IT Fundamentals Hoofdstuk 7

Analyse

Jens Buysse, Karine Van Driessche, Koen Mertens, Lieven Smits

11 september 2020

HO
GENT

Inhoud I

HO
GENT

Inhoud II

Floor en *Ceiling* functie

Inleiding

HO
GENT

Inleiding
- Machten
- Intervallen in $\mathbb{R}$
- Het begrip oneindig in de wiskunde

Veeltermfuncties
- Definitie en notatie
- Constante functies
- Lineaire functies
- Functies van de tweede graad

De exponentiële en logaritmische functie
- De exponentiële functie
- De logaritmische functie

Bijzondere functies
- De absolute waarde functie
- *Floor* en *Ceiling* functie

HO
GENT

Definitie van een macht

Definitie

Stel $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

- *dan geldt voor alle* $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
a^n &= a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n \geq 2)\\
a^1 &= a\\
a^0 &= 1\\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n}\\
a^{-1} &= \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

- *dan geldt voor alle* $p, q \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[q]{a^p} \quad (q \geq 2)\\
a^{-\frac{p}{q}} &= \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \quad (q \geq 2)
\end{aligned}
$$

Rekenregels

Eigenschap

Stel $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.
Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ *geldt*

$$
\begin{aligned}
a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\
\frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\
(a^r)^s &= a^{rs} \\
a^r \cdot b^r &= (a \cdot b)^r \\
\frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r
\end{aligned}
$$

Notaties

- Open interval:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} \subseteq \mathbb{R}$$

- Gesloten interval:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$$

- Halfopen interval:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} \subseteq \mathbb{R}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$$

- De verzameling van de reële getallen ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

HO GENT

De uitgebreide reële rechte

Definitie
De **uitgebreide reële rechte** $\overline{\mathbb{R}}$ *is:*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

met $-\infty < x < +\infty$ *voor elke* $x \in \mathbb{R}$.

HO
GENT

Rekenregels voor ‘+’ en ‘-’ in $\overline{\mathbb{R}}$

Eigenschap

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ *geldt*

$$\begin{aligned} +\infty + x &= +\infty \\ -\infty + x &= -\infty \\ +\infty + (+\infty) &= +\infty \\ -\infty + (-\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

Let op! De volgende bewerkingen zijn niet gedefinieerd

$$+\infty + (-\infty)$$
$$-\infty + (+\infty)$$

HO GENT

Rekenregels voor ‘×’ en ‘/’ in $\overline{\mathbb{R}}$

Eigenschap

Voor elke $x \in \mathbb{R}_0^+$ *geldt*

$$\begin{aligned}
+\infty \cdot x &= +\infty \\
-\infty \cdot x &= -\infty \\
+\infty / x &= +\infty \\
-\infty / x &= -\infty
\end{aligned}$$

HO
GENT

Rekenregels voor '×' en '/' in $\overline{\mathbb{R}}$

Eigenschap

Voor elke $x \in \mathbb{R}_0^-$ *geldt*

$$\begin{aligned} +\infty \cdot x &= -\infty \\ -\infty \cdot x &= +\infty \\ +\infty / x &= -\infty \\ -\infty / x &= +\infty \end{aligned}$$

HO
GENT

Rekenregels voor '×' en '/' in $\overline{\mathbb{R}}$

Eigenschap

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ *geldt*

$$\begin{aligned} x / +\infty &= 0 \\ x / -\infty &= 0 \end{aligned}$$

HO GENT

Rekenregels voor '×' en '/' in $\overline{\mathbb{R}}$

Eigenschap

Er geldt

$$\begin{aligned}
+\infty \cdot (+\infty) &= +\infty \\
-\infty \cdot (-\infty) &= +\infty \\
+\infty \cdot (-\infty) &= -\infty \\
-\infty \cdot (+\infty) &= -\infty
\end{aligned}$$

Let op! De volgende bewerkingen zijn niet gedefinieerd

$$\begin{array}{l}
0 \cdot (+\infty) \\
0 \cdot (-\infty) \\
\infty / \infty \\
0 / 0 \\
0^0 \\
\infty^0
\end{array}$$

HO
GENT

Veeltermfuncties

Inleiding
- Machten
- Intervallen in $\mathbb{R}$
- Het begrip oneindig in de wiskunde

Veeltermfuncties
- Definitie en notatie
- Constante functies
- Lineaire functies
- Functies van de tweede graad

De exponentiële en logaritmische functie
- De exponentiële functie
- De logaritmische functie

Bijzondere functies
- De absolute waarde functie
- *Floor* en *Ceiling* functie

HO
GENT

Intuïtieve definitie

Definitie

- *Domein van een reële functie f of dom f, is de verzameling van alle argumenten x waarvoor een beeld y in de functie f bestaat. Het domein is een deelverzameling van de bronverzameling, dus niet noodzakelijkerwijs gelijk aan de bronverzameling van f.*
- *Beeld van een reële functie f of bld f, is de verzameling van alle beelden y die in de functie f bestaan. Het beeld is een deelverzameling van de doelverzameling, dus niet noodzakelijkerwijs gelijk aan de doelverzameling van f.*

Voorbeeld: $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto \; y = \frac{1}{x-3}$

- bronverzameling is $\mathbb{R}$
- dom $f = \mathbb{R}\backslash 3$
- doelverzameling = $\mathbb{R}$
- bld $f = \mathbb{R}_0$

Een reële functie

Definitie

*Een functie f is een **reële functie** indien zijn bron- en doelverzameling beide $\mathbb{R}$ zijn. D.w.z. dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ hoogstens één $y \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f(x) = y$.*
*We noemen x het **argument** terwijl y het **beeld** wordt genoemd.*

Notaties

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y$

$F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ = de verzameling van alle reële functies.

HO
GENT

Het begrip continu

Definitie

Een intuïtieve definitie:

- *Een reële functie f is **continu**, indien we de grafiek van f kunnen tekenen zonder ons potlood op te heffen.*
- *Een reële functie f is **continu in een punt** a van haar domein, indien de grafiek van f geen 'sprong' vertoont in de onmiddellijke omgeving van het punt $(a, f(a))$. In het ander geval spreekt men van een **discontinuïteit in het punt** a.*

HO
GENT

Een nulpunt van een functie f

Definitie

*Een **nulpunt** x van een reële functie f is een element van het domein van f waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 0.*
M.a.w. een nulpunt x van een functie f is oplossing van de vergelijking $f(x) = 0$.

HO
GENT

Een veeltermfunctie

Definitie
*Een **veeltermfunctie** is een reële functie met als functievoorschrift*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

met $n \in \mathbb{N}$ *en* $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0 \ldots n)$, $a_n \neq 0$.
We noemen n *de **graad** van* $f(x)$ *en* $a_n x^n$ *de **hoogste graadsterm**.*

HO
GENT

Een constante functie

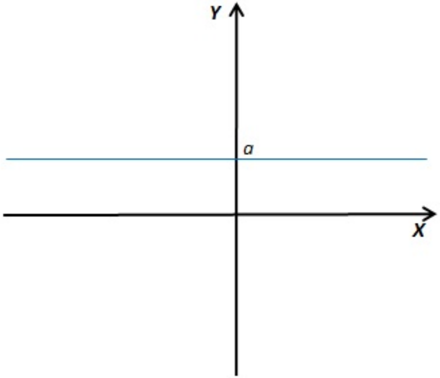
Definitie

Een ***constante functie*** *is een functie waarbij de functiewaarde constant is.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

De grafiek

De grafiek van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R})$ is



Eigenschappen

Eigenschap

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \; (a \in \mathbb{R})$ *geldt*

- $dom(f) = \mathbb{R}$.
- $bld(f) = \{a\}$.
- f *is continu in* $\mathbb{R}$.
- *De nulpunten zijn:*
  - *als* $a \neq 0$ *dan zijn er geen nulpunten;*
  - *als* $a = 0$ *dan is elke* $x \in \mathbb{R}$ *een nulpunt van* f.
- *Het snijpunt met de* Y*-as is:* $(0, a)$.

HO GENT

Tekenverloop

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$) geldt

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	teken van a

HO GENT

Oefening

De constante functie f bevat het koppel $(2, -3)$. Bepaal deze functie f en bereken $f(5)$ en $f(-8)$.

Een functie van de eerste graad

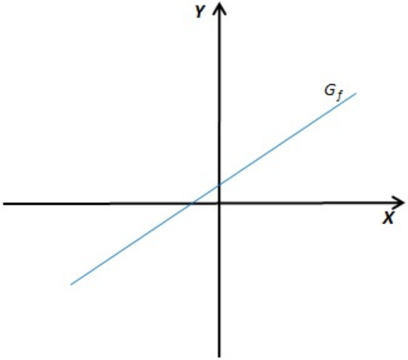
Definitie

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ waarbij a en b gegeven reële getallen zijn en $a \neq 0$, noemt men een ***functie van de eerste graad*** *of* ***lineaire functie****.*

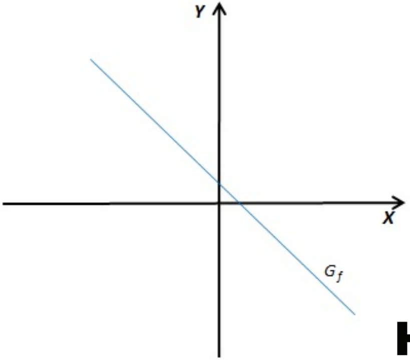
HO
GENT

De grafiek

De grafiek van de eerstegraadsfunctie $f : x \mapsto ax + b$ is de rechte met vergelijking $y = ax + b$.



f een stijgende functie als $a > 0$



f een dalende functie als $a < 0$

HO
GENT

Eigenschappen

Eigenschap

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ $(a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R})$ *geldt*

- *dom*$(f) = \mathbb{R}$.
- *bld*$(f) = \mathbb{R}$.
- f *is continu in* $\mathbb{R}$.
- *Het nulpunt is:* $x = -\frac{b}{a}$.
- *Het snijpunt met de Y-as is:* $(0, b)$.

HO
GENT

Tekenverloop

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b \quad (a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R})$ geldt

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		teken van $-a$	0	teken van a	

HO GENT

Oefeningen

1 Onderzoek het verloop van de volgende functies van de eerste graad. Teken de grafiek van de functie.

(a) $f : x \mapsto x - 3$.
(b) $g : x \mapsto -\frac{3}{5}x + 7$.

2 Bepaal het snijpunt van de grafieken van

(a) $f : x \mapsto -3x - 2$ en $g : x \mapsto 5x + 6$.
(b) $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ en $g : x \mapsto \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$.
(c) $f : x \mapsto x\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$ en $g : x \mapsto -2x\sqrt{3}$.

3 Bepaal telkens bij de voorgaande oefeningen

(a) $f(-3)$ en $g(3)$.
(b) $f(3)$ en $g(1)$.
(c) $f(0)$ en $g(0)$.

HO
GENT

Oefeningen

3 (Bron[1]) Een object beweegt tijdens een computerspel langs een rechte lijn van het punt A met coördinaten $(0, 20)$ naar het punt B met coördinaten $(15, 30)$. Zoek de vergelijking van deze rechte. Als het voorwerp in het punt C met coördinaten $(30, 40)$ komt, beweegt de speler de joystick, zodat het object 90° naar links draait en in een rechte lijn verder beweegt. Vind de vergelijking van de rechte die het nieuwe pad voorstelt. Teken bovendien beide rechten in één assenstelsel.
Tip: Twee rechten f en g, de rechte f met rico = r_1 en de rechte g met rico = r_2, staan loodrecht op elkaar enkel en alleen als $r_1 . r_2 = -1$.

[1]Bron: I. De Pauw, B. Masselis, *Wiskunde voor multimedia*, Lannoo Campus, 2009.

Een functie van de tweede graad

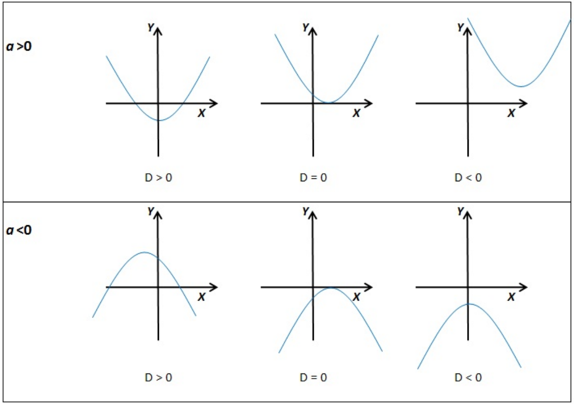
Definitie

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ *waarbij* a, b *en* c *gegeven reële getallen zijn en waarvoor* $a \neq 0$*, noemt men een functie van de tweede graad.*

HO
GENT

De grafiek

De grafiek van de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ is een **parabool** P.



met $D = b^2 - 4ac$

HO GENT

Eigenschappen

Eigenschap

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c \ (a \in \mathbb{R}_0, b, c \in \mathbb{R})$ *geldt*

- $dom(f) = \mathbb{R}$.
- *Het beeld:*
  - *Dalparabool:* $bld(f) = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty[$.
  - *Bergparabool:* $bld(f) =]-\infty, f(-\frac{b}{2a})]$.
- f *is continu in* $\mathbb{R}$.
- *Er zijn maximum twee verschillende nulpunten:*

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{met } D = b^2 - 4ac.$$
- *Het snijpunt met de* Y*-as is:* $(0, c)$.

HO GENT

Tekenverloop

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c \; (a \in \mathbb{R}_0, b, c \in \mathbb{R})$ geldt

- $D > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		teken van a	0	teken van $-a$	0	teken van a	

- $D = 0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		teken van a	0	teken van a	

- $D < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		teken van a	

HO GENT

Oefeningen

1. Bespreek de volgende tweedegraadsfuncties en bepaal de gevraagde functiewaarde:
   (a) $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 5.\ f(0).$
   (b) $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 5.\ f(-1).$
   (c) $f : x \mapsto -x^2 + 2x - 1.\ f(1).$
   (d) $f : x \mapsto 3x^2 + 4x.\ f(2).$
   (e) $f : x \mapsto x^2 - 9.\ f(3).$

2. Is de inverse van een tweedegraadsfunctie opnieuw een functie? Illustreer dit voor de functie $f : x \mapsto f(x) = x^2$.

HO
GENT

Extra oefeningen

Gegeven

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = -2x^2 - 2x + 4$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = -4x$$

Gevraagd:

a) Bepaal het domein en beeld van f. Geef de nulpunten en het snijpunt met de Y-as.
Idem voor de functie g.

b) Teken de grafiek van f en g. Duid de snijpunten aan op de grafiek.

c) Bereken de snijpunten van f en g analytisch.

HO
GENT

De exponentiële en logaritmische functie

HO
GENT

De exponentiële functie: definitie

Definitie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$$

is de **exponentiële functie met grondtal** a ($a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$).

- Indien $a > 1$ is de exponentiële functie strikt stijgend.
- Indien $a < 1$ is de exponentiële functie strikt dalend.

Eigenschappen

Eigenschap

Stel f *de exponentiële functie met grondtal* a $(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$ *:*

- $f(0) = 1$
- $f(1) = a$
- *dom* $f = \mathbb{R}$
- *bld* $f = \mathbb{R}_0^+$
- *De functie* f *is continu in* $\mathbb{R}$.
- *Voor* $a > 1$ *geldt:*
  de X*-as is horizontale asymptoot aan de kant van* $-\infty$.
  Voor $0 < a < 1$ *geldt:*
  de X*-as is horizontale asymptoot aan de kant van* $+\infty$.

De natuurlijke exponentiële functie

Definitie

De ***natuurlijke exponentiële functie*** *met* ***natuurlijk grondtal*** *e is*

$$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto exp(x) = e^x$$

met $(e = 2,7182818284\ldots)$.

HO
GENT

Definitie logaritme

Definitie

*Het **logaritme** met grondtal a ($a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) van argument b ($b \in \mathbb{R}_0^+$) is*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

bv. $log_2 8 = 3$ *omdat* $2^3 = 8$

Bijzondere logaritmen

Definitie

- *Het* ***Briggse logaritme*** *(log) is het logaritme met grondtal* 10

$$\log b = \log_{10} b = x \Leftrightarrow 10^x = b$$

- *Het* ***Neperiaanse of natuurlijke logaritme*** *(ln) is het logaritme met grondtal het getal* e *(=* 2.718 … *)*

$$\ln b = \log_e b = x \Leftrightarrow e^x = b$$

- *Het logaritme met grondtal* 2 *wordt genoteerd als lg x.*

$$\lg b = \log_2 b = x \Leftrightarrow 2^x = b$$

HO
GENT

Voorbeelden

- $\lg 16 = \log_2 16 = \ldots$
- $\log_3 27 = \ldots$
- $\ln e = \log_e = \ldots$
- $\lg 1 = \ldots$
- $\log 1000 = \log_{10} 1000 = \ldots$
- $\lg \frac{1}{8} = \ldots$

HO
GENT

Rekenregels

Eigenschap

Stel $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$.

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^p) = p.\log_a x \quad (\text{met } p \in \mathbb{Q})$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Rekenregels: voorbeelden

- $\log 25 + \log 4 = \ldots$
- $\ln 2e^3 - \ln 2 = \ldots$
- $4 \cdot \log_9 3 = \ldots$
- $\lg 12 = \ldots$
- $\log_7 7 = \ldots$
- $\log_{25} 125 = \ldots$

HO
GENT

De logaritmische functie: definitie

Definitie

*De **logaritmische functie met grondtal** a ($a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) is*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = y = log_a x$$

met $a^y = x$.

- Indien $0 < a < 1$ dan is $\log_a$ strikt dalend.
- Indien $a > 1$ dan is $\log_a$ strikt stijgend.

Eigenschappen

Eigenschap

Stel f *de logaritmische functie met grondtal* a $(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\})$*:*

- $f(1) = 0$
- $f(a) = 1$
- *dom* $f = \mathbb{R}_0^+$
- *bld* $f = \mathbb{R}$
- *De functie* f *is continu in* $\mathbb{R}_0^+$
- *De Y-as is verticale asymptoot*

HO
GENT

Bijzondere logaritmische functies

De eigenschappen uit de vorige slide gelden ook voor deze bijzondere logaritmische functies.

Definitie

- *De **Briggse logaritmische functie** is de logaritmische functie met grondtal 10*

$$\log : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto y = \log x.$$

- *De **Neperiaanse of natuurlijke logaritmische** functie is de logaritmische functie met grondtal e*

$$\ln : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto y = \ln x.$$

HO GENT

Bijzondere logaritmische functies

De eigenschappen uit de vorige slide gelden ook voor deze bijzondere logaritmische functies.

Definitie

- *De logaritmische functie met grondtal* 2

$$lg : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto y = lg\, x.$$

HO
GENT

Oefeningen

1. $\log_5 5$
2. $\lg \frac{1}{2}$
3. $\ln e^2$
4. $\lg 16$
5. $\log_3 27$
6. $\log_{\frac{1}{3}} 27$
7. $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7}$
8. $\log_{\sqrt{2}} 1$
9. $\log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{125}$
10. $\log_{\frac{1}{2}} 125$
11. $\log_4 2 + \log_4 8$
12. $\log_3 36 - \log_3 4$
13. $2 \cdot \log_4 8$

Oefeningen

Los op naar *x*.

1. $\log_{\sqrt{2}} x = -1$
2. $\log_9 = -\frac{1}{2}$
3. $2 + \log_4 x = 0$
4. $\lg(\frac{2-x}{x+4}) = 2$
5. $\lg(3x - 1) + \lg(2x + 1) = \lg 12 - \lg 3$
6. $\lg(2x + 1) = 1 + \lg(\frac{1}{2}x^2 - 4)$

HO
GENT

Oefeningen

1. Bepaal het domein en beeld van f. Geef de nulpunten, het snijpunt met de Y-as en eventuele asymptoten van f. Teken ten slotte de grafiek van f en bepaal de gevraagde funcitewaarde.
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = \log_3 x$. $f(9)$.
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = 2 + 3^x$. $f(-2)$.
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = -2\log_3 x$. $f(-3)$.

2. Stel
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\exp(x))$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(\ln(x)).$$
   Wat is het verschil tussen de functie f en de functie g?

HO
GENT

3 Je speelt het spel Angry Birds. Je moet door boze vogels te lanceren zoveel mogelijk groene varkens raken. Je krijgt hiervoor drie pogingen. Er bevinden zich groene varkens op de punten: $(1,4)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(4,4)$.
Je mag drie vogels lanceren: een bruine, rode en blauwe vogel.

- De bruine vogel start in het punt met coördinaten $(1,3)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie f met $f(x) = 2^x + 1$.
- De rode vogel start in het punt met coördinaten $(2,0)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie g met $g(x) = \lg(x-1)$.
- De blauwe vogel start in het punt met coördinaten $(2,3)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie h met $h(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Beantwoord de volgende vragen:

a) Maak een tekening van de gegeven situatie. Duid eveneens de vlucht van elke vogel op jouw tekening aan.

3 Je speelt het spel Angry Birds. Je moet door boze vogels te lanceren zoveel mogelijk groene varkens raken. Je krijgt hiervoor drie pogingen. Er bevinden zich groene varkens op de punten: $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$.
Je mag drie vogels lanceren: een bruine, rode en blauwe vogel.

- De bruine vogel start in het punt met coördinaten $(1, 3)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie f met $f(x) = 2^x + 1$.
- De rode vogel start in het punt met coördinaten $(2, 0)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie g met $g(x) = \lg(x - 1)$.
- De blauwe vogel start in het punt met coördinaten $(2, 3)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie h met $h(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Beantwoord de volgende vragen:

b) Raakt elke vogel een varken? Zo ja, welk varken wordt er geraakt door welke vogel?
Motiveer jouw antwoord a.d.h.v. een analytische berekening. Verifieer vervolgens of jouw berekeningen overeenstemmen met jouw tekening.

HO GENT

3 Je speelt het spel Angry Birds. Je moet door boze vogels te lanceren zoveel mogelijk groene varkens raken. Je krijgt hiervoor drie pogingen. Er bevinden zich groene varkens op de punten: $(1,4)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(4,4)$.
Je mag drie vogels lanceren: een bruine, rode en blauwe vogel.

- De bruine vogel start in het punt met coördinaten $(1,3)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie f met $f(x) = 2^x + 1$.
- De rode vogel start in het punt met coördinaten $(2,0)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie g met $g(x) = \lg(x - 1)$.
- De blauwe vogel start in het punt met coördinaten $(2,3)$ en vliegt volgens de grafiek van de functie h met $h(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Beantwoord de volgende vragen:

c) De varkens met coördinaten $(2,4)$ en $(4,2)$ zijn nog niet geraakt. Je krijgt twee extra vogels om specifiek deze varkens uit te schakelen. Beide vogels vertrekken van het punt met coördinaten $(1,2)$. Ze vliegen allebei volgens een rechte lijn.
Geef voor beide vogels de vergelijking van de functie die hun vlucht volgt.

Bijzondere functies

HO
GENT

Definitie en eigenschappen

Definitie

De **absolute waarde functie** *is de functie met als functievoorschrift*

$$abs : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & als\ x \geq 0 \\ -x & als\ x < 0 \end{cases}$$

Eigenschap

- *dom(abs)* = $\mathbb{R}$
- *bld(abs)* = $\mathbb{R}^+$
- *de functie abs vertoont een knik in het punt* $(0,0)$ *(cfr. singulier punt)*

HO GENT

De functie *Floor*

Definitie

$$floor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto floor(x) = z$$

met z het grootste geheel getal zodat $z \leq x$

Eigenschap

- $dom(floor) = \mathbb{R}$
- $bld(floor) = \mathbb{Z}$.

HO
GENT

De functie *Ceiling*

Definitie

$$ceiling : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto ceiling(x) = z$$

met z *het kleinste geheel getal zodat* $z \geq x$

Eigenschap

- $dom(ceiling) = \mathbb{R}$
- $bld(ceiling) = \mathbb{Z}$

HO
GENT

Oefeningen

1 Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{abs}(x+1)$.

(a) Geef het domein en beeld van f.
(b) Bepaal alle nulpunten van f.
(c) Schets de grafiek van f.

2 Stel

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{floor}(\operatorname{ceiling}(x - \tfrac{1}{2})) \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{floor}(\operatorname{ceiling}(x) - \tfrac{1}{2}) \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{ceiling}(\operatorname{floor}(x + \tfrac{1}{2})). \end{aligned}$$

Geef voor elk van de gegeven functies het domein en het beeld. Bepaal voor elke functie de nulpunten. Teken de grafiek van de functies f, g en h.

HO
GENT