Uoffisiell Eksamensforelesning i MA0301

Henrik Hørlück Berg

26. april 2020

Innhold

1 Introduksjon

Hei og velkommen! Dette er notatene som følger med den uoffisielle eksamensforelesning. Først og fremst vill jeg si at jeg vet ingenting om hva som kommer på eksamen, spesielt med tanke på at det nå blir hjemmeeksamen. Jeg er heller ikke en del av fagstaben i faget, og gir ingen garantier i forhold til informasjonens korrekthet, og dette er utelukkende et ekstra tilbud for å hjelpe dere med å komme igjennom dette tidvis utfordrende emnet.

Jeg har vært læringsassistent i et annet fag med noe overlapp, IMAT2021 - Matematiske metoder 2 for dataingeniør, så jeg har erfaring med veiledning av studenter, og håper å benytte meg av dette i forbindelse med denne forelesningen. Jeg har tidligere hatt både dette emnet, og TMA4140 - Diskret Matematikk, disse emnene er *veldig* like, med få kapitler som skiller dem. Av min erfaring, så består dette faget i stor grad av mange nye definisjoner, og en litt annen tilnærming til matematikk, enn det en er vant med fra tidligere fag, men oppgavene er sjeldent så veldig utfordrende, forutsagt at definisjonene sitter.

I løpet av forelesningen så ønsker jeg å gi en kjapp repetisjon av viktig teori, men vil fort gå over til relevante eksamensoppgaver, og med utdypende fremgangsmåter, men husk at en ikke kan forvente at oppgaver av en hvis type kommer på eksamen. Det er veldig vanlig at det kommer nye definisjoner som baserer seg på kunnskap en skal ha lært, for så å løse enkle oppgaver basert på disse nye definisjonene. Det er derfor uhyre viktig å være komfortabel med, og forstå den matematiske notasjonen som benyttes i faget, både for å forstå oppgavene, og fordi faglæreren ofte er relativt streng i forbindelse med føring av fremgangsmåte. Dog vet jeg ikke hvordan den digitale hjemmeeksamenen kommer til å gjennomføres.

2 Boolsk logikk

Dette forklares veldig godt i Wikipendium. Jeg har lagt ved noen praktiske sannhetstabeller i Figur 1, som må pugges.

Oppgaver består vanligvis av en av følgende:

1. **Forenkle uttrykk** Da gjelder det å kunne *Laws of Logic*, om du blir bedt om negasjon av et utrykk er det nøyaktig samme oppgave. OBS du kan *ikke* benytte deg av implikasjons-reglene (Rules of inference), siden det er implikasjoner, og ikke ekvivalenser, altså er uttrykkene du kan utlede ikke de samme som det du hadde i utgangspunkt.
2. **Vise at noe er en tautologi, eller motsigelse** Det løses ofte ved hjelp av sannhetstabeller, men om de skulle bli for store, f.eks. grunnet ≥ 3 påstander, så kan en benytte seg av implikasjons-reglene, og ha fokus på de relevante variablene. Dersom du skal undersøke en implikasjon, og venstre side er stor, men høyre side er mye mindre, kan en fokusere på de verdiene av variablene som fører til at høyre side er usann, og forsøke å få venstre side sann. Om du finner et sett med verdier for variablene, hvor venstre side er sann, men høyre er usann, så har du vist at det er en motsigelse.
3. **Bekrefte validitet av konklusjon** Da får du vanligvis oppgitt en rekke påstander, som alle antas å stemme, og du så benytte deg av implikasjoner for å finne ut om den oppgitte konklusjonen er sann eller ikke.

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Figur 1: Sannhetstabellen til operatoren negasjon, logisk eller, logisk og, logisk eksklusiv eller, implikasjon, og ekvivalens

2.1 Oppgaver

2.1.1 Exercise 8, Exercise set 1, 2019

Negate the expression

$$(p \vee \neg q) \wedge \neg p$$

Løsningsforslag

	Step	Reasoning
1	$(p \vee \neg q) \wedge \neg p$	Initial statement
2	$\neg((p \vee \neg q) \wedge \neg p)$	Step (1), Negation
3	$\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p)$	Step (2), De Morgan's Law
4	$(\neg p \wedge \neg(\neg q)) \vee p$	Step (3), De Morgan's Law and Double negation
5	$(\neg p \wedge q) \vee p$	Step (4), Double Negation
6	$p \vee (\neg p \wedge q)$	Step (5), Associative law
7	$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$	Step (6), Distributive law and Commutative law
8	$T_0 \wedge (p \vee q)$	Step (7), Inverse law
9	$p \vee q$	Step (8), Identity law
$\therefore$	$p \vee q$	Final negated statement

3 Mengdelære

Mengder er en samling med *distinkte* elementer. De har stort sett de samme reglene som boolsk logikk, og Wikipendium beskriver dette godt. Det er viktig å ha god kontroll på dette, grunnet mengdelæren er en byggesten for mange av de senere temaene.
Ting å kunne til eksamen:

- Medlem i mengden: $x \in A$, $x \notin B$
- Delmengder: $A \subset B, A \subseteq B, A \not\subset B, A \nsubseteq B$
- Vise likhet: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Kardinalitet (antall elementer i en mengde): $|A|$
- Den tomme mengde, $\emptyset = \{\}\ (\neq \{\{\}\} = \{\emptyset\})$
- Potensmengde (Power set): $\mathcal{P}(A) = \{a \mid a \subseteq A\}$
- Kardinaliteten til potensmengden: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
  En må også kunne begrunne dette.
- Union, snitt, symmetrisk differanse, gjerne ved venn-diagram: $\cup, \cap, \triangle$
- Regneregler (som er identisk med logikken)

Viktig å få med seg at mengdene $\{a, a, a, a\}$ og $\{a\}$ er identiske. Samme for $\{a, b, a\}$ og $\{b, a\}$

3.1 Oppgaver

3.1.1 V2008 - Oppgave 3

La A og B være to mengder. Skriv mengden

$$(A \cup B) - (B - A)$$

på kortest mulig måte.

Løsningsforslag Anbefaler å teste ut med venn-diagram først, for å få en intuisjon for forventet resultat.

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - (B - A) &= (A \cup B) \cap \overline{(B \cap \overline{A})} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \\
&= A \cup (B \cap \overline{B}) \\
&= A \cup \emptyset \\
&= A
\end{aligned}$$

3.1.2 TMA4140 - K2019 Oppgave 1

Avgjør om følgende likhet av mendge holder for alle mendger X med delmendger $A, B, C, D \subseteq X$.

$$\overline{A \cup ((\overline{A} \cup B) \cap (C \cup \overline{B}) \cap (D \cup \overline{C}))} \cup (\overline{A} \cup D) = X$$

Løsningsforslag

4 Induksjon

4.1 Oppgaver

4.1.1 Exercise 12, Exercise set 6, spring 2019

Show that if u_n is defined recursively by the rules $u_1 = 1, u_2 = 5$ and for all $n > 1, u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$, then $u_n = 3n - 2n$ for all $n \in \mathbb{N}$

Løsningsforslag Base step: Proving for $n = 1$ and $n = 2$:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ 3^1 - 2^1 &= 1 \\ u_2 &= 5 \\ 3^2 - 2^2 &= 5 \end{aligned}$$

We have now proved the statement for $n = 1$ and $n = 2$, we can assume the truth of the statement for $S(1), S(2), \ldots, S(k-1), S(k)$ and want to show that that indicates that $S(k+1)$ is true:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 5u_k - 6u_{k-1} \\ &= 5(3^k - 2^k) - 6(3^{k-1} - 2^{k-1}) \\ &= 5(3^k) - 5(2^k) - 6(\frac{1}{3}3^k) + 6(\frac{1}{2}2^k) \\ &= 5(3^k) - 5(2^k) - 2(3^k) + 3(2^k) \\ &= 3(3^k) - 2(2^k) \\ &= 3^{k+1} - 2^{k+1} \end{aligned}$$

And thus we have proven the truth of the statement for all $n \in \mathbb{N}$

5 Relasjoner og funksjoner

6 Kombinatorikk

6.1 Oppgaver

6.1.1 TMA4140 - K2019, Oppgave 2a

Hva er koeffisienten til leddet x^4y^6 i polynomet $(2x-3y)^{10}$?

Løsningsforslag Benytter Binomalteoremet

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Vi ønsker å se på ledd 4 i summen, der hvor x har potens 4.

$$\begin{aligned}
\binom{10}{4}(2x)^4(-3y)^6 &= \binom{10}{4} \cdot 2^4 \cdot x^4 \cdot (-3)^6 \cdot y^6 && (1)\\
&= \binom{10}{4} \cdot 2^4 \cdot (-3)^6 \cdot x^4y^6 && (2)\\
&= \binom{10}{4} 2^4 3^6 \cdot x^4y^6 && (3)
\end{aligned}$$

Dermed har vi at koeffisienten blir $\binom{10}{4}2^43^6$

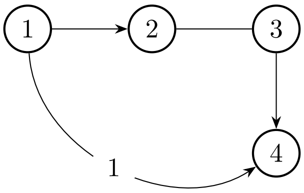
6.1.2 TMA4140 - K2019, Oppgave 2b

Hvor mange injektive funksjoner finnes det fra $\{1,2,3,4\}$ til $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Løsningsforslag Her må en huske definisjonen av en funksjon. Da har man for hvert element i definisjonsmengden/domenet ett valg i verdiområdet/kodomenet, som sammen utgjør bildet til funksjonen. Siden funksjonene skal være injektive, blir det utvalg uten tilbakelegging, og siden det er fire elementer i domenet, og funksjonen må ha et definert output for hvert element i domenet, må vi velge fire ganger. Dermed blir svaret:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

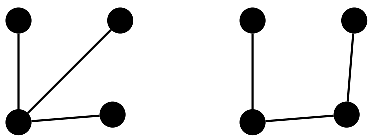
7 Grafer



7.1 Oppgaver

7.1.1 V2006 - Oppgave 6

a) Er disse grafene isomorfe?



b) Finn 11 løkke-frie(loop-free) ikke-isomorfe uretta(non-directed) grafer med 4 hjørner.
c) Vis at de 11 grafene du fant i b) er alle mulige løkke-frie ikke-isomorfe uretta grafer med 4 hjørner.

Tips: tell kanter.

Løsningsforslag

8 Formelle språk og endelige tilstandsmaskiner