

Conjuntos Incontáveis

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

03 de julho de 2017

Plano de Aula

- 1 Revisão
- 2 Conjunto Incontáveis

Sumário

1 Revisão

2 Conjunto Incontáveis

Método da diagonalização

Função um-para-um

Sejam dois conjuntos A e B e uma função f de A para B . Dizemos que f é **um-para-um** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar (ou seja, $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$).

Função Sobrejetora

Uma função f é **sobrejetora** se ela atinge todo elemento de B (ou seja, se para todo $b \in B$ existir um $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Método da diagonalização

Correspondência

Uma **correspondência** é uma função que é tanto um-para-um, quanto sobrejetora. Em uma correspondência $f : A \rightarrow B$, todo elemento de A é mapeado para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele.

Tamanho de conjuntos

Dois conjuntos A e B são de **mesmo tamanho** se existe uma correspondência de A para B .

Método da diagonalização

Exemplo 1

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $P = \{x \mid x \text{ é par} \}$

\mathbb{N} e P têm o mesmo tamanho

- É possível encontrar uma correspondência entre \mathbb{N} e P ;
- $f : \mathbb{N} \rightarrow P$ em que $f(n) = 2n$;

Método da diagonalização

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
\vdots	\vdots

Figura: Visualização de f através de uma tabela.

Método da diagonalização

Considerações

- Pode parecer contra-intuitivo, pois $P \subseteq \mathbb{N}$;
- Mas é possível fazer a correspondência entre os conjuntos;
- Logo, declaramos que esses conjuntos têm o mesmo tamanho.

Conjunto Contável

Um conjunto A é **contável** se é finito ou se tem o mesmo tamanho de \mathbb{N} .

Método da diagonalização

Exemplo 2

Seja $\mathcal{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos racionais positivos.

\mathcal{Q} é contável (curiosamente)

Logo \mathcal{Q} é finito ou tem o mesmo tamanho de \mathbb{N} .

Método da diagonalização

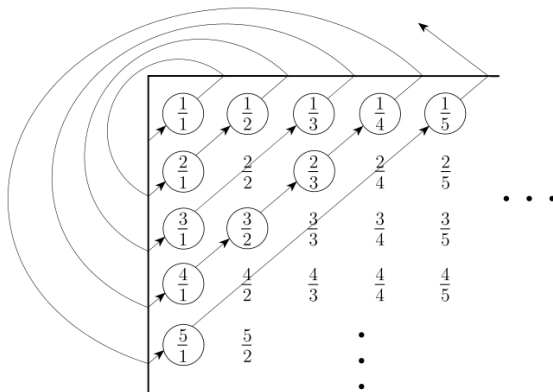


FIGURA 4.16
Uma correspondência de \mathcal{N} e \mathcal{Q}

Método da diagonalização

Considerações

- Ao ver o exemplo de \mathbb{Q} , há uma ligeira impressão de que qualquer conjunto é contável;
- Mas existe conjuntos incontáveis;
- Cantor provou que \mathbb{R} é incontável introduzindo o método da diagonalização.

Teorema 4.17

\mathbb{R} é incontável.

Sumário

1 Revisão

2 Conjunto Incontáveis

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

\mathbb{R} é incontável.

Conjuntos Incontáveis

Teorema 4.17

\mathbb{R} é incontável.

Ideia da Prova

- De forma a mostrar que \mathbb{R} é incontável, mostramos que nenhuma correspondência existe entre \mathbb{N} e \mathbb{R} .
 - Supomos, a princípio, que a correspondência f existe.
 - Logo após, apresentamos um valor $x \in \mathbb{R}$ que não está emparelhado com valor algum em \mathbb{N} (o que indica um absurdo).

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	3,14159...
2	55,55555...
3	0,12345...
4	0,50000...
\vdots	\vdots

Figura: Suposta correspondência f entre \mathbb{N} e \mathbb{R} .

Conjuntos Incontáveis

n	$f(n)$
1	3, <u>1</u> 4159...
2	55, 55 <u>5</u> 55...
3	0, 12 <u>3</u> 45...
4	0, 500 <u>0</u> 0...
\vdots	\vdots

$$x = 0,4641 \dots$$

Figura: Construção de x a partir da correspondência f .

Conjuntos Incontáveis

Considerações

Apenas deve-se ter o cuidado de escolher dígitos para x diferentes de 0 e 9, devido ao fato de

$$3,999 \dots = 4,000 \dots$$

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

- 1 Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

- 1 Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;
- 2 Observar que o conjunto de todas as linguagens é incontável.

Conjuntos Incontáveis

Corolário do Teorema 4.17

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

Ideia da Prova

- 1 Observar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável;
- 2 Observar que o conjunto de todas as linguagens é incontável.
- 3 Como há mais linguagens do que máquinas de Turing, então algumas linguagens não podem ser Turing-reconhecíveis.

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;
- É possível enumerar C ;

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável

- Σ^* é contável;
- Cada máquina de Turing pode ser codificada em uma cadeia $\langle M \rangle$;
- O conjunto C de todas as máquinas de Turing pode ser representado por um conjunto de cadeias $\langle M \rangle$;
- É possível enumerar C ;
- Logo C é contável.

Conjuntos Incontáveis

$$\begin{aligned}
 \Sigma^* &= \{ \varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots \}; \\
 A &= \{ \quad 0, \quad 00, 01, \quad 000, 001, \dots \}; \\
 \chi_A &= \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \dots.
 \end{aligned}$$

Figura: Construção de $\mathcal{X}A$ a partir da correspondência Σ^* .

Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;



Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;



Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências



Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;



Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;
- A função $f : L \rightarrow B$
(em que $f(A)$ é igual à sequência característica de A)
é uma correspondência;



Conjuntos Incontáveis

O conjunto de todas as linguagens é incontável

- O conjunto B de todas as sequências binárias infinitas é incontável;
- Qualquer linguagem pode ser descrita como uma sequência característica;
- O conjunto L de todas as linguagens podem ser representado por um conjunto de sequências característica;
- A função $f : L \rightarrow B$
(em que $f(A)$ é igual à sequência característica de A)
é uma correspondência;
- Logo, como B é incontável, L é incontável.



Conjuntos Incontáveis

Exercício

Mostrar que o problema da parada é indecidível.

Conjuntos Incontáveis

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

03 de julho de 2017