IT Fundamentals

Hoofdstuk 5: Boolese uitdrukkingen en functies

Extra uitleg

Minimale Boole algebra

- Vorig hoofdstuk: minimale Boole algebra
  - Toepassing: Bij het samenstellen van digitale elektronische schakelingen
  - Elke Boolese functie correspondeert met een elektronische schakeling
- De minimale Boole algebra noteren we als:

$B = (B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$, met $B = \{0, 1\}$ en

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$^{-}$
0	1
1	0

$a, b, c, \ldots \in B$ zijn constanten
$x, y, z, \ldots \in B$ zijn variabelen

- Hierin gaan we functies definiëren, die we naar een standaardvorm gaan herleiden.

Boolese functies

Definitie

Een **Boolese functie** *is van de vorm*

$$f : B^n \to B : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

met $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *een* booleaanse uitdrukking.

Boolese functies stellen we voor adhv hun corresponderende Boolese uitdrukking of adhv de bijhorende tabel

Bvb: 1. $f(x, y) = x + \overline{y} + \overline{x} \cdot y$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot y$	$f(x, y)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Boolese functies

- Bvb: 2. Beschouw de functie $f : B^3 \to B : (x,y,z) \mapsto x \cdot (\overline{y} + z)$.

  In dit geval geldt $f(x,y,z) = x \cdot (\overline{y} + z)$.

  Aangezien f een functie is in 3 variabelen x, y en z zijn er in het totaal 8 ($= 2 \times 2 \times 2$) mogelijke inputcombinaties. Deze 8 situaties worden opgesomd in de tabel. We noteren eerste de vier mogelijkheden met $x = 0$. Van deze vier zal y twee keer 0 en twee keer 1 zijn. Voor x en y 0 kan z 0 of 1 zijn, enz..

  De corresponderende tabel is:

x	y	z	$\overline{y}$	$\overline{y}+z$	$x \cdot (\overline{y}+z)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Gelijkheid van 2 Boolese functies

Twee Boolese functies, f en g, in n veranderlijken zijn gelijk als en slechts als

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

voor alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$

- Dus, 2 Boolese functies zijn gelijk als ze voor dezelfde input steeds dezelfde output hebben.
- Maak hiervoor de corresponderende tabellen en vergelijk

Voorbeeld

Zijn de volgende twee Boolese functies gelijk ?

$$f(x, y) = (\overline{x} + y) \cdot \overline{y}$$

$$g(x, y) = \overline{x + y}$$

DNV en CNV

- Aangezien 2 Boolese uitdrukkingen gelijk kunnen zijn, is een functievoorschrift voor het bekomen van een bepaald resultaat niet uniek.
- We kunnen functies herleiden naar eenzelfde *standaardvorm*
- We gaan 2 standaardvormen bespreken:
  - DNV = disjunctieve normaalvorm
  - CNV = conjunctieve normaalvorm (en de duale vorm van DNV)
  - Beide DNV en CNV zijn uniek
  - DNV is de som van minimale uitdrukkingen
  - CNV is het product van maximale uitdrukkingen

Een minimale Boolese uitdrukking

Definitie

Een Boolese uitdrukking in **n** *variabelen,* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *is* **minimaal** *als ze het product is van* **n** *factoren en waarbij de* **k***-de factor* x_k *of* $\overline{x}_k$ *is.*

- Minimale uitdrukkingen:

in één variabele x	in twee variabelen x en y	in drie variabelen x, y en z
x	$x \cdot y$	$x \cdot y \cdot z$
		$x \cdot y \cdot \overline{z}$
	$x \cdot \overline{y}$	$x \cdot \overline{y} \cdot z$
		$x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$
$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot y$	$\overline{x} \cdot y \cdot z$
		$\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}$
	$\overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$
		$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

Een maximale Boolese uitdrukking

Definitie

*Een Boolese uitdrukking in **n** variabelen, $x_1, x_2, \dots, x_n$ is **maximaal** als ze de som is van **n** termen en waarbij de **k**-de term x_k of $\overline{x}_k$ is.*

- Maximale uitdrukkingen:

in één variabele x	in twee variabelen x en y	in drie variabelen x, y en z
		$x + y + z$
	$x + y$	$x + y + \overline{z}$
x		$x + \overline{y} + z$
	$x + \overline{y}$	$x + \overline{y} + \overline{z}$
		$\overline{x} + y + z$
	$\overline{x} + y$	$\overline{x} + y + \overline{z}$
$\overline{x}$		$\overline{x} + \overline{y} + z$
	$\overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$

De disjunctieve normaalvorm: DNV

Definitie

De ***DNV*** *van een Boolese uitdrukking in* ***n*** *variabelen is een som van minimale uitdrukkingen in* ***n*** *variabelen.*

Voorbeelden

De volgende Boolese uitdrukkingen zijn genoteerd in hun disjunctieve normaalvorm:

- $f(x,y) = (x \cdot y) + (\overline{x} \cdot y) + (x \cdot \overline{y})$
- $f(x,y,z) = (\overline{x} \cdot y \cdot z) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z})$.

- We kunnen de DNV op 2 manieren opstellen
  - Door gebruik te maken van axioma's en eigenschappen (zie vorig hoofdstuk)
  - Door de uitvoertabel op te stellen

De disjunctieve normaalvorm: DNV

- Methode 1: Gebruik van axioma's en eigenschappen

1. Stel $f : B^3 \to B : x \mapsto f(x,y,z) = y\overline{z} + (y+z)(\overline{z+\overline{x}})$.

$$
\begin{array}{rcll}
f(x,y,z) & = & y\overline{z} + (y+z)(\overline{z+\overline{x}}) & \\
& = & y\overline{z} + (y+z)\overline{z}\,\overline{\overline{x}} & \text{(wet van de Morgan)} \\
& = & y\overline{z} + (y+z)\overline{z}x & \text{(involutie)} \\
& = & y\overline{z} + y\overline{z}x + z\overline{z}x & \text{(distributieve wet)} \\
& = & y\overline{z} + y\overline{z}x + 0x & \text{(complementwet)} \\
& = & y\overline{z} + y\overline{z}x & \text{(begrenzing, identiteitswet)} \\
& = & 1y\overline{z} + y\overline{z}x & \text{(identiteitswet)} \\
& = & (x+\overline{x})y\overline{z} + y\overline{z}x & \text{(complementwet)} \\
& = & xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + y\overline{z}x & \text{(distributieve wet)} \\
& = & xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} & \text{(idempotentie, commutatieve wet)}
\end{array}
$$

Besluit: $f(x,y,z) = (x \cdot y \cdot \overline{z}) + (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z})$ (DNV).

2. $f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot (x + z)$

De disjunctieve normaalvorm: DNV

- Methode : Stel de uitvoertabel op en lees het resultaat af
- We weten dat met elke input 1 minimale uitdrukking correspondeert

input	corresponderende minimale uitdrukking
$(1,1,\ldots,1)$	$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$
$(0,1,\ldots,1)$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$
$\vdots$	$\vdots$
$(0,0,\ldots,0)$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$

Indien de inputwaarde voor de variabele x_i $(i = 1,\ldots,n)$ 0 is dan komt in de corresponderende minimale term $\overline{x_i}$ voor, is de inputwaarde 1 dan komt in de corresponderende minimale term x_i voor.

- Door volgende eigenschap kunnen we DNV bepalen:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$f(1,1,\ldots,1)x_1x_2\ldots x_n + f(0,1,\ldots,1)\overline{x}_1x_2\ldots x_n + \ldots + f(0,0,\ldots,0)\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_n$$

De disjunctieve normaalvorm: DNV

Voorbeelden

1. Stel $f : B^2 \to B : x \mapsto f(x,y) = x + \overline{x}y$.
   Gelet op eigenschap $\boxed{6.1}$ kan $f(x,y)$ ook genoteerd worden als som van alle minimale termen in twee variabelen telkens vermenigvuldigd met hun corresponderende outputwaarde.

   $$f(x,y) = f(1,1) \cdot x \cdot y + f(1,0) \cdot x \cdot \overline{y} + f(0,1) \cdot \overline{x} \cdot y + f(0,0) \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}$$

   Voor het bepalen van de outputwaarden gebruiken we een tabel:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \cdot y$	$f(x,y) = x + \overline{x}y$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

   We substitueren de gevonden outputwaarden in de uitdrukking voor f. We vinden:

   $$\begin{aligned} & f(x,y) \\ &= f(1,1) \cdot x \cdot y + f(1,0) \cdot x \cdot \overline{y} + f(0,1) \cdot \overline{x} \cdot y + f(0,0) \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} \\ &= 1 \cdot x \cdot y + 1 \cdot x \cdot \overline{y} + 1 \cdot \overline{x} \cdot y + 0 \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} \\ &= x \cdot y + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y + 0 && \text{(identiteitswet, begrenzing)} \\ &= x \cdot y + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y. && \text{(identiteitswet)} \end{aligned}$$

De disjunctieve normaalvorm: DNV

Dit resultaat is niets anders dan de DNV van de functie f.
We analyseren even de gevonden DNV. Welke minimale termen zijn overgebleven in de DNV van f?
Enkel de termen waarvoor de bijhorende functiewaarde 1 is, komen voor in de DNV van f. Alle andere minimale termen vallen weg gelet op de begrenzingseigenschap.

Samengevat kunnen we stellen dat de DNV van een functie de som is van alle minimale termen die corresponderen met een outputwaarde gelijk aan 1.

2.
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \overline{x} + \overline{y} \\ &= f(1,1)xy + f(1,0)x\overline{y} + f(0,1)\overline{x}y + f(0,0)\overline{x}\overline{y} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

3. $f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot (x + z)$

De conjunctieve normaalvorm: CNV

- Een functie wordt genoteerd in zijn DNV als een *som* van *minimale* uitdrukkingen
- CNV is de duale vorm van de DNV
- De CNV is dus een *product* van *maximale* uitdrukkingen
- Net als de DNV heeft een functie juist één CNV en hebben gelijke functies dezelfde CNV

Definitie

*De **CNV** van een uitdrukking in n variabelen is een product van maximale uitdrukkingen in n variabelen (duale van DNV).*

Voorbeelden

- $f(x, y) = (x + y) \cdot (\overline{x} + y)$
- $f(x, y, z) = (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

De conjunctieve normaalvorm: CNV

- De oplossingsmethode voor het bepalen van de CNV is dezelfde als bij de DNV, maar *telkens* de duale vorm ervan

Methode DNV	Methode CNV
Stel de outputtabel op. Zoek alle outputwaarden gelijk aan 1. Construeer de bijhorende **minimale term**: • als input $x_i = 1$ dan x_i in minimale term • als input $x_i = 0$ dan $\overline{x_i}$ in minimale term. Verbind alle minimale termen met een $+$.	Stel de outputtabel op. Zoek alle outputwaarden gelijk aan 0. Construeer de bijhorende **maximale uitdrukking**: • als input $x_i = 0$ dan x_i in maximale uitdrukking • als input $x_i = 1$ dan $\overline{x_i}$ in maximale uitdrukking. Verbind alle maximale uitdrukkingen met een $\cdot$.

De conjunctieve normaalvorm: CNV

- Voorbeeld 1: $f : B^3 \to B : x \mapsto x \cdot (\overline{y} + z)$.

Outputtabel:

x	y	z	$\overline{y}$	$\overline{y}+z$	$f(x,y,z)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Voor het opstellen van de CNV gaan we op zoek naar de outputwaarden 0 in de tabel. Er zijn vijf inputcombinaties die resulteren in output 0, nl.: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$.
Voor elk van deze inputcombinaties moet de corresponderende maximale uitdrukking opgebouwd worden. Het product van al deze maximale uitdrukkingen vormt de CNV van f.

Noteren we de maximale uitdrukkingen in dezelfde volgorde als de opgesomde inputcombinaties dan ziet de CNV er als volgt uit:

$$f(x,y,z) = (x+y+z) \cdot (x+y+\overline{z}) \cdot (x+\overline{y}+z) \cdot (x+\overline{y}+\overline{z}) \cdot (\overline{x}+\overline{y}+z).$$

- Voorbeeld 2: $f(x,y,z) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot (x + z)$

Vereenvoudigen mbv eigenschappen en axioma’s

- Welke axioma’s en eigenschappen er moeten toegepast worden, om de uitdrukking te vereenvoudigen, daar zijn geen vaste regels voor. Het resultaat vindt men via *trial and error*

- In het volgende hoofdstuk bekijken we een snellere manier voor het vereenvoudigen van Boolese uitdrukkingen*, nl Karnaugh-diagrammen*

Oefeningen

1 Bepaal de DNV en CNV van $f(x, y, z)$ als:
   (a) $f(1,1,1) = f(1,0,1) = f(1,1,0) = f(0,0,0) = 1$. Alle andere waarden van f zijn 0.
   (b) $f(0,0,0) = f(0,1,0) = f(0,1,1) = 1$. De andere waarden v. f zijn 0.

2 Bepaal de DNV van $f(x, y, z, u)$ als:
   (a) $f(1,1,1,1) = f(1,0,0,1) = f(1,0,1,0) = 1$. Alle andere waarden van f zijn 0.
   (b) $f(1,0,1,0) = f(0,0,0,0) = f(0,1,0,1) = f(1,1,1,1) = 1$. Alle andere waarden v. f zijn 0.

3 Geef de DNV (op twee verschillende manieren) en CNV van:
   (a) $f(x, y, z) = \overline{x + y + z}$
   (b) $f(x, y, z) = ((\overline{x} + y) + \overline{z}) \cdot \overline{z} \cdot x$
   (c) $f(x, y, z) = (x \cdot (\overline{y} + z)) + \overline{z}$

4 Vereenvoudig:
   (a) $(x + y) \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z}) + (x \cdot \overline{y})$
   (b) $x \cdot \overline{y} + (\overline{x} + y) \cdot y$
   (c) $((x + y) + x \cdot z) \cdot (x + y \cdot z)$
   (d) $(x + x \cdot y + x \cdot y \cdot z) \cdot (x \cdot y + x \cdot z) \cdot (y + x \cdot y \cdot z)$

Extra oefeningen

Oefening 1: Bereken de gevraagde waarden van de volgende Boole-formules:

a)	$f(x) = \overline{x}$	$f(0), f(1)$
b)	$f(x,y) = (x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + \overline{y})$	$f(1,1), f(0,1)$
c)	$f(x,y,z) = (\overline{x \cdot y \cdot z}) \cdot (x + \overline{y} + z)$	$f(1,0,1), f(0,0,1)$
d)	$f(x,y,z,u) = x \cdot y \cdot \overline{u} + \overline{y} \cdot z \cdot u + x \cdot \overline{z} \cdot u$	$f(1,1,1,1), f(1,1,0,0)$

Oefening 2: Geef alle minimale termen in vier veranderlijken x, y, z, u.

Oefening 3: Geef alle maximale termen in vier veranderlijken x, y, z, u.

Oefening 4: Stel de DNV en CNV op van de functies waarvoor de gegeven waarden gelijk zijn aan 1. Alle niet vermelde waarden zijn gelijk aan 0.

a) f (1) = 1

b) f (1, 1) = f (0, 0) = 1

c) f (1, 1, 1) = f (0, 1, 1) = f (1, 0, 0) = f (0, 0, 0) = 1

d) f (0, 1, 1) = f (1, 0, 0) = f (0, 1, 0) = 1

Extra oefeningen

Oefening 4: Bepaal de DNV van de volgende Boolese functies.

a) $f(x,y) = x + \overline{y} \cdot (x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y)$

b) $f(x,y,z) = (x \cdot y + \overline{y} \cdot z) \cdot (\overline{x} + y \cdot z) + (\overline{x \cdot y \cdot z})$

c) $f(x,y,z,u) = (x \cdot y + z \cdot u) \cdot (x \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot u) \cdot (y \cdot z + x \cdot u)$

Oefening 5: Vereenvoudig de gegeven Boolese uitdrukkingen door gebruik te maken van eigenschappen en axioma’s.

a) $(x + y) \cdot (\overline{x + y}) + x$

b) $\overline{(x + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y})}$

c) $(x + y + \overline{x} \cdot \overline{z}) \cdot (\overline{x + y + z})$

d) $\overline{(x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z)}$

e) $(\overline{x \cdot y + \overline{y} \cdot z}) \cdot (\overline{\overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y}) \cdot (\overline{\overline{x} + \overline{y} \cdot z})$

f) $\overline{x} \cdot (y \cdot z \cdot u + \overline{z} + \overline{u}) + (\overline{x \cdot (\overline{y} + u)})$

HO
GENT

Extra oefeningen: Oplossingen

Oefening 1: oplossing

a) 1 0

b) 0 0

c) 0 1

d) 1 1

Oefening 2: oplossing

$$x \cdot y \cdot z \cdot u, x \cdot y \cdot z \cdot \overline{u}, x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot u, x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot \overline{u}, x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot u, x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot \overline{u}, x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot u, x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{u},$$
$$\overline{x} \cdot y \cdot z \cdot u, \overline{x} \cdot y \cdot z \cdot \overline{u}, \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \cdot u, \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} \cdot \overline{u}, \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot u, \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \cdot \overline{u}, \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot u, \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot \overline{u}.$$

Oefening 3: oplossing

$$x + y + z + u, x + y + z + \overline{u}, x + y + \overline{z} + u, x + y + \overline{z} + \overline{u},$$
$$x + \overline{y} + z + u, x + \overline{y} + z + \overline{u}, x + \overline{y} + \overline{z} + u, x + \overline{y} + \overline{z} + \overline{u},$$
$$\overline{x} + y + z + u, \overline{x} + y + z + \overline{u}, \overline{x} + y + \overline{z} + u, \overline{x} + y + \overline{z} + \overline{u},$$
$$\overline{x} + \overline{y} + z + u, \overline{x} + \overline{y} + z + \overline{u}, \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + u, \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} + \overline{u}.$$

HO GENT

Extra oefeningen: Oplossingen

Oefening 4: oplossing

DNV:

a) $f(x) = x$
b) $f(x,y) = (x \cdot y) + (\overline{x} \cdot \overline{y})$
c) $f(x,y,z) = (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (\overline{x} \cdot y \cdot z) + (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (x \cdot y \cdot z)$
d) $f(x,y,z) = (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) + (\overline{x} \cdot y \cdot z) + (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z})$

CNV:

a) $f(x) = x$
b) $f(x,y) = (x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y)$
c) $f(x,y,z) = (x + y + \overline{z}) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z)$
d) $f(x,y,z) = (x + y + z) \cdot (x + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

Oplossingen

Oefening 5: oplossing

a) $f(x,y) = x \cdot y + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot \overline{y}$

b) $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

c) $f(x,y,z,u) = x \cdot y \cdot \overline{z} \cdot u + x \cdot \overline{y} \cdot z \cdot u$

Oefening 6: oplossing

a) x

b) $x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$

c) $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$

d) $\overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{z}$

e) 0

f) $\overline{x} + y \cdot \overline{u}$

HO GENT