y_0)\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} dz'$$

$$= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\vec{e}_y \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x - x_0)dz'}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{(y - y_0)dz'}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} + 0 \right)$$

Speziell Draht auf z -Achse, d.h. $x_0 = 0, y_0 = 0$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\vec{e}_y \int_{z_1}^{z_2} \frac{x \cdot dz'}{\left(x^2 + y^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{y \cdot dz'}{\left(x^2 + y^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \right)$$

