Karlsruher Institut für Technologie

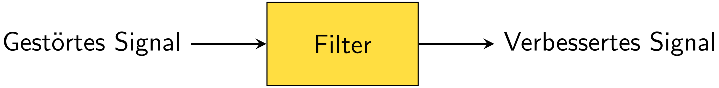
Institut für Industrielle Informationstechnik

# Signale und Systeme

## Vorlesung 9: Analoge Filter I

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26

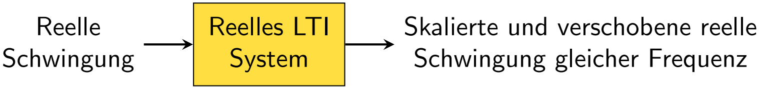
# Analoge Filter




- Wir werden heute beginnen, uns mit analogen Filtern zu befassen
- Ein Filter ist ein LTI System, welches die Aufgabe hat, unerwünschte Effekte aus Signalen (z.B. Rauschen) zu entfernen
- Wir nennen sie analog, wenn es sich um zeitkontinuierliche Systeme handelt, welche z.B. mit einer elektrischen Schaltung realisiert werden
- Digitale Filter werden wir später behandeln
- Phasen- und Amplitudengang eines Filters sind beide von Bedeutung
- Wir werden uns heute zunächst mit der Rolle der Phase beschäftigen

# Inhalt

# Phasenlaufzeit




- In Vorlesung 6 hatten wir gesehen, dass ein reelles LTI System reelle Schwingungen skaliert und in ihrer Phase verschiebt:

$$u(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = |G(\mathrm{j}\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi + \angle G(\mathrm{j}\omega_0))$$

Die Phasenlaufzeit

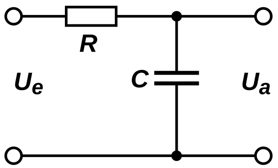
$$\tau_p(\omega_0) = -\frac{\angle G(\mathrm{j}\omega_0)}{\omega_0}$$

gibt die der Phasenverschiebung entsprechende Zeitverschiebung an:

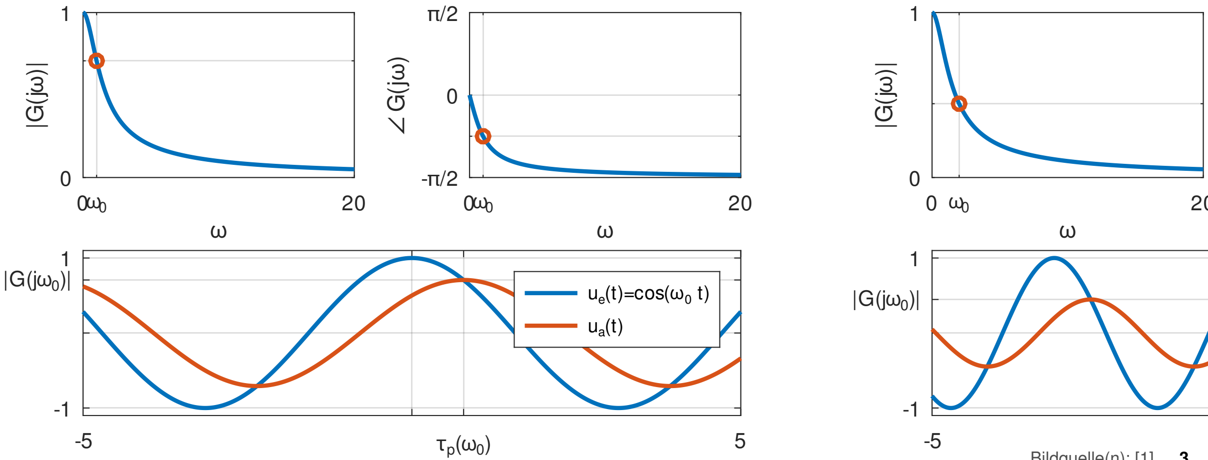
$$u(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = |G(\mathrm{j}\omega_0)| \cos\left(\omega_0 \left(t - \tau_p(\omega_0)\right) + \phi\right)$$

# Phasenlaufzeit

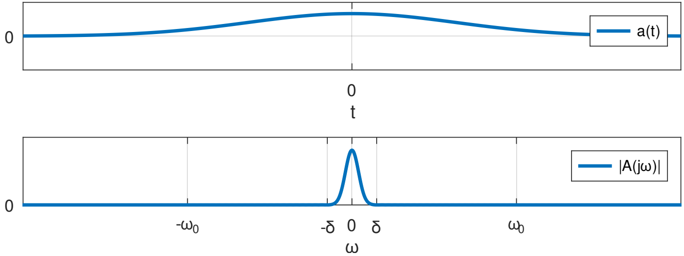
**Beispiel RC-Glied (angepasst von Vorlesung 6)**

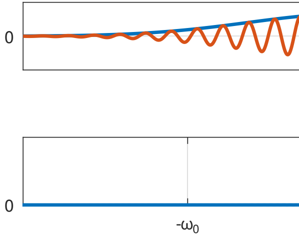



Wir beobachten nun, wie die die Frequenzantwort eines RC-Glieds mit $RC = 1$ dessen Reaktion auf verschiedene harmonische Schwingungen vorhersagt ...



# Gruppenlaufzeit
## Schmalbandige Signale




Ein reelles Signal $x(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \phi)$ ist schmalbandig, falls

$$A(\mathrm{j}\omega) = 0, \quad \forall|\omega| > \delta \text{ mit } \delta \ll \omega_0.$$

- Da $a(t)$ nur niedrige Frequenzen enthält, ist es „langsam veränderlich“
- Im Zeitbereich ist $a(t)$ daher die Einhüllende von $x(t)$
- Im Frequenzbereich entstehen zwei Kopien des ursprünglichen Spektrums:

$$x(t) = a(t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\phi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t+\phi)}}{2} \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{2}A(\mathrm{j}(\omega-\omega_0)) + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2}A(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))$$

Für komplexe Signale würde man statt dessen

$$x(t) = a(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

betrachten. Wir konzentrieren uns hier auf den reellen Fall.

# Gruppenlaufzeit

## Definition und Interpretation

Es sei $G(\mathrm{j}\omega)$ eine Frequenzantwort. Dann ist die Gruppenlaufzeit

$$\tau_g(\omega_0) = -\frac{\mathrm{d}\angle G(\mathrm{j}\omega_0)}{\mathrm{d}\omega}.$$

- Wenn das Eingangssignal eines reellen Systems schmalbandig ist, so gibt die Gruppenlaufzeit die Verzögerung der Einhüllenden an:

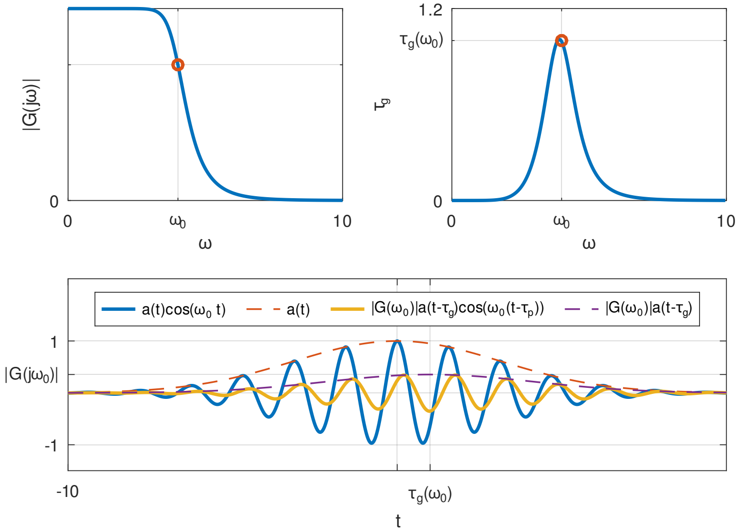
Ein reelles LTI System mit Frequenzantwort $G(\mathrm{j}\omega)$ reagiert auf den Eingang

$$u(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \phi), \quad a(t) \text{ reell und langsam veränderlich}$$

mit dem Ausgangssignal

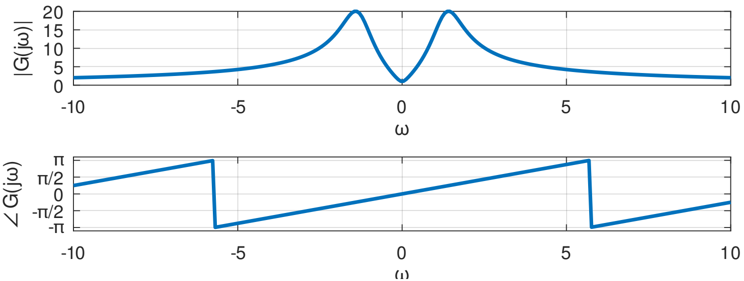
$$y(t) \approx |G(\mathrm{j}\omega_0)|a(t - \tau_g(\omega_0))\cos(\omega[t - \tau_p(\omega_0)] + \phi)$$

# Gruppenlaufzeit
## Illustration




Die Gruppenlaufzeit gibt an, wie sehr die langsam veränderliche Einhüllende $a(t)$ des Wellenpakets verzögert wird.

# Linearphasige Filter




Ein LTI System ist linearphasig, falls der *entfaltete* Phasengang linear ist:

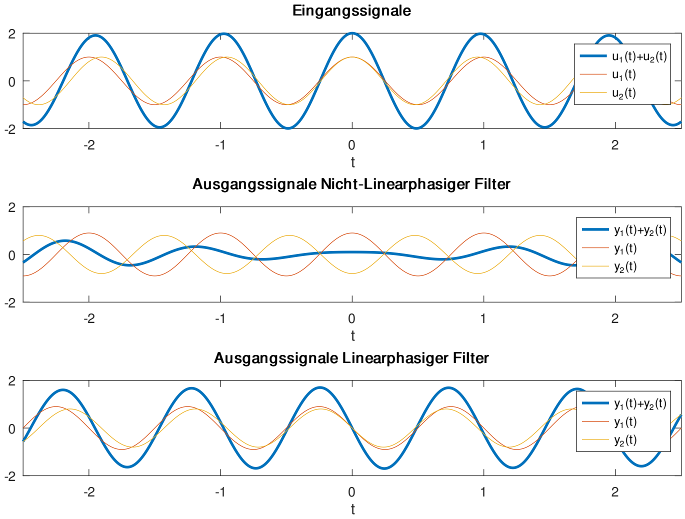
$$\angle G(\mathrm{j}\omega) = -t_0\omega, \quad t_0 \text{ konstant.}$$

Die Gruppenlaufzeit eines linearphasigen Systems ist konstant:

$$\tau_g(\omega) = t_0.$$

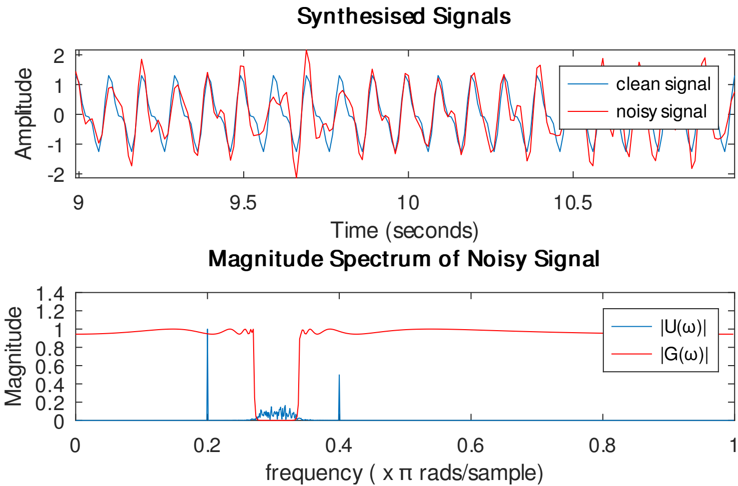
# Linearphasige Filter

## erhalten die Form des Signals im Zeitbereich besser



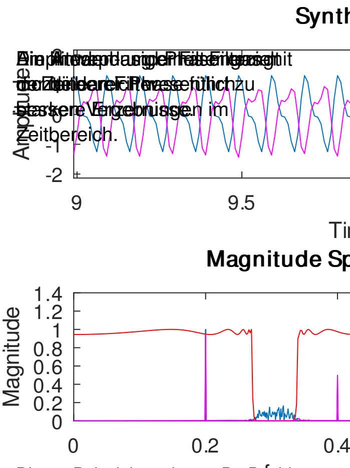

- Bei nichtlinearphasigen Filtern können sich am Eingang konstruktiv überlagernde Schwingungen durch unterschiedliche Phasenverschiebungen am Ausgang aufheben
- Bei linearphasigen Filtern ist dies nicht möglich

# Linearphasige Filter
## erhalten die Form des Signals im Zeitbereich besser – Beispiel



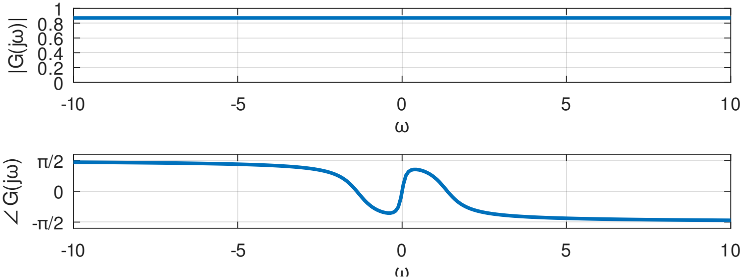

Ein Filter mit nicht-linearer Phase führt zu starken Verzerrungen im Zeitbereich.

Die Anwendung eines linearphasigen Filters zeigt im Zeitbereich deutlich bessere Ergebnisse.




Dieses Beispiel wurde von Dr. David Dorran von der TU Dublin entwickelt: `https://dadorran.wordpress.com/`.

# Allpass-Filter



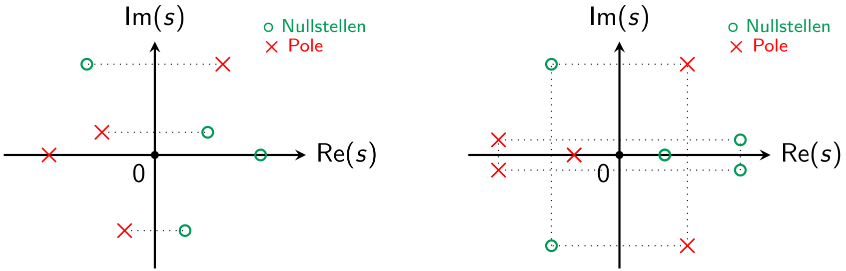

Ein LTI System mit Frequenzantwort $G(j\omega)$ ist allpass, falls

$$|G(j\omega)| = A, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad A > 0 \text{ konstant.}$$

- Während linearphasige Filter also einen idealen Phasengang haben, haben Allpass-Filter einen idealen Amplitudengang
- Sie werden daher zur Behebung von Phaseneffekten genutzt

# Allpass-Filter

## Symmetrien von Polen und Nullstellen




*Links:* Beispielhaftes Pol-Nullstellendiagramm eines komplexen Allpasses.

*Rechts:* Beispielhaftes Pol-Nullstellendiagramm eines rellen Allpasses.

Ein LTI System mit rationaler Systemfunktion ist allpass g.d.w.

$$G(s) = K \prod_{k=1}^{M} \frac{s + a_k^*}{s - a_k}, \qquad K, a_1, \dots, a_M \in \mathbb{C}, \quad K \neq 0$$

- $G(s)$ hat also einen Pol an $s = a_k$, g.d.w. es eine Nullstelle an $-a_k^* = -\operatorname{Re}(a_k) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(a_k)$ hat $\Rightarrow$ Symmetrie bzgl. der imaginären Achse
- Falls das System zusätzlich reell ist, treten komplexe Pole und Nullstellen in konjugierten Paaren auf $\Rightarrow$ zusätzliche Symmetrie bzgl. der reellen Achse

(sh. Vorlesung 7)

$\longrightarrow$ Anschrieb 9.1

# Allpass-Filter
## Positive Gruppenlaufzeit

Das LTI System mit der Systemfunktion

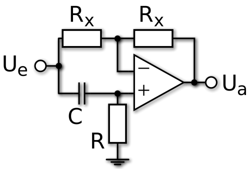
$$G(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

ist allpass, kausal und stabil und hat positive Gruppenlaufzeit:

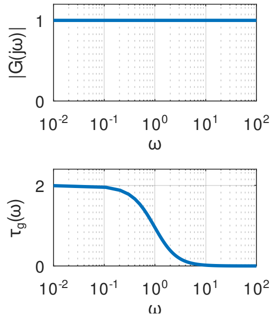
$$|G(\mathrm{j}\omega)| = 1, \quad \tau_g(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} > 0.$$

Falls die Systemfunktion $G(s)$ eines kausalen und stabilen Allpass-Systems rational ist, so ist die Gruppenlaufzeit immer nicht-negativ:

$$\tau_g(\omega) \geq 0.$$

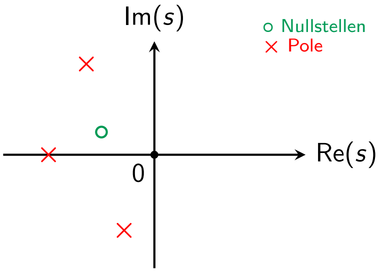



Das Beispiel entspricht obiger Schaltung mit $R = C = 1$.




→ Anschrieb 9.2

# Minimalphasige Filter




Beispielhaftes Pol-Nullstellendiagramm eines minimalphasigen Systems.

Ein LTI System mit rationaler Systemfunktion ist minimalphasig, falls alle Nullstellen und Pole in der linken Halbebene $\mathrm{Re}(s) < 0$ liegen.

Ein minimalphasiges stabiles und kausales LTI System mit rationaler Systemfunktion $G(s)$ hat eine stabile und kausale Inverse mit Systemfunktion $\frac{1}{G(s)}$.

→ Anschrieb 9.3

# Minimalphasige Filter
## Zerlegung in Allpass und Minimalphasiges System

Es sei $G(s)$ eine rationale Systemantwort ohne Pole oder Nullstellen auf der imaginären Achse. Dann gibt es ein minimalphasiges $G_{\mathrm{mp}}(s)$ und einen Allpass $G_{\mathrm{ap}}(s)$, so dass

$$G(s) = G_{\mathrm{mp}}(s) G_{\mathrm{ap}}(s).$$

Wir betrachten das Beispiel $G(s) = \frac{s-1}{s-2}$. Dann ist $G_{\mathrm{ap}}(s) = \frac{s-1}{s+1}\frac{s+2}{s-2}$ allpass,

$$G_{\mathrm{mp}}(s) = \frac{G(s)}{G_{\mathrm{ap}}(s)} = G(s)\frac{s+1}{s-1}\frac{s-2}{s+2} = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{s-2}}\frac{s+1}{\cancel{s-1}}\frac{\cancel{s-2}}{s+2}$$

minimalphasig, und es gilt $G_{\mathrm{mp}}(s) G_{\mathrm{ap}}(s) = G(s)$.

→ Anschrieb 9.4

# Minimalphasige Filter
## Minimale Gruppenlaufzeit

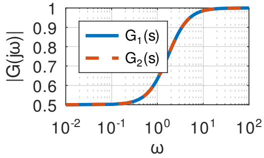
Es sein $G(s)$ die rationale Systemfunktion eines stabilen und kausalen Systems. Falls $G(s)$ minimalphasig ist, so hat kein anderes (stabiles, kausales, rationales) System mit dem gleichen Amplitudengang eine kleinere Gruppenlaufzeit:

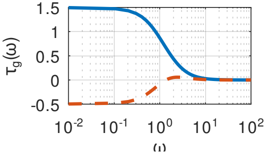
$$\forall \omega \in \mathbb{R}: \qquad |G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \quad \Rightarrow \quad \tau_g(\omega) \leq \tau_{g1}(\omega)$$

(ohne Nullstellen und Pole auf der imaginären Achse)

Wir betrachten die Frequenzantworten zweier LTI Systeme,

$$\underbrace{G_1(s) = \frac{s-1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2}_{\text{stabil, kausal, \textit{nicht} minimalphasig}} \qquad \underbrace{G_2(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2}_{\text{stabil, kausal, minimalphasig}}.$$




Die Amplitudengänge sind gleich. Die Gruppenlaufzeit des minimalphasigen Systems ist wie erwartet kleiner als die des nicht minimalphasigen Systems.

→ Anschrieb 9.5

# Literaturverzeichnis I

[1] Fleshgrinder, “File:Tiefpass.svg — Wikimedia Commons, the free media repository,” https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Tiefpass.svg&oldid=871974035, 2009, [Online; accessed 10-November-2024].