11 Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten der folgenden Signale. Verwenden Sie dafür die Eigenschaften, Rechenregeln und Korrespondenzen der Fourier-Transformation.

a) $\mathrm{e}^{(-1+2\,\mathrm{j})t}\,\theta(t)$

b) $\begin{cases} -1, & t<0 \\ 0, & t=0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$

Hinweis: Das Signal kann als Summe zweier anderer Signale geschrieben werden.

c) $\frac{1}{\mathrm{j}\,t+1}$

d) $\left[\frac{\sin(t)}{\pi t}+\delta(t+1)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,t}$

e) Faltung eines Rechtecksignals mit sich selbst $r_{T/2}(t) * r_{T/2}(t)$

Es gilt $\cos(\omega_0 t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$ mit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie daraus die Fourier-Transformierte von $\sin(\omega_0 t)$ mittels der Rechenregel der Fourier-Transformation zur

f) Differentiation

g) Zeitverschiebung

Lösung:

a) Mit $\mathrm{Re}(1-2\,\mathrm{j})>0$ erhält man die Lösung direkt mittels der Korrespondenztabelle:

$$\mathrm{e}^{(-1+2\,\mathrm{j})t}\,\theta(t)=\mathrm{e}^{-(1-2\,\mathrm{j})t}\,\theta(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{1-2\,\mathrm{j}+\mathrm{j}\,\omega}=\frac{1}{1+\mathrm{j}(\omega-2)}$$

b) Das gegebene Signal lässt sich auch wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}\theta(t)-\theta(-t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; &\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}+\pi\delta(\omega)-\frac{1}{|-1|}\left[\frac{-1}{\mathrm{j}\,\omega}+\pi\delta\left(\frac{\omega}{-1}\right)\right]= \\ &\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}-\pi\delta(-\omega)= \\ &\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega}+\pi\delta(\omega)-\pi\delta(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega} \quad \text{mit} \quad \omega\neq 0\,.\end{aligned}$$

c) Zunächst gilt gemäß Korrespondenztabelle

$$V(\mathrm{j}\,\omega):=\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega+1} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \mathrm{e}^{-t}\,\theta(t)=:v(t)$$

Wegen der Dualität gilt:

$$\begin{aligned} V(\mathrm{j}\,t) &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi\,v(-\omega) \\ \frac{1}{\mathrm{j}\,t+1} &\;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi\,\mathrm{e}^{-(-\omega)}\,\theta(-\omega)=2\pi\,\mathrm{e}^{\omega}\,\theta(-\omega)\,.\end{aligned}$$

d) Mit der Korrespondenztabelle und den Rechenregeln zur Zeitverschiebung sowie der Dualität erhält man zunächst

$$\frac{\sin(t)}{\pi t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ r_1(\omega) \qquad \text{und} \qquad \delta(t+1) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega(-1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega}\ .$$

Wegen der Linearität gilt

$$\frac{\sin(t)}{\pi t} + \delta(t+1) \circ\!\!-\!\!\bullet\ r_1(\omega) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega}\ .$$

Und schließlich folgt mit der Rechenregel zur Frequenzverschiebung

$$\left[\frac{\sin(t)}{\pi t} + \delta(t+1)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ r_1(\omega+1) + \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+1)}\ .$$

e) Zunächst gilt gemäß Korrespondenztabelle:

$$r_{T/2}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\ .$$

Mit der Rechenregel zur Faltung erhält man

$$\left(r_{T/2} * r_{T/2}\right)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \cdot T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) = T \cdot T\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\right]^2 \bullet\!\!-\!\!\circ\ T d_T(t)\,.$$

f) Im Folgenden wird unter anderem verwendet, dass gilt:

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)\,.$$

Mit der Rechenregel zur Differentiation erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_0 t) &= -\,\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\
\Rightarrow \sin(\omega_0 t) &= \frac{-1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_0 t) \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{-1}{\omega_0}\,\mathrm{j}\,\omega\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= -\,\mathrm{j}\,\pi\left[\frac{\omega}{\omega_0}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{\omega}{\omega_0}\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= -\,\mathrm{j}\,\pi\left[\frac{\omega_0}{\omega_0}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{-\omega_0}{\omega_0}\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= -\,\mathrm{j}\,\pi\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= \frac{\pi}{\mathrm{j}}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]\ .
\end{aligned}$$

g) Mit der Rechenregel zur Zeitverschiebung erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
\Rightarrow \sin(\omega_0 t) &= \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right) \\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi\omega}{2\omega_0}}\,\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \\
&= \pi\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi\omega}{2\omega_0}}\,\delta(\omega-\omega_0) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi\omega}{2\omega_0}}\,\delta(\omega+\omega_0)\right]\ .
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass der verschobene Dirac-Impuls $\delta(x - x_0)$ überall, bis auf die Stelle $x = x_0$, den Wert Null annimmt, so müssen hier die Stellen $\omega = -\omega_0$ und $\omega = \omega_0$ genauer untersucht und die Vorfaktoren der Dirac-Impulse bestimmt werden.
Es ergeben sich daraus die Faktoren $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0}{\omega_0}} = -\mathrm{j}$ bzw. $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}\frac{-\omega_0}{\omega_0}} = \mathrm{j}$ und die Lösung zu

$$\begin{aligned}\sin(\omega_0 t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; & \mathrm{j}\,\pi\,[-\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \\ & -\mathrm{j}\,\pi\,[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] = \\ & \frac{\pi}{\mathrm{j}}\,[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]\ .\end{aligned}$$