Del 2

Numeriske metoder

Numeriske metoder

- Idé: Bruk regnekraft i stedet for hjernekraft - der det er hensiktsmessig
- Finn tilnærmede resultater - $3{,}14$ i stedet for π
- Hovedområder: Derivasjon, integrasjon, likningsløsing (inkludert difflikninger)
- Enkle idéer $\rightarrow$ vanskelig (analytisk) matematikk

Numeriske metoder

- Idé: Bruk regnekraft i stedet for hjernekraft - der det er hensiktsmessig
- Finn tilnærmede resultater - $3{,}14$ i stedet for π
- Hovedområder: Derivasjon, integrasjon, likningsløsing (inkludert difflikninger)
- Enkle idéer $\to$ vanskelig (analytisk) matematikk
- Enkle idéer $\to$ enkle algoritmer
  - Dypere forståelse?
  - Vekk fra «black box» (knapp i GeoGebra)
  - Generelle metoder $\implies$ nye anvendelser (muffinsformer), mer virkelighetsnære problemer

Numeriske metoder

- Idé: Bruk regnekraft i stedet for hjernekraft - der det er hensiktsmessig
- Finn tilnærmede resultater - $3{,}14$ i stedet for π
- Hovedområder: Derivasjon, integrasjon, likningsløsing (inkludert difflikninger)
- Enkle idéer $\rightarrow$ vanskelig (analytisk) matematikk
- Enkle idéer $\rightarrow$ enkle algoritmer
  - Dypere forståelse?
  - Vekk fra «black box» (knapp i GeoGebra)
  - Generelle metoder $\implies$ nye anvendelser (muffinsformer), mer virkelighetsnære problemer

Diskusjon

Hvilke numeriske metoder kjenner du i dag? Kan du tenkte deg noen utfordringer når elevene møter slike metoder? Tenk - par - del.

Numerisk derivasjon

- Hvordan tenker elevene på derivasjon? Hva er den deriverte av $\sin x$?

Numerisk derivasjon

- Hvordan tenker elevene på derivasjon? Hva er den deriverte av $\sin x$?
  - $(\sin x)' = \cos x$?

Numerisk derivasjon

- Hvordan tenker elevene på derivasjon? Hva er den deriverte av $\sin x$?
  - $(\sin x)' = \cos x$?
  - $(\sin x)' = [\sin(x + \Delta x) - \sin(x)]/\Delta x$?

Numerisk derivasjon

- Hvordan tenker elevene på derivasjon? Hva er den deriverte av $\sin x$?
  - $(\sin x)' = \cos x$?
  - $(\sin x)' = [\sin(x + \Delta x) - \sin(x)]/\Delta x$?
  - Stigningstallet til tangenten?

Numerisk derivasjon

- Hvordan tenker elevene på derivasjon? Hva er den deriverte av $\sin x$?
  - $(\sin x)' = \cos x$?
  - $(\sin x)' = [\sin(x + \Delta x) - \sin(x)]/\Delta x$?
  - Stigningstallet til tangenten?
- Numerisk: Følg definisjonen av den deriverte, sekant $\rightarrow$ tangent

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \approx \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Numerisk derivasjon

- Hvordan tenker elevene på derivasjon? Hva er den deriverte av $\sin x$?
  - $(\sin x)' = \cos x$?
  - $(\sin x)' = [\sin(x + \Delta x) - \sin(x)]/\Delta x$?
  - Stigningstallet til tangenten?
- Numerisk: Følg definisjonen av den deriverte, sekant $\rightarrow$ tangent

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \approx \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Eksempel

```
>>> from pylab import *
>>> a  = pi/3
>>> dx = 1e-5
>>> (sin(a + dx) - sin(a))/dx
0.49999569867026
```

Øvelse i numerisk derivasjon

- Velg din favorittfunksjon.
- Regn ut den numerisk deriverte i et punkt, og sammenlign med den eksakte verdien.
- Varier Δx. Lag en tabell med Δx og feilen. La Δx variere fra f.eks. 10^{-1} til 10^{-16}.
- Hva observerer du? Bør man alltid velge minst mulig Δx?

Øvelse i numerisk derivasjon

- Velg din favorittfunksjon.
- Regn ut den numerisk deriverte i et punkt, og sammenlign med den eksakte verdien.
- Varier Δx. Lag en tabell med Δx og feilen. La Δx variere fra f.eks. 10^{-1} til 10^{-16}.
- Hva observerer du? Bør man alltid velge minst mulig Δx?

Bonus

Gjenta for tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+\Delta x) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$

og sammenlign.

Løsningsforslag

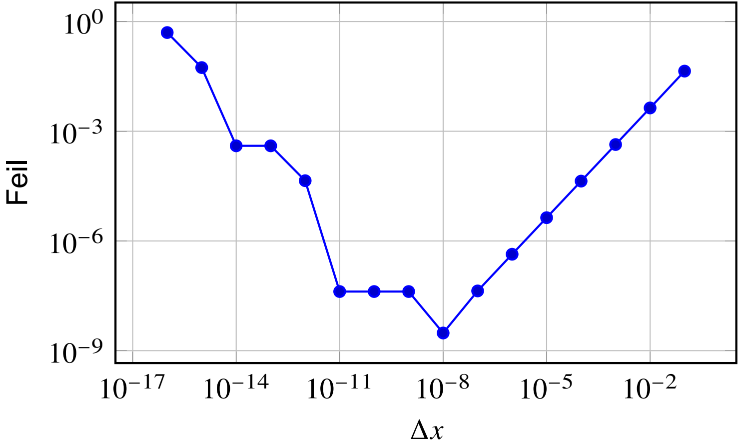
```
from pylab import *
f = sin
a = pi/3
eksakt = 0.5
for i in range(1, 17):
    dx = 10.0**(-i)
    dfdx = (f(a + dx) - f(a))/dx
    feil = abs(eksakt - dfdx)
    print("dx = %6.0e, feil = %6.2e"
          % (dx, feil))
```

Løsningsforslag

```python
from pylab import *
f = sin
a = pi/3
eksakt = 0.5
for i in range(1, 17):
    dx = 10.0**(-i)
    dfdx = (f(a + dx) - f(a))/dx
    feil = abs(eksakt - dfdx)
    print("dx = %6.0e, feil = %6.2e"
          % (dx, feil))
```

```
dx =  1e-01, feil = 4.41e-02
dx =  1e-02, feil = 4.34e-03
dx =  1e-03, feil = 4.33e-04
dx =  1e-04, feil = 4.33e-05
dx =  1e-05, feil = 4.33e-06
dx =  1e-06, feil = 4.33e-07
dx =  1e-07, feil = 4.30e-08
dx =  1e-08, feil = 3.04e-09
dx =  1e-09, feil = 4.14e-08
dx =  1e-10, feil = 4.14e-08
dx =  1e-11, feil = 4.14e-08
dx =  1e-12, feil = 4.45e-05
dx =  1e-13, feil = 4.00e-04
dx =  1e-14, feil = 4.00e-04
dx =  1e-15, feil = 5.51e-02
dx =  1e-16, feil = 5.00e-01
```

Løsningsforslag



Numerisk derivasjon - nye anvendelser

- Hvis $f(x)$ er kjent, er $f'(x)$ kjent - numerisk derivasjon unødvendig
  - Ikke slik ved integrasjon
- Analyse av målepunkter med ukjent funksjonsuttryk
  - Eksempel: Gitt datafil med tider og hastigheter (t_i, v_i), finn akselerasjon og tilbakelagt strekning

$$a_i \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}, \qquad s_{i+1} \approx s_i + v_i(t_{i+1} - t_i)$$

Numerisk derivasjon - nye anvendelser

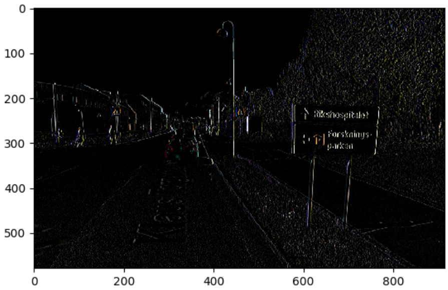
Hva skjer hvis dette deriveres med hensyn på x (eller y)?

Datastruktur

```
bilde = imread("bilde.png")
imshow(bilde)
savefig("original.png") # eller show()
```

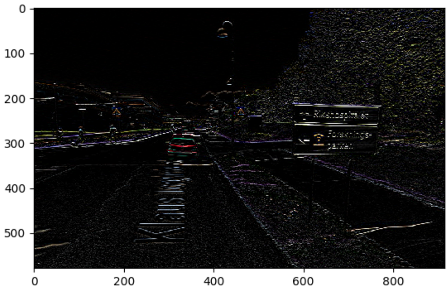
Derivert med hensyn på x

```
dfdx = bilde[1:-1,2:,:] - bilde[1:-1,1:-1,:]
imshow(3*dfdx)
savefig("dfdx.png")
```



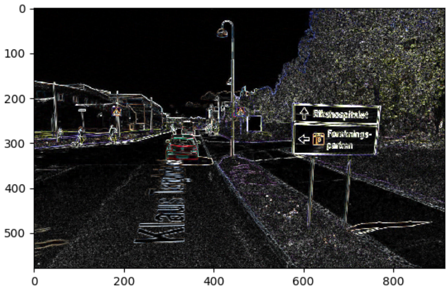
Derivert med hensyn på y

```
dfdy = bilde[2:,1:-1,:] - bilde[1:-1,1:-1,:]
imshow(3*dfdy)
savefig("dfdy.png")
```



Størrelsen av gradienten

```
grad = sqrt(dfdx**2 + dfdy**2)
imshow(3*grad)
savefig("grad.png")
```



Numerisk integrasjon

Idé: Areal/Riemannsummer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Eksempel:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Numerisk integrasjon

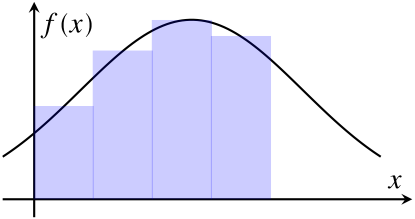
Idé: Areal/Riemannsummer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i$$

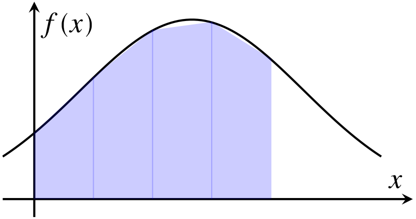
Eksempel:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Rektangelmetoden



Trapesmetoden



Numerisk integrasjon

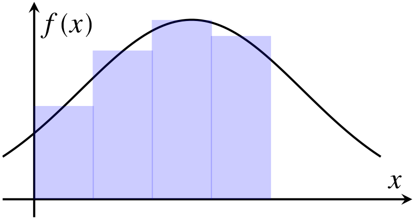
Idé: Areal/Riemannsummer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i$$

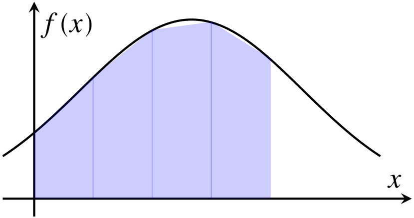
Eksempel:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Rektangelmetoden



Trapesmetoden



Enkel idé → vanskelig analytisk matematikk, men enkel numerisk matematikk

Øvelse i numerisk integrasjon

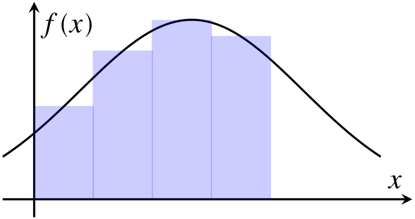
Idé: Areal/Riemannsummer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,\Delta x_i$$

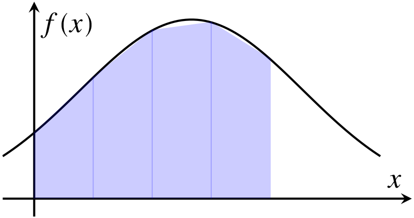
Eksempel:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Rektangelmetoden



Trapesmetoden



Oppgave: Velg et integral, løs det numerisk og sammenlign med det analytiske resultatet.

Numerisk integrasjon - diskusjon

- Hva syntes dere var utfordrende?
- Hva kommer elevene til å synes er utfordrende?

Numerisk integrasjon - diskusjon

- Hva syntes dere var utfordrende?
- Hva kommer elevene til å synes er utfordrende?
  - Matematisk notasjon? $\sum_i \rightarrow$ `for i in range`
  - Logikk?
  - Programmeringsteknisk?

Numerisk løsning av differensiallikninger

Tilnærming til den deriverte:

$$v'(t) = a(t) \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Numerisk løsning av differensiallikninger

Tilnærming til den deriverte:

$$v'(t) = a(t) \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Eulers metode: Løs for $v(t + \Delta t)$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$
$$s(t + \Delta t) = s(t) + v(t)\Delta t$$

Diskretisering: La $t_i = i\Delta t$. Omskriving:

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$$
$$s_{i+1} = s_i + v_i\Delta t$$

Numerisk løsning av differensiallikninger

Tilnærming til den deriverte:

$$v'(t) = a(t) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Eulers metode: Løs for $v(t+\Delta t)$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$
$$s(t+\Delta t) = s(t) + v(t)\Delta t$$

Diskretisering: La $t_i = i\Delta t$. Omskriving:

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$$
$$s_{i+1} = s_i + v_i\Delta t$$

```
for i in range(N):
    a[i]   = F(t[i],s[i],v[i])/m
    v[i+1] = v[i] + a[i]*dt
    s[i+1] = s[i] + v[i]*dt
```

Numerisk løsning av differensiallikninger

Tilnærming til den deriverte:

$$v'(t) = a(t) \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Eulers metode: Løs for $v(t+\Delta t)$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t$$
$$s(t+\Delta t) = s(t) + v(t)\Delta t$$

Diskretisering: La $t_i = i\Delta t$. Omskriving:

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$$
$$s_{i+1} = s_i + v_i\Delta t$$

```
for i in range(N):
    a[i]   = F(t[i],s[i],v[i])/m
    v[i+1] = v[i] + a[i]*dt
    s[i+1] = s[i] + v[i]*dt
```

Enkelt å modellere forskjellige systemer - kun F må endres

Numerisk løsning av likninger

Mål: Finn nullpunktet til funksjonen f.

Numerisk løsning av likninger

Mål: Finn nullpunktet til funksjonen f.

Skjæringssetningen

Dersom f er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn, finnes en $m \in (a, b)$ slik at $f(m) = 0$.

Numerisk løsning av likninger

Mål: Finn nullpunktet til funksjonen f.

Skjæringssetningen

Dersom f er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn, finnes en $m \in (a, b)$ slik at $f(m) = 0$.

Halveringsmetoden: Gjett på $m = \frac{1}{2}(a + b)$.

- Dersom $f(m) = 0$ eller $|b - a| < \varepsilon$: Suksess!
- Dersom $f(a)$ og $f(m)$ har forskjellig fortegn: Gjenta med $b = m$.
- Dersom $f(m)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn: Gjenta med $a = m$.

Numerisk løsning av likninger

Mål: Finn nullpunktet til funksjonen f.

Skjæringssetningen

Dersom f er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn, finnes en $m \in (a, b)$ slik at $f(m) = 0$.

Halveringsmetoden: Gjett på $m = \frac{1}{2}(a + b)$.

- Dersom $f(m) = 0$ eller $|b - a| < \varepsilon$: Suksess!
- Dersom $f(a)$ og $f(m)$ har forskjellig fortegn: Gjenta med $b = m$.
- Dersom $f(m)$ og $f(b)$ har forskjellig fortegn: Gjenta med $a = m$.

```
while abs(b-a) > toleranse:
    m = (a+b)/2
    if f(a)*f(m) < 0:
        b = m
    elif f(b)*f(m) < 0:
        a = m
    else:
        break
```

folk.uio.no/anjohan/Halveringsmetoden.html

Halveringsmetoden - øvelse

- Skriv en Python-funksjon som tar inn f, a, b og en toleranse som argumenter og kjører halveringsmetoden.
- Bruk funksjonen til å estimere π.
- Løs likningen $\ln x = \cos x$.

Undervisning av numeriske metoder - diskusjon

- Hva synes dere har vært forvirrende/uvant/vanskelig?
  - Teori og programmering
- Hva kommer elevene til å synes er forvirrende/uvant/vanskelig?