IT Fundamentals Hoofdstuk 5
Boolese uitdrukkingen en functies

Jens Buysse, Karine Van Driessche, Koen Mertens, Lieven Smits
11 september 2020

HO
GENT

Inhoud I

HO
GENT

Boolese uitdrukkingen en functies

HO
GENT

- Boolese uitdrukkingen en functies
  - Notatie
  - Boolese uitdrukkingen
  - Minimale en maximale Boolese uitdrukkingen
  - Disjunctieve normaalvorm: DNV
  - Conjunctieve normaalvorm: CNV
  - Vereenvoudigen van Boolese uitdrukkingen
  - Oefeningen

HO
GENT

Notatie

Notatie

$B = (B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$, met $B = \{0, 1\}$ en

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$^{-}$
0	1
1	0

HO GENT

Notatie

$\mathbb{B} = (B, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$, met $B = \{0, 1\}$ en

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$\bar{\ }$
0	1
1	0

$a, b, c, \ldots \in B$ zijn constanten
$x, y, z, \ldots \in B$ zijn variabelen

HO
GENT

Een Boolese functie

Een Boolese functie

Definitie
Een **Boolese functie** *is van de vorm*

$$f : B^n \to B : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

met $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *een* booleaanse uitdrukking.

HO
GENT

Voorbeelden van Boolese functies

HO
GENT

Voorbeelden van Boolese functies

1. $f(x, y) = x + \overline{y} + \overline{x} \cdot y$

HO
GENT

Voorbeelden van Boolese functies

1. $f(x, y) = x + \overline{y} + \overline{x} \cdot y$

HO
GENT

Voorbeelden van Boolese functies

1. $f(x, y) = x + \overline{y} + \overline{x} \cdot y$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot y$	$f(x, y)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

HO GENT

Voorbeelden van Boolese functies

1. $f(x, y) = x + \overline{y} + \overline{x} \cdot y$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot y$	$f(x, y)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

2. $f : B^3 \to B : (x, y, z) \mapsto x + (y \cdot \overline{z})$

HO
GENT

Gelijkheid van twee Boolese functies

Gelijkheid van twee Boolese functies

Eigenschap

Twee Boolese functies, f en g, in n veranderlijken zijn gelijk als en slechts als

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

voor alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$

HO
GENT

Gelijkheid van twee Boolese functies

Eigenschap

Twee Boolese functies, f en g, in n veranderlijken zijn gelijk als en slechts als

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

voor alle $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$

Voorbeeld

HO
GENT

Gelijkheid van twee Boolese functies

Eigenschap

Twee Boolese functies, f en g, in n veranderlijken zijn gelijk als en slechts als

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

voor alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$

Voorbeeld

Zijn de volgende twee Boolese functies gelijk ?

$$f(x, y) = (\overline{x} + y) \cdot \overline{y}$$

$$g(x, y) = \overline{x + y}$$

HO
GENT

Een minimale Boolese uitdrukking

Een minimale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is **minimaal** *als ze het product is van n factoren en waarbij de k-de factor x_k of $\overline{x}_k$ is.*

HO
GENT

Een minimale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is **minimaal** *als ze het product is van n factoren en waarbij de k-de factor x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

HO
GENT

Een minimale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is **minimaal** *als ze het product is van n factoren en waarbij de k-de factor x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

- Alle minimale uitdrukkingen in 1 variabele: x, $\overline{x}$.

HO GENT

Een minimale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is **minimaal** *als ze het product is van n factoren en waarbij de k-de factor x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

- Alle minimale uitdrukkingen in 1 variabele: x, $\overline{x}$.
- Alle minimale uitdrukkingen in 2 variabelen:...

HO GENT

Een minimale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is **minimaal** *als ze het product is van n factoren en waarbij de k-de factor x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

- Alle minimale uitdrukkingen in 1 variabele: x, $\overline{x}$.
- Alle minimale uitdrukkingen in 2 variabelen:...
- Alle minimale uitdrukkingen in 3 variabelen:...

HO GENT

Een maximale Boolese uitdrukking

Een maximale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is ***maximaal*** *als ze de som is van n termen en waarbij de k-de term x_k of $\overline{x}_k$ is.*

HO GENT

Een maximale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n *variabelen,* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *is* ***maximaal*** *als ze de som is van* n *termen en waarbij de* k*-de term* x_k *of* $\overline{x}_k$ *is.*

Voorbeelden

Een maximale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is ***maximaal*** *als ze de som is van n termen en waarbij de k-de term x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

- Alle maximale uitdrukkingen in 1 variabele: x, $\overline{x}$.

HO GENT

Een maximale Boolese uitdrukking

Definitie

*Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is **maximaal** als ze de som is van n termen en waarbij de k-de term x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

- Alle maximale uitdrukkingen in 1 variabele: x, $\overline{x}$.
- Alle maximale uitdrukkingen in 2 variabelen:...

HO GENT

Een maximale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in n variabelen, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is ***maximaal*** *als ze de som is van n termen en waarbij de k-de term x_k of $\overline{x}_k$ is.*

Voorbeelden

- Alle maximale uitdrukkingen in 1 variabele: x, $\overline{x}$.
- Alle maximale uitdrukkingen in 2 variabelen:...
- Alle maximale uitdrukkingen in 3 variabelen:...

HO
GENT

De DNV

De DNV

Definitie

De **DNV** *van een Boolese uitdrukking in* ***n*** *variabelen is een som van minimale uitdrukkingen in* ***n*** *variabelen.*

HO GENT

De DNV

Definitie

De ***DNV*** *van een Boolese uitdrukking in n variabelen is een som van minimale uitdrukkingen in n variabelen.*

Voorbeelden

- $f(x, y) = x \cdot y + \overline{x} \cdot y$

HO
GENT

De DNV

Definitie

De **DNV** *van een Boolese uitdrukking in n variabelen is een som van minimale uitdrukkingen in n variabelen.*

Voorbeelden

- $f(x, y) = x \cdot y + \overline{x} \cdot y$
- $f(x, y, z) = \overline{x} \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

HO
GENT

Opstellen DNV
Methode 1: Gebruik axioma’s en eigenschappen

HO
GENT

Opstellen DNV
Methode 1: Gebruik axioma’s en eigenschappen

Voorbeeld

$$f(x, y, z) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot (x + z)$$

HO
GENT

Opstellen DNV
Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

HO
GENT

Opstellen DNV
Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

Eigenschap

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$f(1, 1, \dots, 1)x_1 x_2 \dots x_n + f(0, 1, \dots, 1)\overline{x}_1 x_2 \dots x_n + \dots + f(0, 0, \dots, 0)\overline{x}_1 \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n$$

HO
GENT

Opstellen DNV Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

Eigenschap

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$f(1, 1, \ldots, 1)x_1 x_2 \ldots x_n + f(0, 1, \ldots, 1)\overline{x}_1 x_2 \ldots x_n + \ldots + f(0, 0, \ldots, 0)\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$

Voorbeelden

1. $f(x, y) \quad = \quad \overline{x} + \overline{y}$

HO GENT

Opstellen DNV Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

Eigenschap

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$f(1, 1, \ldots, 1)x_1 x_2 \ldots x_n + f(0, 1, \ldots, 1)\overline{x}_1 x_2 \ldots x_n + \ldots + f(0, 0, \ldots, 0)\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$

Voorbeelden

1. $f(x, y) \quad = \quad \overline{x} + \overline{y}$

HO GENT

Opstellen DNV Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

Eigenschap

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$f(1, 1, \dots, 1)x_1 x_2 \dots x_n + f(0, 1, \dots, 1)\overline{x}_1 x_2 \dots x_n + \dots + f(0, 0, \dots, 0)\overline{x}_1 \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n$

Voorbeelden

1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \overline{x} + \overline{y} \\ &= f(1, 1)xy + f(1, 0)x\overline{y} + f(0, 1)\overline{x}y + f(0, 0)\overline{xy} \end{aligned}$$

HO GENT

Opstellen DNV Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

Eigenschap

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$f(1,1,\ldots,1)x_1x_2\ldots x_n + f(0,1,\ldots,1)\overline{x}_1x_2\ldots x_n + \ldots + f(0,0,\ldots,0)\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n$

Voorbeelden

1.
$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \overline{x} + \overline{y} \\
&= f(1,1)xy + f(1,0)x\overline{y} + f(0,1)\overline{x}y + f(0,0)\overline{xy} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

HO GENT

Opstellen DNV Methode 2: Gebruik de uitvoertabel

Eigenschap

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$
$f(1,1,\ldots,1)x_1x_2\ldots x_n + f(0,1,\ldots,1)\overline{x}_1x_2\ldots x_n + \ldots + f(0,0,\ldots,0)\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n$

Voorbeelden

1.
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \overline{x} + \overline{y} \\ &= f(1,1)xy + f(1,0)x\overline{y} + f(0,1)\overline{x}y + f(0,0)\overline{xy} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

2. $f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot (x+z)$

De CNV

De CNV

Definitie
De **CNV** *van een uitdrukking in* ***n*** *variabelen is een product van maximale uitdrukkingen in* ***n*** *variabelen (duale van DNV).*

De CNV

Definitie

De **CNV** *van een uitdrukking in* n *variabelen is een product van maximale uitdrukkingen in* n *variabelen (duale van DNV).*

Voorbeelden

HO GENT

De CNV

Definitie

De **CNV** *van een uitdrukking in* n *variabelen is een product van maximale uitdrukkingen in* n *variabelen (duale van DNV).*

Voorbeelden

- $f(x, y) = (x + y) \cdot (\overline{x} + y)$

HO
GENT

De CNV

Definitie
*De **CNV** van een uitdrukking in n variabelen is een product van maximale uitdrukkingen in n variabelen (duale van DNV).*

Voorbeelden

- $f(x, y) = (x + y) \cdot (\overline{x} + y)$
- $f(x, y, z) = (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

HO
GENT

CNV: Gebruik de uitvoertabel

CNV: Gebruik de uitvoertabel

Methode DNV	Methode CNV
Stel de outputtabel op Zoek alle outputwaarden = **1** Construeer de **minimale term**: • als input x_i = **1** dan x_i • als input x_i = **0** dan $\overline{x_i}$ Verbind alle termen met een **+**	Stel de outputtabel op Zoek alle outputwaarden = **0** Construeer de **maximale uitdr.**: • als input x_i = **0** dan x_i • als input x_i = **1** dan $\overline{x_i}$ Verbind alle uitdr. met een **·**.

HO
GENT

Opstellen van de CNV Voorbeeld

Opstellen van de CNV
Voorbeeld

$$f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot (x + z)$$

HO
GENT

Vereenvoudigen m.b.v. eigenschappen en axioma's

HO GENT

Vereenvoudigen m.b.v. eigenschappen en axioma's

Welke axioma's en eigenschappen er moeten toegepast worden, om de uitdrukking te vereenvoudigen, daar zijn geen vaste regels voor. Het beste resultaat vindt men via *trial and error*.

HO
GENT

Oefeningen

Oefeningen

1 Bepaal de DNV en CNV van $f(x, y, z)$ als:

(a) $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = f(0, 0, 0) = 1$. Alle andere waarden van f zijn 0.

(b) $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(0, 1, 1) = 1$. De andere waarden v. f zijn 0.

HO GENT

Oefeningen

1 Bepaal de DNV en CNV van $f(x, y, z)$ als:

   (a) $f(1, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = f(0, 0, 0) = 1$. Alle andere waarden van f zijn 0.

   (b) $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(0, 1, 1) = 1$. De andere waarden v. f zijn 0.

2 Bepaal de DNV van $f(x, y, z, u)$ als:

   (a) $f(1, 1, 1, 1) = f(1, 0, 0, 1) = f(1, 0, 1, 0) = 1$. Alle andere waarden van f zijn 0.

   (b) $f(1, 0, 1, 0) = f(0, 0, 0, 0) = f(0, 1, 0, 1) = f(1, 1, 1, 1) = 1$. Alle andere waarden v. f zijn 0.

HO GENT

Oefeningen

3 Geef de DNV (op twee verschillende manieren) en CNV van:

(a) $f(x, y, z) = \overline{x + y + z}$

(b) $f(x, y, z) = ((\overline{x} + y) + \overline{z}) \cdot \overline{z} \cdot x$

(c) $f(x, y, z) = (x \cdot (\overline{y} + z)) + \overline{z}$

HO
GENT

Oefeningen

3 Geef de DNV (op twee verschillende manieren) en CNV van:

(a) $f(x, y, z) = \overline{x + y + z}$

(b) $f(x, y, z) = ((\overline{x} + y) + \overline{z}) \cdot \overline{z} \cdot x$

(c) $f(x, y, z) = (x \cdot (\overline{y} + z)) + \overline{z}$

4 Vereenvoudig:

(a) $(x + y) \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z}) + (x \cdot \overline{y})$

(b) $x \cdot \overline{y} + (\overline{x} + y) \cdot y$

(c) $((x + y) + x \cdot z) \cdot (x + y \cdot z)$

(d) $(x + x \cdot y + x \cdot y \cdot z) \cdot (x \cdot y + x \cdot z) \cdot (y + x \cdot y \cdot z)$

HO
GENT