

# Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.  
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação  
Bacharelado em Ciência da Computação

29 de junho de 2017

# Plano de Aula

- 1 Revisão
  - Decidibilidade
  - O Problema da Parada
  
- 2 Método da diagonalização

# Sumário

- 1 Revisão
  - Decidibilidade
  - O Problema da Parada
- 2 Método da diagonalização

# Problema da Igualdade de Linguagens

## Descrição

Dadas duas linguagem  $L_1$  e  $L_2$ , identificar se  $L_1 = L_2$ .

## Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{ \langle A, B \rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B) \}$

## Estratégia de Resolução

Decidir se  $\langle A, B \rangle \in EQ_{AFD}$ .

# Problema da Igualdade de Linguagens

## Teorema 4.5

$EQ_{AFD}$  é uma linguagem decidível.

## Lema 4.1

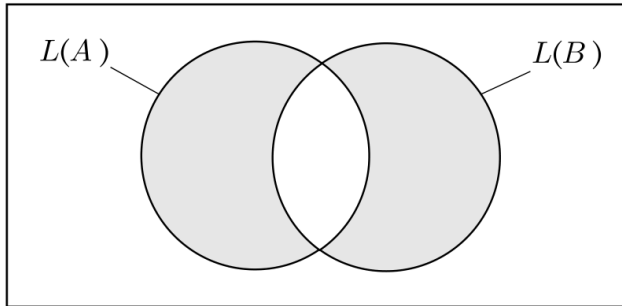
Iremos construir um AFD  $C$  a partir de  $A$  e  $B$  de forma que  $C$  aceite as cadeias que são aceitas por  $A$  ou por  $B$ , mas não por ambas. Consequentemente, se  $A$  e  $B$  reconhecem a mesma linguagem,  $C$  não aceitará nada. A linguagem de  $C$  é

$$L(C) = (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))$$

## Corolário

$$L(C) = \emptyset \iff L(A) = L(B)$$

# Problema da Igualdade de Linguagens



**FIGURA 4.6**

A diferença simétrica de  $L(A)$  e  $L(B)$

# Problema da Igualdade de Linguagens

## Teorema 4.5

$EQ_{AFD}$  é uma linguagem decidível.

## Prova

A seguinte MT  $F$  decide  $EQ_{AFD}$ .

$F$  = “Sobre a entrada  $\langle A, B \rangle$ , em que  $A$  e  $B$  são AFDs:

- 1 Construa o AFD  $C$  conforme descrito no Lema 4.1;
- 2 Rode MT  $T$  do Teorema 4.4 sobre a entrada  $\langle C \rangle$ ;
- 3 Se  $T$  aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**.”

# Teoremas sobre GLC

## Teorema 4.7

$A_{GLC}$  é uma linguagem decidível.

## Teorema 4.8

$V_{GLC}$  é uma linguagem decidível.

## Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

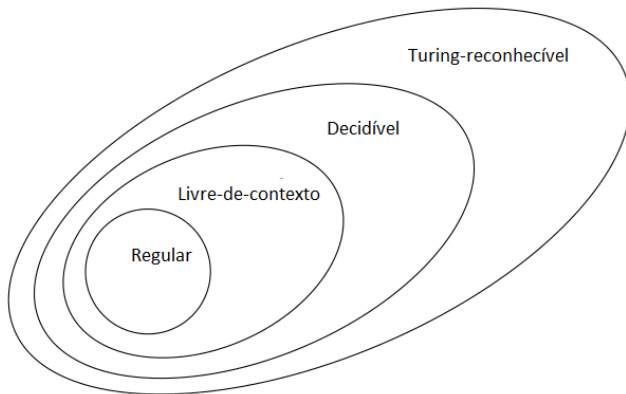
## Cuidado!

$E_{Q_{GLC}}$  **não** é uma linguagem decidível.





# Relacionamento entre as classes de linguagens



**FIGURA 4.10**

O relacionamento entre classes de linguagens

# O Problema da Parada

## Problema da aceitação para MT

Dada uma MT  $M$  e uma cadeia de entrada  $\omega$ , identificar se  $M$  aceita  $\omega$ .

## Problema

$A_{MT} = \{ \langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega \}$

## Teorema 4.11

$A_{MT}$  é indecidível.

# O Problema da Parada

## Considerações sobre o Teorema 4.11

$A_{MT}$  é Turing-reconhecível. Pois é possível construir  $U$  da seguinte forma:

$U =$  “Sobre a entrada  $\langle M, \omega \rangle$ , em que  $M$  é uma MT e  $\omega$  uma cadeia:

- 1 Simule  $M$  sobre a entrada  $\omega$ ;
- 2 Se  $M$  em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se  $M$  em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**.”

## Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida  $A_{MT}$ .

# O Problema da Parada

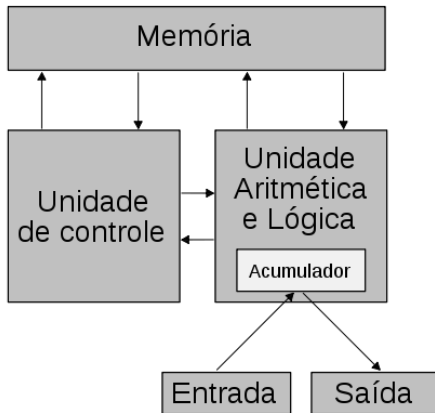
## Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.  
A MT  $U$  apresentada anteriormente é uma MT Universal.

## Contribuição importante

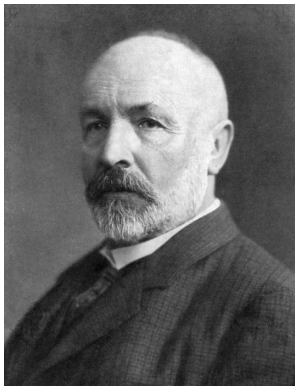
A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

# O Problema da Parada



**Figura:** Arquitetura de von Neumann (1945).

# Método da diagonalização



## Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

## Quem?

**George Cantor (1845-1918)**  
Matemático russo.

# Método da diagonalização

## Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

## Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

## Proposta de Cantor

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!



# Sumário

- 1 Revisão
  - Decidibilidade
  - O Problema da Parada
- 2 Método da diagonalização



# Método da diagonalização

## Função um-para-um

Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$  e uma função  $f$  de  $A$  para  $B$ . Dizemos que  $f$  é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja,  $f(a) \neq f(b)$  sempre que  $a \neq b$ ).

# Método da diagonalização

## Função um-para-um

Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$  e uma função  $f$  de  $A$  para  $B$ . Dizemos que  $f$  é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja,  $f(a) \neq f(b)$  sempre que  $a \neq b$ ).

## Função Sobrejetora

Uma função  $f$  é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de  $B$  (ou seja, se para todo  $b \in B$  existir um  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ ).

# Método da diagonalização

## Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência  $f : A \rightarrow B$ , todo elemento de  $A$  é mapeado para um único elemento de  $B$  e cada elemento de  $B$  tem um único elemento de  $A$  mapeando para ele.

# Método da diagonalização

## Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência  $f : A \rightarrow B$ , todo elemento de  $A$  é mapeado para um único elemento de  $B$  e cada elemento de  $B$  tem um único elemento de  $A$  mapeando para ele.

## Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de  $A$  para  $B$ .

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

$\mathbb{N}$  e  $P$  têm o mesmo tamanho

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

$\mathbb{N}$  e  $P$  têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre  $\mathbb{N}$  e  $P$ ;

# Método da diagonalização

## Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

$\mathbb{N}$  e  $P$  têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre  $\mathbb{N}$  e  $P$ ;
- $f : \mathbb{N} \rightarrow P$  em que  $f(n) = 2n$ ;



# Método da diagonalização

$n$	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
$\vdots$	$\vdots$

**Figura:** Visualização de  $f$  através de uma tabela.

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois  $P \subseteq \mathbb{N}$ ;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois  $P \subseteq \mathbb{N}$ ;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois  $P \subseteq \mathbb{N}$ ;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

# Método da diagonalização

## Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois  $P \subseteq \mathbb{N}$ ;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

## Conjunto Contável

Um conjunto  $A$  é **contável** se é finito ou se tem o mesmo tamanho de  $\mathbb{N}$ .

# Método da diagonalização

## Exemplo 2

Seja  $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  o conjunto dos racionais positivos.

# Método da diagonalização

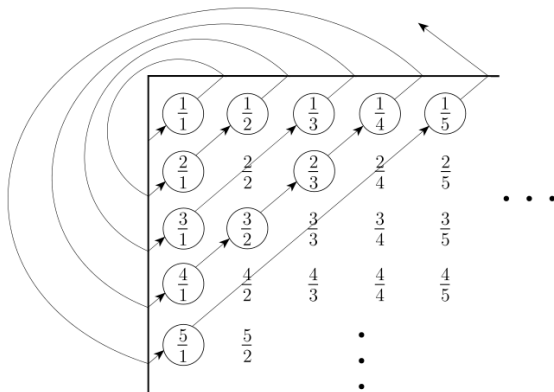
## Exemplo 2

Seja  $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  o conjunto dos racionais positivos.

$\mathcal{Q}$  é contável (curiosamente)

Logo  $\mathcal{Q}$  é finito ou tem o mesmo tamanho de  $\mathbb{N}$ .

## Método da diagonalização



**FIGURA 4.16**  
Uma correspondência de  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{Q}$



# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de  $\mathcal{Q}$ , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de  $\mathcal{Q}$ , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de  $\mathcal{Q}$ , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que  $\mathbb{R}$  é incontável introduzindo o método da diagonalização.

# Método da diagonalização

## Considerações

- Ao ver o exemplo de  $\mathcal{Q}$ , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que  $\mathbb{R}$  é incontável introduzindo o método da diagonalização.

## Teorema 4.17

$\mathbb{R}$  é incontável.

# Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.  
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação  
Bacharelado em Ciência da Computação

29 de junho de 2017