IT Fundamentals Hoofdstuk 4

Boole Algebra’s

Jens Buysse, Karine Van Driessche, Koen Mertens, Lieven Smits

11 september 2020

HO
GENT

Inhoud I

- Boole-algebra’s
  - Definitie
  - Dualiteitsbeginsel
  - Eigenschappen
  - Oefeningen

HO
GENT

Boole-algebra’s

Boole-algebra’s

- Definitie
- Dualiteitsbeginsel
- Eigenschappen
- Oefeningen

Een Boole-algebra

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra *B bestaat uit*

HO GENT

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra B *bestaat uit*

- *een verzameling* S*, met* $0 \in S$ *en* $1 \in S$*;*
- *twee binaire operatoren op* S*:* $+$ *en* $\cdot$*;*
- *een unaire operator op* S*:* $\bar{\ }$*.*

HO GENT

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra B *bestaat uit*

- *een verzameling* S, *met* $0 \in S$ *en* $1 \in S$;
- *twee binaire operatoren op* S*:* $+$ *en* $\cdot$;
- *een unaire operator op* S*:* $\bar{\ }$.

en voor alle $x, y, z \in S$ *gelden de* axioma's van Huntington*:*

HO
GENT

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra B *bestaat uit*

- *een verzameling* S, *met* $0 \in S$ *en* $1 \in S$;
- *twee binaire operatoren op* S: $+$ *en* $\cdot$;
- *een unaire operator op* S: $\bar{\ }$.

en voor alle $x, y, z \in S$ *gelden de* axioma's van Huntington:

- *commutativieve wetten* $x + y = y + x$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

HO GENT

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra B *bestaat uit*

- *een verzameling* S, *met* $0 \in S$ *en* $1 \in S$;
- *twee binaire operatoren op* S: $+$ *en* $\cdot$;
- *een unaire operator op* S: $\bar{\ }$.

en voor alle $x, y, z \in S$ *gelden de* axioma's van Huntington*:*

- *commutativieve wetten* $x + y = y + x$
  $x \cdot y = y \cdot x$
- *distributieve wetten* $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

HO
GENT

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra B *bestaat uit*

- *een verzameling* S*, met* $0 \in S$ *en* $1 \in S$*;*
- *twee binaire operatoren op* S*:* $+$ *en* $\cdot$*;*
- *een unaire operator op* S*:* $\bar{\ }$*.*

en voor alle $x, y, z \in S$ *gelden de* axioma's van Huntington*:*

- *commutativieve wetten* $\quad x + y = y + x$
  $x \cdot y = y \cdot x$
- *distributieve wetten* $\quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- *identiteitswetten* $\quad x + 0 = x$
  $x \cdot 1 = x$

HO GENT

Een Boole-algebra

Definitie

Een Boole-algebra *B bestaat uit*

- *een verzameling S, met* 0 ∈ *S en* 1 ∈ *S;*
- *twee binaire operatoren op S:* + *en* ·*;*
- *een unaire operator op S:* ¯.

en voor alle $x, y, z \in S$ *gelden de* axioma's van Huntington*:*

- *commutativieve wetten* $x + y = y + x$
  $x \cdot y = y \cdot x$
- *distributieve wetten* $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
  $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- *identiteitswetten* $x + 0 = x$
  $x \cdot 1 = x$
- *complementwetten* $x + \overline{x} = 1$
  $x \cdot \overline{x} = 0$

HO GENT

Notatie en afspraken

Notatie en afspraken

Notatie

$B = (S, +, \cdot, ^{-}, 0, 1) = (S, +, \cdot, ^{-})$.

Notatie en afspraken

Notatie

$B = (S, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1) = (S, +, \cdot, \bar{\ })$.

Afspraken

- $\cdot$ moet niet steeds expliciet opgeschreven worden: $x \cdot y = xy$.

HO GENT

Notatie en afspraken

Notatie

$B = (S, +, \cdot, ^{-}, 0, 1) = (S, +, \cdot, ^{-})$.

Afspraken

- $\cdot$ moet niet steeds expliciet opgeschreven worden: $x \cdot y = xy$.
- $\cdot$ heeft steeds voorrang op **+** tenzij haakjes een andere volgorde aangeven.

HO GENT

Voorbeeld 1

HO GENT

Voorbeeld 1

Stel $B = \{0, 1\}$. Definieer de bewerkingen $+, \cdot, \bar{\ }$ als volgt

HO
GENT

Voorbeeld 1

Stel $B = \{0, 1\}$. Definieer de bewerkingen $+, \cdot, \bar{}$ als volgt

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$\bar{}$
0	1
1	0

HO GENT

Voorbeeld 1

Stel $B = \{0, 1\}$. Definieer de bewerkingen $+, \cdot, \bar{}$ als volgt

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$\bar{}$
0	1
1	0

De structuur $(B, +, \cdot, \bar{}\ , 0, 1)$ is een Boole-algebra, meer bepaald de *minimale* Boole-algebra.

HO
GENT

Voorbeeld 2

Voorbeeld 2

$Prop$ = {*alle proposities*}

HO
GENT

Voorbeeld 2

Prop = {*alle proposities*}
De bewerkingen ∨ (*of*), ∧ (*en*) , ¬ (*niet*) worden als volgt gedefinieerd

∨	*O*	*W*
O	*O*	*W*
W	*W*	*W*

∧	*O*	*W*
O	*O*	*O*
W	*O*	*W*

	¬
O	*W*
W	*O*

HO GENT

Voorbeeld 2

Prop = {*alle proposities*}
De bewerkingen ∨ (*of*), ∧ (*en*) , ¬ (*niet*) worden als volgt gedefinieerd

$$\begin{array}{c|cc} \vee & O & W \\ \hline O & O & W \\ W & W & W \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \wedge & O & W \\ \hline O & O & O \\ W & O & W \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \neg \\ \hline O & W \\ W & O \end{array}$$

De structuur $(Prop, \vee, \wedge, \neg, O, W)$ is een Boole-algebra.

Oefeningen

Oefeningen

1. Noem D de verzameling gehele delers van 6. Definieer de volgende operatoren op D:

$$\begin{aligned} x + y &= \text{kgv}(x, y) \\ x \cdot y &= \text{ggd}(x, y) \\ \overline{x} &= 6/x. \end{aligned}$$

   Is $(D, +, \cdot, \bar{\ })$ een Boole-algebra? Motiveer uw antwoord.

HO GENT

Oefeningen

1. Noem D de verzameling gehele delers van 6. Definieer de volgende operatoren op D:

$$\begin{aligned} x + y &= \text{kgv}(x, y) \\ x \cdot y &= \text{ggd}(x, y) \\ \overline{x} &= 6/x. \end{aligned}$$

   Is $(D, +, \cdot, \overline{\ })$ een Boole-algebra? Motiveer uw antwoord.

2. Noem D de verzameling gehele delers van 8. Definieer de volgende operatoren op D:

$$\begin{aligned} x + y &= \text{kgv}(x, y) \\ x \cdot y &= \text{ggd}(x, y) \\ \overline{x} &= 8/x. \end{aligned}$$

   Is $(D, +, \cdot, \overline{\ })$ een Boole-algebra? Motiveer uw antwoord.

HO
GENT

Principe

Principe

Eigenschap

Bij elk axioma en elke eigenschap van een Boole-algebra $(S, +, \cdot, \bar{}\,, 0, 1)$ *hoort een duaal axioma of een duale eigenschap.*

HO
GENT

Principe

Eigenschap

Bij elk axioma en elke eigenschap van een Boole-algebra $(S, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ *hoort een duaal axioma of een duale eigenschap.*

symbool	duale vorm
$+$	$\cdot$
$\cdot$	$+$
0	1
1	0
$^{-}$	$^{-}$

HO GENT

Principe

Eigenschap

Bij elk axioma en elke eigenschap van een Boole-algebra $(S, +, \cdot, \bar{}\ , 0, 1)$ *hoort een duaal axioma of een duale eigenschap.*

symbool	duale vorm
$+$	$\cdot$
$\cdot$	$+$
0	1
1	0
$\bar{}$	$\bar{}$

Bv:

uitdrukking	duale vorm
$\overline{x + y}$	
$x = \overline{\overline{x}}$	

HO GENT

Eigenschappen van een Boole-algebra

HO
GENT

Eigenschappen van een Boole-algebra

Beschouw de algemene Boole-algebra $B = (S, +, \cdot, \bar{}\ , 0, 1)$, met $x, y, z \in S$.

HO GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

HO GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$y \quad = \quad y \cdot 1$ (identiteitswet)

HO GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ bestaat er juist één $\overline{x} \in S$ zodat $x + \overline{x} = 1$ en $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)}
\end{aligned}
$$

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{(distributieve wet)}
\end{aligned}
$$

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{(distributieve wet)} \\
&= x \cdot y + \overline{x} \cdot y && \text{(commutatieve wet)}
\end{aligned}
$$

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{(distributieve wet)} \\
&= x \cdot y + \overline{x} \cdot y && \text{(commutatieve wet)} \\
&= 0 + \overline{x} \cdot y && \text{(veronderstelling)}
\end{aligned}
$$

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ bestaat er juist één $\overline{x} \in S$ zodat $x + \overline{x} = 1$ en $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)}\\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)}\\
&= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{(distributieve wet)}\\
&= x \cdot y + \overline{x} \cdot y && \text{(commutatieve wet)}\\
&= 0 + \overline{x} \cdot y && \text{(veronderstelling)}\\
&= x \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot y && \text{(complementswet)}
\end{aligned}
$$

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{array}{rcll}
y & = & y \cdot 1 & \text{(identiteitswet)} \\
 & = & y \cdot (x + \overline{x}) & \text{(complementswet)} \\
 & = & y \cdot x + y \cdot \overline{x} & \text{(distributieve wet)} \\
 & = & x \cdot y + \overline{x} \cdot y & \text{(commutatieve wet)} \\
 & = & 0 + \overline{x} \cdot y & \text{(veronderstelling)} \\
 & = & x \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot y & \text{(complementswet)} \\
 & = & \overline{x} \cdot (x + y) & \text{(comm. + distr. wet)}
\end{array}
$$

HO
GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{(distributieve wet)} \\
&= x \cdot y + \overline{x} \cdot y && \text{(commutatieve wet)} \\
&= 0 + \overline{x} \cdot y && \text{(veronderstelling)} \\
&= x \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot y && \text{(complementswet)} \\
&= \overline{x} \cdot (x + y) && \text{(comm. + distr. wet)} \\
&= \overline{x} \cdot 1 && \text{(veronderstelling)}
\end{aligned}
$$

HO GENT

Eigenschap 1: het complement is uniek

Eigenschap

Voor elke $x \in S$ *bestaat er juist één* $\overline{x} \in S$ *zodat* $x + \overline{x} = 1$ *en* $x \cdot \overline{x} = 0$.

Bewijs.

Kies $y \in S$ met $x + y = 1$ en $x \cdot y = 0$.

$$
\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{(identiteitswet)}\\
&= y \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)}\\
&= y \cdot x + y \cdot \overline{x} && \text{(distributieve wet)}\\
&= x \cdot y + \overline{x} \cdot y && \text{(commutatieve wet)}\\
&= 0 + \overline{x} \cdot y && \text{(veronderstelling)}\\
&= x \cdot \overline{x} + \overline{x} \cdot y && \text{(complementswet)}\\
&= \overline{x} \cdot (x + y) && \text{(comm. + distr. wet)}\\
&= \overline{x} \cdot 1 && \text{(veronderstelling)}\\
&= \overline{x} && \text{(identiteitswet)}
\end{aligned}
$$

HO
GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

HO
GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

HO
GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} \cdot 1$ (identiteitswet)

HO GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\ &= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \end{aligned}$$

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) && \text{(distributieve wet)}
\end{aligned}$$

HO
GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) && \text{(distributieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}) && \text{(commutatieve wet)}
\end{aligned}
$$

HO GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) && \text{(distributieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}) && \text{(commutatieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + 0 && \text{(complementswet)}
\end{aligned}$$

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$\overline{\overline{x}}$	$=$	$\overline{\overline{x}} \cdot 1$	(identiteitswet)
	$=$	$\overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x})$	(complementswet)
	$=$	$(\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x})$	(distributieve wet)
	$=$	$(\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}})$	(commutatieve wet)
	$=$	$(\overline{\overline{x}} \cdot x) + 0$	(complementswet)
	$=$	$(\overline{\overline{x}} \cdot x) + (x \cdot \overline{x})$	(complementswet)

HO
GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$
\begin{array}{rcll}
\overline{\overline{x}} & = & \overline{\overline{x}} \cdot 1 & \text{(identiteitswet)} \\
 & = & \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) & \text{(complementswet)} \\
 & = & (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) & \text{(distributieve wet)} \\
 & = & (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}) & \text{(commutatieve wet)} \\
 & = & (\overline{\overline{x}} \cdot x) + 0 & \text{(complementswet)} \\
 & = & (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (x \cdot \overline{x}) & \text{(complementswet)} \\
 & = & (x \cdot \overline{\overline{x}}) + (x \cdot \overline{x}) & \text{(commutatieve wet)}
\end{array}
$$

HO
GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) && \text{(distributieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}) && \text{(commutatieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + 0 && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (x \cdot \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (x \cdot \overline{\overline{x}}) + (x \cdot \overline{x}) && \text{(commutatieve wet)} \\
&= x \cdot (\overline{\overline{x}} + \overline{x}) && \text{(distributieve wet)}
\end{aligned}$$

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)} \\
&= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) && \text{(distributieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}) && \text{(commutatieve wet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + 0 && \text{(complementswet)} \\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (x \cdot \overline{x}) && \text{(complementswet)} \\
&= (x \cdot \overline{\overline{x}}) + (x \cdot \overline{x}) && \text{(commutatieve wet)} \\
&= x \cdot (\overline{\overline{x}} + \overline{x}) && \text{(distributieve wet)}
\end{aligned}
$$

HO GENT

Eigenschap 2: involutie

Eigenschap

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{x}} &= \overline{\overline{x}} \cdot 1 && \text{(identiteitswet)}\\
&= \overline{\overline{x}} \cdot (x + \overline{x}) && \text{(complementswet)}\\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{\overline{x}} \cdot \overline{x}) && \text{(distributieve wet)}\\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (\overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}) && \text{(commutatieve wet)}\\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + 0 && \text{(complementswet)}\\
&= (\overline{\overline{x}} \cdot x) + (x \cdot \overline{x}) && \text{(complementswet)}\\
&= (x \cdot \overline{\overline{x}}) + (x \cdot \overline{x}) && \text{(commutatieve wet)}\\
&= x \cdot (\overline{\overline{x}} + \overline{x}) && \text{(distributieve wet)}
\end{aligned}
$$

Eigenschap 3: complement van 0 en 1

Eigenschap

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

HO GENT

Eigenschap 4: idempotentie

Eigenschap

$$x + x = x$$
$$x \cdot x = x$$

Eigenschap 5: begrenzing

Eigenschap

$$\begin{aligned} x + 1 &= 1 \\ x \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

HO
GENT

Eigenschap 6: absorptie

Eigenschap

$$\begin{aligned} x + (x \cdot y) &= x \\ x \cdot (x + y) &= x \end{aligned}$$

HO
GENT

Eigenschap 7: associatief

Eigenschap

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z = x + y + z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z \end{aligned}$$

HO GENT

Eigenschap 8: wetten van de Morgan

Eigenschap

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$
$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

HO
GENT

Oefeningen

1. Geef het bewijs van de vierde, vijfde en zesde eigenschap: idempotentie, begrenzing en absorptie.

HO
GENT

Oefeningen

1. Geef het bewijs van de vierde, vijfde en zesde eigenschap: idempotentie, begrenzing en absorptie.

2. Hoe luiden de eigenschappen 5 en 6 voor de Boole-algebra $(Prop, \vee, \wedge, \neg, 0, W)$.

HO GENT

Oefeningen

1 Geef het bewijs van de vierde, vijfde en zesde eigenschap: idempotentie, begrenzing en absorptie.

2 Hoe luiden de eigenschappen 5 en 6 voor de Boole-algebra $(Prop, \vee, \wedge, \neg, O, W)$.

3 $(S, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ is een Boole-algebra met $x, y, z \in S$. Bepaal het complement en de duale uitdrukking van:

(a) $x + \overline{y \cdot z}$

(b) $(x \cdot y \cdot z) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z})$

HO
GENT

Oefeningen

4 Stel $(S, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ een boole-algebra met $x, y, z, u \in S$.
Toon de geldigheid van de volgende uitdrukkingen aan door te steunen op de axioma's en eigenschappen van een boole-algebra.

HO
GENT

Oefeningen

4 Stel $(S, +, \cdot, \overline{}, 0, 1)$ een boole-algebra met $x, y, z, u \in S$.
Toon de geldigheid van de volgende uitdrukkingen aan door te steunen op de axioma's en eigenschappen van een boole-algebra.

(a) $(x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$

HO GENT

Oefeningen

4 Stel $(S, +, \cdot, \bar{}\,, 0, 1)$ een boole-algebra met $x, y, z, u \in S$.
Toon de geldigheid van de volgende uitdrukkingen aan door te steunen op de axioma's en eigenschappen van een boole-algebra.

(a) $(x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$

(b) $x \cdot y + \overline{y} \cdot z + x \cdot z = x \cdot y + \overline{y} \cdot z$

HO
GENT

Oefeningen

4 Stel $(S, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ een boole-algebra met $x, y, z, u \in S$.
Toon de geldigheid van de volgende uitdrukkingen aan door te steunen op de axioma's en eigenschappen van een boole-algebra.

(a) $(x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$

(b) $x \cdot y + \overline{y} \cdot z + x \cdot z = x \cdot y + \overline{y} \cdot z$

(c) $x \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot z = \overline{y} + \overline{z}$

HO GENT

Oefeningen

4 Stel $(S, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ een boole-algebra met $x, y, z, u \in S$.
Toon de geldigheid van de volgende uitdrukkingen aan door te steunen op de axioma's en eigenschappen van een boole-algebra.

(a) $(x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$

(b) $x \cdot y + \overline{y} \cdot z + x \cdot z = x \cdot y + \overline{y} \cdot z$

(c) $x \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot z = \overline{y} + \overline{z}$

(d) $x \cdot y + \overline{x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y}} = y$

HO
GENT

Oefeningen

4 Stel $(S, +, \cdot, {}^{-}, 0, 1)$ een boole-algebra met $x, y, z, u \in S$.
Toon de geldigheid van de volgende uitdrukkingen aan door te steunen op de axioma's en eigenschappen van een boole-algebra.

(a) $(x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$

(b) $x \cdot y + \overline{y} \cdot z + x \cdot z = x \cdot y + \overline{y} \cdot z$

(c) $x \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot z = \overline{y} + \overline{z}$

(d) $x \cdot y + \overline{x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y}} = y$

(e) $(x \cdot y + x \cdot u) \cdot (z \cdot u + \overline{x} \cdot u) \cdot (\overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot x \cdot \overline{y} = x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot u$

HO
GENT