Karlsruher Institut für Technologie

Elektrotechnisches Institut

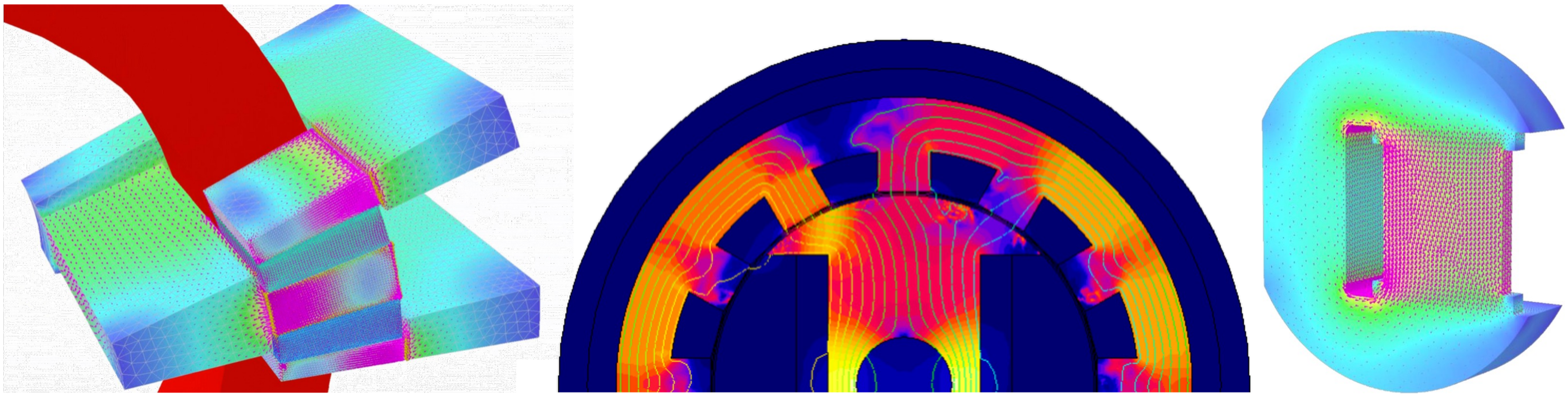
Vorlesung

Elektromagnetische Felder (EMF)

WS 2025/26

Kapitel 4: Stationäre elektrische Strömungsfelder

Elektrotechnisches Institut (ETI)



Gliederung

1. **Erhaltung der Ladung**
2. **Ohmsches Gesetz**
3. **Ohmsche Verlustleistung**
4. **Ohmscher Widerstand**
5. **Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder**
6. **Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen**

1. Erhaltung der Ladung I

Maxwell $\boxed{rot\ \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}}$ $\rightarrow$ $div\ rot\ \vec{H} = div\ \vec{J} + div\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$

mit $div\left(rot\ \vec{H}\right) \equiv 0$

$\rightarrow\ 0 = div\ \vec{J} + div\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$

Maxwell $\boxed{div\ \vec{D} = \rho}$

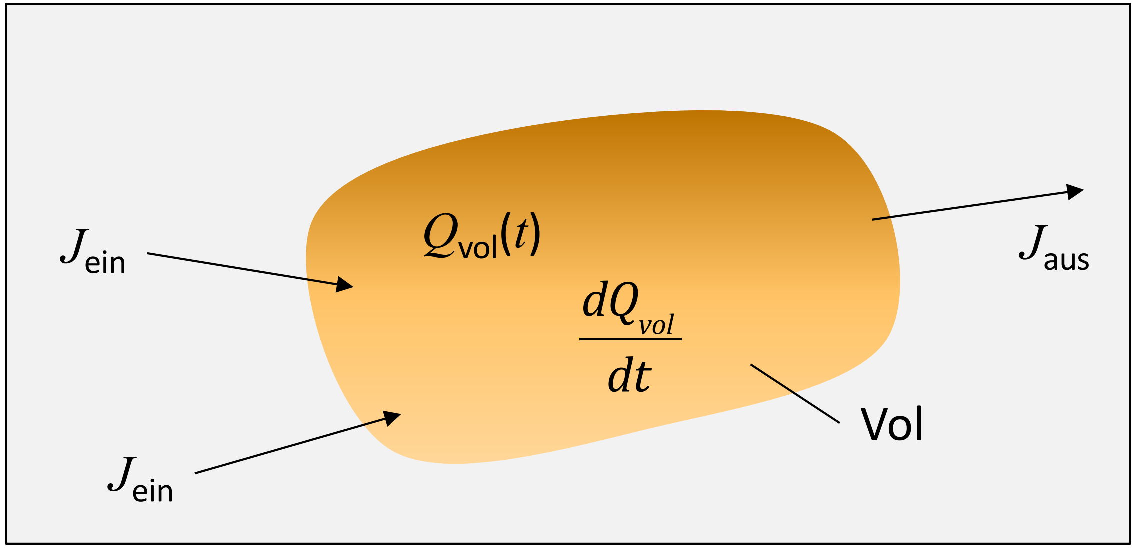
Kontinuitätsgleichung der Ladung $\boxed{div\ \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0}$

$$\iiint div\ \vec{J}\,dv + \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\,dv = 0 \quad \rightarrow \quad \oint\!\!\!\oint \vec{J}\cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\,dv = 0$$

Bilanzgleichung der Ladung $\boxed{\oint\!\!\!\oint \vec{J}\cdot d\vec{f} + \frac{dQ_{vol}}{dt} = 0}$ Ladung geht nicht verloren

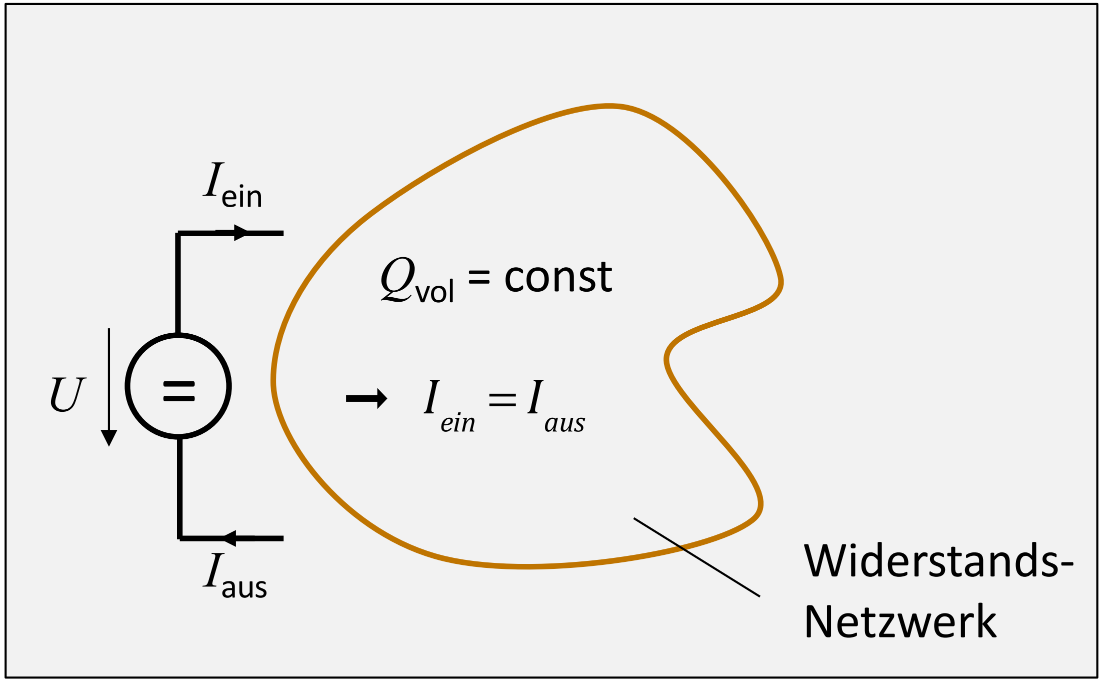
Siehe erstes Kirchhoff-Gesetz

1. Erhaltung der Ladung II



$$\boxed{\oiint \vec{J} \cdot d\vec{f} = -\frac{dQ_{vol}}{dt}}$$

Ladungserhaltung



Q_{vol} = const., z.B. Null

$$\rightarrow \frac{dQ_{vol}}{dt} = 0 \rightarrow \oiint \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{I_{ein} = I_{aus}}$$

2. Ohmsches Gesetz I

Bewegte elektrische Ladung = elektrischer Strom ➞ $I = \Delta Q / \Delta t$ $[I]$ = C / s = As / s = A

Leiter

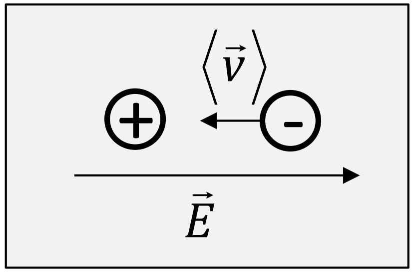
Metallische Leiter: Elektronen (negative Ladung per Definition), $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Elektrolyte: Ionen (positiv (*Kation*) oder negativ (*Anion*))
Ionenleitung ist mit Materialtransport verbunden (siehe Batterien), Elektronenleitung nicht.

Die <u>Richtung des Stroms</u> ist definitionsgemäß die Bewegungsrichtung <u>positiver Ladungsträger.</u>
Bei der üblichen Elektronenleitung in metallischen Leitern bewegen sich die Elektronen also <u>entgegengesetzt</u> der Stromrichtung (Definition von dem französischen Mathematiker und Physiker André-Marie Ampère aus Lyon).
Kupfer hat nur ein Elektron auf der äußersten-Schale (Valenzelektron). Es ist daher lose gebunden und kann leicht von Atom zu Atom wandern, wenn ein elektrisches Feld anliegt. Pro cm^3 Kupfer existieren rund $8{,}5 \cdot 10^{22}$ Leitungselektronen. Die Bewegungsgeschwindigkeit der Kupferelektronen ist langsam, nur rund 1/10 mm/s.

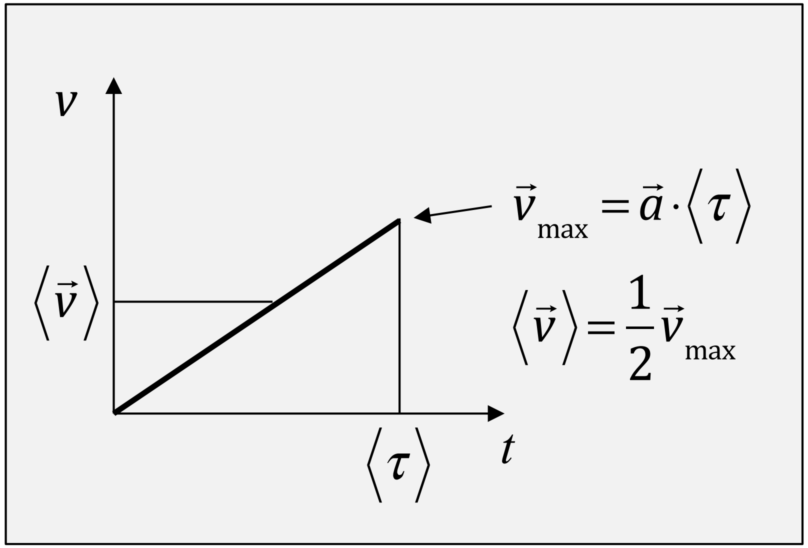
Dielektrika (Isolatoren)

In Dielektrika sind die Elektronen fest an die Atome gebunden. Unter Einfluss eines elektrischen Feldes findet keine Elektronenwanderung statt, wohl aber eine Verschiebung (➞ atomarer Dipol ➞ Polarisation).

2. Ohmsches Gesetz II



$$\boxed{\vec{J} = \rho_e \langle \vec{v} \rangle}$$



$\vec{F} = m_e \vec{a} = q_e \vec{E}$ ➞ $\vec{a} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}$

➞ $\vec{v} = \vec{a} \cdot t = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \cdot t$

Stöße Elektron/Ion ➞ Abbremsung ➞ Mittlere Flugzeit zwischen Stößen $\langle \tau \rangle$

Mittlere Fluggeschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$

➞ $\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \langle \tau \rangle \vec{E}$

➞ $\vec{J} = \underbrace{\rho_e \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \langle \tau \rangle}_{\kappa} \vec{E}$ ➞ $\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}}$ Ohmsches Gesetz

2. Ohmsches Gesetz III

Die Bewegung der Elektronen im Metall ist eine Überlagerung aus

- zufällig gerichteter thermischer Bewegung, abhängig von der Temperatur T

  $\langle v_{th} \rangle = f(T) \neq 0$

- gerichteter Bewegung in Richtung des elektrischen Feldes, abhängig von E

  $\langle v \rangle \sim E$ es zeigt sich: $\boldsymbol{\langle v_{th} \rangle \gg \langle v \rangle}$

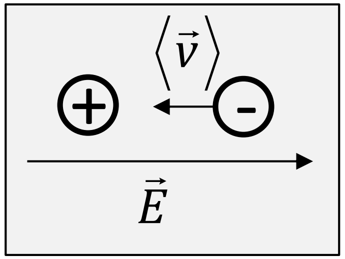
wobei die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Stößen des Elektrons mit den Ionen $\langle s \rangle$ abhängig von den Abständen der Ionen voneinander ist.

Die mittlere Stoßzeit $\langle \tau \rangle$ ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge $\langle s \rangle$ und der dominanten thermischen Geschwindigkeit $\langle v_{th}(T) \rangle$:

$$\boxed{\langle \tau(T) \rangle = \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle}} \quad \rightarrow \quad \vec{J} = \rho_e \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle} \vec{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{J} = \kappa(T) \cdot \vec{E}}$$

mit $\kappa(T) \sim \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle}$ elektrische Leitfähigkeit

3. Ohmsche Verlustleistung I



mittlere freie Flugzeit <τ>

$$\vec{F} = m_e \vec{a} = q_e \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{\max} = \frac{q_e}{m_q} \vec{E} \langle \tau \rangle$$

Kinetische Energie eines Elektrons: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2$

Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit: $n = \frac{\rho_{el}}{q_e}$

- Beschleunigung der Elektronen durch das elektrische Feld
- Stöße von Elektronen und Ionen
- Abbremsung der Elektronen
- Abgabe kinetischer Energie in thermische Energie
- Erwärmung
- Joulsche Verluste (Stromwärmeverluste)

Umgesetzte Energie pro Volumeneinheit pro Stoßzeit <τ>

$$n \cdot E_{kin} = \frac{\rho_{el}}{q_e} \cdot \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = \rho_{el} \frac{1}{2} \vec{v}_{\max} \frac{m_e}{q_e} \vec{v}_{\max}$$

wobei $\vec{J} = \rho_{el} \langle \vec{v} \rangle = \rho_{el} \frac{1}{2} \vec{v}_{\max}$

$$= \vec{J} \cdot \frac{m_e}{q_e} \left(\frac{q_e}{m_q} \vec{E} \langle \tau \rangle \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot \langle \tau \rangle \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{n \cdot E_{kin}}{\langle \tau \rangle} = \frac{\partial w_J}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E}}$$

lokale Verlustleistung (pro Volumen)

3. Ohmsche Verlustleistung II

$$\boxed{w_J = \int_0^t \vec{J} \cdot \vec{E} \, dt \qquad \frac{\partial w_J}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E}}$$

verheizte Joulsche Wärme   Leistungsdichte

$$\left[w_j \right] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{s} = \frac{\mathrm{Joule}}{\mathrm{m}^3} = \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m}^3}$$ spezifische Energie

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad w_j = \kappa \int_0^t \vec{E}^2 \, dt = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \vec{J}^2 \, dt$$

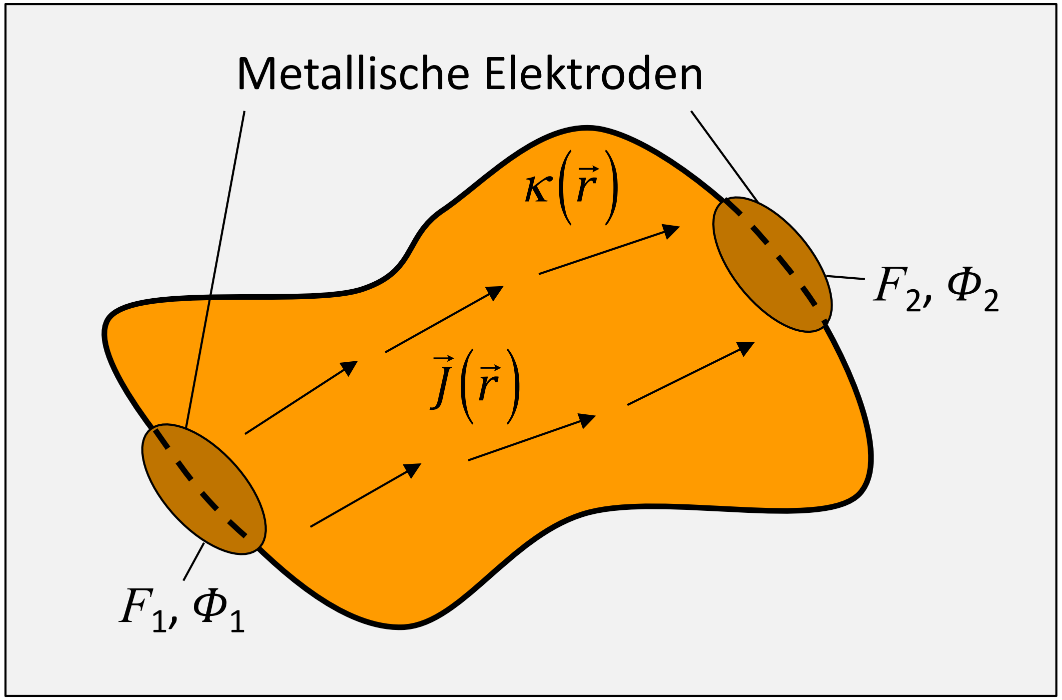
Gesamtleistung

$$\frac{\partial W_J}{\partial t} = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} \, d\vec{f} \, d\vec{s} = U \cdot I$$

Leistung $\left[\frac{\partial W_J}{\partial t} \right] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{V} = \mathrm{Watt}$

$$\boxed{\frac{\partial W_J}{\partial t} = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}}$$ gesamte thermische (Verlust-)Leistung

Energie/Arbeit $\left[W_j \right] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{V} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{Joule} = \mathrm{Watt} \cdot \mathrm{s}$



$$U = \Phi_2 - \Phi_1 = -\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}$$

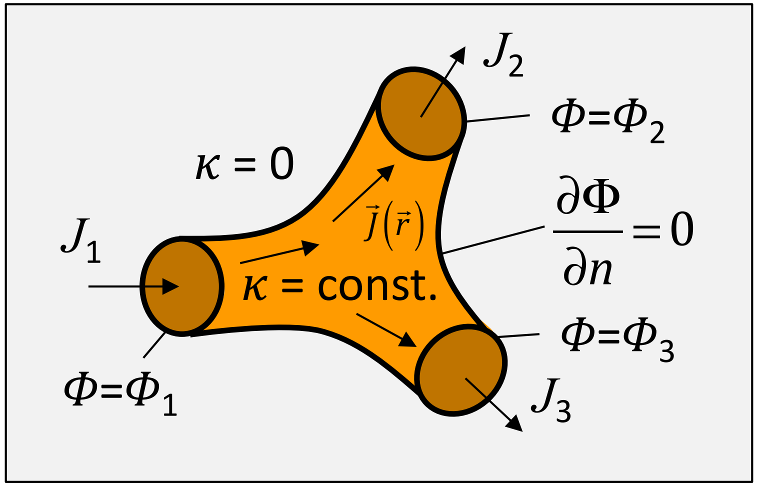
$$I = \iint_{F_1} \vec{J}\, d\vec{f}$$

$$\boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{-\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}}{\iint_{F_1} \vec{J}\, d\vec{f}} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\iint_{F_1} \vec{J}\, d\vec{f}}}$$

Φ_2 und Φ_1 sind bekannt.
Verteilung von J über Elektroden unbekannt

Ziel: Berechnung von $\vec{J}(\vec{r})$ innen bei gegebenen Randbedingungen an den Ein- und Ausgängen

Ziel: $\vec{J} \leftarrow \kappa\vec{E} \leftarrow -\kappa\,\mathrm{grad}\,\Phi \quad \Phi=?$



Randbedingungen für Laplace-Gleichung für ρ=0 im Inneren (Leiter)

Stationär $\partial/\partial t = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi$

Im Inneren mit ρ=0 $\quad\rightarrow\quad$ $\mathrm{div}\,\vec{D} = 0$

Linear & isotrop mit $\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$ $\quad\rightarrow\quad$ $\mathrm{div}\left(\varepsilon\cdot\vec{E}\right) = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ $\varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi + \underset{\uparrow}{\mathrm{grad}\,\varepsilon}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi = 0$

Null bei ε = const.

$\rightarrow\quad \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi = 0$

$\rightarrow\quad \boxed{\begin{array}{l}\Delta\Phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung} \\ \vec{J} = \kappa\cdot\vec{E} = -\kappa\cdot\mathrm{grad}\,\Phi\end{array}}$

Beispiel Rundleiter

$$\boxed{\Delta\Phi = 0}$$

$$\rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)} + \cancel{\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

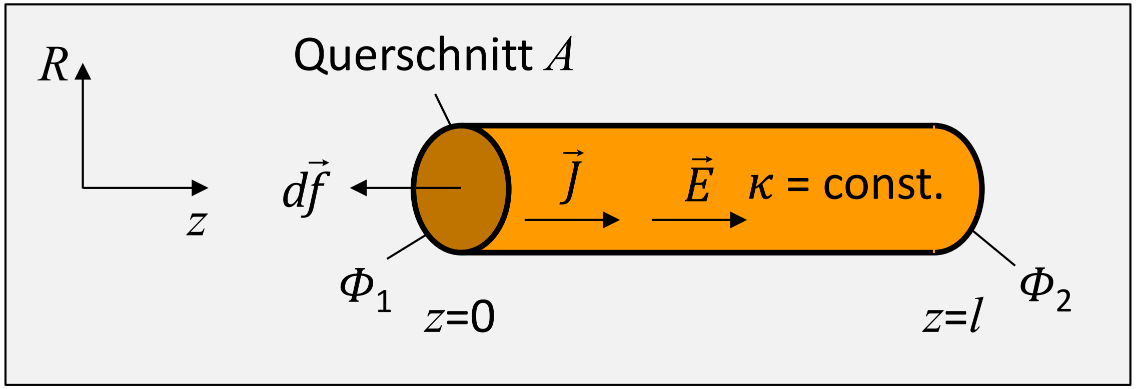
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = c_1$$

$$\boxed{\Phi(z) = c_1 \cdot z + c_2}$$

1) Lösung von $\Delta\Phi=0 \rightarrow \Phi(z)$

2) $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$

3) $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$



Randbedingungen:

$\Phi\ (z = 0) = \Phi_1 \quad \rightarrow \quad c_2 = \Phi_1$

$\Phi\ (z = l) = \Phi_2 \quad \rightarrow \quad c_1\, l + \Phi_1 = \Phi_2 \quad \rightarrow \quad c_1 = (\Phi_2 - \Phi_1) / l$

$$\rightarrow \quad \boxed{\Phi(z) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \cdot z + \Phi_1}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi = -\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l}\vec{e}_z$$

$$R = \frac{-\int \vec{E}\,d\vec{s}}{\iint \vec{J}\,d\vec{f}} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{-\kappa \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial z}(-A)} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\kappa \cdot \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \cdot A} = \boxed{\frac{l}{\kappa \cdot A} = R}$$

6. Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen I

$$\boxed{\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung der Ladung

Stationär heißt $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} J = 0$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}} \quad \rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\kappa}{\varepsilon} \vec{D}$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{div}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \vec{D} \right) = 0$$

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \right) = 0$$

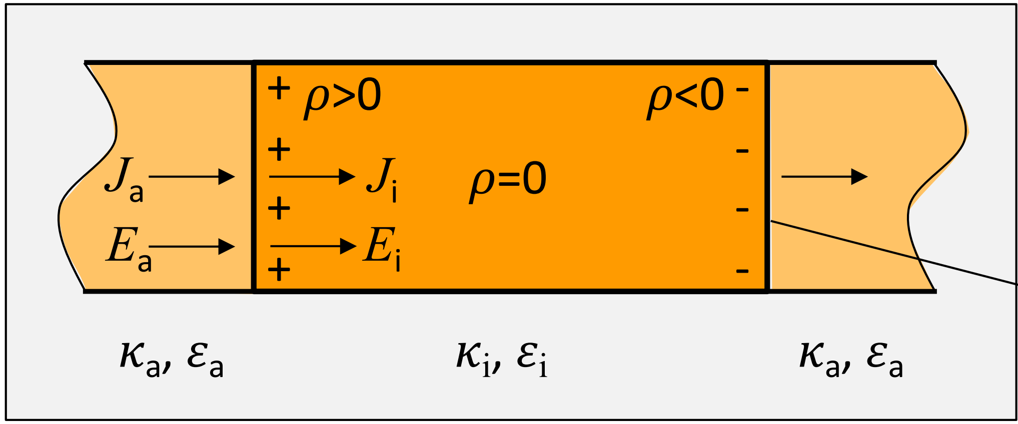
(siehe Formelsammlung)

$\operatorname{div} D = \rho$ und $\vec{D} = \varepsilon / \kappa \cdot \vec{J} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \rho + \frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot \vec{J} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \right) = 0}$

Zusammenhang zwischen Strömen und dadurch erzeugen Raumladungen

In Gebieten ungeladener Leiter, wo κ/ε konstant ist, gibt es keine freie Raumladung, da grad(const) = 0. Nur an Grenzflächen mit unterschiedlichen ε oder κ können Ladungen auftreten, solange Ströme fließen.

Grenzflächen-Ladungen



$$\mathrm{grad}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right)$$

$$\left(\frac{\kappa_i}{\varepsilon_i}\right) < \left(\frac{\kappa_a}{\varepsilon_a}\right)$$ gute Außenleiter

$$\boxed{\frac{\kappa}{\varepsilon}\cdot\rho = -\frac{\varepsilon}{\kappa}\cdot\vec{J}\cdot\mathrm{grad}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right)}$$

Ladungserhaltung: $\vec{J}_a = \vec{J}_i = \vec{J}$

Ohmsches Gesetz: $\vec{J} = \kappa\vec{E}$ $\rightarrow$ $\kappa_a\vec{E}_a = \kappa_i\vec{E}_i$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_a = \frac{\kappa_i}{\kappa_a}\vec{E}_i}$$

6. Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen III

Stetigkeitsbeziehung für Normalkomponenten D_n:

$$D_i - D_a = \sigma$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \varepsilon_i \varepsilon_0 E_i - \varepsilon_a \varepsilon_0 E_a = \sigma$$

$$\vec{E}_a = \frac{\kappa_i}{\kappa_a} \vec{E}_i \qquad \varepsilon_i \varepsilon_0 E_i - \varepsilon_a \varepsilon_0 \frac{\kappa_i}{\kappa_a} E_i = \sigma$$

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{J}}{\kappa_i} \qquad \frac{\varepsilon_i \varepsilon_0}{\kappa_i} J - \frac{\varepsilon_a \varepsilon_0}{\kappa_i} \frac{\kappa_i}{\kappa_a} J = \sigma$$

$$\boxed{\sigma = \left(\frac{\varepsilon_i \varepsilon_0}{\kappa_i} - \frac{\varepsilon_a \varepsilon_0}{\kappa_a} \right) \cdot J}$$

An Grenzen unterschiedlicher Leitfähigkeit oder relativer Dielektrizitätskonstanten gibt es eine Proportionalität zwischen der Oberflächenladungsdichte und der Stromdichte.

Die Oberflächenladungsdichten verursachen ein elektrisches Feld, das frei bewegliche Ladungsträger antreibt und so eine Stromdichte erzeugt.