

Signale und Systeme

Vorlesung 5: Fouriertransformation

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

Inhalt

1. Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation

2. Erste Beispiele

3. Konvergenz der Fouriertransformation

Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation

- Fourierreihen sind nur für periodische Signale anwendbar
- Wie können wir nicht-periodische Signale transformieren?
- Wir untersuchen dazu folgendes Beispiel ...

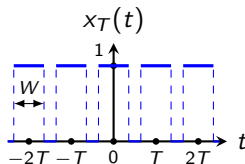
Ein T -periodischer Rechteckpuls

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{\frac{W}{2}}(t - nT)$$

der Breite $W < T$ hat die Fourierreihenoeffizienten

$$a_0 = \frac{W}{T}, \quad a_k = \frac{\sin\left(k\pi \frac{W}{T}\right)}{k\pi} \text{ für } k \neq 0.$$

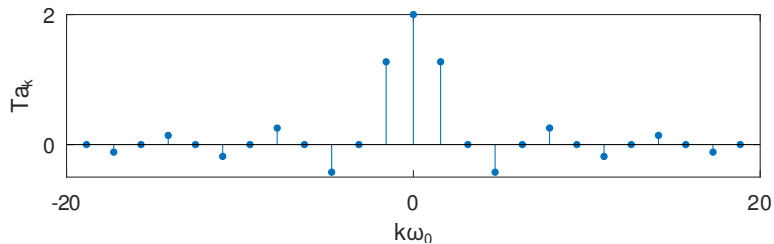
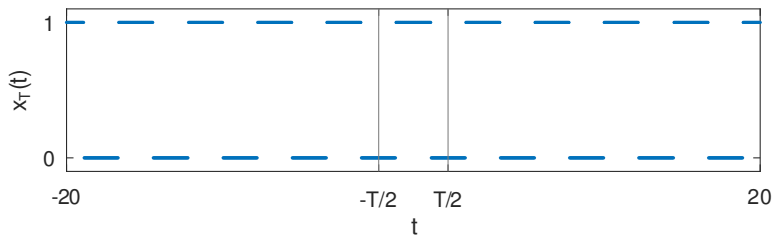
- Für $T \rightarrow \infty$ konvergiert $x_T(t)$ punktweise gegen $x(t) = r_{\frac{W}{2}}(t)$
- Was geschieht mit den Fourierkoeffizienten a_k in diesem Fall?



→ [1, Ex. 3.5]

Die Herleitung ist dem Rechteckbeispiel in VL4 ähnlich.

Von der Fourierreihe zur Fouriertransformation



Fouriertransformation

Wogegen konvergieren die Fourierkoeffizienten im nicht-periodischen Fall? Da in unserem Beispiel $x(t) = 0$ für $|t| > W$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} T a_k &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt\end{aligned}$$

Diese Formel kann man ähnlich auch für viele andere Signale herleiten.

Die **Fouriertransformierte** eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$ ist

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Inverse Fouriertransformation

Wie muss nun die inverse Fouriertransformation aussehen? Im Beispiel gilt

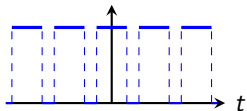
$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

Die **inverse Fouriertransformierte** von $X(j\omega)$ ist

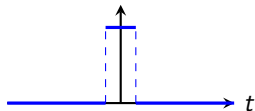
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Vergleich Fourierreihe und -transformation

Periodische Signale



Nichtperiodische Signale



Fourierreihe

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} x(t) = \\
 &\frac{\omega_0}{2\pi} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} x(t) = \\
 &\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T a_k e^{jk\omega_0 t} \omega_0 x(t) = \\
 &\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T a_k e^{jk\omega_0 t} \omega_0
 \end{aligned}$$

Inverse Fouriertransformation

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourierkoeffizienten

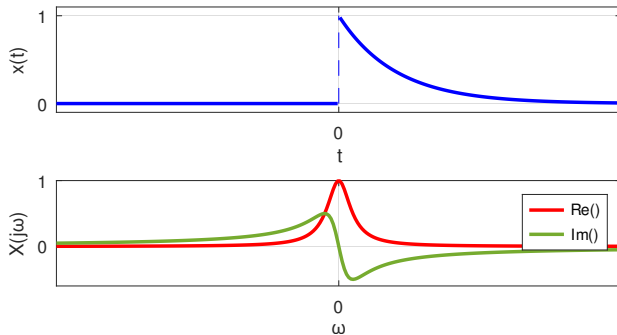
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt T a_k =$$

Fouriertransformation

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Erste Beispiele

Abgeschnittenes Exponentialsignal



Die Fouriertransformierte des abgeschnittenen Exponentialssignals

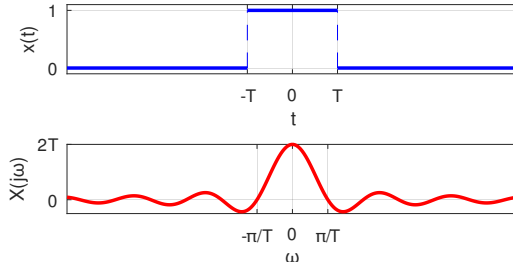
$$x(t) = e^{-at}\theta(t), \quad \text{Re}(a) > 0$$

ist

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Erste Beispiele

Rechteckpuls

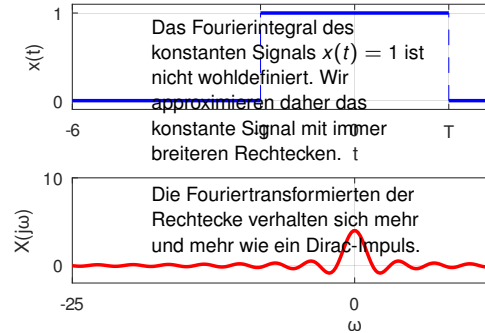
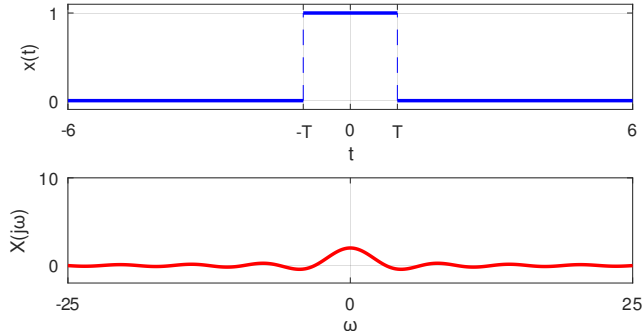


Die Fouriertransformierte des Rechteckpulses $r_T(t)$ ist

$$R_T(j\omega) = 2T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right), \quad \operatorname{sinc}(\vartheta) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\vartheta)}{\pi\vartheta}, & \vartheta \neq 0 \\ 1, & \vartheta = 0 \end{cases}.$$

Erste Beispiele

Konstantes Signal

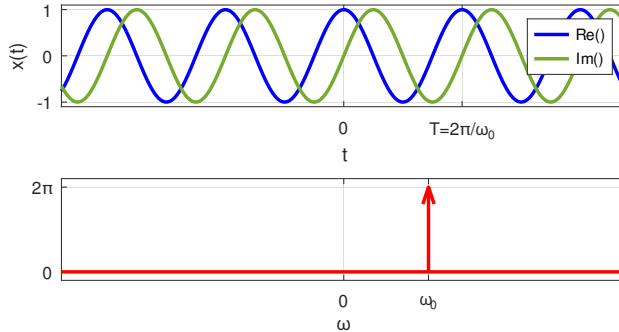


Die Fouriertransformierte des konstanten Signals $x(t) = 1$ ist

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

Erste Beispiele

Komplexe Schwingung



Die Fouriertransformierte einer komplexen Schwingung $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Fourierpaare

Wenn $X(j\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$ ist, schreiben wir auch

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!\!\longrightarrow} X(j\omega)$$

und sagen, dass $x(t)$ und $X(j\omega)$ ein **Fourierpaar** bilden.

Für das abgeschnittenen Exponentialsignal schreiben wir z.B.

$$e^{-at}\theta(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!\!\longrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}, \quad \operatorname{Re}(a) > 0.$$

- Wir werden diese Notation auch für andere Transformationen nutzen
- Bei Fourierreihen schreiben wir z.B.

$$x(t) \overset{\mathcal{FR}}{\circ\!\!\!\longrightarrow} a_k$$

- Die Spezifikation „ \mathcal{F} “, „ \mathcal{FR} “ etc. lassen wir manchmal weg

Punktweise Konvergenz

Falls das Signal $x \in L^1(\mathbb{R})$ stückweise stetig differenzierbar ist, so konvergiert die Fouriertransformation von x punktweise:

$$x_W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \xrightarrow{W \rightarrow \infty} \begin{cases} x(t), & \text{falls } x \text{ stetig in } t \\ \frac{1}{2}[x(t^-) + x(t^+)], & \text{sonst} \end{cases}.$$

→ [2, Satz 6.2.7]

$x(t^-)$ und $x(t^+)$ sind die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von x an der Stelle t .

Konvergenz im quadratischen Mittel

Für Energiesignale $x \in L^2(\mathbb{R})$ ist die Fouriertransformierte X auch in $L^2(\mathbb{R})$:

→ [2, Satz 6.2.7]

$$\|X\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} < \infty.$$

Die inverse Fouriertransformation konvergiert dann im quadratischen Mittel:

$$\|x_W - x\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x_W(t) - x(t)|^2 dt} \xrightarrow{W \rightarrow \infty} 0,$$

wobei wieder $x_W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$.

Literaturverzeichnis I

- [1] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*. Pearson International, 2013.
- [2] U. Storch, H. Wiebe, and C. Becker, *Maß-und Integrationstheorie: mit zahlreichen Beispielen und Übungsaufgaben*. Springer-Verlag, 2020.