Terminologia de MTs e Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

29 de maio de 2017

UFG
Regional Jataí

Plano de Aula

1. Revisão
   - Definição de algoritmo
2. Terminologia para descrever MTs
3. Decidibilidade

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- **Problema 4.7:**
  Seja $T = \{(i, j, k) | i, j, k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que T é contável.
- Candidaturas até o fim da aula (24 de maio, 11h00);
- Apresentação e resposta por escrito $\rightarrow$
  Segunda (07 de junho, 11h30);
- 20 minutos de apresentação.

Candidato

???

UFG
Regional Jataí

Bônus (0,5 pt)

Desafio

- **Problema 4.7:**
  Seja $T = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$. Mostre que T é contável.
- Candidaturas agora;
- Apresentação e resposta por escrito $\rightarrow$
  Quinta (01 de junho, 15h30);
- 10 minutos de apresentação.

Livro

SIPSER, M. **Introdução à Teoria da Computação**, 2a Edição, Editora Thomson Learning, 2011. **Código Bib.: [004 SIP/int]**.

UFG
Regional Jataí

Sumário

1. Revisão
   - Definição de algoritmo
2. Terminologia para descrever MTs
3. Decidibilidade

Problema

Problema 3.16 (b)

Mostre que a coleção de linguagens Turing-reconhecíveis é fechada sob a operação de concatenação.

Problema

Prova: Sejam duas linguagens Turing-reconhecíveis (TR) quaisquer A e B. Sejam M_A e M_B as duas máquinas de Turing (MT) que reconhecem A e B, respectivamente (pois se uma linguagem é Turing-reconhecível, então uma MT a reconhece). Iremos construir uma MT não-determinística (MTN) M_{aux}, a partir de M_A e M_B, que reconhece $A \circ B$. A descrição de M_{aux} é dada a seguir:

M_{aux} = "Sobre a entrada ω, faça:

1. Corte, não deterministicamente, ω em duas cadeias (i.e. $\omega = \omega_1 \circ \omega_2$).
2. Rode M_A sobre ω_1. Se M_A rejeita, *rejeite*.
3. Rode M_B sobre ω_2. Se M_B aceita, *aceite*.
4. *Rejeite*".

Como é possível construir M_{aux}, então $A \circ B$ é TR (pois toda MTN tem uma MT equivalente). Logo, a classe de linguagens Turing-reconhecíveis é fechada sob a operação de concatenação ■

Definição de algoritmo

Contribuição

Apresentou uma noção do que seria um algoritmo no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, no ano de 1900.

Quem?

David Hilbert (1862-1943)

Matemático alemão.

Polinômio

Definições

Um **polinômio** é uma soma de termos. Um **termo** é um produto de variáveis e uma constante chamada de **coeficiente**.

Exemplo: Termo

$6 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z = 6x^2yz^3$

Exemplo: Polinômio

$6x^2yz^3 + 3xy^2 - 10$

UFG
Regional Jataí

Polinômio

Definições

Uma **raiz** de um polinômio é uma atribuição de valores às suas variáveis de modo que o valor do mesmo seja 0. Chamamos de **raiz inteira** aquela em todos os valores atribuídos são valores inteiros.

Exemplo: Raiz

O polinômio $6x^3yz^2 + 3xy^2 - x^3 - 10$ tem uma raiz em $x = 5, y = 3$ e $z = 0$.

Exemplo: Raiz Inteira

A raiz do exemplo acima é uma raiz inteira.

Polinômio

Problema apresentado por Hilbert

É possível conceber um algoritmo que teste se um polinômio tem uma raiz inteira ou não?

Expressão utilizada por Hilbert

"Um processo com o qual ela possa ser determinada por um número finito de operações".

Curioso

Não existe algoritmo que execute esta tarefa.

UFG
Regional Jataí

Definição de algoritmo

Contribuição

Mostrou, em 1970, que não existe algoritmo para se testar se um polinômio tem raízes inteiras.

Quem?

Yuri Matijasevich (1947-)
Cientista da computação e matemático russo.

UFG
Regional Jataí

Definição de Algoritmo

Noção intuitiva de algoritmos	é igual a	*algoritmos de máquina de Turing*

FIGURA 3.22
A Tese de Church–Turing

Conclusão

Existem problemas que são algoritmicamente insolúveis.

Definição de Algoritmo

Contexto

$D = \{p \mid p$ é um polinômio com uma raiz inteira$\}$

Problema

O conjunto D é decidível?

Resposta

Não é decidível. Mas é Turing-reconhecível.

Definição de Algoritmo

Problema análogo

$D_1 = \{p \mid p$ é um polinômio sobre x com uma raiz inteira$\}$

MT M_1 que reconhece D_1

$M_1 =$ "A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos valores $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
   Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*.

Considerações

M_1 reconhece D_1, mas não a decide.

Definição de Algoritmo

Resultado obtido por Matijasevich

É possível construir um decisor para D_1. Mas não para D.

Justificativa

É possível obter um limitante para polinômios de uma única variável. Porém, Matijasevich provou ser impossível calcular tais limitantes para polinômios multivariáveis.

Limitante para polinômios de uma única variável

$$\pm k \frac{c_{max}}{c_1}$$

em que

- k é o número de termos do polinômio,
- c_{max} é o coeficiente com maior valor absoluto, e
- c_1 é o coeficiente do termo de mais alta ordem.

Sumário

Terminologia para descrever MTs

Níveis de descrição

- **Descrição formal**: esmiúça todos os elementos da 7-upla, conforme definição;

Terminologia para descrever MTs

Níveis de descrição

- **Descrição de implementação**: descreve a forma pela qual a MT move a sua cabeça e a forma como ela armazena os dados na fita;

Terminologia para descrever MTs

Níveis de descrição

- **Descrição de alto nível**: neste nível não precisamos mencionar como a máquina administra a sua fita ou sua cabeça de leitura-escrita.

UFG
Regional Jataí

Terminologia para descrever MTs

Níveis de descrição

- **Descrição formal**: esmiúça todos os elementos da 7-upla, conforme definição;
- **Descrição de implementação**: descreve a forma pela qual a MT move a sua cabeça e a forma como ela armazena os dados na fita;
- **Descrição de alto nível**: neste nível não precisamos mencionar como a máquina administra a sua fita ou sua cabeça de leitura-escrita.

Exemplo

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Logo:

$$A = \{\langle G \rangle | G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}$$

Exemplo

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Logo:

$$A = \{\langle G \rangle | G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}$$

Descrição de alto nível

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificacão de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
    1. Para cada nó em G, marque-o se ele está ligado por uma aresta a um nó que já está marcado.
3. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se eles estão, *aceite*; caso contrário, *rejeite*".

UFG
Regional Jataí

Exemplo

Pergunta

Como seria a descrição de M no nível de implementação?

Sumário

UFG
Regional Jataí

Introdução

Propósitos da Teoria da Computação

- Conhecer o poder dos algoritmos;
- Explorar os limites da solubilidade algorítmica;
- Identificar algoritmos insolúveis.

Introdução

Propósitos da Teoria da Computação

- Conhecer o poder dos algoritmos;
- Explorar os limites da solubilidade algorítmica;
- Identificar algoritmos insolúveis.

Por que devemos estudar insolubilidade?

- Relaxamento dos requisitos;
- Conhecimento das limitações dos modelos computacionais.

UFG
Regional Jataí

Terminologia de MTs e Decidibilidade

Esdras Lins Bispo Jr.
bispojr@ufg.br

Teoria da Computação
Bacharelado em Ciência da Computação

29 de maio de 2017

UFG
Regional Jataí