

GeoGebra3D で考える空間図形

濱田龍義（福岡大学/OCAMI）

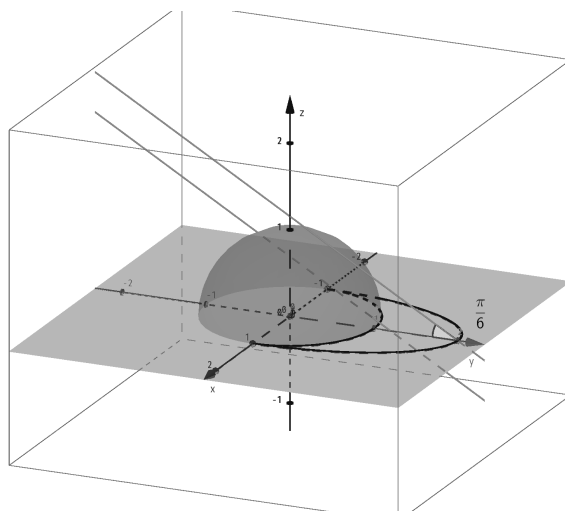
1 GeoGebra の 3D ビューについて

2014 年 9 月に GeoGebra の 3D 機能が正式に公開された．現在，Web ブラウザ版やタブレット版の GeoGebra についても 3D に対応している．本稿では，以下の問題を例に GeoGebra 3D の機能を紹介する．なお，以下の図は実際に出題された図を参考に GeoGebra で描きなおした．GeoGebra を用いて PNG 形式でエクスポートした図を L^AT_EX に取り込んでいる．

座標空間内に，原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球がある．下の概略図のように， y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている．この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である．球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ．

1. 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える． k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき， xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ．
2. xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ．
3. $z \geq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ．

（九大理系 2015 前期）



1.1 3D ビューについて

GeoGebra のメニューバーの「表示」→「3D グラフィクス」で空間図形を描くビューを表示させることができる．ウィンドウ右端のパースペクティブを利用して表示させることができる．

3D については，入力バーを利用した方が誤動作が少ないので，コマンド入力について確認しておく．

GeoGebra の入力バーにコマンドを入力することで、図形の作成や変換が可能である。補完機能を備えているので、コマンドを途中まで入力すると選択肢が表示される。矢印キーやマウス、Tab キーで選ぶこともできる。GeoGebra のコマンドは

```
Command[ 引数 ]
```

の形をしていて、大文字と小文字を区別しない。点や直線、ベクトルなどの幾何学的オブジェクトは大文字小文字両方使えるが、実は区別されている。A=(1, 1) と入力すると「点」が、a=(1,1) と入力すると「ベクトル」が出力される。つまり、a=Vector[(1, 1)] と解釈される。

1.2 球と媒介変数曲面について

球は

```
Sphere[ <点>, <半径> ]
```

で描ける。名前は指定しない限り、自動的に定義されるが、ここでは後の作業で参照できるように a と名前を付けることにする。この場合は原点 O （オー）を中心とする半径 1 の球を描けば良いので、

```
a=Sphere[O, 1]
```

で描くことができる。標準で $O = (0, 0, 0)$ として扱われる。

問題は球の $z \geq 0$ の部分について議論しているので、球ではなく、半球を描きたいと思うかもしれない。残念ながら半球を描くコマンドは用意されていないが、媒介変数表示された曲面を描くための命令

```
Surface[ <式>, <式>, <式>, <媒介変数1>, <開始値>, <終了値>, <媒介変数2>, <開始値>, <終了値> ]
```

が用意されている。題意の半球は

```
Surface[cos(s)cos(t), sin(s)cos(t), sin(t), s, 0, 2pi, t, 0, pi/2]
```


で描ける。ただし、Sphere[] で描く球に比べて、Surface[] で描く曲面は若干荒くなる。また、Surface[] で描いた曲面に対しては、後で述べる命令 Intersect[] で交線を取ることはできない。手計算で Curve[] で描く必要がある。したがって、ここでは Sphere[] を前提に話を進める。

1.3 ベクトル、スライダー、直線、平面

太陽光線のベクトルを描く。先ほど述べたように、ベクトルは

```
u=(0, sqrt(3), -1)
```

で描ける。

次に $-1 < k < 1$ を満たす実数 k をスライダーで用意する。スライダーは 3D グラフィックスビューの中に作成することはできない。もし、グラフィックスビューが表示されていない場合には、メニューの「表示」→「グラフィックスビュー」を選択して開く。 をクリックして、グラフィックスビューに最小 -1 最大 1 でスライダーを作成する*1。

コマンドとして入力する際は

```
Slider[ <最小>, <最大>, <増分>, <速度>, <幅>, <角度か>, <水平>, <アニメーション>, <ランダム> ]
```

という規則で作成するので、

```
k=Slider[-1, 1, 0.01]
```

でも作成できる。

xy 平面内の直線 $x = k$ を ℓ （エル）とする。グラフィックスビューをクリックした後、

*1 問題と異なり、 $-1 \leq k \leq 1$ となる。

```
ℓ: x=k
```

を入力することで作成できる。プロパティから「直線のスタイル」を点線に変更しておく。

次に 3D グラフィックスビューをクリックして、

```
b: x=k
```

を入力することで、 $\ell: x = k$ を含み、 x 軸に垂直な平面を描くことができる。参考までに、ある点を通り、定められた方向に垂直な平面を描く命令は

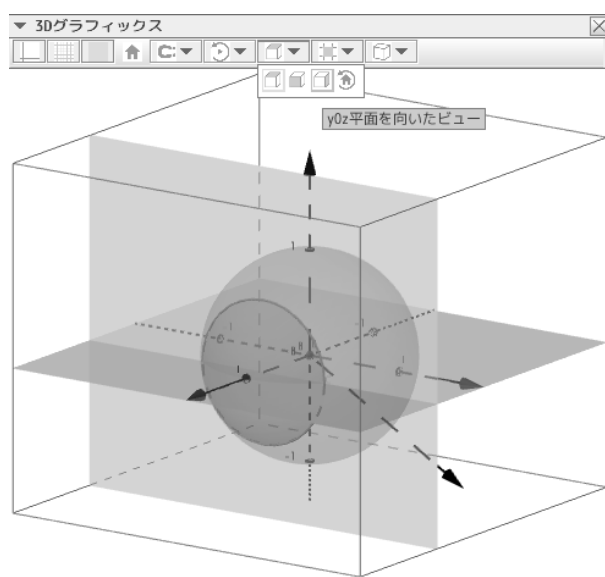
```
PerpendicularPlane[ <点>, <直線> ]
```

```
PerpendicularPlane[ <点>, <ベクトル> ]
```

である。平面 $b: x = k$ は


```
b=PerpendicularPlane[(k, 0, 0), xAxis]
```

でも描くことができる。



スライダーの値を動かして影の範囲を考察することができる。

1.4 視点や位置の変更

3D グラフィックスの視点の変更は、右マウスボタンでドラッグすることで変更できる。また、3D 用のボタンメニューで選択してからでも可能である。3D グラフィックスでは、を用いて、位置の変更も可能である。マウスをクリックするごとに xy 方向か、 z 方向かを変更することができる。

「3D グラフィックス」と書かれている文字の左側の三角形はスタイルバーのトグルスイッチとなっている。左から「軸の表示／非表示」、「グリッドを表示／非表示」などのスイッチが並べられており、そのうち、「ビューの向き」から「 yOz 平面を向いたビュー」を選ぶことで、影を考えやすくなる。

1.5 2 曲面の交線

いまのところ、平面や 2 次曲面などに限られるが、GeoGebra は「2 曲面の交線」を描く機能を備えている。球 a と平面 b の交線 c は、以下の命令で描くことができる。

```
c=Intersect[a, b]
```

交線 c は 2 次曲線（円）として描かれる。問 1 を考えるために、まずは円 c と直線 $\ell: x = k$ との交点を求める。交点も同様に

```
A=Intersect[c, ℓ]
```

で得られる。この場合、交点は2点得られるので、 A_1, A_2 となる。 $y > 0$ の位置にある点 A_1 は、 A_1 で指定できる。 A_1 の y 座標は「球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲」の最小値である*2。最大値はといえば、先ほどの「 yOz 平面を向いたビュー」から、円 c の u 方向の接線を考えれば良いことがわかる。

1.6 円の接線

接線を描くために少し準備をする。円の中心は

```
P=(k, 0, 0)
```

となる。点 P を通り、 x 軸とベクトル u に垂直な直線を描く。この直線の方法は $(0, 1, \sqrt{3})$ なので、ベクトル v を

```
v=(0, 1, sqrt(3))
```

で作成する。ある点を通り、方向ベクトルの方向に伸びる直線を描く命令は

```
Line[ <点>, <方向ベクトル> ]
```

である。すなわち、点 P を通り、方向 v の直線 n を描く。

```
n=Line[P, v]
```

円 c と直線 n との交点 Q_1, Q_2 を

```
Q=Intersect[c, n]
```

によって作成する。点 Q_1 を通り、方向 u の直線 m を

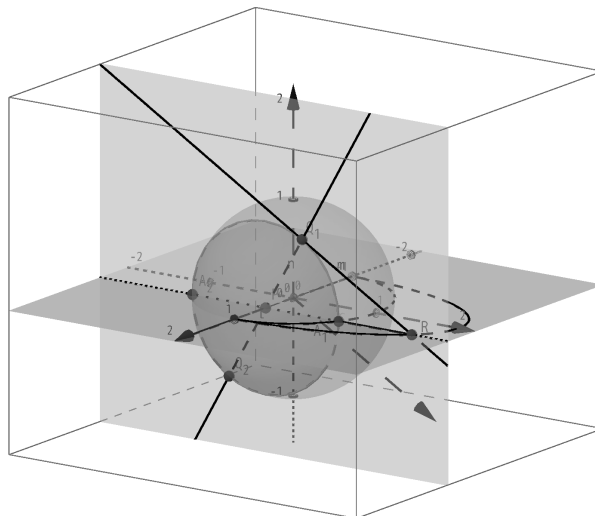
```
m=Line[Q_1, u]
```

で作成する。直線 ℓ と直線 m の交点 R を

```
R=Intersect[ℓ, m]
```

によって作成すると、点 R の y 座標は「球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲」の最大値となる。「球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲」は線分 $d = A_1 R$ によって表すことができる。

```
d=Segment[A_1, R]
```



*2 もちろん、点 A_1 は球の赤道上を動く。

1.7 線分 d の残像と点の軌跡

線分 d の残像を利用して、問 2 の「 xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分」を描く．線分 d を右クリックして「残像表示」を選択する．スライダー k を動かすことで、影が描かれる．

影の輪郭をはっきりと描きたい時は、

```
Locus [ <軌跡の点>, <スライダー> ]
```

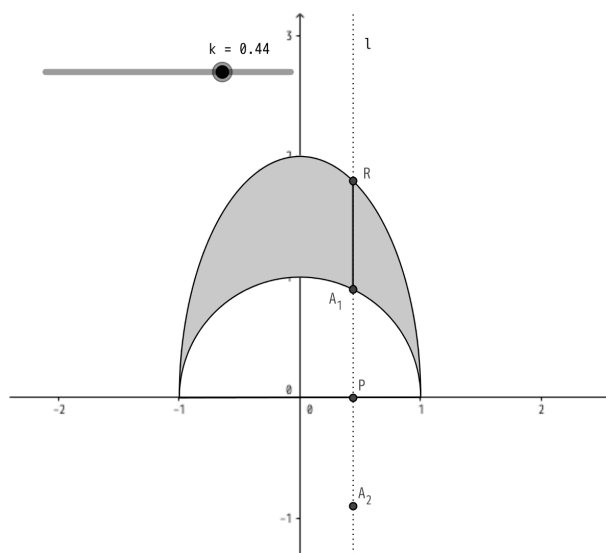
を用いて軌跡を描くこともできる．点 A_1 のスライダー k による軌跡 $loc1$ は以下で描くことができ、

```
loc1=Locus[A_1, k]
```

点 R のスライダー k による軌跡 $loc2$ は

```
loc2=Locus[R, k]
```

で描くことができる．今のところ、Locus[] で軌跡を描くことができる対象は点のみである．



1.8 光が当たらない部分の体積

問 3 の「光が当たらない部分の体積」についても、「 yOz 平面を向いたビュー」が重要である．平面 $b: x = k$ に描かれた図を参考にすることで、題意が鮮明になる．

「光が当たらない部分」は、どのような図形を描くか再び残像を用いて確認する．

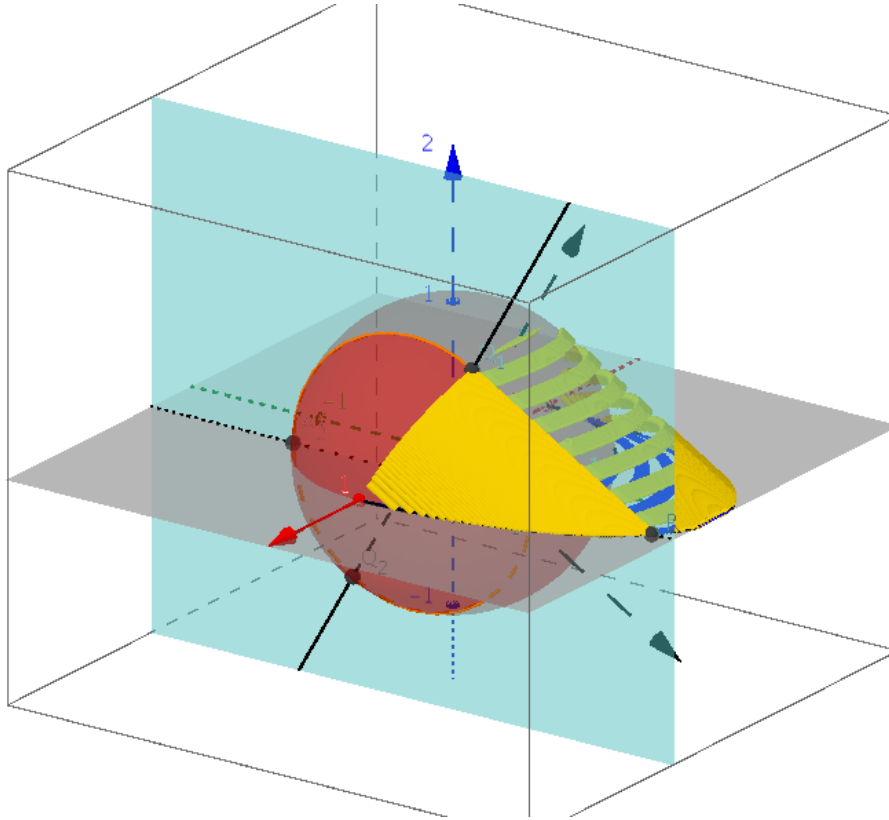
```
e=Segment[Q_1, R]
```

で線分 e を作成し、「残像表示」を有効にする．スライダー k をアニメーションで動かして、「光が当たらない部分」を確認できる．

2 まとめ

GeoGebra の 3D 機能におけるインターフェースは、十分に考慮されて設計されており、使いやすいものがあるが、ボタンやマウスのクリックを用いた空間図形の操作は、どうしても誤操作を起こしやすい．そこで、本稿では「入力」からのコマンドを用いた操作方法を紹介した．コマンドによる入力は、初心者には若干敷居の高いものであるが、GeoGebra の「入力」は補完機能やヘルプ機能に優れているので、慣れれば非常に強力な道具となる．

また、題材として選んだ問題は、高校の数学から大学の学部初年級への橋渡しとしても適当であり、また、GeoGebra の 3D 機能を解説する上でも格好の題材であった．本稿を読んで操作に習熟した後、統計学、ベク



トル解析学，曲線，曲面論などへの応用なども容易に可能であると思われる．空間図形を考える上で，本稿で取り上げなかった題材としては，リストの生成，微分方程式，曲面の陰関数表示などがある．リストの生成については

```
Sequence[ <式>, <変数>, <開始値>, <終了値>, <増分> ]
```

だが，GeoGebra にはリスト処理のための命令も用意されており，非常に応用に富んだ命令である．また，微分方程式についても

```
SolveODE[ <f'(x, y)>, <x開始値>, <y開始値>, <x終了値>, <間隔> ]
```

が用意されており，Runge-Kutta 法を用いて近似解を求めることができる．これらについては，[1] でも紹介を行っている．空間内の曲線や曲面の陰関数表示については，安定版には未実装であるが，最近，Google Summer of Code において，Shamshad Alam による実装が紹介された^{*3}．安定版への実装も近日中に行われると思われる．

最近になって，Android スマートフォンに対応した GeoGebra Graphing Calculator が公開された (cf. [2])．今のところは空間図形，表計算には対応していない．しかし，学生自身による GeoGebra の教育利用を考えるならば，スマートフォンへの対応は考慮しなければいけない問題であり，統計教育などにおいても有効な道具として期待できる．

参考文献

- [1] 濱田龍義，「ベクトル解析における 3 次元動的数学ソフトウェアの教育利用と検証」，数理解析研究所講究録 No. 1951, 2015.6, 14–24, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1951-02.pdf>.
- [2] 濱田龍義，「数学ソフトウェアのすすめ」，数セミ増刊 数学ガイダンス 2016, 日本評論社.

^{*3} <http://www.geogebra.org/blog/2015/08/google-summer-of-code-2015/>