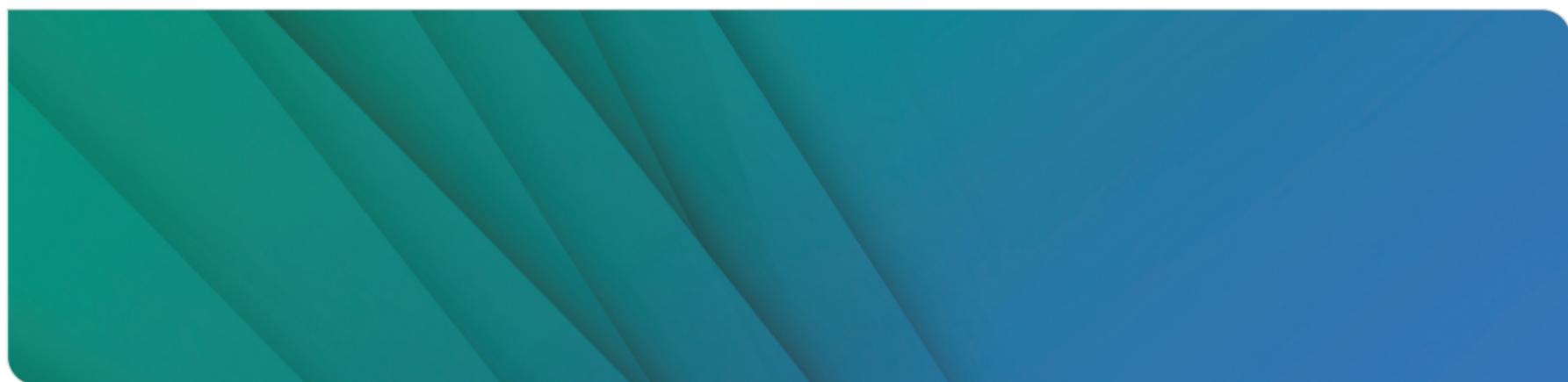


Signale und Systeme

Vorlesung 6: Eigenschaften der Fouriertransformation

Prof. Dr.-Ing. Sander Wahls | WS 25/26



Inhalt

1. Eigenschaften der Fouriertransformation
2. Faltungseigenschaft und Frequenzbereichsdarstellung von Systemen
3. Periodische Signale und duale Eigenschaften

Eigenschaften der Fouriertransformation

- Die Fouriertransformation hat viele nützliche Eigenschaften, welche wir im Folgenden näher betrachten wollen
- Diese können z.B. zur Bestimmung von komplizierteren Fouriertransformierten sowie zur Systemanalyse genutzt werden
- Zur Erinnerung, die Fourierpaar-Notation

$$x(t) \circ\bullet X(j\omega)$$

besagt, dass $X(j\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$ ist

Eigenschaften der Fouriertransformation

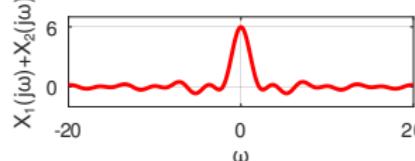
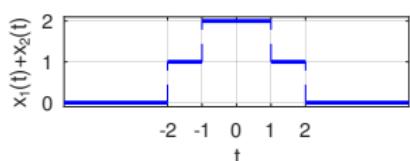
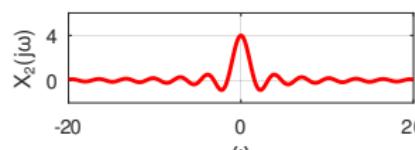
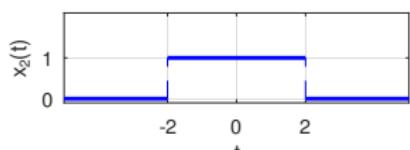
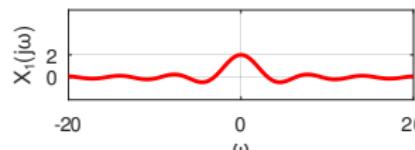
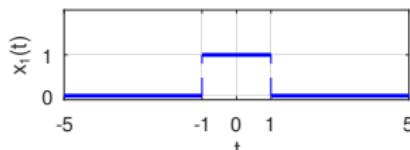
Linearität

Die Fouriertransformation ist **linear**:

$$x_1(t) \xrightarrow{\bullet} X_1(j\omega), \quad x_2(t) \xrightarrow{\bullet} X_2(j\omega)$$



$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\bullet} \alpha X_1(j\omega) + \beta X_2(j\omega), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$



Diese Beispiel illustriert die Linearität anhand der Addition zweier Rechtecke. Die Fouriertransformierten werden ebenfalls addiert.

Eigenschaften der Fouriertransformation

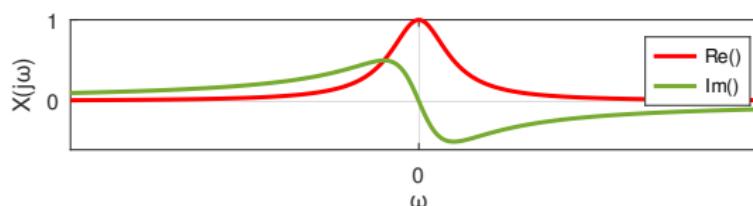
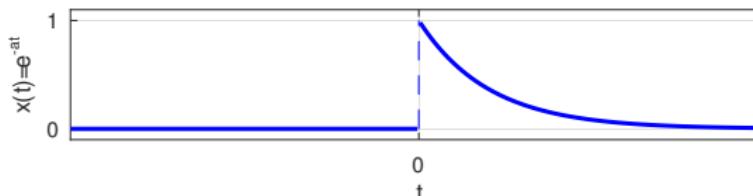
Konjugation

Wenn ein Signal **konjugiert** wird, so wird die Fouriertransformierte konjugiert und gespiegelt:

$$x^*(t) \circ \bullet X^*(-j\omega)$$

Für **reelle Signale** impliziert dies, dass der Realteil der Fouriertransformierten gerade ist, während der Imaginärteil ungerade ist:

$$x(t) = x^*(t) \Leftrightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$



Das abgeschnittene Exponential $x(t) = e^{-at}\theta(t)$ ist ein reelles Signal für $a > 0$. In der letzten VL hatten wir gezeigt, dass

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}.$$

Wir sehen, dass der Realteil von $X(j\omega)$ gerade ist. Der Imaginärteil ist ungerade.

Eigenschaften der Fouriertransformation

Reelle Formen der Fouriertransformation

Für reelle Signale gilt

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t) d\omega,$$

wobei

$$A(\omega) = \operatorname{Re}[X(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(j\omega t) dt,$$

$$B(\omega) = -\operatorname{Im}[X(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(j\omega t) dt.$$

Für reelle Signale gilt ebenfalls

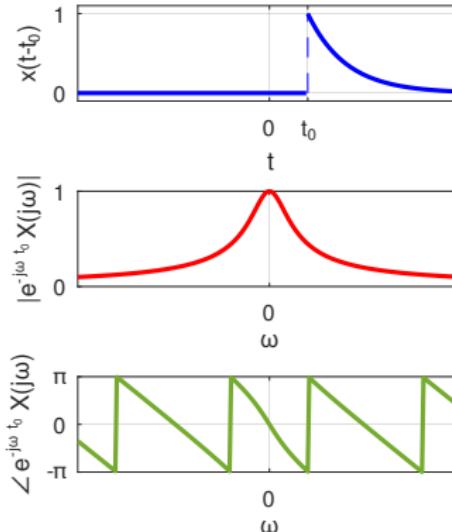
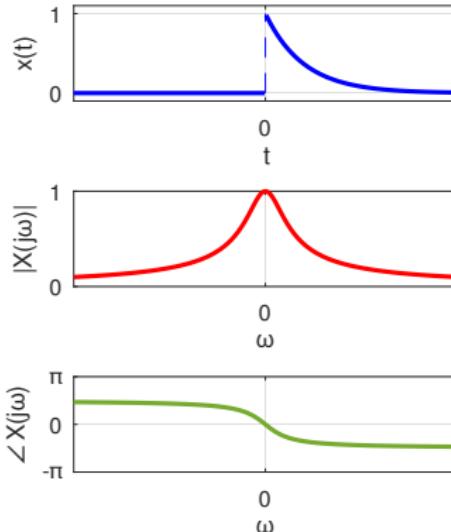
$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)| \cos(\omega t + \angle X(j\omega)) d\omega.$$

Eigenschaften der Fouriertransformation

Zeitverschiebung

Eine **Zeitverschiebung** entspricht im Frequenzbereich einer Multiplikation mit einer komplexen Schwingung:

$$x(t - t_0) \circledast e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$



In Polarkoordinaten gilt:

$$|e^{-j\omega t_0} X(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

$$\angle[e^{-j\omega t_0} X(j\omega)] = -\omega t_0 + \angle X(j\omega)$$

Diese Plots illustrieren die Eigenschaft am Beispiel des abgeschnittenen Exponentiels.

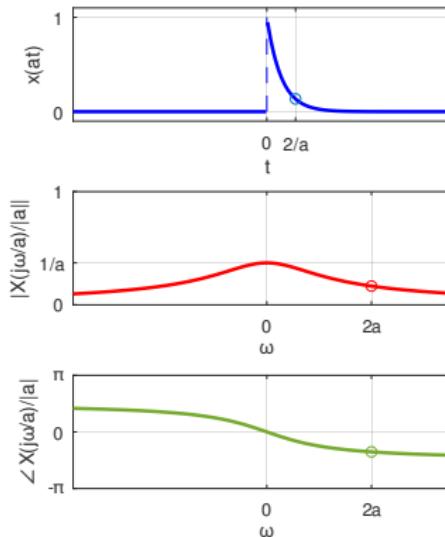
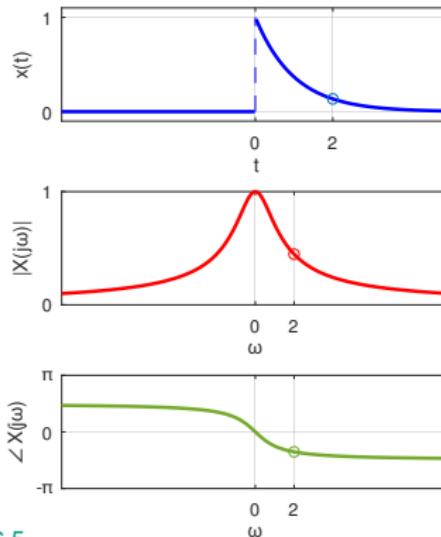
Während die Amplitude unverändert ist, wird zur Phase eine lineare Funktion addiert. Da die Phase hier auf den Bereich $[-\pi, \pi]$ eingeschränkt ist, ergibt sich ein Sägezahnmuster.

Eigenschaften der Fouriertransformation

Zeitskalierung

Eine **Zeitskalierung** entspricht im Frequenzbereich einer inversen Skalierung sowohl auf der Frequenzachse als auch in der Amplitude (dort nur im Betrag):

$$x(at) \circledast \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right), \quad a \neq 0 \text{ reell}$$



Zeitstreckung \Rightarrow Frequenzstauchung + Amplitude rauf

Zeitstauchung \Rightarrow Frequenzstreckung + Amplitude runter

Für a negativ werden Zeit und Frequenz zusätzlich gespiegelt.

Insbesondere gilt

$$x(-t) \circledast X(-j\omega)$$

Diese Plots illustrieren die Eigenschaft am Beispiel des abgeschnittenen Exponentials.

In diesem Beispiel ist $a > 1$, so dass das Signal gestaucht und die Fouriertransformierte gestreckt wird. Die Amplitude der Fouriertransformierten wird zusätzlich gedämpft.

Eigenschaften der Fouriertransformation

Ableitung und Integral

Im Frequenzbereich wird aus einer **Ableitung** eine Multiplikation mit $j\omega$:

$$\frac{dx(t)}{dt} \circ \bullet j\omega X(j\omega)$$

Für ein **Integral im Zeitbereich** ist die Situation etwas komplizierter:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

Eigenschaften der Fouriertransformation

Ableitung und Integral

Hier ein Beispiel zur **Illustration der Ableitungseigenschaft**. Mit Linearität und Zeitskalierung erhalten wir aus dem abgeschnittenen Exponential das Paar

$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\text{---}} \bullet \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re}(a) > 0.$$

Mit Hilfe der Ableitungseigenschaft ergibt sich nun

$$\frac{de^{-a|t|}}{dt} \xrightarrow{\text{---}} \bullet j\omega \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

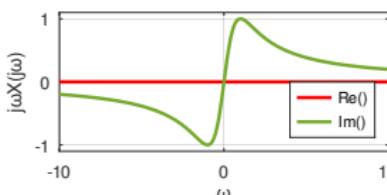
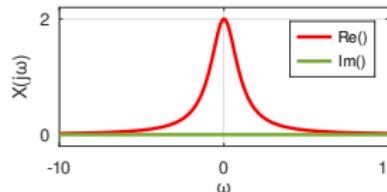
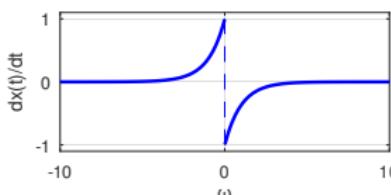
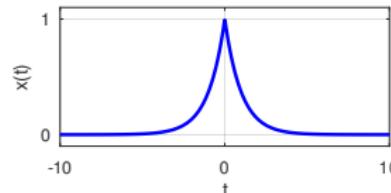


Illustration der Ableitungseigenschaft für $a = 1$.

Wir beobachten, dass

$$\operatorname{Re}[j\omega X(j\omega)] = -\omega \operatorname{Im}[X(j\omega)],$$
$$\operatorname{Im}[j\omega X(j\omega)] = \omega \operatorname{Re}[X(j\omega)].$$

Eigenschaften der Fouriertransformation

Dualität

Die Fouriertransformation und ihre Inverse sind beinahe gleich:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Daher gibt es zu jedem Fourierpaar ein duales Fourierpaar.

$$x(t) \circ \bullet X(j\omega)$$



$$X(jt) \circ \bullet 2\pi x(-\omega)$$

Eigenschaften der Fouriertransformation

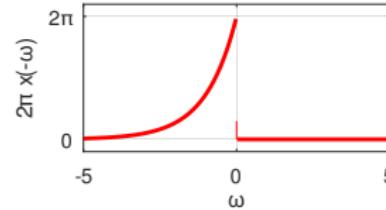
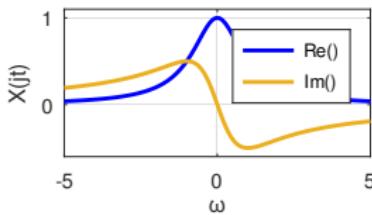
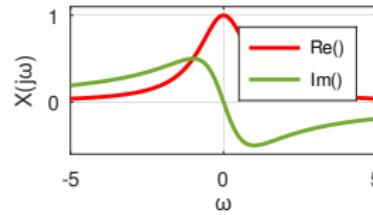
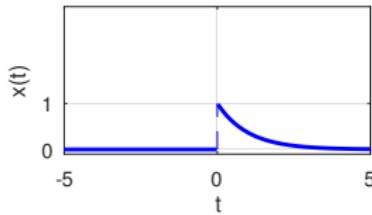
Dualität

Für das abgeschnittene Exponential erhalten wir z.B. das folgende duale Paar:

$$e^{-at}\theta(t) \circledast \frac{1}{a+j\omega}$$



$$\frac{1}{a+jt} \circledast 2\pi e^{a\omega} \theta(-\omega)$$



Ursprüngliches und duales Fourierpaar im Fall $a = 1$.

Eigenschaften der Fouriertransformation

Parseval'sche Beziehung

Die Energie eines Signals im Zeitbereich entspricht der Energie der Fouriertransformierten im Frequenzbereich durch 2π :

$$\|x\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|X\|_2^2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

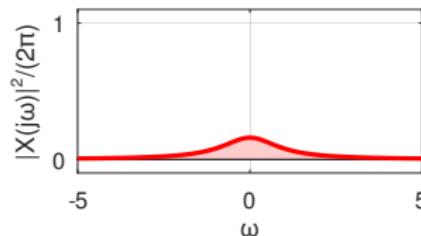
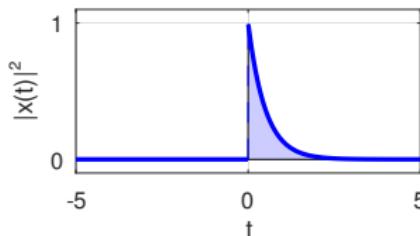
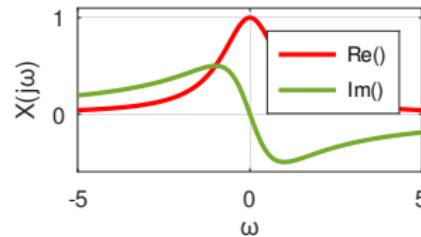
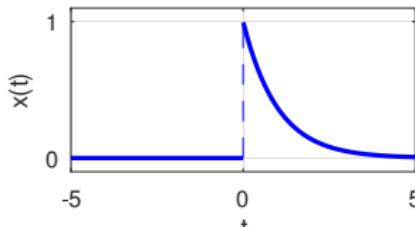
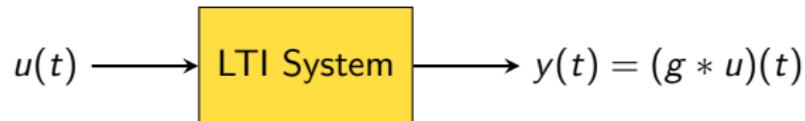


Illustration der Parseval'schen Beziehung am abgeschnittenen Exponential. Die blau und rot markierten Fläche sind gleich.

Faltungseigenschaft



Eine Faltung reduziert sich im Frequenzbereich auf eine simple Multiplikation:

$$(g * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau)d\tau \xrightarrow{\bullet} G(j\omega)U(j\omega)$$

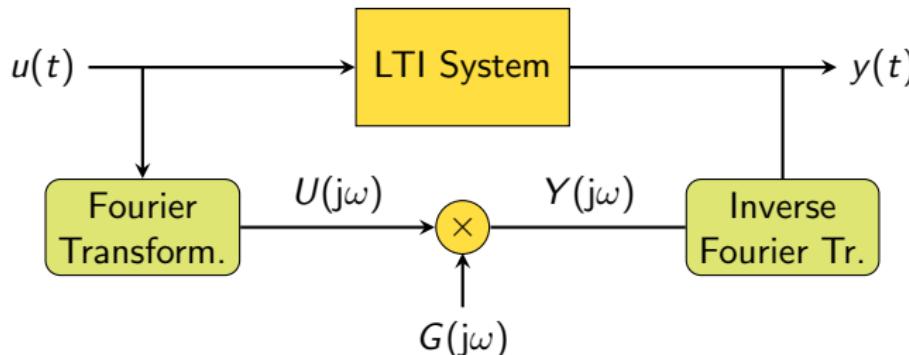
- Ermöglicht uns die Analyse und Auswertung von LTI Systemen im Frequenzbereich, da diese das Eingangssignal mit der Impulsantwort falten
- In der Praxis ist die Auswertung von LTI Systemen im Frequenzbereich oft wesentlich effizienter. Dazu in einer anderen Vorlesung mehr.

Frequenzbereichsdarstellung von LTI Systemen

Es sei $y = S\{u\}$ ein stabiles LTI System. Dann ist die Fouriertransformierte der Impulsantwort $g = S\{\delta\}$ die **Frequenzantwort** des Systems:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g\}(\omega).$$

Die Stabilität des Systems stellt sicher, dass wir die Fouriertransformierte der Impulsantwort bilden können.



Falls die Fouriertransformierten des Ein- und Ausgangssignals existieren, so gilt

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

Die Fouriertransformierte des Ausgangssignals erhalten wir also durch Multiplikation der Fouriertransformierten des Eingangssignals mit der Frequenzantwort des Systems.

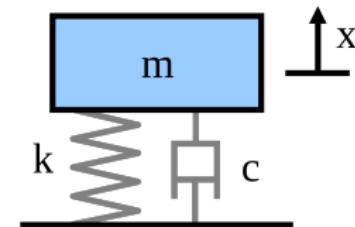
Frequenzbereichsdarstellung von LTI Systemen

Frequenzantwort von linearen Differentialgleichungen

Viele wichtige LTI Systeme, wie z.B. das gedämpfte Masse-Feder System

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = u(t),$$

werden durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. In solchen Fällen können wir die Frequenzantwort direkt ablesen.



Wir betrachten ein beliebiges LTI Systems $y = S\{u\}$ der Form

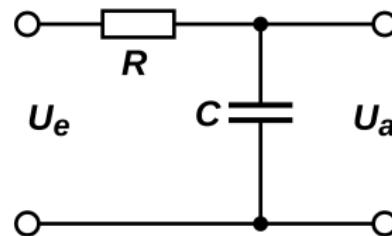
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}.$$

Dann ist die Frequenzantwort des Systems

$$G(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}.$$

Frequenzbereichsdarstellung von LTI Systemen

Beispiel RC-Glied



Ein RC-Glied ist ein LTI System, welches durch die Differentialgleichung

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

beschrieben wird. Hierbei ist $u = u_e$ die Eingangsspannung und $y = u_a$ die Spannung am Kondensator. Die Impuls- und Frequenzantworten lauten

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}.$$

Interpretation der Frequenzantwort

Reaktion auf komplexe und reelle Schwingungen



Für ein (stabiles) LTI System mit Frequenzantwort $G(j\omega)$ gilt

$$u(t) = e^{j(\omega_0 t + \phi)} \Rightarrow y(t) = |G(j\omega_0)| e^{j[\omega_0 t + \phi + \angle G(j\omega_0)]}.$$

Bei Systemen mit reeller Impulsantwort können wir das gleiche Verhalten auch für reelle Schwingungen beobachten. Daher der Name Frequenzantwort.



Falls die Impulsantwort des Systems zusätzlich reell ist, so gilt weiterhin

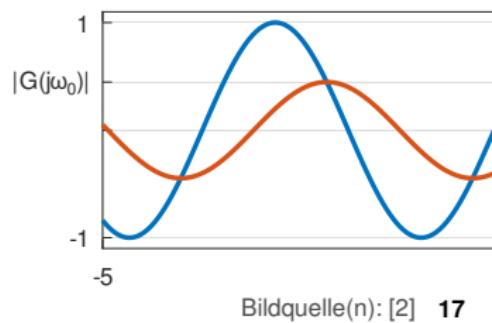
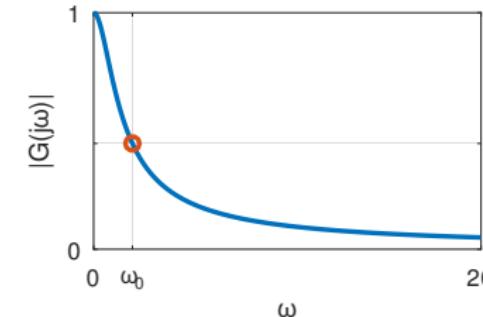
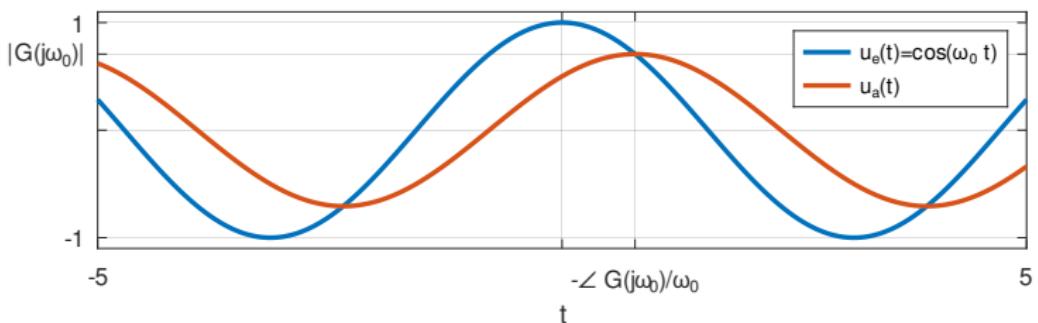
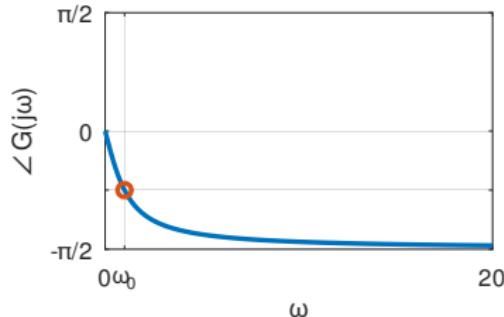
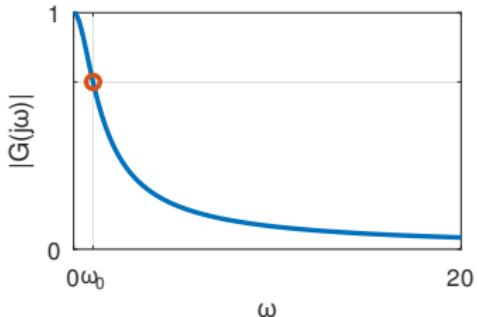
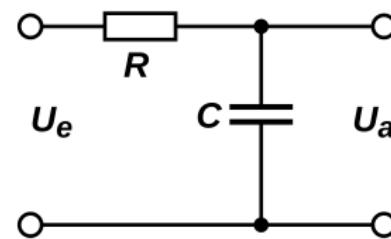
$$u(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow y(t) = |G(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi + \angle G(j\omega_0)).$$

Die Amplitude $|G(j\omega)|$ der Frequenzantwort entspricht also dem Skalierungsfaktor. Die Phase $\angle G(j\omega)$ entspricht der Zeitverschiebung.

Interpretation der Frequenzantwort

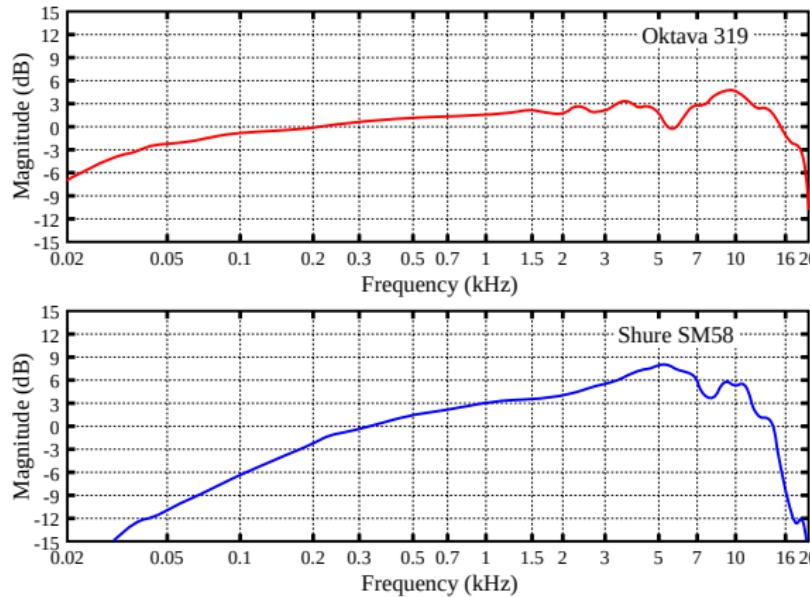
Beispiel RC-Glied

Wir beobachten nun, wie die Frequenzantwort eines RC-Glieds mit $RC = 1$ dessen Reaktion auf verschiedene harmonische Schwingungen vorhersagt ...



Interpretation der Frequenzantwort

Beispiel Mikrofon



Frequenzantworten zweier Mikrofone



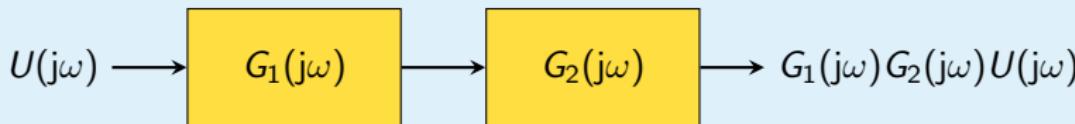
Ein Shure SM58 Mikrofon.

- Ein Mikrofon kann als LTI System interpretiert werden
- Der Betrag der Frequenzantwort wäre idealerweise flach im hörbaren Frequenzbereich (16 bis 20.000 Hertz)
- Nichtidealität kann später durch digitale Filterung ausgeglichen werden

Frequenzbereichsdarstellung von LTI Systemen

Parallel- und Reihenschaltung

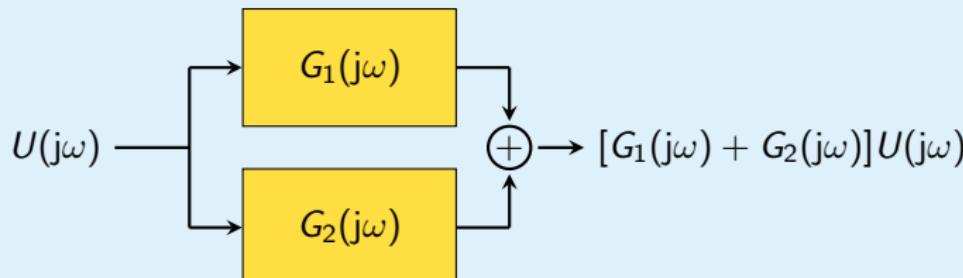
Es seien $y = g_1 * u$ und $y = g_2 * u$ zwei stabile LTI Systeme.



Die Frequenzantwort der Reihenschaltung $y = g_2 * g_1 * u$ ist

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega).$$

Folgt mit der
Faltungseigenschaft aus der
Assoziativität der Faltung.



Die Frequenzantwort der Parallelschaltung $y = (g_1 + g_2) * u$ ist

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) + G_2(j\omega).$$

Folgt mit der Linearität aus der
Distributivität der Faltung.

Fouriertransformation periodischer Signale

Es sei $x(t) = x(t + T)$ ein periodisches Signal mit Fourierreihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}.$$

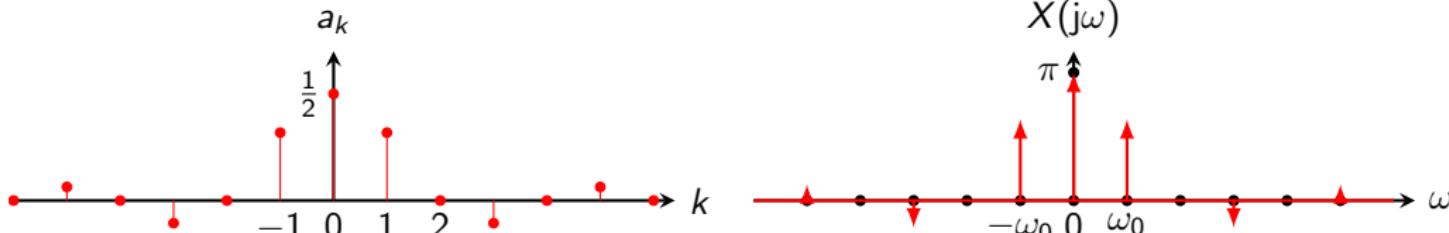
Dann hat $x(t)$ die Fouriertransformierte

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

Wir hatten die Fouriertransformation ursprünglich für nicht-periodische Signale eingeführt. Mit Hilfe des Dirac-Impulses können wir aber auch periodische Signale transformieren.

Beispiel. Fourierkoeffizienten und -transformation des periodischen Rechtecks.

Siehe auch VL 4. Das Signal selber ist nicht abgebildet.



Duale Eigenschaften

Ähnlich zu dualen Fourierpaaren gibt es auch duale Eigenschaften.

Frequenzverschiebung

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \circ \bullet X(j(\omega - \omega_0))$$

Ableitung im Frequenzbereich

$$-jtx(t) \circ \bullet \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

Integral im Frequenzbereich

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \circ \bullet \int_{-\infty}^{\omega} x(\vartheta)d\vartheta$$

Multiplikationseigenschaft

$$s(t)p(t) \circ \bullet \frac{1}{2\pi} (S * P)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\vartheta)P(j(\omega - \vartheta))d\vartheta$$

Literaturverzeichnis I

- [1] Rswarbrick, "File:Spring-mass-damper system.svg - Wikimedia Commons, the free media repository," https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Spring%20%93mass%20%93damper_system.svg&oldid=682398672 (GNU FDL), 2008, [Online; accessed 13-October-2024].
- [2] Fleshgrinder, "File:Tiefpass.svg — Wikimedia Commons, the free media repository," <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Tiefpass.svg&oldid=871974035>, 2009, [Online; accessed 10-November-2024].
- [3] Gmaxwell, "File:Oktava319vsshuresm58.png — Wikimedia Commons, the free media repository," <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Oktava319vsshuresm58.png&oldid=688967772>, 2022, GFDL, [Online; accessed 10-November-2024].

Literaturverzeichnis II

- [4] E. Gómez, "Shure SM58,"
<https://www.flickr.com/photos/egomez/3519651938>, 2009, CC BY-SA 2.0,
[Online; accessed 10-November-2024].