Avsluttende prosjekt - INF5620

Henrik Andersen Sveinsson

December 5, 2013

Prosjektet går ut på å løse den ikke-lineære diffusjonslikningen:

$$\rho u_t = \nabla \cdot (\alpha(u)\nabla u) + f(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

med initialbetingelse:

$$u(\mathbf{x}, 0) = I(\mathbf{x}) \tag{2}$$

og Neumannbetingelse:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{3}$$

1 Tidsdiskretisering

Bruker backward Euler på den tidsderiverte:

$$\rho \frac{u - u_1}{\Delta t} = \nabla \cdot (\alpha(u)\nabla u) + f(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

$$\rho u - \Delta t \nabla \cdot (\alpha(u)\nabla u) = \rho u_1 + \Delta t f(\mathbf{x}, t) \tag{5}$$

Den variasjonelle formuleringen for det romlige problemet i hvert tidssteg blir:

$$\rho(u, v) - \Delta t \left[(\alpha(u)\nabla u, \nabla v) + \cancel{\left(\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial n}, v \right)_{\partial\Omega}} \right] = \rho(u_1, v) + \Delta t(f, v) \tag{6}$$

Der Neumannbetingelsen eliminerer grenseflateintegralet. Merk at i den siste likningen er $u = \sum c_j \psi_j$, og likningen setter residualet ortogonalt på løsningen i den opprinnelige likningen.

1.1 Variasjonell formulering av initialbetingelsen

$$u_e(\mathbf{x}, 0) \approx u(\mathbf{x}, 0) = \sum c_j \psi_j \tag{7}$$

Setter:

$$R = u(\mathbf{x}, 0) - I(\mathbf{x}) \tag{8}$$

Krever at:

$$\int_\Omega Rv = 0 \tag{9}$$

Altså at:

$$(u, v) = (I, v) \tag{10}$$

Med elementfunksjoner får vi at initialbetingelsen blir:

$$u(\mathbf{x},0) = \sum I(\mathbf{x}_{\nu(j)})\varphi_{\nu(j)} \tag{11}$$

2 Picard-iterasjon

Lineariserer den variasjonelle formuleringen for å kunne anvende Picard-iterasjon.

$$\rho(u,v) - \Delta t(\alpha(u_{\text{-}})\nabla u, \nabla v) = \rho(u_1, v) + \Delta t(f,v) \tag{12}$$

Setter så inn at v er alle ψ i et eller annet rom, som er det samme rommet som vi ekspanderer u i.

$$\sum_{j\in\mathcal{I}_s} \left[\rho(\psi_j,\psi_i) - \Delta t(\alpha(u_{\text{-}})\nabla\psi_j, \nabla\psi_i)\right] c_j = \rho(u_{\text{-}},\psi_i) + \Delta t(f,\psi_i) \ \ \forall \ \ i \tag{13}$$

Picard-iterasjon på denne, vil si å løse dette likningssettet med hensyn på $u = \sum c_j\psi_j$, og oppdatere $u_{\text{-}}$.

3 Implementasjon

Tidsintegrasjon med 1-stegs picarditerasjon er implementert. E/h er konstant (vist ved testing for varierende oppløsning).

4 Manufactured solution

Likningen skal løses i 1D på $\Omega = [0,1]$. Den ikke-lineære faktoren er $\alpha = 1 + u^2$ og løsningen skal være:

$$u(x,t) = t\int_0^x q(1-q)dq = tx^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right) \tag{14}$$

Med sympy vises det da at kildeleddet f skal være:

$$f(x,t) = -\frac{1}{3}\rho x^3 + \frac{1}{2}\rho x^2 + \frac{8}{9}t^3x^7 - \frac{28}{9}t^3x^6 + \frac{7}{2}t^3x^5 - \frac{5}{4}t^3x^4 + 2tx - t \tag{15}$$

Forskjellen mellom løsningen her og løsningen i FEniCS bør være av orden Δt, siden jeg bruker et Backward Euler skjema.

Innsetting av dette i den numeriske metoden gir en feil som går som $/Deltat$, som vist i figur 1.

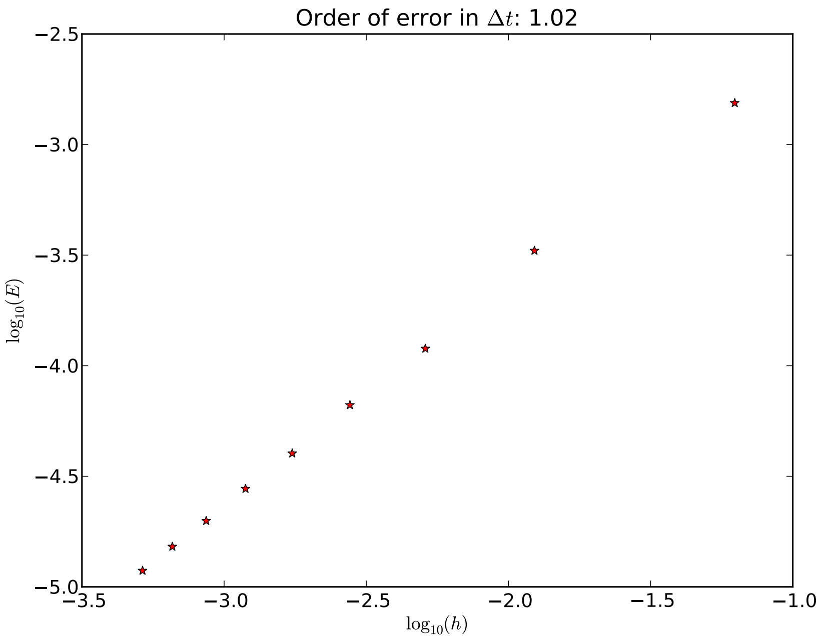

Figure 1: Figuren viser at feilen med *manufactured solution* nesten er i orden Δt.
.