Avsluttende prosjekt - INF5620

Henrik Andersen Sveinsson

December 3, 2013

Prosjektet går ut på å løse den ikke-lineære diffusjonslikningen:

$$\rho u_t = \nabla \cdot (\alpha(u)\nabla u) + f(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

med initialbetingelse:

$$u(\mathbf{x}, 0) = I(\mathbf{x}) \tag{2}$$

og Neumannbetingelse:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{3}$$

1 Tidsdiskretisering

Bruker backward Euler på den tidsderiverte:

$$\rho \frac{u - u_1}{\Delta t} = \nabla \cdot (\alpha(u)\nabla u) + f(\mathbf{x}, t) \tag{4}$$

$$\rho u - \Delta t \nabla \cdot (\alpha(u)\nabla u) = \rho u_1 + \Delta t f(\mathbf{x}, t) \tag{5}$$

Den variasjonelle formuleringen for det romlige problemet i hvert tidssteg blir:

$$\rho(u, v) - \Delta t \left[(\alpha(u)\nabla u, \nabla v) + \cancel{\left(\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial n}, v \right)_{\partial\Omega}} \right] = \rho(u_1, v) + \Delta t (f, v) \tag{6}$$

Der Neumannbetingelsen eliminerer grenseflateintegralet. Merk at i den siste likningen er $u = \sum c_j \psi_j$, og likningen setter residualet ortogonalt på løsningen i den opprinnelige likningen.

1.1 Variasjonell formulering av initialbetingelsen

$$u_e(\mathbf{x}, 0) \approx u(\mathbf{x}, 0) = \sum c_j \psi_j \tag{7}$$

Setter:

$$R = u(\mathbf{x}, 0) - I(\mathbf{x}) \tag{8}$$

Krever at:

$$\int_\Omega Rv = 0 \tag{9}$$

Altså at:

$$(u, v) = (I, v) \tag{10}$$

Med elementfunksjoner får vi at initialbetingelsen blir:

$$u(\mathbf{x}, 0) = \sum I(\mathbf{x}_{\nu(j)})\varphi_{\nu(j)} \tag{11}$$

2 Picard-iterasjon

Lineariserer den variasjonelle formuleringen for å kunne anvende Picard-iterasjon.

$$\rho(u, v) - \Delta t(\alpha(u_{\text{-}})\nabla u, \nabla v) = \rho(u_1, v) + \Delta t(f, v) \tag{12}$$

Setter så inn at v er alle ψ i et eller annet rom, som er det samme rommet som vi ekspanderer u i.

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_s} \left[\rho(\psi_j, \psi_i) - \Delta t(\alpha(u_{\text{-}})\nabla\psi_j, \nabla\psi_i)\right] c_j = \rho(u_{\text{-}}, \psi_i) + \Delta t(f, \psi_i) \quad \forall \quad i \tag{13}$$

Picard-iterasjon på denne, vil si å løse dette likningssettet med hensyn på $u = \sum c_j\psi_j$, og oppdatere $u_{\text{-}}$.