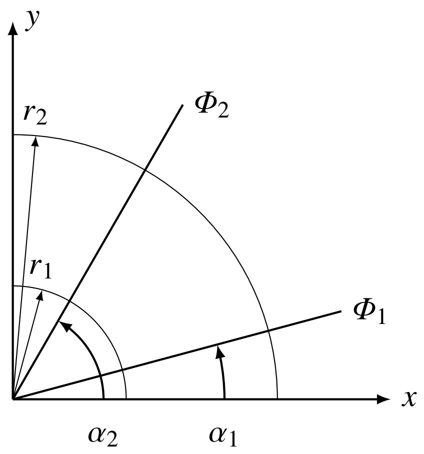
EMFW Übungsblatt 4

Teil 1: Felder

Aufgabe 1:

Gegeben sind zwei in z- und r-Richtung unendlich ausgedehnte, leitende Platten, die im Winkel α_1 bzw. α_2 angeordnet sind. Im Punkt (0,0) der xy-Ebene seien beide Platten *nichtleitend* miteinander verbunden. Das elektrische Potential der beiden Platten ist Φ_1 und Φ_2.



a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Gleichung die Potentialfunktion $\Phi(\alpha)$ für $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ zwischen den Platten. *Hinweis:* Überlegen Sie sich ganz genau, von welchen Variablen das Potential abhängen kann. Berücksichtigen Sie die unendliche Ausdehnung des Problems (in z- und r-Richtung).

b) Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{D}$, und skizzieren Sie die Feldlinien sowie die Äquipotentialflächen. *Hinweis:* Nehmen Sie an, der Winkel $\alpha_2 - \alpha_1$ sei so klein, dass das Feld außerhalb dieses Bereichs vernachlässigbar klein wird, also $\vec{E}_{\text{außen}} \approx 0$.

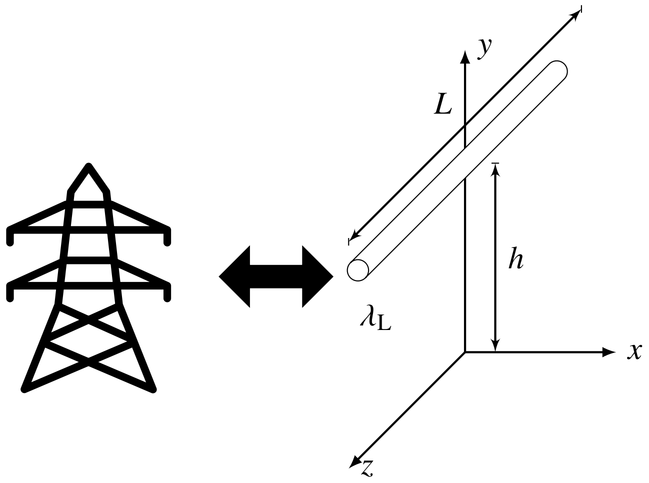
c) Bestimmen Sie für beide Platten die Flächenladungsdichte $\sigma(r)$.

d) Nun werden beide Platten bei r_1 und r_2 abgeschnitten (siehe Bild). Bestimmen Sie die Ladung pro Längeneinheit Q/l (l in z-Richtung) unter der Annahme, dass die Feldverteilung sich nicht ändert (gilt für $r_2 - r_1 \gg r_2(\alpha_2 - \alpha_1)$).

e) Wie groß ist die Kapazität pro Längeneinheit C/l ?

Aufgabe 2:

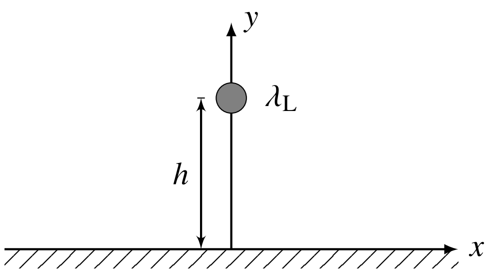
Eine Freileitungsanordnung soll stark vereinfacht als eine in z-Richtung ausgedehnte Linienladung (Ladung je Längeneinheit λ_L) im Abstand h zur xz-Ebene betrachtet werden.



Im ersten Schritt soll die Linienladung frei im Vakuum ohne weitere Randbedingungen betrachtet werden. Die Länge der Linienladung beträgt L. Es soll gelten $\Phi(\infty) = 0$.

a) Bestimmen Sie das elektrische Potential Φ in der xz-Ebene mit Hilfe des Coulombpotentials.

Im nächsten Schritt soll der Halbraum $y \leq 0$ als ideal leitfähig angenommen werden. Für die Länge des Linienleiters soll gelten $L \to \infty$.



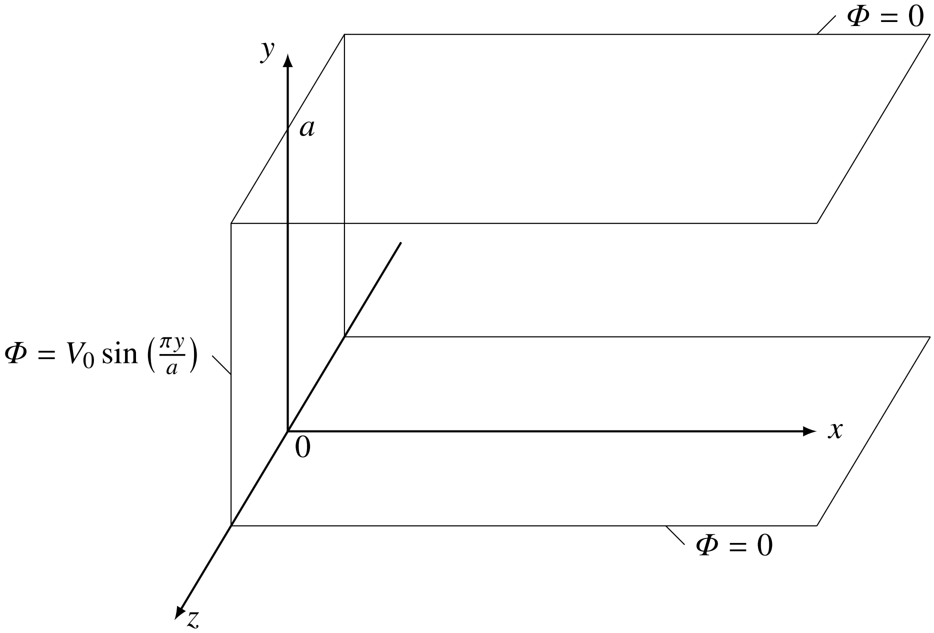
b) Es soll das Potential Φ im gesamten Raum bestimmt werden. Gehen Sie dafür wie folgt vor:
   - Bestimmen Sie hierzu zunächst die die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und Potential Φ einer Linienladung im Ursprung.
   - Überführen Sie dieses Potential in ein lokales Koordinatensystem und bestimmen Sie mit Hilfe der Spiegelungsmethode die Integrationskonstante.

c) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte σ auf der Leiteroberfläche bei $y = 0$ und berechnen Sie die Gesamtladung auf der Leiteroberfläche bezogen auf die Leiterlänge Q/l.

Hinweis: Das Potential der Linienladung ohne die gedachte Spiegelladung ist nicht endlich. Mittels unbestimmter Integration kann dieses Problem umgangen werden.

Aufgabe 3:

Eine in z-Richtung unendlich ausgedehnte Anordnung besteht aus zwei in $+x$-Richtung unendlich ausgedehnten Platten bei $y = 0$ und $y = a$ mit dem Potential $\Phi = 0$ und einer gegenüber den anderen Platten isolierten Platte bei $x = 0$ mit dem Potential $\Phi = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$. Außerdem gilt $\Phi \to 0$ für $x \to \infty$.



Berechnen Sie das Potential im Bereich $x = 0 \ldots \infty,\ y = 0 \ldots a$ mit dem Separationsansatz für die Laplacegleichung.

Hinweise zum Lösen der Aufgabe:

a) Separieren Sie die Laplacegleichung $\Delta\Phi = 0$ mit dem Produktansatz $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Achten Sie dabei auf eine geschickte Wahl des Vorzeichens der Konstanten $\pm k^2$. Je nach der Wahl des Vorzeichens erhält man als allgemeine Lösung entweder: $A \sin kx + B \cos kx$ oder $Ce^{kx} + De^{-kx}$. Überlegen Sie welche der Lösungen besser zu den Randbedingungen passt. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für $X(x)$ und $Y(y)$.

b) Bestimmen sie mit Hilfe der Randbedingungen die spezielle Lösung der Differentialgleichung.