3 Energiesignal

Ist $x(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin(2\pi f t) \cdot \theta(t)$ ein Energiesignal?

Lösung:

Zur Erinnerung, der Einheitssprung ist wie folgt definiert:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\,\mathrm{e}^{-t} \sin(2\pi f t)\theta(t)|^2 \mathrm{d}t\,.$$

Aufgrund der Multiplikation mit $\theta(t)$ wird bis zum Zeitpunkt $t = 0$ über den Wert 0 integriert und das Integral vereinfacht sich zu:

$$\int_{0}^{\infty} |\,\mathrm{e}^{-t} \sin(2\pi f t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_{0}^{\infty} |\,\mathrm{e}^{-t}\,|^2 \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\,.$$

Somit handelt es sich bei dem Signal um ein Energiesignal.

4 Orthogonalität

Gegeben seien die Energiesignale

$$B_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^k \quad \text{mit} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}\,.$$

Berechnen Sie das Innenprodukt $\langle B_i, B_j \rangle$. Zeigen Sie, dass die Funktionen nicht alle orthogonal zueinander sind.

Lösung:

Das Innenprodukt ist

$$\begin{aligned} \langle B_i, B_j \rangle &= \int_{-1}^{1} t^i \cdot t^j \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^{i+j} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{i+j+1} \cdot t^{i+j+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } i+j \text{ ungerade} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{für } i+j \text{ gerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für Orthogonalität muss gelten, dass die Innenprodukte zweier verschiedener Funktionen verschwinden. Es gilt z. B.

$$\langle B_0, B_2 \rangle = \frac{2}{3} \neq 0\,.$$

Hieraus folgt, dass nicht alle B_i orthogonal zueinander sind.

5 Dirac-Impuls

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\delta(t-1)\,\mathrm{d}t$

b) $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\delta(t-2\pi)\,\mathrm{d}t$

Lösung:

a) $I_1 = \theta(1) = 1$

b) $I_2 = \sin(2\pi) = 0$

6 Faltung zweier Rechtecksignale

Bestimmen Sie die Faltung der Rechteckfunktion

$$y(t) = r_{T/2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

mit sich selbst.

Lösung:

Die Berechnung erfolgt gemäß der Definition der Faltung:

$$(y * y)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{T/2}(\tau) \cdot r_{T/2}(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_{T/2}(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Im Folgenden wird verwendet, dass es sich bei der Rechteckfunktion um eine gerade Funktion handelt. Außerdem kommt die Substitutionsregel der Integralrechnung zur Anwendung. Des Weiteren werden zur Auswertung des Integrals verschiedene Fälle anhand der Lage der Integralgrenzen unterschieden:

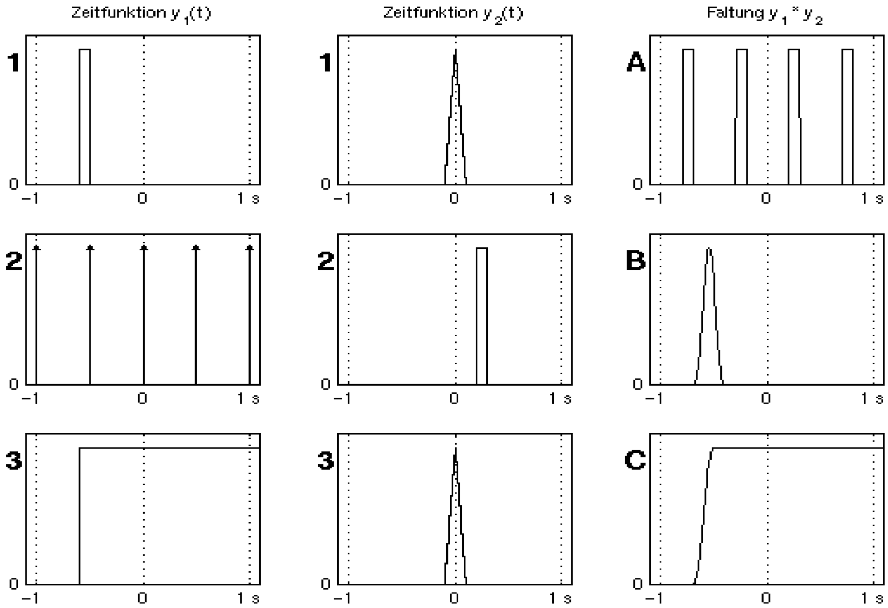
$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_{T/2}(t-\tau)\mathrm{d}\tau &= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} r_{T/2}(\tau-t)\mathrm{d}\tau \qquad \left| \begin{array}{l} \nu = \tau - t \\ \mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\tau \end{array} \right. \\
&= \int_{-T/2-t}^{T/2-t} r_{T/2}(\nu)\mathrm{d}\nu = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } |t| \geq T \\ \int_{-T/2-t}^{T/2} 1\mathrm{d}\nu & \text{für } -T < t \leq 0 \\ \int_{-T/2}^{T/2-t} 1\mathrm{d}\nu & \text{für } 0 < t < T \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } |t| \geq T \\ \nu\big|_{-T/2-t}^{T/2} & \text{für } -T < t \leq 0 \\ \nu\big|_{-T/2}^{T/2-t} & \text{für } 0 < t < T \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } |t| \geq T \\ \frac{T}{2} - (-\frac{T}{2} - t) & \text{für } -T < t \leq 0 \\ \frac{T}{2} - t - (-\frac{T}{2}) & \text{für } 0 < t < T \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{für } |t| \geq T \\ T + t & \text{für } -T < t \leq 0 \\ T - t & \text{für } 0 < t < T \end{array} \right\} = T \cdot d_T(t)\,.
\end{aligned}$$

Wobei $d_T(t)$ die Dreiecksfunktion mit Grundseite $2T$ ist. Als Ausblick: Mithilfe von Rechenregeln und Korrespondenztabellen zur Fourier-Transformation lässt sich diese Berechnung nennenswert verkürzen.

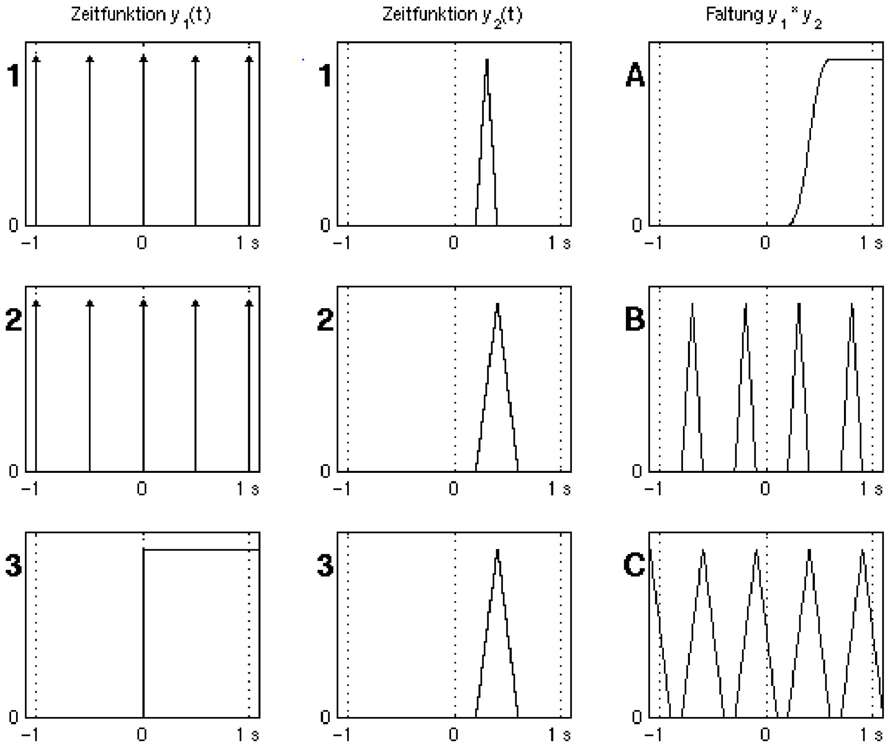
7 Faltung – Zuordnungen

Ordnen Sie den folgenden Funktionen die richtige Faltung zu.

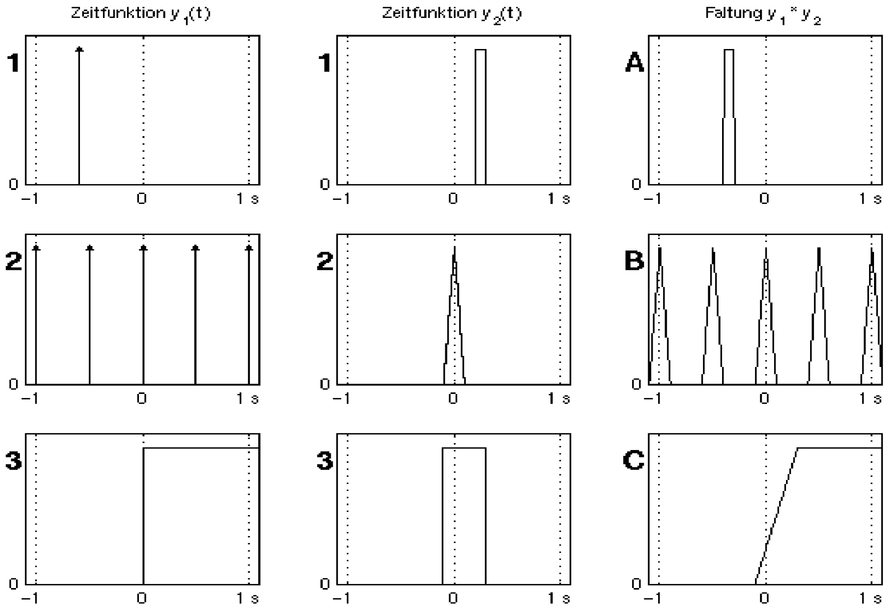
a)



b)



c)



Lösung:

a) 1-B; 2-A; 3-C;

b) 1-B; 2-C; 3-A;

c) 1-A; 2-B; 3-C;