Uoffisiell Eksamensforelesning i MA0301

Henrik Hørlück Berg

2. mai 2020

Innhold

1 Introduksjon

Hei og velkommen! Dette er notatene som følger med den uoffisielle eksamensforelesning. Først og fremst vill jeg si at jeg vet ingenting om hva som kommer på eksamen, spesielt med tanke på at det nå blir hjemmeeksamen. Jeg er heller ikke en del av fagstaben i faget, og gir ingen garantier i forhold til informasjonens korrekthet, og dette er utelukkende et ekstra tilbud for å hjelpe dere med å komme igjennom dette tidvis utfordrende emnet.

Jeg har vært læringsassistent i et annet fag med noe overlapp, IMAT2021 - Matematiske metoder 2 for dataingeniør, så jeg har erfaring med veiledning av studenter, og håper å benytte meg av dette i forbindelse med denne forelesningen. Jeg har tidligere hatt både dette emnet, og TMA4140 - Diskret Matematikk, disse emnene er *veldig* like, med få kapitler som skiller dem. Av min erfaring, så består dette faget i stor grad av mange nye definisjoner, og en litt annen tilnærming til matematikk, enn det en er vant med fra tidligere fag, men oppgavene er sjeldent så veldig utfordrende, forutsagt at definisjonene sitter.

I løpet av forelesningen så ønsker jeg å gi en kjapp repetisjon av viktig teori, men vil fort gå over til relevante eksamensoppgaver, og med utdypende fremgangsmåter, men husk at en ikke kan forvente at oppgaver av en hvis type kommer på eksamen. Det er veldig vanlig at det kommer nye definisjoner som baserer seg på kunnskap en skal ha lært, for så å løse enkle oppgaver basert på disse nye definisjonene. Det er derfor uhyre viktig å være komfortabel med, og forstå den matematiske notasjonen som benyttes i faget, både for å forstå oppgavene, og fordi faglæreren ofte er relativt streng i forbindelse med føring av fremgangsmåte. Dog vet jeg ikke hvordan den digitale hjemmeeksamenen kommer til å gjennomføres.

2 Boolsk logikk

ca. 15 min. Dette forklares veldig godt i Wikipendium. Jeg har lagt ved noen praktiske sannhetstabeller i Figur 1, som må pugges.

Oppgaver består vanligvis av en av følgende:

1. **Forenkle uttrykk** Da gjelder det å kunne *Laws of Logic*, om du blir bedt om negasjon av et utrykk er det nøyaktig samme oppgave. OBS du kan *ikke* benytte deg av implikasjons-reglene (Rules of inference), siden det er implikasjoner, og ikke ekvivalenser, altså er uttrykkene du kan utlede ikke de samme som det du hadde i utgangspunkt.

2. **Vise at noe er en tautologi, eller motsigelse** Det løses ofte ved hjelp av sannhetstabeller, men om de skulle bli for store, f.eks. grunnet ≥ 3 påstander, så kan en benytte seg av implikasjons-reglene, og ha fokus på de relevante variablene. Dersom du skal undersøke en implikasjon, og venstre side er stor, men høyre side er mye mindre, kan en fokusere på de verdiene av variablene som fører til at høyre side er usann, og forsøke å få venstre side sann. Om du finner et sett med verdier for variablene, hvor venstre side er sann, men høyre er usann, så har du vist at det er en motsigelse.

3. **Bekrefte validitet av konklusjon** Da får du vanligvis oppgitt en rekke påstander, som alle antas å stemme, og du så benytte deg av implikasjoner for å finne ut om den oppgitte konklusjonen er sann eller ikke.

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Figur 1: Sannhetstabellen til operatoren negasjon, logisk eller, logisk og, logisk eksklusiv eller, implikasjon, og ekvivalens

2.1 Oppgaver

2.1.1 Exercise 8, Exercise set 1, 2019

Negate the expression

$$(p \vee \neg q) \wedge \neg p$$

Løsningsforslag

	Step	Reasoning
1	$(p \lor \neg q) \land \neg p$	Initial statement
2	$\neg((p \lor \neg q) \land \neg p)$	Step (1), Negation
3	$\neg(p \lor q) \lor \neg(\neg p)$	Step (2), De Morgan's Law
4	$(\neg p \land \neg(\neg q)) \lor p$	Step (3), De Morgan's Law and Double negation
5	$(\neg p \land q) \lor p$	Step (4), Double Negation
6	$p \lor (\neg p \land q)$	Step (5), Associative law
7	$(p \lor \neg p) \land (p \lor q)$	Step (6), Distributive law and Commutative law
8	$T_0 \land (p \lor q)$	Step (7), Inverse law
9	$p \lor q$	Step (8), Identity law
$\therefore$	$p \lor q$	Final negated statement

3 Mengdelære

Mengder er en samling med *distinkte* elementer. De har stort sett de samme reglene som boolsk logikk, og Wikipendium beskriver dette godt. Det er viktig å ha god kontroll på dette, grunnet mengdelæren er en byggesten for mange av de senere temaene.
Ting å kunne til eksamen:

- Medlem i mengden: $x \in A$, $x \notin B$
- Delmengder: $A \subset B, A \subseteq B, A \not\subset B, A \not\subseteq B$
- Vise likhet: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$
- Kardinalitet (antall elementer i en mengde): $|A|$
- Den tomme mengde, $\emptyset = \{\}\ (\neq \{\{\}\} = \{\emptyset\})$
- Potensmengde (Power set): $\mathcal{P}(A) = \{a \mid a \subseteq A\}$
- Kardinaliteten til potensmengden: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
  En må også kunne begrunne dette.
- Union, snitt, symmetrisk differanse, gjerne ved venn-diagram: $\cup, \cap, \triangle$
- Regneregler (som er identisk med logikken)

Viktig å få med seg at mengdene $\{a, a, a, a\}$ og $\{a\}$ er identiske. Samme for $\{a, b, a\}$ og $\{b, a\}$

3.1 Oppgaver

3.1.1 V2008 - Oppgave 3

La A og B være to mengder. Skriv mengden

$$(A \cup B) - (B - A)$$

på kortest mulig måte.

Løsningsforslag Anbefaler å teste ut med venn-diagram først, for å få en intuisjon for forventet resultat.

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - (B - A) &= (A \cup B) \cap \overline{(B \cap \overline{A})} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \\
&= A \cup (B \cap \overline{B}) \\
&= A \cup \emptyset \\
&= A
\end{aligned}$$

3.1.2 TMA4140 - K2019 Oppgave 1

Dette er en fin oppgave for å se sammenhengen mellom regnereglene for boolsk logikk og mengdelære, men vil ikke gås igjennom i forelesningen.

Avgjør om følgende likhet av mendge holder for alle mendger X med delmendger $A, B, C, D \subseteq X$.

$$\overline{A \cup ((\overline{A} \cup B) \cap (C \cup \overline{B}) \cap (D \cup \overline{C}))} \cup (\overline{A} \cup D) = X$$

Løsningsforslag

4 Induksjon

Induksjon handler om å velte dominobrikker. Du viser først at den første brikken faller, for så å vise at en hvilken som helst brikke vill falle, dersom den forrie falt. Dersom det omhandler sterkt induksjon, så endres hyptotesen en del, og da ser en heller på dersom alle tidligere brikker falt, vill neste falle? Og det medfører at man må teste et par flere tilfeller manuelt.

4.1 Hvordan gjennomføre et induksjonsbevis

1. Finn ut hvilken påstand du skal bevise!
2. Vis at det stemmer for det første tilfellet. Vanligvis er det for0eller1
3. Anta at det stemmer for tilfellek, og skriv opp hva det vil si.Dette kalles induksjonshypotesen.
4. Skriv opp hva du vil bevise i tilfelletk+ 1. Hvis det involvereren (u)likhet, som det som regel gjør i MA0301: Begynn med å kna på venstre side helt til venstre side fra k-tilfellet dukker opp. Bruk induksjonshypotesen, altså bytt ut VS for k med HS fork. Kna videre på det uttrykket du nå har fått, slik at det til slutt ser ut som det du ville komme fram til.
5. Q.E.D.
6. Øve på oppgaver

Hentet fra https://wiki.math.ntnu.no/_media/ma0301/2014v/repetisjon.pdf

4.2 Oppgaver

4.2.1 Exercise 3, spring 2016

Let $r \in \mathbb{R}$ with $r \neq 1$. Use induction to prove that

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

for all $n \in \mathbb{Z}_+$

Løsningsforslag Base step:

$$\text{Venstre side:} \sum_{i=0}^{1} r^i = r^0 + r = r + 1$$

$$\text{Høyre side:} \frac{1 - r^{1+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^2}{1 - r} = \frac{(1 - r)(1 + r)}{1 - r} = 1 + r$$

Inductive hypothesis: vi antar $P(k)$ sann, for en k mellom 1 og n, altså at vi kan skrive $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$. Inductive step:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} + r^{k+1} \\
&\overset{Ind.Hyp.}{=} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + r^{k+1} \\
&= \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + \frac{r^{k+1} - r \cdot r^{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{k+1} + r^{k+1} - r^{(k+1)+1}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{(k+1)+1}}{1-r}
\end{aligned}$$

4.2.2 Exercise 12, Exercise set 6, spring 2019

Show that if u_n is defined recursively by the rules $u_1 = 1, u_2 = 5$ and for all $n > 1, u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$, then $u_n = 3^n - 2^n$ for all $n \in \mathbb{N}$

Løsningsforslag Base step: Proving for $n = 1$ and $n = 2$ (NOTE: Should rather prove $n = 2$, and $n = 3$, since that is the exercise):

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1 \\
3^1 - 2^1 &= 1 \\
u_2 &= 5 \\
3^2 - 2^2 &= 5
\end{aligned}$$

We have now proved the statement for $n = 1$ and $n = 2$, we can assume the truth of the statement for $S(1), S(2), \ldots, S(k-1), S(k)$ and want to show that that indicates that $S(k+1)$ is true:

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 5u_k - 6u_{k-1} \\
&= 5(3^k - 2^k) - 6(3^{k-1} - 2^{k-1}) \\
&= 5(3^k) - 5(2^k) - 6(\frac{1}{3}3^k) + 6(\frac{1}{2}2^k) \\
&= 5(3^k) - 5(2^k) - 2(3^k) + 3(2^k) \\
&= 3(3^k) - 2(2^k) \\
&= 3^{k+1} - 2^{k+1}
\end{aligned}$$

And thus we have proven the truth of the statement for all $n \in \mathbb{N}$

5 Relasjoner og funksjoner

Her er det Kartesiske produktet viktig. Både relasjoner og funksjoner er delmendger av det kartesiske produktet.

Viktige mendger: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, dette er mendger dere har vært borti i lang tid, bare at vi nå ser litt mer spesifikt på de.

For relasjoner må disse fire konseptene forstås, her er A og B mengder, og R en relasjon mellom disse:

Refleksivitet $\forall_{a \in A}(a, a) \in R$

Transitivitet $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

Symmetri $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$

Anti-symmetri $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow a = b$

Utdyp forskjell mellom symmetri og anti-symmetri med høyde-eksempel, og et hasse-diagram.

Refleksivitet, Transitivitet, og Symmetri gir en ekvivalensrelasjon, mens Refleksivitet, Transitivitet, og Anti-symmetri gir en partiell ordning.

Ekvivalensklasser, er en partisjonering av elementer i et set, hvor alle partisjonene er «like», i forbindelse med ekvivalensrelasjonen.

5.1 Funksjoner

Funksjoner har dere jobbet mye med tidligere, gjerne i formen av $f(x) = x^2$ eller liknende. Her skal vi se på det litt mer generelt. Formelt sett defineres en funksjon som $f : A \rightarrow B$ er en delmendge av $A \times B$ slik at det for enhver $a \in A$ finnes et unikt element $b \in B$, og vi skriver $b = f(a)$

Det er spesielt to egenskaper somer viktig å merke seg:

Injektiv Eller en-til-en, altså at det kun finnes maksimalt ett element i A som peker til ethvert element i B. Vanlig å vise ved å sette $f(x) = f(y)$ og se om de kun finnes en løsning.

Surjektiv Eller «på», som vil si at funksjonen dekker hele kodomenet, altså for alle $b \in B$, så finnes det en $a \in A$ slik at $f(a) = b$

Bijektiv En funksjon er bijektiv, dersom den er både injektiv og surjektiv.

5.2 Oppgaver

5.2.1 V2016 – Oppgave 6

Let A be the set of all functions from $\mathbb{Z}_+$ to $\{1, 2, 3\}$

a) Oppgi egenskapene til en ekvivalensrelasjon

b) Define a relation $\mathcal{R}_1$ on A by setting $f\mathcal{R}_1 g$ if and only if $f(5) = g(5)$. Vis at dette er en ekvivalensrelasjon.

Løsningsforslag Se LF til eksamenen.

6 Kombinatorikk

ca. 20 min
Formler finnes i f.eks. Rottman's Matematiske Formelsamling, generelt ikke veldig intuitivt (sitat statistikk-foreleser) prøv ut oppgaver, og jobb med å gjengjenne situasjoner som typ. summering av x-antall variabler til et bestemt tall.

6.1 Oppgaver

6.1.1 TMA4140 - K2019, Oppgave 2a

Hva er koeffisienten til leddet x^4y^6 i polynomet $(2x-3y)^{10}$?

Løsningsforslag Benytter Binomalteoremet

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Vi ønsker å se på ledd 4 i summen, der hvor x har potens 4.

$$\begin{aligned}
\binom{10}{4}(2x)^4(-3y)^6 &= \binom{10}{4} \cdot 2^4 \cdot x^4 \cdot (-3)^6 \cdot y^6 && (1)\\
&= \binom{10}{4} \cdot 2^4 \cdot (-3)^6 \cdot x^4y^6 && (2)\\
&= \binom{10}{4} 2^4 3^6 \cdot x^4y^6 && (3)
\end{aligned}$$

Dermed har vi at koeffisienten blir $\binom{10}{4}2^43^6$

6.1.2 TMA4140 - K2019, Oppgave 2b

Hvor mange injektive funksjoner finnes det fra $\{1,2,3,4\}$ til $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Løsningsforslag Her må en huske definisjonen av en funksjon. Da har man for hvert element i definisjonsmengden/domenet ett valg i verdiområdet/kodomenet, som sammen utgjør bildet til funksjonen. Siden funksjonene skal være injektive, blir det utvalg uten tilbakelegging, og siden det er fire elementer i domenet, og funksjonen må ha et definert output for hvert element i domenet, må vi velge fire ganger. Dermed blir svaret:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

7 Grafer

7.1 Terminologi

Jeg vil gå igjennom det viktigste i forhold til hver oppgave, men dette er godt beskrevet i Wikipendium.

7.2 Isomorfi

Aka. er to grafer like?
Krav: Må kunne finne en «mapping» (funksjon) mellom alle noder og kanter.

Å teste ut alle mulige funksjoner tar *mye* tid, siden det vokser fort.

Derfor ser man på enkelte *egenskaper* ved grafer, siden disse må deles av begge grafene, dersom de skal være like.

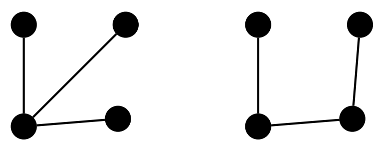
Da ser en ofte på egenskaper som graden til noder, og graden til nabo-noder, og sjekker at antallet der stemmer overrens. Men det er også andre egenskaper å teste, som hvorvidt grafen er sammenhengene, og det kan en sjelden gang være lønnsomt å sjekke den inverse grafen, siden den også skal være isomorf.

Homeomorfi, er en litt videre variant av isomorfi, hvor vi også tillatter elementær subdivisjoner, altså å splitte kanter

7.3 Oppgaver

7.3.1 V2006 - Oppgave 6

a) Er disse grafene isomorfe?



b) Finn 11 løkke-frie(loop-free) ikke-isomorfe uretta(non-directed) grafer med 4 hjørner.
c) Vis at de 11 grafene du fant i b) er alle mulige løkke-frie ikke-isomorfe uretta grafer med 4 hjørner.

Tips: tell kanter.

Løsningsforslag

8 Formelle språk og endelige tilstandsmaskiner

Formelle språk handler om alfabeter, og ord du kan danne med disse. Men her er «ord», ikke helt det samme som det man forbinder med det i vårt vanlige språk, siden de ikke har noen betydnig.

Vi snakker ofte om et alfabet Σ, som er en mengde med bokstaver, for eksempel $\{0, 1\}$, en streng har dere sannsynligvis hørt om tidligere, og er en sammensetning med symboler. Vi har også λ som er en spesiell streng, som er tom. Med et alfabet, så kan du lage et språk, bare du lager regler for hvilke ord du tillater.

Det er viktig å merke seg at alt er mengder, så vanlige mengde-operasjoner fungerer.