13 Bode-Diagramm

a) Bestimmen Sie die Bode-Normalform des Frequenzgangs

$$G(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{10\omega^2 + 4\,\mathrm{j}\,\omega - 2}{\mathrm{j}\,\omega + 4}\,.$$

b) Die folgende Abbildung 1 zeigt das Pol-Nullstellendiagramm eines Systems mit Frequenzgang $G(\mathrm{j}\,\omega)$.

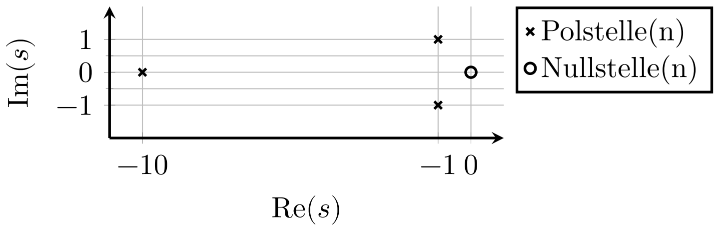

Abbildung 1: Pol-Nullstellendiagramm eines Systems.

Alle Pol- und Nullstellen sind einfach. Außerdem gilt $G(\mathrm{j}\,1) = \frac{10\,\mathrm{j}}{0{,}4+1{,}05\,\mathrm{j}}$ Bestimmen Sie $G(\mathrm{j}\,\omega)$.

c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm zum Frequenzgang

$$G(\mathrm{j}\,\omega) = 100\frac{\mathrm{j}\,\omega + 1}{1 + 0{,}2\frac{\mathrm{j}\,\omega}{0{,}01} + \left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{0{,}01}\right)^2}\,.$$

Nutzen Sie dazu die Approximation durch gerade Linien. Zeichen Sie außerdem die ungefähre Lage des Maximums des Amplitudengangs ein. Achten Sie insbesondere auf eine korrekte Achsenbeschriftung.

d) Gegeben ist das Bode-Diagramm in der folgenden Abbildung 2.

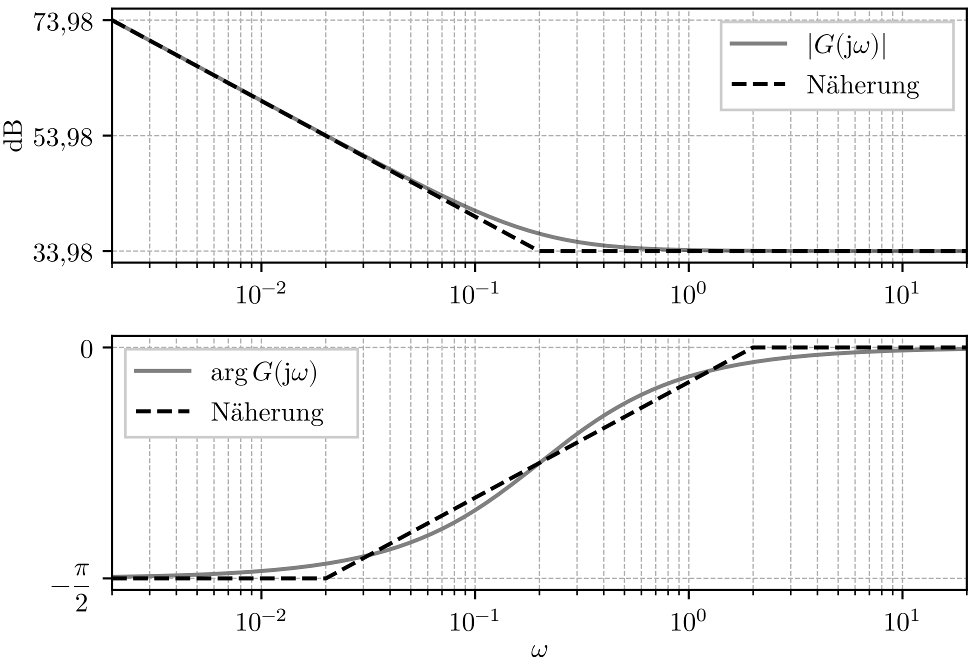

Abbildung 2: Bode-Diagramm.

Welcher der folgenden Frequenzgänge gehört zu diesem Bode-Diagramm?

(i) $10(\mathrm{j}\,\omega\,0{,}5+1)$ (ii) $10(\mathrm{j}\,\omega)\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega\,5+1}$ (iii) $100\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega}\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega\,0{,}2+1}$

(iv) $10\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega}(\mathrm{j}\,\omega\,5+1)$ (v) $100(\mathrm{j}\,\omega\,0{,}1+1)$ (vi) $\dfrac{1}{1+2\cdot 5\left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}$

Lösung:

a) Zunächst gilt für den Frequenzgang

$$G(s) = \frac{-10s^2+4s-2}{s+4} \qquad \text{mit} \qquad s = \mathrm{j}\,\omega\,.$$

Gefragt ist, diesen Ausdruck in die Form

$$G(s) = \prod_k G_k(s)$$

umzuformen, wobei die $G_k(s)$ eine der folgenden Formen haben:

(i) $K \in \mathbb{R}$, (ii) $s^{\pm 1}$, (iii) $(\tau s+1)^{\pm 1}$, (iv) $\left[1+2\zeta\dfrac{s}{\omega_0}+\left(\dfrac{s}{\omega_0}\right)^2\right]^{\pm 1}$ mit $\tau, \zeta, \omega_0 > 0\,.$

Als erstes wird der Zähler des Frequenzgangs umgeformt und dafür zunächst seine Nulstellen bestimmt:

$$-10s_0^2+4s_0-2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s_{0,1/2} = \frac{1}{5} \pm \frac{2}{5}\,\mathrm{j}\,.$$

Da der Zähler nur ein komplex-konjugiertes Nullstellenpaar besitzt, lässt er sich in ein Vielfaches eines Term der Form (iv) umformen. Dazu können z. B. die bereits bestimmten Nullstellen verwendet werden. Deren Betrag ist

$$|s_0| := |s_{0,1/2}| = \sqrt{\frac{1}{5}}\,.$$

Damit ergibt sich für den Zähler:

$$-2+4s-10s^2 = -2\left[1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right] \text{ mit } \omega_0 = |s_0| = \sqrt{\frac{1}{5}} \text{ und } \zeta = -\frac{\mathrm{Re}(s_{0,1/2})}{|s_0|} = -\sqrt{\frac{1}{5}}\,.$$

Der Nenner lässt sich ebenfalls umformen, sodass man ein Vielfaches eines Terms der Form (iii) erhält:

$$\frac{1}{s+4} = \frac{1}{4}\,(\tau s+1)^{-1} \text{ mit } \tau = \frac{1}{4}\,.$$

Insgesamt erhält man also für $s = \mathrm{j}\,\omega$

$$G(s) = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{Form (i)}} \cdot \underbrace{\left[1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2\right]}_{\text{Form (iv)}} \cdot \underbrace{(\tau s+1)^{-1}}_{\text{Form (iii)}}$$

mit

$$\zeta = -\sqrt{\frac{1}{5}}\,, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{5}} \qquad \text{und} \qquad \tau = \frac{1}{4}\,.$$

b) Man ließt Folgendes ab:

$$G(\mathrm{j}\,\omega) = K \cdot \mathrm{j}\,\omega \cdot \frac{1}{\tau\mathrm{j}\,\omega + 1} \cdot \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_0}\right)^2} \qquad \text{mit } \tau = \frac{1}{10}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_0 = \sqrt{2}\,.$$

Es gilt noch K zu bestimmen. Der Wert der Systemfunktion an der Stelle $s = \mathrm{j}\,1$ ist in der Aufgabenstellung gegeben. Wertet man die Systemfunktion an dieser Stelle aus, erhält man

$$G(\mathrm{j}\,1) = \frac{K\mathrm{j}}{0{,}4 + 1{,}05\,\mathrm{j}} \overset{!}{=} \frac{10\,\mathrm{j}}{0{,}4 + 1{,}05\,\mathrm{j}} \quad \Rightarrow \quad K = 10\,.$$

c) Abbildung 3 zeigt das gefragte Bode-Diagramm. Der ebenfalls eingezeichnete exakte Verlauf von Amplituden- und Phasengang war nicht verlangt.

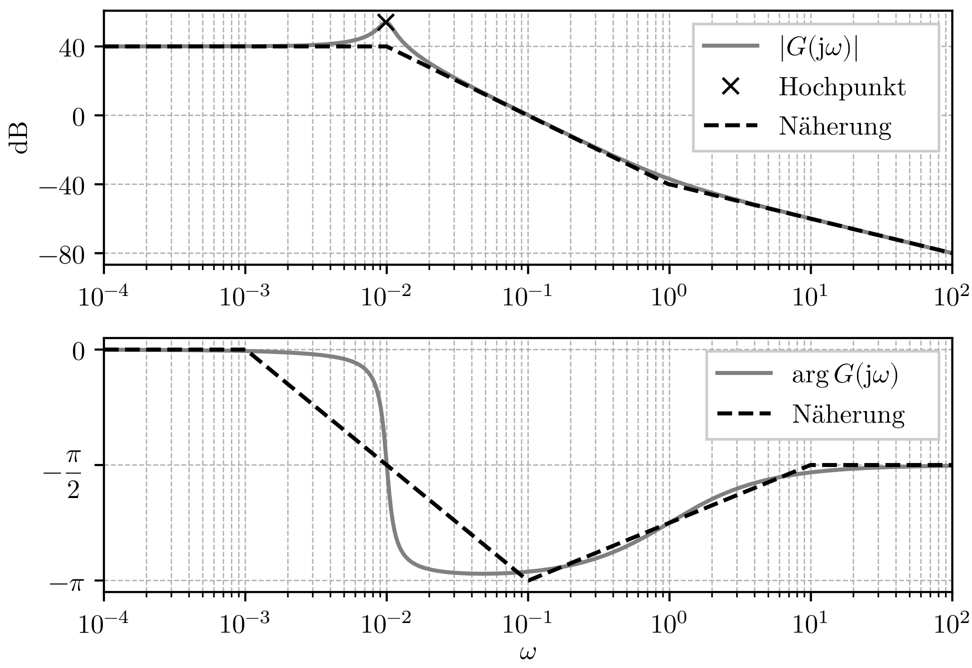

Abbildung 3: Das Bode-Diagramm zum gegebenen Frequenzgang.

d) Der Frequenzgang (iv) passt zum abgebildeten Bode-Diagramm. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies festzustellen, z. B.:

- Da der Amplitudengang für hohe Frequenzen nahezu konstant bleibt, muss die Anzahl an Pol- und Nullstellen gleich sein. Damit bleiben die Frequenzgänge (ii) und (iv).
- Der Frequenzgang (iv) hat eine Polstelle bei 0, man würde also einen Anstieg des Amplitudengangs hin zu $\omega = 0$ erwarten. Der Frequenzgang (ii) hat eine Polstelle bei $\mathrm{j}\,/5$, man würde also eine Divergenz bei $\omega = 1/5$ erwarten. Damit passt (iv) zur Abbildung.

14 Bedeutung der Phase

Im folgenden werden LTI-Systeme mit dem Frequenzgang $G(\mathrm{j}\,\omega)$ betrachtet.

a) Für ein linearphasiges System gilt $\arg G(\mathrm{j}\,2) = 1$. Zeichnen Sie den Phasengang $\arg G(\mathrm{j}\,\omega)$ für $-2 \leq \omega \leq 2$. Achten Sie insbesondere auf eine korrekte Achsenbeschriftung.

b) Ein unbekanntes System hat die Gruppenlaufzeit $\tau(\omega) = -\omega^2$. Des Weiteren gilt für den Phasengang $\arg G(\mathrm{j}\,0) = 0$. Bestimmen Sie den Phasengang $\arg G(\mathrm{j}\,\omega)$.

Gegeben ist die Systemfunktion

$$G(s) = \frac{s+5}{s+2} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Re}(s) > -2\,.$$

c) Berechnen Sie den Phasengang $\arg G(\mathrm{j}\,\omega)$.
Hinweis: Erweitern Sie die Systemfunktion mit dem komplex-konjugierten des Nenners.

d) Welche der folgenden Aussagen trifft auf das System mit der gegebenen Systemfunktion zu?

(i) Das System ist linearphasig.
(ii) Das System ist ein Allpass.
(iii) Das System ist minimalphasig.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

e) Berechnen Sie die Gruppenlaufzeit des Systems mit Frequenzgang

$$G(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega^2}}{(1+\omega)^2}\,.$$

Hinweis: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

f) Gegeben ist die Systemfunktion

$$G(s) = \frac{(s+a)(s-4)}{(s+2)(s+4)} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Re}(s) > -2,$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Konstante ist. Für welchen Wert von a ist das System ein Allpass?

g) Zerlegen Sie die Systemfunktion

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-2)(s-3)}{(s^2+2s+2)(s+5)} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

in ihren Minimalphasen- und ihren Allpass-Anteil.

Lösung:

a) Für ein linearphasiges System gilt $\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = -t_0\,\omega$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$.

$$\arg G(\mathrm{j}\,2) = 1 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \arg G(\mathrm{j}\,\omega) = 0{,}5\,\omega\,.$$

Abbildung 4 zeigt den gefragten Phasengang.

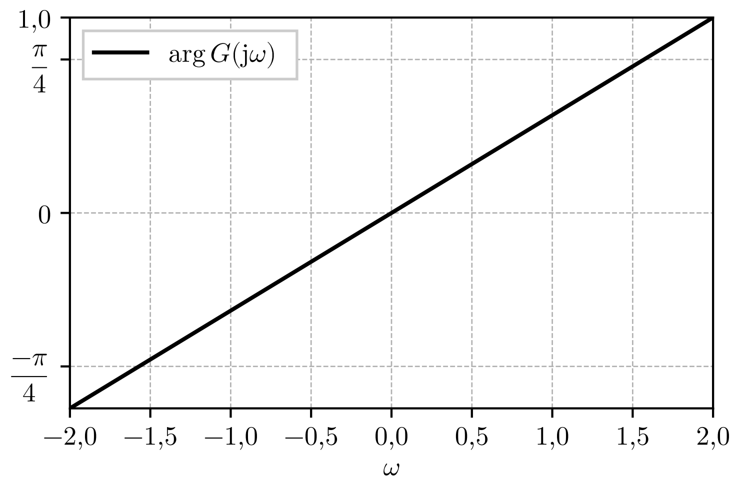

Abbildung 4: Linearer Phasengang.

b) Die Gruppenlaufzeit ist

$$\tau(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = -\omega^2\,.$$

Daraus folgt

$$\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = \int \omega^2\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{3}\omega^3 + c \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Aus $\arg G(\mathrm{j}\,0) = 0$ folgt $c = 0$ und damit

$$\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{1}{3}\omega^3\,.$$

c) Für eine komplexe Zahl z gilt $z\,z^* = |z|^2$. Damit erhält man für die Systemfunktion

$$G(s) = \frac{s+5}{s+2} = \frac{(s+5)(s+2)^*}{(s+2)(s+2)^*} = \frac{(s+5)(s^*+2)}{|s+2|^2} = \frac{|s|^2 + 5s^* + 2s + 10}{|s+2|^2}\,.$$

Der Frequenzgang ist also

$$G(\mathrm{j}\,\omega) = \underbrace{\frac{1}{|\,\mathrm{j}\,\omega+2|^2}}_{\in\mathbb{R}}(10+\omega^2 - \mathrm{j}\,3\omega) = \underbrace{\frac{10+\omega^2}{|\,\mathrm{j}\,\omega+2|^2}}_{=\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\,\omega))>0} + \mathrm{j}\underbrace{\frac{-3\omega}{|\,\mathrm{j}\,\omega+2|^2}}_{=\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\,\omega))}\,.$$

Um das Argument einer komplexen Zahl zu bestimmen, müssen in der Regel 4 Fälle anhand der möglichen Kombinationen der Vorzeichen des Real- und Imaginärteils betrachtet werden. Da hier der Realteil immer positiv ist und der Imaginärteil das Vorzeichen mit ω wechselt, werden hier entsprechend die beiden Fälle $\omega > 0$ und $\omega \le 0$ betrachtet.

Für $\omega > 0$ gilt $\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\,\omega)) < 0$ und damit

$$\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = -\arctan\left(\frac{|\,\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\,\omega))|}{|\,\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\,\omega))|}\right) = -\arctan\left(\frac{3\omega}{10+\omega^2}\right)\,.$$

Für $\omega \le 0$ gilt $\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\,\omega)) \ge 0$ und damit

$$\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = \arctan\left(\frac{|\,\mathrm{Im}(G(\mathrm{j}\,\omega))|}{|\,\mathrm{Re}(G(\mathrm{j}\,\omega))|}\right) = \arctan\left(\frac{-3\omega}{10+\omega^2}\right) = -\arctan\left(\frac{3\omega}{10+\omega^2}\right)\,.$$

Hier wurde benutzt, dass der Arcustangens eine ungerade Funktion ist. Insgesamt gilt also für $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = -\arctan\left(\frac{3\omega}{10+\omega^2}\right) .$$

Abbildung 5 zeigt den Phasengang. Eine Abbildung war nicht verlangt.

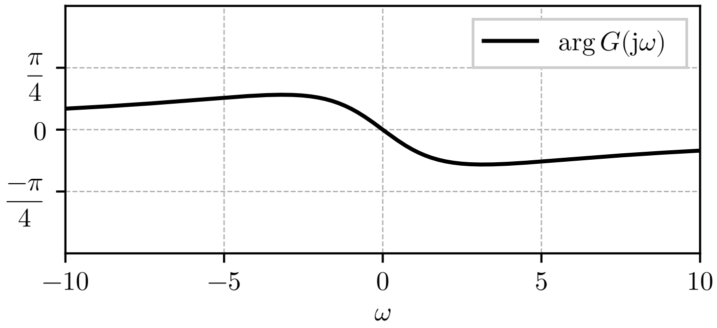

Abbildung 5: Phasengang eines Systems.

d) (i) Gemäß der vorangegangenen Teilaufgabe ist der Phasengang nicht linear.

(ii) Der Amplitudengang $|G(\mathrm{j}\,\omega)| = \frac{|\mathrm{j}\,\omega+5|}{|\mathrm{j}\,\omega+2|}$ ist offensichtlich nicht konstant, sondern veränderlich mit ω, z. B. $|G(\mathrm{j}\ 0)| \neq |G(\mathrm{j}\ 1)|$. Daher ist das System kein Allpass.

(iii) Das System hat eine rationale Systemfunktion und alle Nullstellen ($s_0 = -5$) der Systemfunktion haben einen negativen Realteil haben. Das System ist also minimalphasig.

Nur als Anmerkung: Die Definition eines Minimalphasensystems ist in der Literatur nicht einheitlich. Folgende Eigenschaften können z. B. noch zusätzlich gefordert sein:

- Stabilität (Hier erfüllt, weil die imaginäre Achse im Konvergenzbereich liegt.)
- Kausalität (Hier erfüllt, weil der Konvergenzbereich rechts von der rechtesten Polstelle ist.)

In diesem Fall hat das Minimalphasensystem die Eigenschaft, dass es kein anderes System mit gleichem Amplitudengang, aber kleinerer Gruppenlaufzeit gibt.

e) Zunächst ist der Phasengang

$$\arg G(\mathrm{j}\,\omega) = \arg \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega^2}}{(1+\omega)^2} = \underbrace{\arg \frac{1}{(1+\omega)^2}}_{=0} + \underbrace{\arg \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega^2}}_{=-\omega^2} = -\omega^2 .$$

Hier wurde verwendet, dass der Ausdruck $(1+\omega)^2$ reell und immer größer oder gleich 0 ist. Damit ist die Gruppenlaufzeit

$$\tau(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \arg G(\mathrm{j}\,\omega) = 2\omega .$$

f) Für einen Allpass gilt (falls $G(s)$ nicht konstant ist), dass die Pol- und Nullstellen paarweise gespiegelt zur imaginären Achse liegen:

$$s_{0,\mu} = -s^*_{\infty,\mu} \tag{1}$$

Es werden zwei Fälle unterschieden:

- 1. Fall mit $a \neq 2$:
  Die Nullstellen sind $s_{0,0} = -a$ und $s_{0,1} = 4$. Die Polstellen sind $s_{\infty,0} = -2$ und $s_{\infty,1} = -4$. Nur für $a = -2$ ist (1) erfüllt.
- 2. Fall mit $a = 2$:
  Die Systemfunktion ist dann
  $$G(s) = \frac{s-4}{s+4}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2\,.$$
  Also ist (1) erfüllt.

Insgesamt erhält man also einen Allpass für $a = \pm 2$.

g) Die Zerlegung in einen Allpass-Anteil $G_\mathrm{A}(s)$ und einen Minimalphasen-Anteil $G_\mathrm{M}(s)$ erhält man, indem man folgende Schritte durchführt:

(i) Bestimmung der Pol- und Nullstellen bzw. Zerlegung in Linearfaktoren,

(ii) Aufteilung in Minimalphasen-Anteil ($\mathrm{Re}(s_{\infty,\mu}) < 0$, $\mathrm{Re}(s_{0,\mu}) \leq 0$) und „nicht-minimalphasigen Anteil“,

(iii) Umformen des „nicht-minimalphasigen Anteils“ zum Allpass durch Erweitern ($s_{0,\mu} = -s^*_{\infty,\nu}$).

$$\begin{aligned}
G(s) &\overset{\text{(i)}}{=} \frac{[s-(-1)]\cdot(s-2)\cdot(s-3)}{[s-(-1-j)]\cdot[s-(-1+j)]\cdot[s-(-5)]} \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \underbrace{\frac{[s-(-1)]}{[s-(-1-j)]\cdot[s-(-1+j)]\cdot[s-(-5)]}}_{G_\mathrm{M}(s)} \cdot \frac{(s-2)}{1} \cdot \frac{(s-3)}{1} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \underbrace{\frac{(s-(-1))\cdot[s-(-2)]\cdot[s-(-3)]}{[s-(-1-j)]\cdot[s-(-1+j)]\cdot[s-(-5)]}}_{G_\mathrm{M}(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s-2)}{[s-(-2)]} \cdot \frac{(s-3)}{[s-(-3)]}}_{G_\mathrm{A}(s)} \\
&= \underbrace{\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s^2+2s+2)(s+5)}}_{G_\mathrm{M}(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s-2)(s-3)}{(s+2)(s+3)}}_{G_\mathrm{A}(s)}\,.
\end{aligned}$$