Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

29 de junho de 2017

Plano de Aula

1. Revisão
   - Decidibilidade
   - O Problema da Parada
2. Método da diagonalização

Sumário

Problema da Igualdade de Linguagens

Descrição

Dadas duas linguagem L_1 e L_2, identificar se $L_1 = L_2$.

Problema aplicado a AFDs

$EQ_{AFD} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}$

Estratégia de Resolução

Decidir se $\langle A, B\rangle \in EQ_{AFD}$.

UFG
Regional Jataí

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Lema 4.1

Iremos construir um AFD C a partir de A e B de forma que C aceita as cadeias que são aceitas por A ou por B, mas não por ambas. Consequentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right)$$

Corolário

$L(C) = \emptyset \ \leftrightarrow \ L(A) = L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

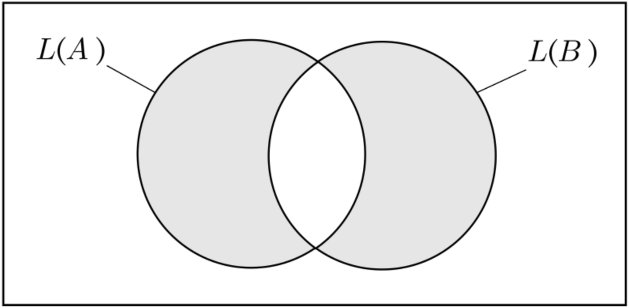


FIGURA 4.6
A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

Problema da Igualdade de Linguagens

Teorema 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Prova

A seguinte MT F decide EQ_{AFD}.

$F =$ "Sobre a entrada $\langle A, B \rangle$, em que A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C conforme descrito no Lema 4.1;
2. Rode MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C \rangle$;
3. Se T aceita, **aceite**. Caso contrário, **rejeite**."

UFG
Regional Jataí

Teoremas sobre GLC

Teorema 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Teorema 4.9

Toda LLC é decidível.

Cuidado!

EQ_{GLC} **não** é uma linguagem decidível.

UFG
Regional Jataí

Relacionamento entre as classes de linguagens

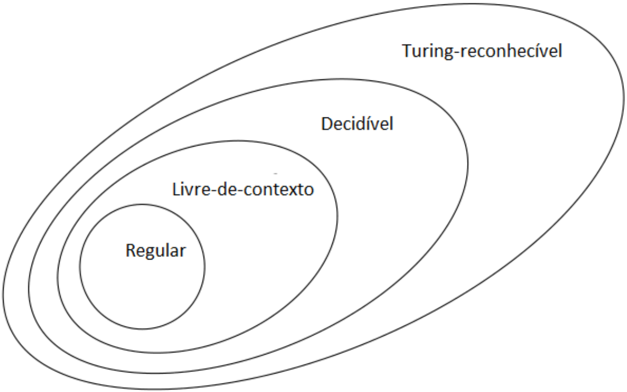


FIGURA 4.10
O relacionamento entre classes de linguagens

O Problema da Parada

Problema da aceitação para MT

Dada uma MT M e uma cadeia de entrada ω, identificar se M aceita ω.

Problema

$A_{MT} = \{\langle M, \omega \rangle \mid M \text{ é uma MT que aceita a cadeia de entrada } \omega\}$

Teorema 4.11

A_{MT} é indecidível.

O Problema da Parada

Considerações sobre o Teorema 4.11

A_{MT} é Turing-reconhecível. Pois é possível construir U da seguinte forma:

$U =$ "Sobre a entrada $\langle M, \omega \rangle$, em que M é uma MT e ω uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada ω;
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação, **aceite**; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, **rejeite**."

Problema da Parada

Não é possível construir uma MT que decida A_{MT}.

O Problema da Parada

Máquina de Turing Universal

É uma MT capaz de simular qualquer outra MT.
A MT U apresentada anteriormente é uma MT Universal.

Contribuição importante

A MT Universal estimulou o desenvolvimento de computadores com programas armazenado.

O Problema da Parada

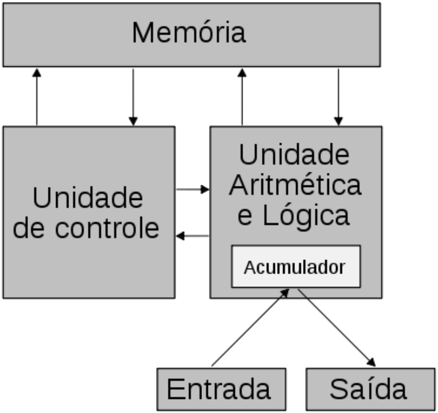
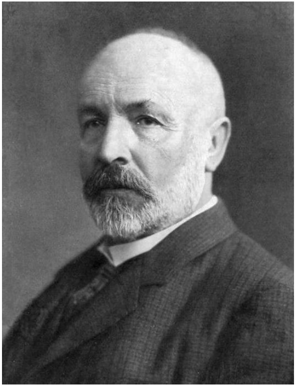


Figura: Arquitetura de von Neumann (1945).

Método da diagonalização



Contribuição

Criou o método da diagonalização em 1873.

Quem?

George Cantor (1845-1918)
Matemático russo.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Problema

Se temos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um conjunto é maior que o outro (ou se eles têm o mesmo tamanho)?

Conjuntos finitos

Podemos utilizar o método da contagem.

Proposta de Cantor

Dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um deles puder ser emparelhados com os elementos do outro. Basta estendermos essa ideia para os conjuntos infinitos!

UFG
Regional Jataí

Sumário

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B. Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B. Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Função Sobrejetora

Uma função f é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de B (ou seja, se para todo $b \in B$ existir um $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \to B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \to B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos A e B são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de A para B.

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

$\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

$\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e P;

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par }\}$

$\mathbb{N}$ e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre $\mathbb{N}$ e P;
- $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ em que $f(n) = 2n$;

UFG Regional Jataí

Método da diagonalização

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
$\vdots$	$\vdots$

Figura: Visualização de f através de uma tabela.

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

Conjunto Contável

Um conjunto A é **contável** se é finito ou
se tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

$\mathcal{Q}$ é contável (curiosamente)

Logo $\mathcal{Q}$ é finito ou tem o mesmo tamanho de $\mathbb{N}$.

UFG
Regional Jataí

Método da diagonalização

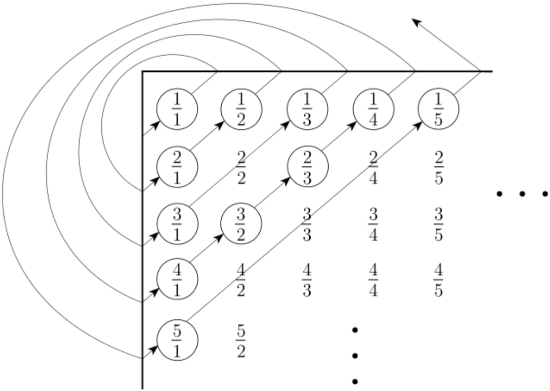


FIGURA 4.16
Uma correspondência de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Q}$

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que $\mathbb{R}$ é incontável introduzindo o método da diagonalização.

UFG Regional Jataí

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de $\mathcal{Q}$, há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que $\mathbb{R}$ é incontável introduzindo o método da diagonalização.

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

$\mathbb{R}$ é incontável.

Ideia da Prova

- De forma a mostrar que $\mathbb{R}$ é incontável, mostramos que nenhuma correspondência existe entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.
  - Supomos, a princípio, que a correspondência f existe.
  - Logo após, apresentamos um valor $x \in \mathbb{R}$ que não está emparelhado com valor algum em $\mathbb{N}$
    (o que indica um absurdo).

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	3,14159...
2	55,55555...
3	0,12345...
4	0,50000...
$\vdots$	$\vdots$

Figura: Suposta correspondência f entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	$3,\underline{1}4159\ldots$
2	$55,5\underline{5}555\ldots$
3	$0,12\underline{3}45\ldots$
4	$0,500\underline{0}0\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

$$\boxed{x = 0,4641\ldots}$$

Figura: Construção de x a partir da correspondência f.

Conjuntos Incontáveis

Considerações

Apenas deve-se ter o cuidado de escolher dígitos para x diferentes de 0 e 9, devido ao fato de

$$3,999\ldots = 4,000\ldots$$

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

1. Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;
2. Observar que o conjunto de todas as linguagens é incontável.
3. Como há mais linguagens do que máquinas de Turing, então algumas linguagens não podem ser Turing-reconhecíveis.

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;
- É possível enumerar C;
- Logo C é contável.

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;
- A função $f : L \rightarrow B$
(em que $f(A)$ é igual à sequência característica de A)
é uma correspondência;
- Logo, como B é incontável, L é incontável.

UFG
Regional Jataí

Conjuntos Incontáveis

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
\Sigma^* & = \{ & \varepsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & 10, & 11, & 000, & 001, & \cdots & \} ; \\
A & = \{ & & 0, & & 00, & 01, & & & 000, & 001, & \cdots & \} ; \\
\chi_A & = & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & .
\end{array}
$$

Figura: Construção de $\mathcal{X}A$ a partir da correspondência Σ^*.

Conjuntos Incontáveis

Exercício

Mostrar que o problema da parada é indecidível.

Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

29 de junho de 2017