Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Industrielle Informationstechnik

# Signale und Systeme

## Vorlesung 3: Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

# Inhalt

# Zeitkontinuierliches System

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t) = S\{u\}(t)$$

Solche Diagramme nennen wir Blockdiagramme. Die Blöcke entsprechen Systemen, die Pfeile zeigen Ein- und Ausgangssignale.

Ein zeitkontinuierliches System $y = S\{u\}$ bildet zeitkontinuierliche Eingangssignale $u(t)$ auf zeitkontinuierliche Ausgangssignale $y(t)$ ab.

Hier einige elementare Beispiele.

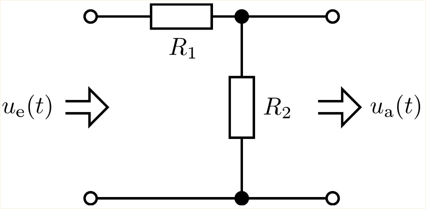
1. Skalierung: $y(t) = au(t)$ mit $a \in \mathbb{C}$ konstant
2. Zeitspiegelung: $y(t) = u(-t)$
3. Integrator: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \mathrm{d}\tau$
4. Quadratur: $y(t) = x^2(t)$

Beim Integrator ergibt z.B. das Eingangssignal $u(t) = 1$ kein gültiges Ausgangssignal, da das Integral immer unendlich ergibt.

Allgemein sind viele System nur für bestimmte Eingangssignale wohldefiniert. Daher sind Signalräume nützlich.

# Weitere Beispiele
## Spannungsteiler

Wir betrachten einen Spannungsteiler mit Eingangsspannung $u = u_e$ und Ausgangsspannung $y = u_a$:



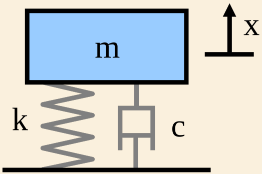

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes erhalten wir

$$y(t) = u_a(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_e(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u(t).$$

# Weitere Beispiele

## Gedämpfetes Mass-Feder-System

Wir betrachten ein gedämpftes Masse-Feder-System:

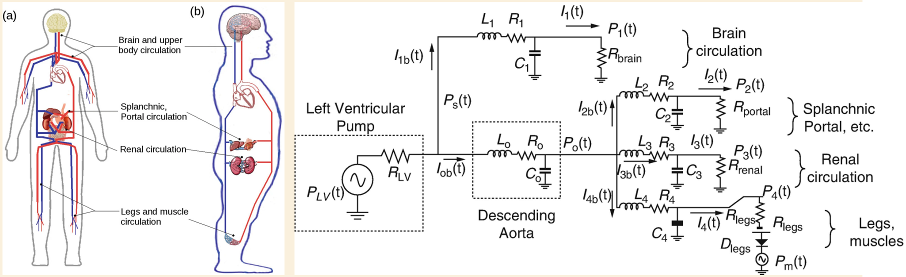



Mit Hilfe der Newton'schen Gesetze erhält man

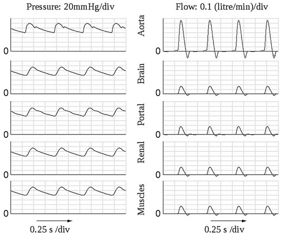
$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x(t) = u(t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \zeta = \frac{c}{2m\omega},$$

wobei $y(t) = x(t)$ die Auslenkung und $u(t)$ die äusseren Kräfte beschreibt.

# Weitere Beispiele
## Blutzirkulation

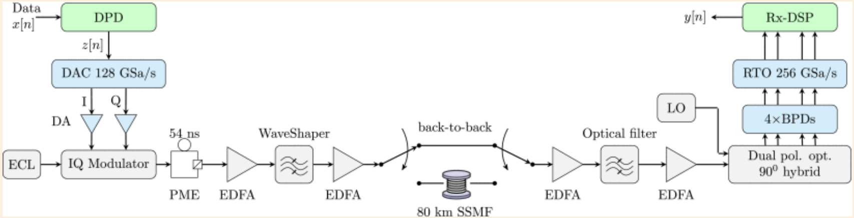



- Blutzirkulation kann analog zu elektrischen Schaltungen beschrieben werden. Hier ein vereinfaches Modell aus [3, Kap. 14].
- Eingangssignal: Blutdruck $u(t) = P_{\mathrm{LV}}(t)$ Ausgang der linken Herzkammer
- Ausgangssignale $y_i(t) = P_i(t)$: Blutdruck an verschiedenen anderen Orten




Bildquelle(n): [3, Kap. 14]

# Weitere Beispiele
## Faseroptisches Datenübertragungssystem

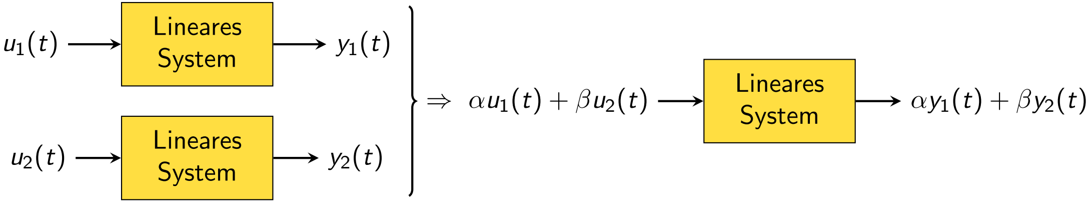



Schematic of a 128 GBaud experimental setup.

- Hier ein Beispiel aus einem aktuellen Forschungsaufsatz [4]
- Wir sehen das Blockdiagramm eines experimentellen faseroptischen Datenübertragungssystems
- Jeder Block beschreibt ein eigenes Subsystem
- Ziel war Design des „DPD“ Blocks, so dass Unvollkommenheiten in den anderen Subsystemen möglichst gut ausgeglichen werden

- DPD: digital pre-distortion
- DAC: digital-to-analog converter
- DA: driver amplifier
- ECL: external cavity laser
- PME: polarization multiplexing emulator
- EDFA: Erbium doped fiber amplifier
- LO: local oscillator
- BPD: balanced photo diode
- RTO: real time oscilloscope
- DSP: digital signal processing

# Systemeigenschaften
## Linearität




Ein System S ist linear falls

$$S\{\alpha u_1 + \beta u_2\} = \alpha S\{u_1\} + \beta S\{u_2\}$$

für alle zulässigen Signale $u_1, u_2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. Skalierung: $y(t) = au(t)$ $\rightarrow$ linear
2. Zeitspiegelung: $y(t) = u(-t)$ $\rightarrow$ linear
3. Integrator: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$ $\rightarrow$ linear
4. Quadratur: $y(t) = x^2(t)$ $\rightarrow$ nicht linear

$\rightarrow$ Anschrieb 3.1

# Systemeigenschaften
## Zeitinvarianz

$u(t) \longrightarrow$ Zeitinvariantes System $\longrightarrow y(t) \Rightarrow u(t-t_0) \longrightarrow$ Zeitinvariantes System $\longrightarrow y(t-t_0)$

Ein System S ist zeitinvariant, falls für jedes zulässige Eingangssignal $u$ gilt:

$$v(t) = u(t-t_0) \quad \Rightarrow \quad S\{v\}(t) = S\{u\}(t-t_0), \qquad \forall t, t_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Skalierung: $y(t) = au(t)$ $\rightarrow$ zeitinvariant
2. Zeitspiegelung: $y(t) = u(-t)$ $\rightarrow$ nicht zeitinvariant
3. Integrator: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$ $\rightarrow$ zeitinvariant
4. Quadratur: $y(t) = x^2(t)$ $\rightarrow$ zeitinvariant

Ein System ist LTI, falls es linear (und) zeitinvariant ist.

LTI = linear time-invariant

$\rightarrow$ Anschrieb 3.2

# Systemeigenschaften
## Stabilität

$u(t)$ beschränkt $\longrightarrow$ **Stabiles System** $\longrightarrow$ $y(t)$ beschränkt

Ein System $S$ ist (BIBO) stabil, falls jedes zulässige beschränke Eingangssignal $u$ zu einem beschränkten Ausgangssignal $y = S\{u\}$ führt:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| < \infty.$$

- Instabile Systeme können durch Rückkopplungen entstehen (z.B. Mikrofon-Feedback)

1. Skalierung: $y(t) = au(t)$ $\rightarrow$ stabil
2. Zeitspiegelung: $y(t) = u(-t)$ $\rightarrow$ stabil
3. Integrator: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$ $\rightarrow$ nicht stabil
4. Quadratur: $y(t) = x^2(t)$ $\rightarrow$ stabil

BIBO = bounded-input bounded-output

Man kann equivalenterweise auch fordern, dass

$$\exists M_u : |u(t)| \leq M_u, \ \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \exists M_y : |y(t)| \leq M_y, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind $M_u$ und $M_y$ beliebige (natürlich endliche) Konstanten.

$\rightarrow$ Anschrieb 3.3

# Systemeigenschaften
## Kausalität

Ein System $S$ ist kausal, falls für alle zulässigen Eingangssignale $u_1$ und $u_2$ sowie beliebige Zeitpunkte $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u_1(t) = u_2(t), \quad \forall t \leq t_0 \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = y_2(t), \quad \forall t \leq t_0.$$

Wir üblich bezeichnen

$y_1 = S\{u_1\}$ und $y_2 = S\{u_2\}$

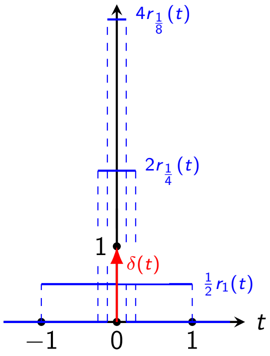
die entsprechenden Ausgangssignale.

- Solange zwei Eingangssignale gleich bleiben, müssen sie also zum gleichen Ausgangssignal führen
- Der aktuelle Ausgangswert $y(t_0)$ hängt in einem kausalen System also nicht von zukünftigen Eingangswerten $u(t)$ mit $t > t_0$ ab

1. Skalierung: $y(t) = au(t)$ $\rightarrow$ kausal
2. Zeitspiegelung: $y(t) = u(-t)$ $\rightarrow$ nicht kausal
3. Integrator: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$ $\rightarrow$ kausal
4. Quadratur: $y(t) = x^2(t)$ $\rightarrow$ kausal

$\rightarrow$ Anschrieb 3.4

# Dirac-Impuls



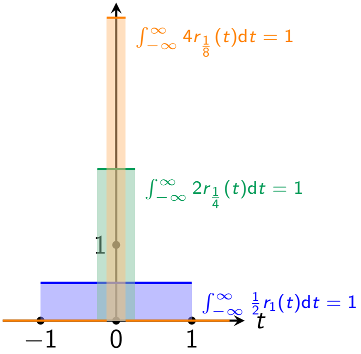

- Wir wollen einen kurzen, aber starken Impuls darstellen
- Dazu nutzen wir ein Rechtecksignal $\frac{1}{2\Delta}r_\Delta$ mit $\Delta > 0$ klein
- Es wird vorteilhaft sein, den Grenzwert $\Delta \to 0^+$ zu betrachten

Der Dirac-Impuls $\delta(t)$ beschreibt folgenden Formalismus. Wir ersetzen $\delta$ durch $\frac{1}{2\Delta}r_\Delta$ und lassen am Ende $\Delta \to 0^+$ laufen. Grafisch stellen wir ihn durch einen Pfeil ($\uparrow$) dar, wobei die Höhe die Fläche unter dem Dirac-Impulse angibt.

Es ist möglich andere Formen als Rechtecke zu nutzen, solange die Approximationen eine sog. Dirac-Folge bilden.

Die Notation $\Delta \to 0^+$ bedeutet, dass im Grenzwert nur positive Werte von $\Delta$ zulassen.

# Dirac-Impuls
## Fläche unter dem Dirac-Impuls




Das folgende Resultat illustriert die Anwendung des Dirac-Impulses.

Es sei $a < 0 < b$. Dann ist

$$\int_a^b \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$

- Die Auswertung des Dirac-Impulses macht nur unter Integralen Sinn
- Ohne Integral werten wir den Dirac-Impuls einfach nicht aus und behandeln ihn wie ein Signal mit besonderen Eigenschaften

Die Fläche unter $\delta(t)$ ist also 1.

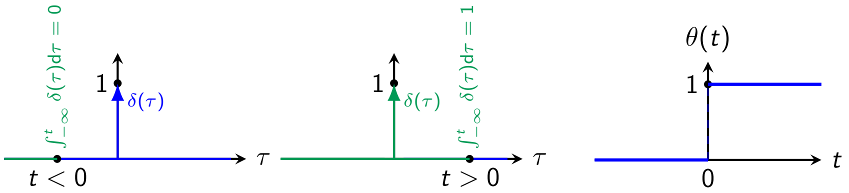
Daher gilt allgemein

$$\int_a^b A\delta(t)\mathrm{d}t = A\int_a^b \delta(t)\mathrm{d}t = A$$

für alle $A \in \mathbb{C}$.

$\longrightarrow$ Anschrieb 3.5

# Dirac-Impuls
## Ableitung des Einheitssprungs




Da die Fläche unter dem Dirac-Impuls 1 ist, gilt

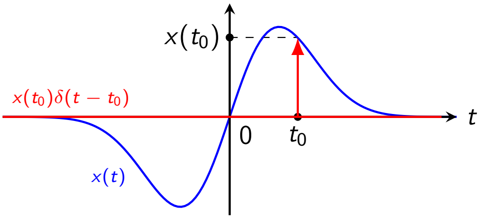
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t < 0 \end{cases} = \theta(t).$$

In Abwesenheit eines Integrals schreiben wir daher

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \delta(t).$$

Bei $t = 0$ würde das Integral $\frac{1}{2}$ ergeben, während wir $\theta(0) = 1$ definiert haben. Die Gleichheit gilt daher nur im quadratischen Mittel (sh. Vorlesung 2).

# Dirac-Impuls
## Ausblendeigenschaft




Falls $x(t)$ im Punkt $t_0$ stetig ist und $a < t_0 < b$, so gilt

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = \int_a^b x(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t.$$

In Abwesenheit eines Integrals schreiben wir daher

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0).$$

→ Anschrieb 3.6

# Impulsantwort

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow g(t)$$

Das Ausgangssignal $g(t)$, welches dem Eingangsignal $x(t) = \delta(t)$ entspricht, heißt Impulsantwort des Systems.

Die Impulsantwort des Integrators $y(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)\mathrm{d}t$ ist z.B.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t < 0 \end{cases} = \theta(t)$$

Siehe auch Folie 12. Die Gleichheit gilt hier im quadratischen Mittel.

Welchen Wert man bei $t = 0$ wählt ist später unwichtig.

# Faltungsdarstellung von LTI Systemen

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI System}} \longrightarrow y(t) = (g * u)(t)$$

Falls ein System $S$ linear zeitinvariant (LTI) ist, so gilt

$$y(t) = S\{u\}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Die Operation $(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ heißt Faltung.

Die Impulsantwort des Integrators ist $g(t) = \theta(t)$ (sh. Folie 14). Eingesetzt in die Faltungsdarstellung erhalten wir nun die Systembeschreibung zurück:

$$y(t) = (u * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\underbrace{\theta(t-\tau)}_{\substack{0 \text{ für } \tau \geq t \\ 1 \text{ sonst}}}\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

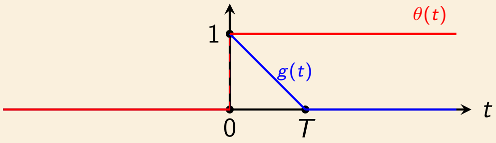
Das Ausgangssignal eines LTI Systems gleicht also der Faltung von Eingangssignal und Impulsantwort!

Da die Impulsantwort $g(t)$ integriert wird, ist der bei $t = 0$ gewählte Wert tatsächlich unwichtig (vgl. Folie 14).

→ Anschrieb 3.7

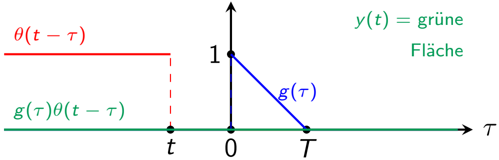
# Beispiel

## Faltung eines Dreiecks mit dem Einheitssprung




Wir berechnen die Faltung $y = g \star \theta$ zwischen obigen Signalen.

**1. Fall: $t < 0$**



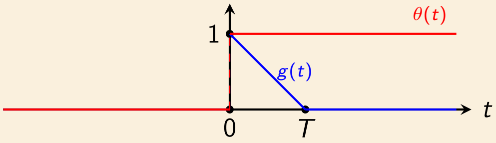

In diesem Fall überlappen $g(\tau)$ und $\theta(t-\tau)$ sich nicht. Die Fläche unter $g(\tau)\theta(t-\tau)$ ist 0.

Das gefaltete Signal zur Zeit $t$ entspricht der Fläche unter der grüne Kurve:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\theta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 0\mathrm{d}t = 0$$

# Beispiel

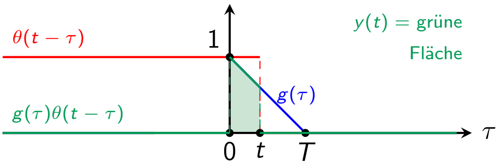
## Faltung eines Dreiecks mit dem Einheitssprung




Wir berechnen die Faltung $y = g \star \theta$ zwischen obigen Signalen.

**2. Fall: $0 \leq t < T$**

Nun überlappen $g(\tau)$ und $\theta(t-\tau)$ sich im Intervall $[0, t]$

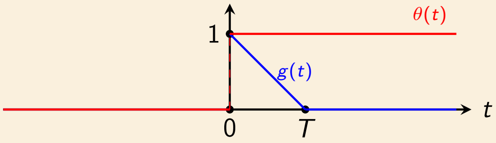



Das gefaltete Signal zur Zeit $t$ entspricht der Fläche unter der grüne Kurve:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\theta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \left(1 - \frac{t}{T}\right)\mathrm{d}\tau = \left[t - \frac{t^2}{2T}\right]_0^t = t - \frac{t^2}{2T}$$

# Beispiel

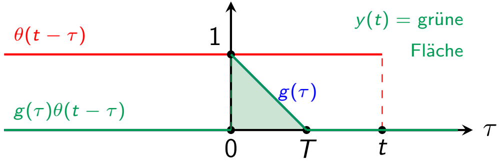
## Faltung eines Dreiecks mit dem Einheitssprung




Wir berechnen die Faltung $y = g \star \theta$ zwischen obigen Signalen.

**3. Fall: $t \geq T$**

Nun überlappen $g(\tau)$ und $\theta(t-\tau)$ sich im Intervall $[0, T]$

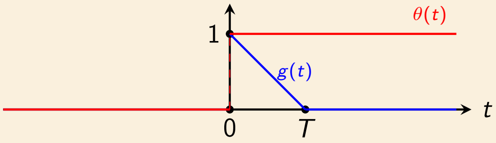



Das gefaltete Signal zur Zeit $t$ entspricht der Fläche unter der grüne Kurve:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\theta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)\mathrm{d}\tau = \left[t - \frac{t^2}{2T}\right]_0^T = T - \frac{T^2}{2T} = \frac{T}{2}$$

# Beispiel

## Faltung eines Dreiecks mit dem Einheitssprung

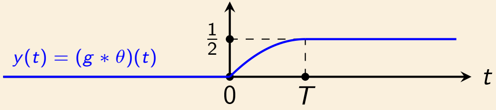



Wir berechnen die Faltung $y = g \star \theta$ zwischen obigen Signalen.

**Ergebnis:** Zusammengefasst erhalten wir

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ t\left(1 - \frac{t}{2T}\right), & \text{falls } 0 \leq t < T \\ \frac{T}{2}, & \text{falls } t > T \end{cases} .$$

Das gefaltete Signal ist ein geglätteter, skalierter Einheitsspung:



# Beschreibung von Systemeigenschaften ...

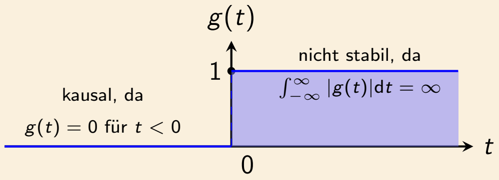
## ... mit Hilfe der Impulsantwort

Ein LTI System mit Impulsantwort $g(t)$ ist

- stabil genau dann, wenn $g \in L^1(\mathbb{R})$;
- kausal genau dann, wenn $g(t) = 0$ für alle $t < 0$.

d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \mathrm{d}t < \infty$

Die Impulsantwort des Integrators ist $\theta(t)$. Er ist daher kausal, aber nicht stabil.




→ Anschrieb 3.8

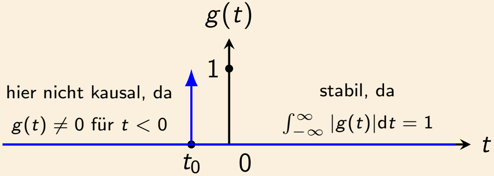
# Beschreibung von Systemeigenschaften ...

## ... mit Hilfe der Impulsantwort

Die Impulsantwort der Zeitverschiebung $y(t) = u(t - t_0)$ ist

$$g(t) = \delta(t - t_0).$$

Das System ist stabil und kausal falls $t_0 > 0$. Für $t_0 < 0$ ist es nicht kausal.



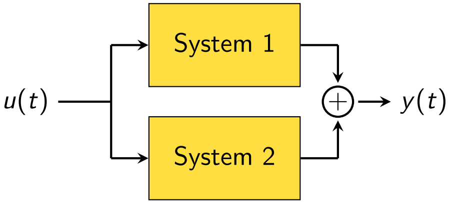
# Eigenschaften der Faltung

Für Signale $x, y, z$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt folgendes.

1. Kommutativität: $x * y = y * x$
2. Distributivität: $x * (y + z) = x * y + x * z$
3. Assoziativität mit skalarer Multiplikation: $\alpha(x * y) = (\alpha x) * y + x * (\alpha y)$
4. Assoziativität: $x * (y * z) = (x * y) * z$

$\longrightarrow$ Anschrieb 3.9

# Verknüpfungen von LTI Systemen
## Parallelschaltung




Die Parallelschaltung zweier Systeme $S_1$ und $S_2$ ist das System

$$S\{u\} = S_1\{u\} + S_2\{u\}.$$

Die Impulsantwort von $S$ ist die Summe der Impulsanworten von $S_1$ und $S_2$:

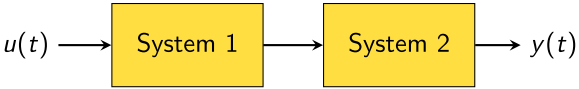
$$g = S\{\delta\} = S_1\{\delta\} + S_2\{\delta\} = g_1 + g_2.$$

Da die Faltung distributiv ist:

$$y = (g_1+g_2)*u = g_1*u+g_2*u$$

# Verknüpfungen von LTI Systemen

## Reihenschaltung




Die Reihenschaltung zweier Systeme $S_1$ und $S_2$ ist das System

$$S\{u\} = S_2\{S_1\{u\}\}.$$

Falls beide Systeme LTI sind, so ist die Impulsantwort von $S$ die Faltung der Impulsanworten von $S_1$ und $S_2$:

$$g = S\{\delta\} = S_2\{\delta\} * S_1\{\delta\} = g_2 * g_1.$$

Da die Faltung assoziativ ist:

$$y = g_2 * (g_1 * u) = (g_1 * g_2) * u$$

In Reihenschaltungen von LTI Systemen ist die Reihenfolge egal:

$$S_1\{S_2\{u\}\} = S_2\{S_1\{u\}\}.$$

Da die Faltung kommutativ ist:

$$y = g_2 * g_1 * u = g_1 * g_2 * u$$

# Literaturverzeichnis I


[1] F. P. León and H. Jäkel, *Signale und Systeme*. Berlin, Boston: De Gruyter Oldenbourg, 2019. [Online]. Available: https://doi.org/10.1515/9783110626322

[2] –pbroks13, “File:Mass spring damper.svg — Wikimedia Commons, the free media repository,” https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Mass_spring_damper.svg&oldid=656007462, 2008, [Online; accessed 20-October-2024].

[3] S. R. Devasahayam, *Signals and systems in biomedical engineering: physiological systems modeling and signal processing*. Springer, 2019.

[4] V. Bajaj, F. Buchali, M. Chagnon, S. Wahls, and V. Aref, “Deep neural network-based digital pre-distortion for high baudrate optical coherent transmission,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 40, no. 3, pp. 597–606, 2022.