

# Differentialligninger

Henrik Skov Midtiby<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet, SDU

2017-03-02

# Indhold

- 1 Hvordan har jeg lært om differentialligninger?
- 2 Ligninger og differentialligninger
- 3 Første ordens differentialligninger
- 4 Koblede differentialligninger
- 5 Flere eksempler på differentialligninger

# Hvordan har jeg lært om differentialligninger?

- Cand. scient. i Fysik og Datalogi
- Phd i Robotteknologi
- Underviser på Det Tekniske Fakultet
- Arbejder med plantegenkendelse (hvad er afgrøde hhv. ukrudt)



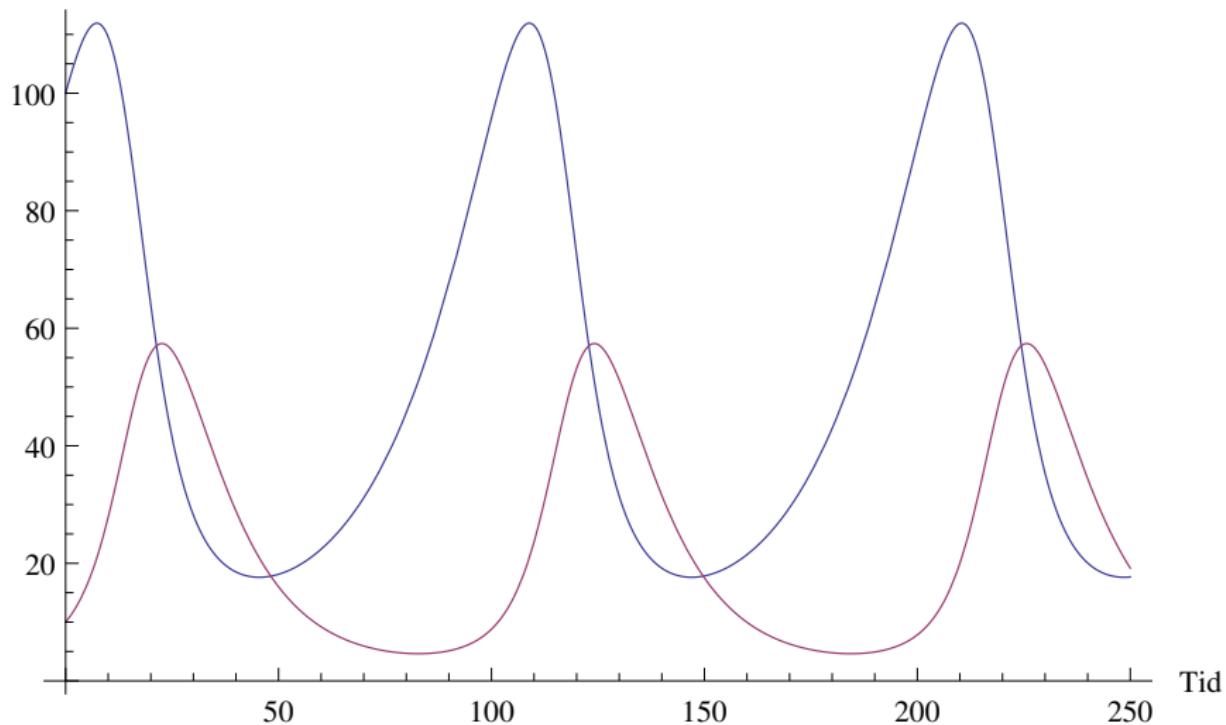
# Simulering af gamle kastemaskiner



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Trebuchet.jpg>

# Populations modeller – Lotka Volterra

Individder



# Hvad har jeg brugt differentialligninger til?



<http://www.frobomind.org/>

# Indhold

1 Hvordan har jeg lært om differentialligninger?

2 Ligninger og differentialligninger

- Almindelige ligninger
- Den afledte af en funktion
- Differentialligninger
- Hvorfor differentialligninger

3 Første ordens differentialligninger

4 Koblede differentialligninger

5 Flere eksempler på differentialligninger

# Ligninger

$$2x = 7$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

# Ligninger

$$2x = 7$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{-1}{3} \vee x = 1$$

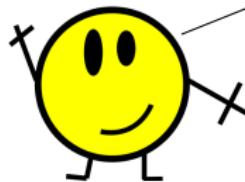
# Ligninger

$$2x = 7$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

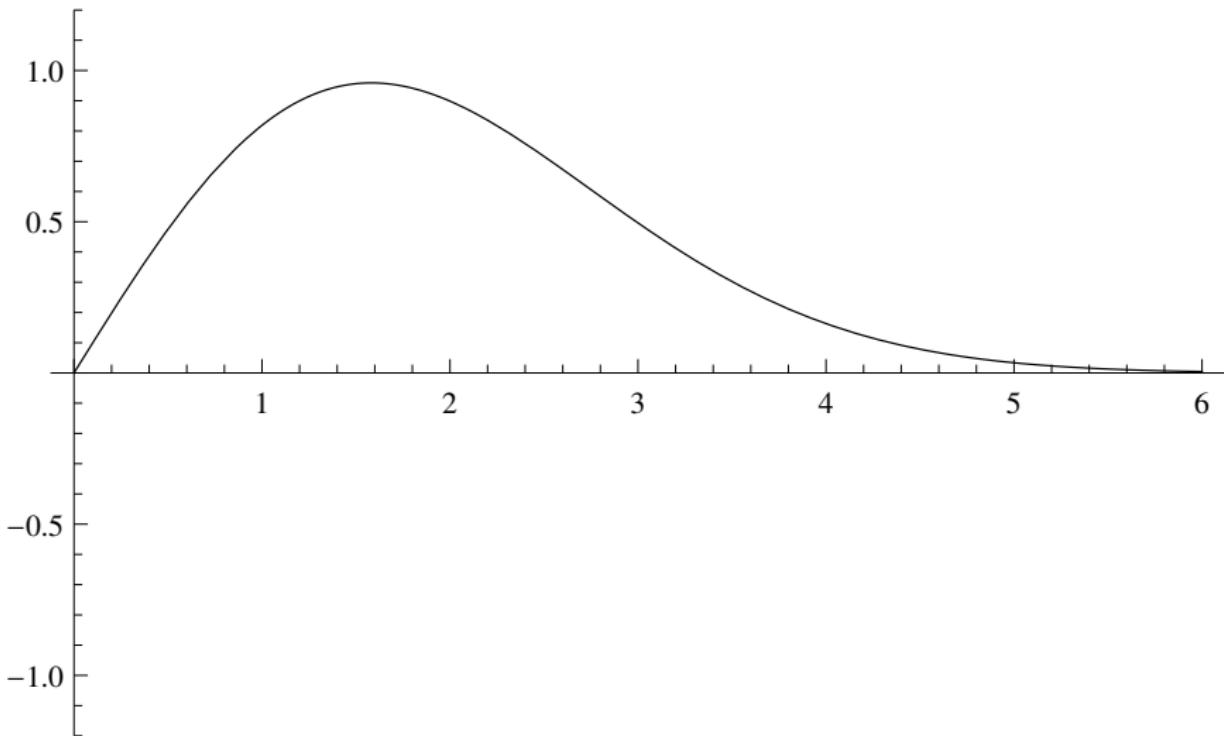
$$x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{-1}{3} \vee x = 1$$

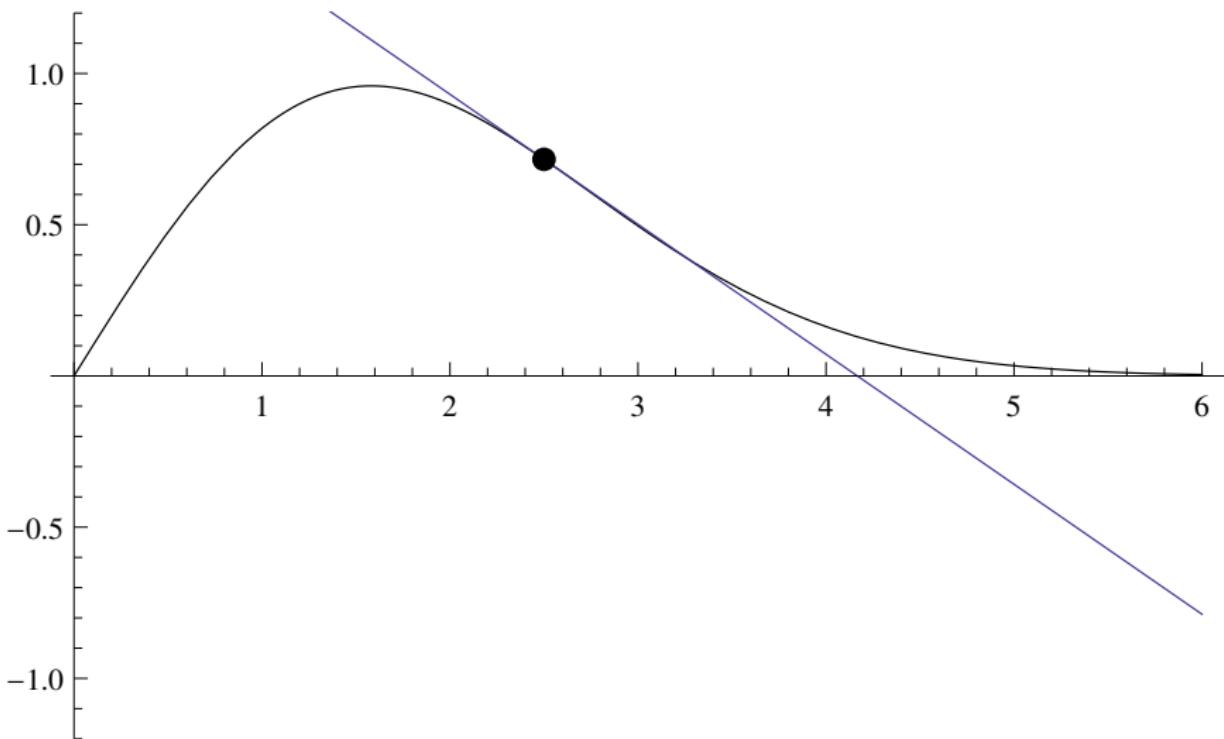


*Ligninger har værdier som løsninger.*

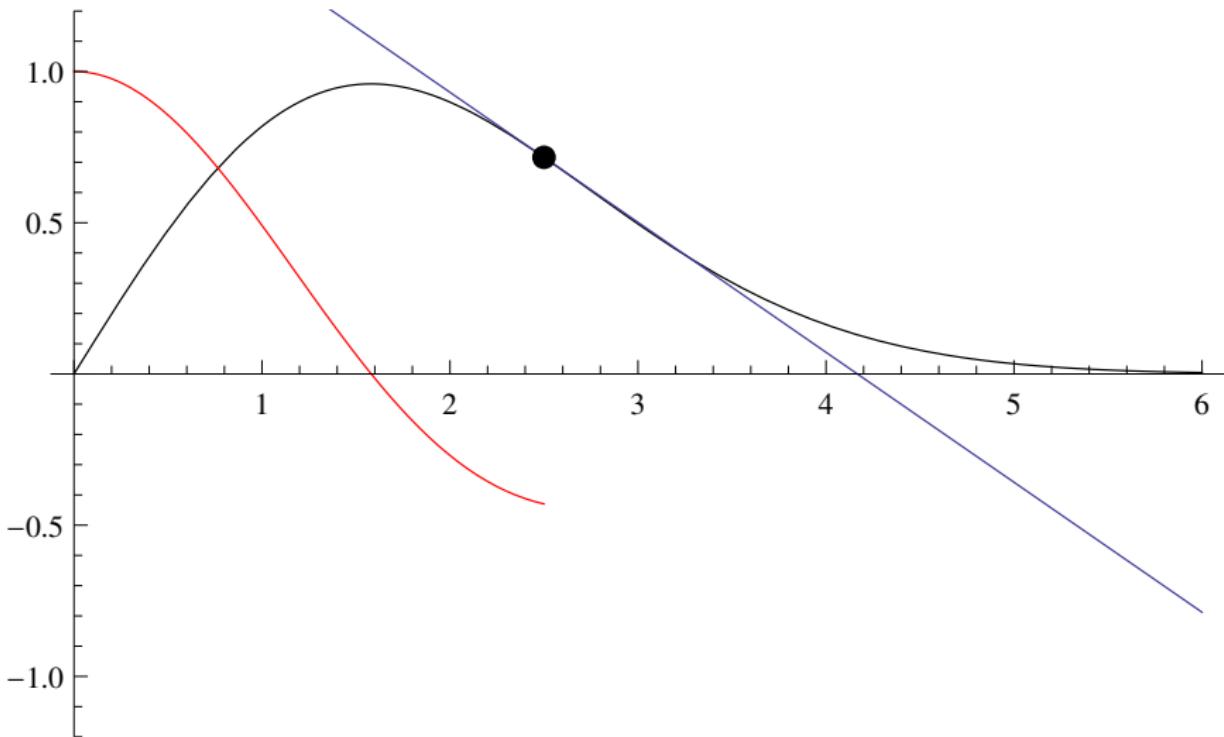
# Den afledte af en funktion



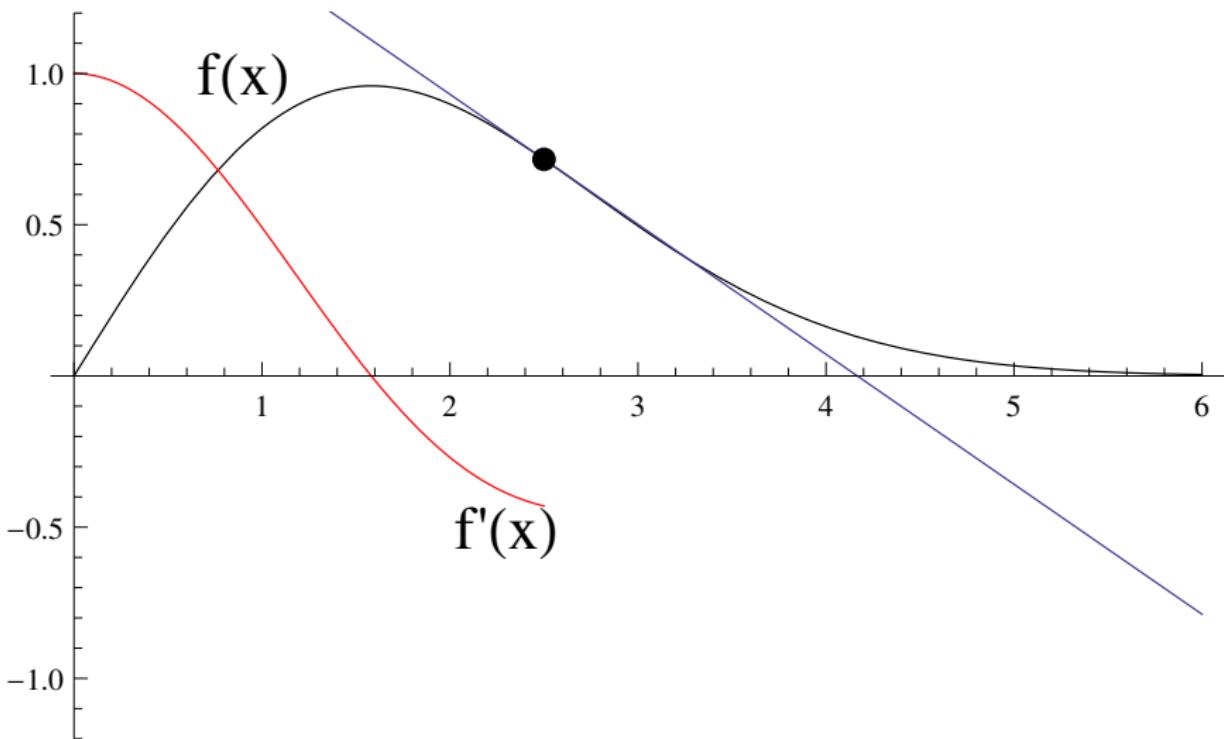
# Den afledte af en funktion



# Den afledte af en funktion



# Den afledte af en funktion



# Den afledte af en funktion

Funktion:  $f(x)$

Den afledte af funktionen:  $f'(x)$ ,  $\frac{df}{dx}$

# Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

# Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

$$y' = -0.4 \cdot y$$

$$y \cdot y' = 2$$

# Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

$$y' = -0.4 \cdot y$$

$$y \cdot y' = 2$$

$$y = A \cdot \exp(-0.4x)$$

$$y = \sqrt{4x + B}$$

# Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

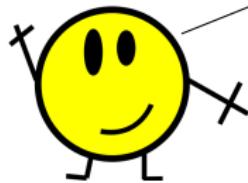
$$y' = -0.4 \cdot y$$

$$y \cdot y' = 2$$

$$y = A \cdot \exp(-0.4x)$$

$$y = \sqrt{4x + B}$$

*Differential ligninger har funktioner som løsninger.*



# Hvorfor differentialligninger

## Påstand

Verden er lettere at beskrive ved brug af differentialligninger.

# Indhold

1 Hvordan har jeg lært om differentialligninger?

2 Ligninger og differentialligninger

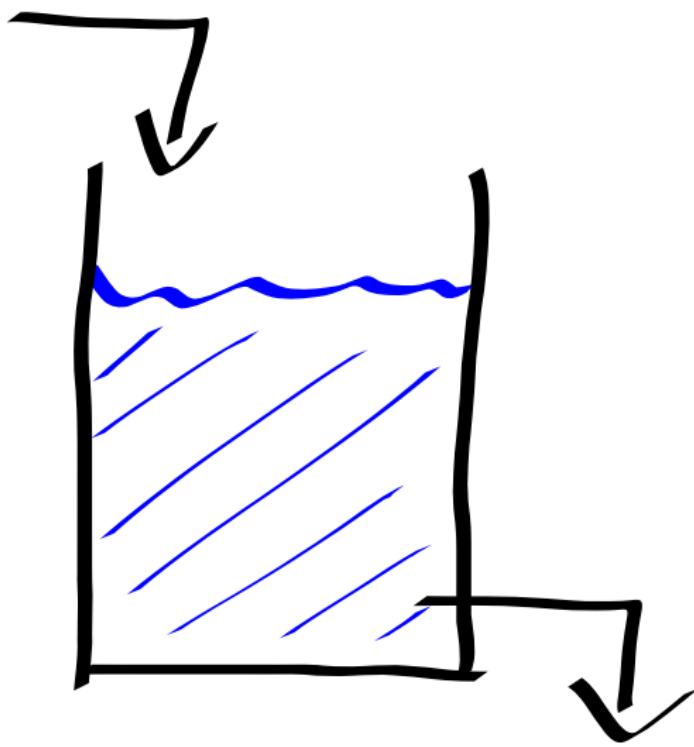
3 Første ordens differentialligninger

- En differential ligning – hvad nu?
- Numerisk løsning af differentialligninger

4 Koblede differentialligninger

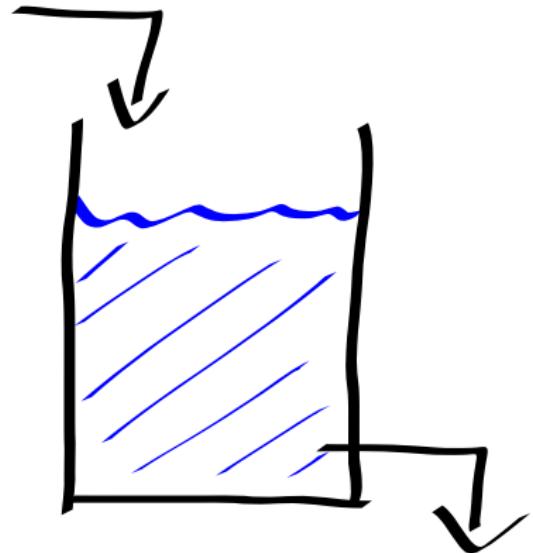
5 Flere eksempler på differentialligninger

# Fortynding af opløsning over tid

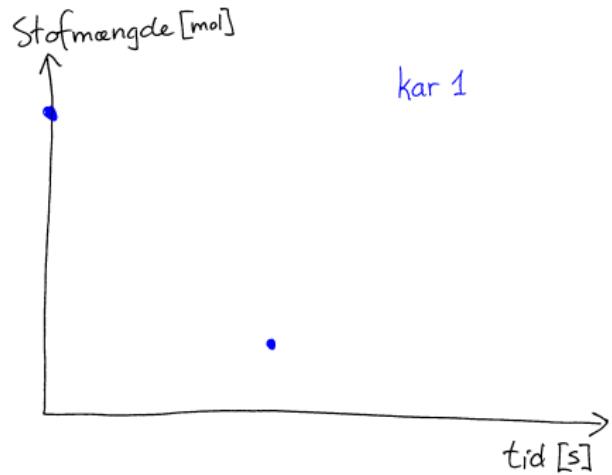


# Fortynding af opløsning over tid

- Beholderens volumen,  $V$
- Flowet igennem beholderen,  $\dot{V}$
- Stofmængde ved start,  $n_0$



# Fortynding af opløsning over tid

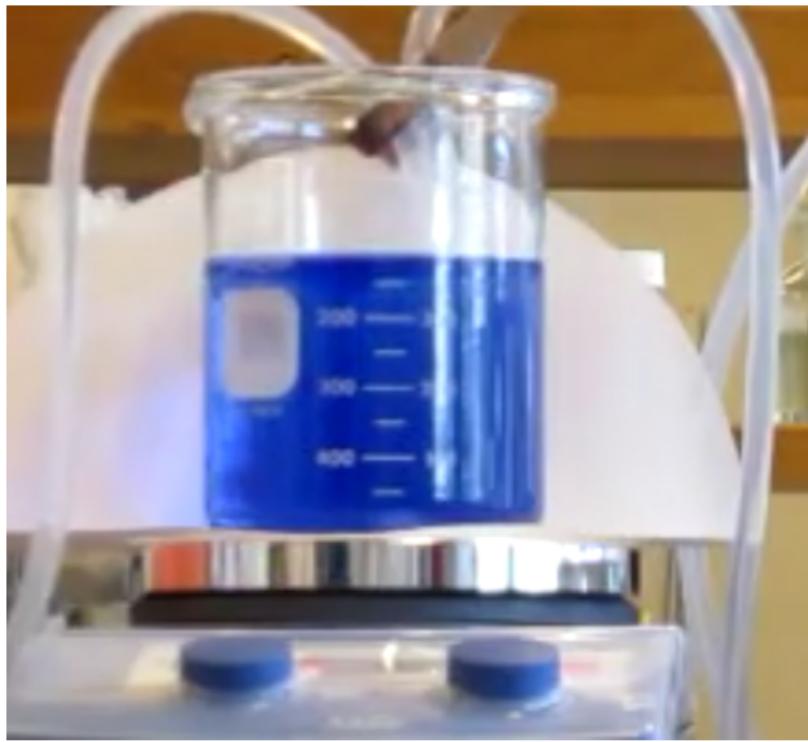


Svar på telefon / pc

- [www.theanswerpad.com](http://www.theanswerpad.com)
- Students
- I have a connect code

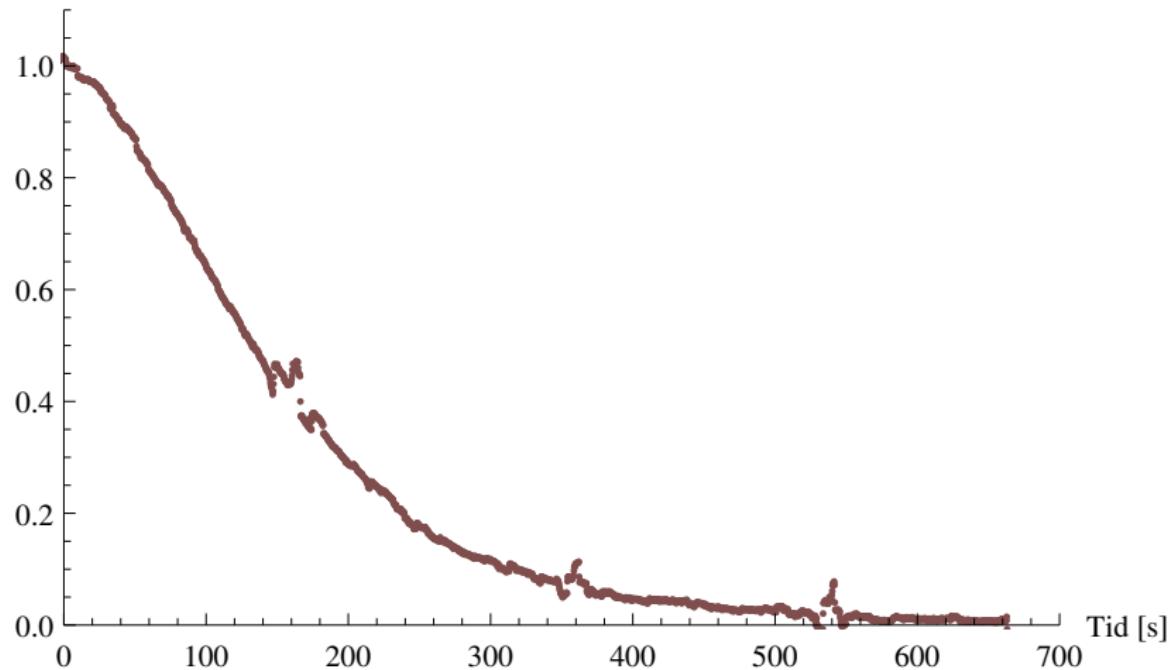
Indtegn hvordan I forventer at stofmængden ændres over tid.

## Eksperiment – Se video

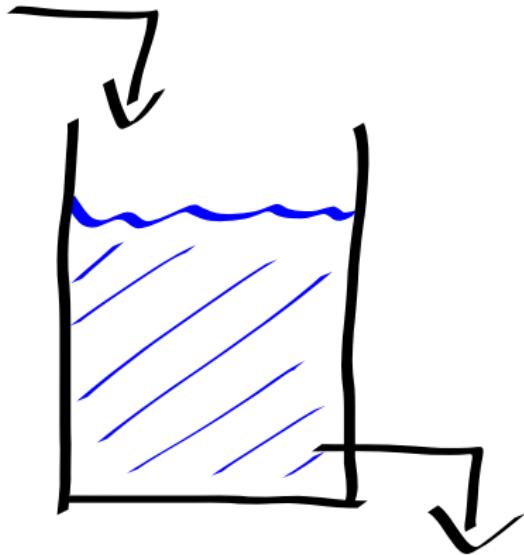


# Eksperimentet – Koncentrations målinger

Stofmængde [Arb]



# Stofmængde flow



Stofmængde ind og ud

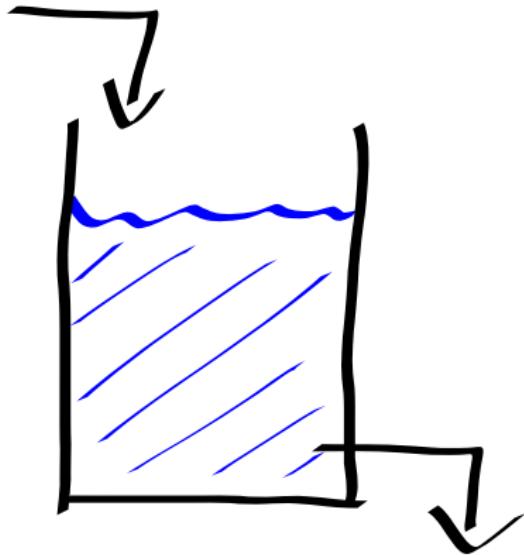
$$\dot{n}_{ind} = c_{ind} \cdot \dot{V}$$

$$\dot{n}_{ud} = c_{ud} \cdot \dot{V}$$

Ændring af stofmængde

$$\dot{n}_{ind} - \dot{n}_{ud} = c_{ind} \cdot \dot{V} - c_{ud} \cdot \dot{V}$$

# Stofmængde flow



Skrevet som en differentialligning

$$\frac{dn}{dt} = (c_{ind} - c_{ud}) \cdot \dot{V}$$

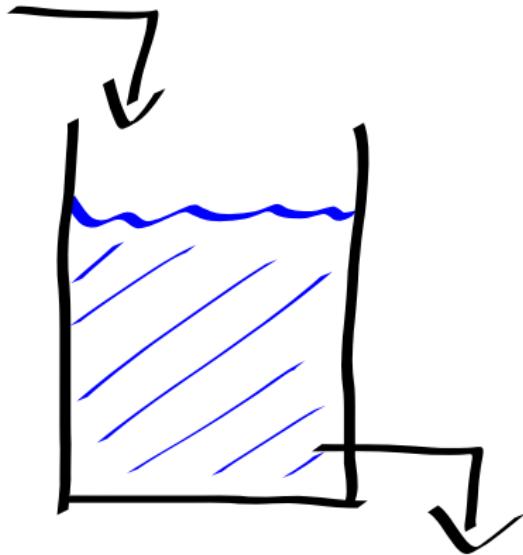
Rent vand ind

$$c_{ind} = 0$$

Koncentrationen af det der løber ud

$$c_{ud} = \frac{n}{V}$$

# Stofmængde flow



Skrevet som en differentialligning

$$\frac{dn}{dt} = -n \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

# En differential ligning – hvad nu?

$$\frac{dn}{dt} = -n \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

$$\frac{dn}{dt} = -0.008 \cdot n$$

Matematikerens tilgang - Analytisk løsning

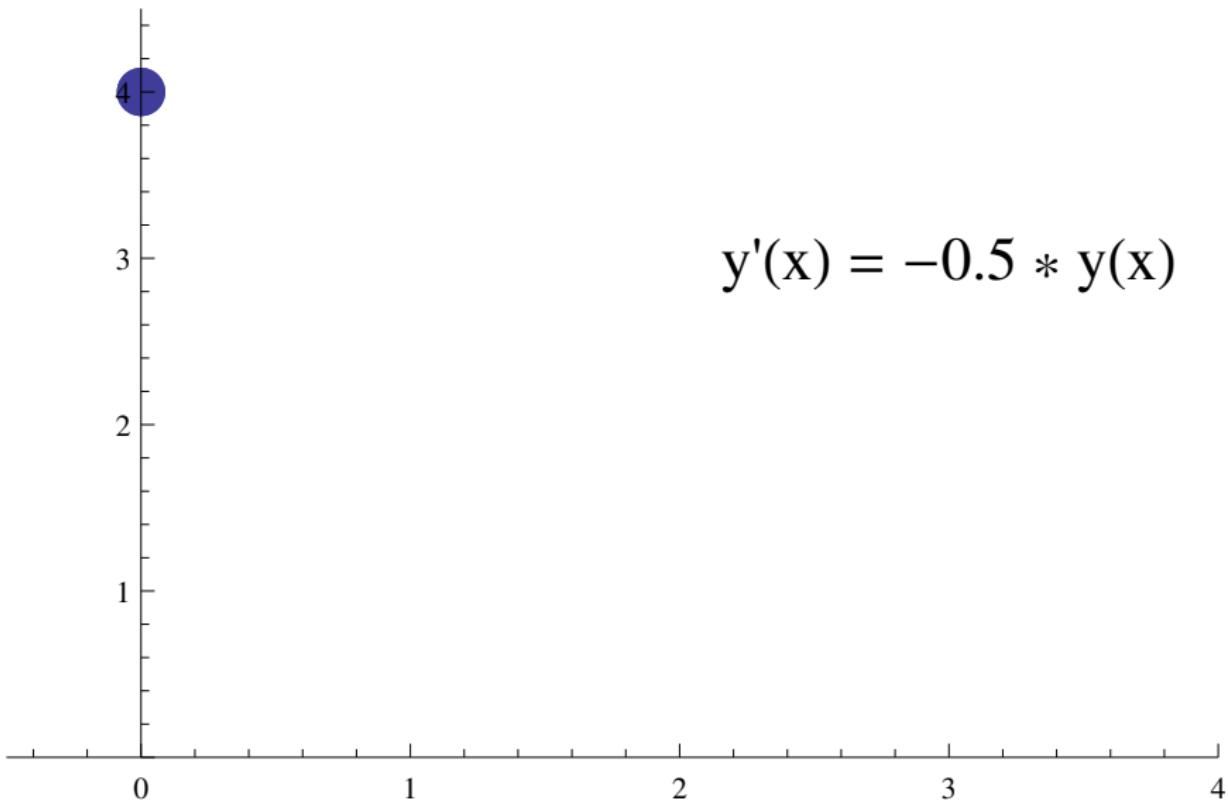
Separable differentialligninger

Første ordens lineære differentialligninger

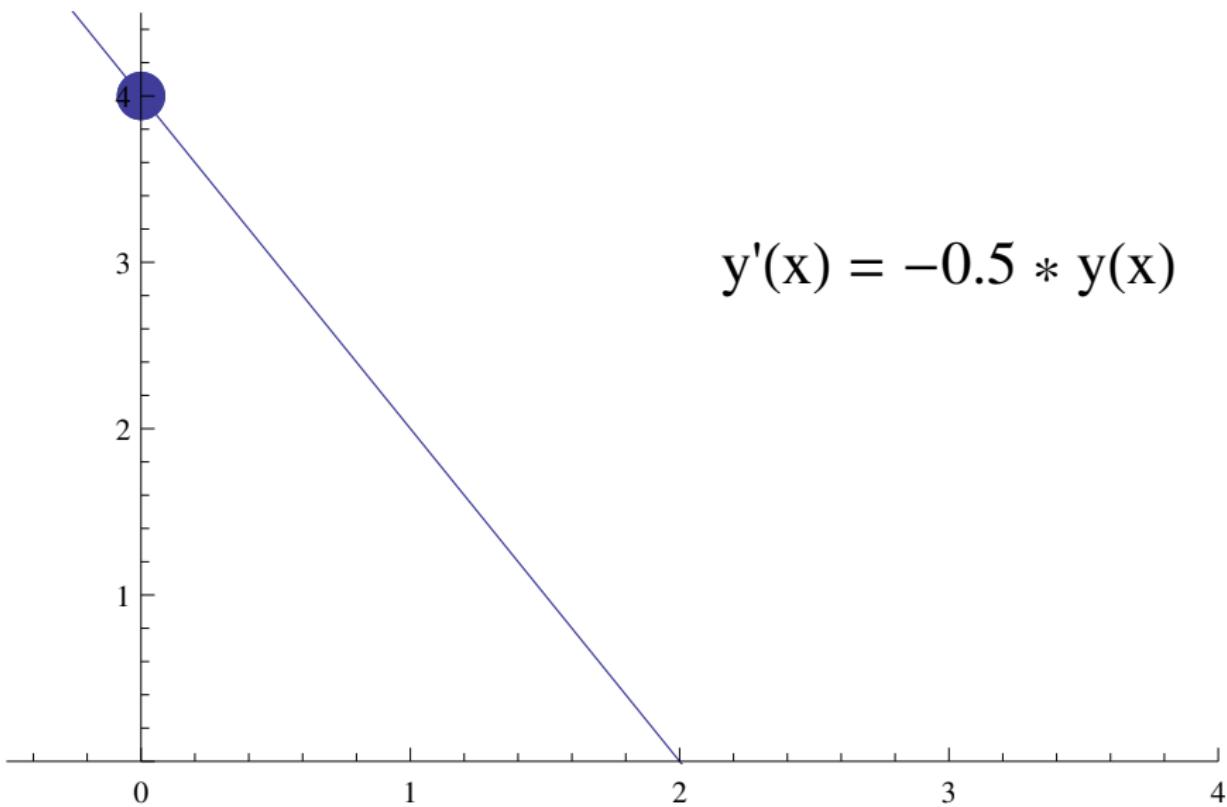
Ingeniørens tilgang

Numerisk løsning

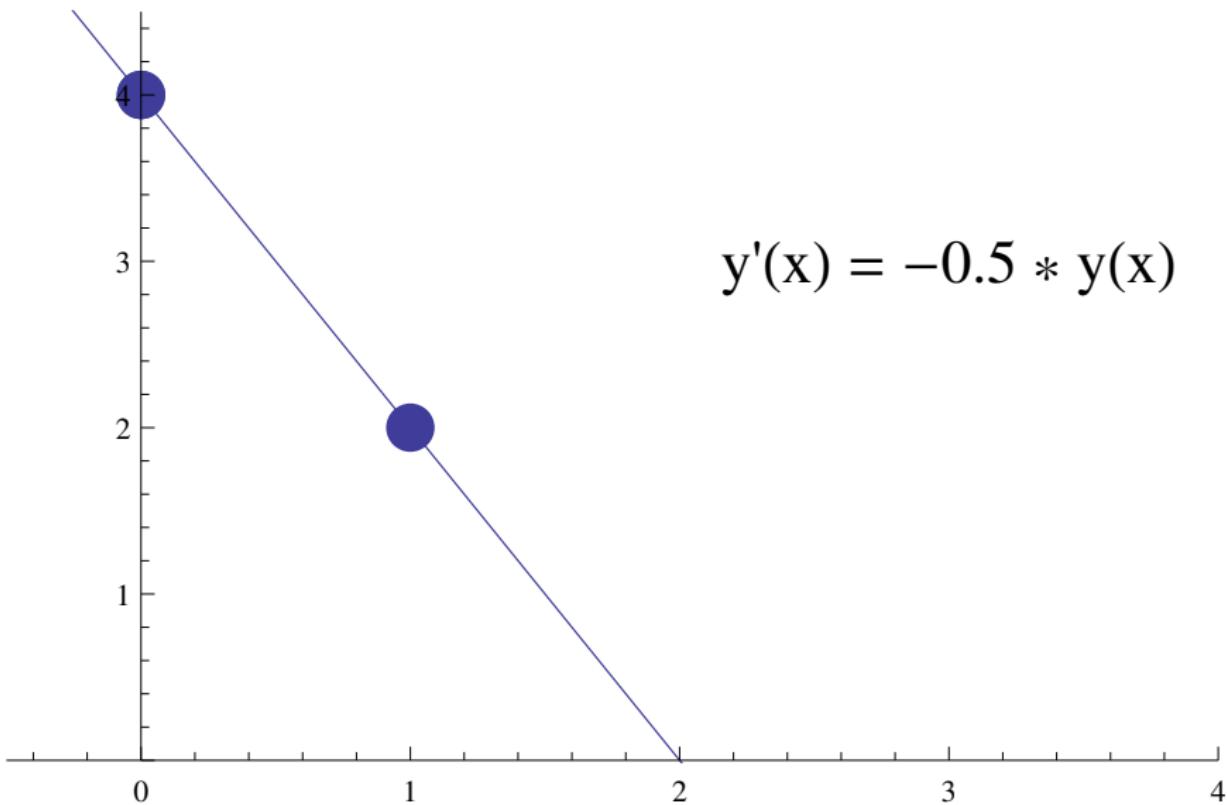
# Numerisk løsning – grafisk



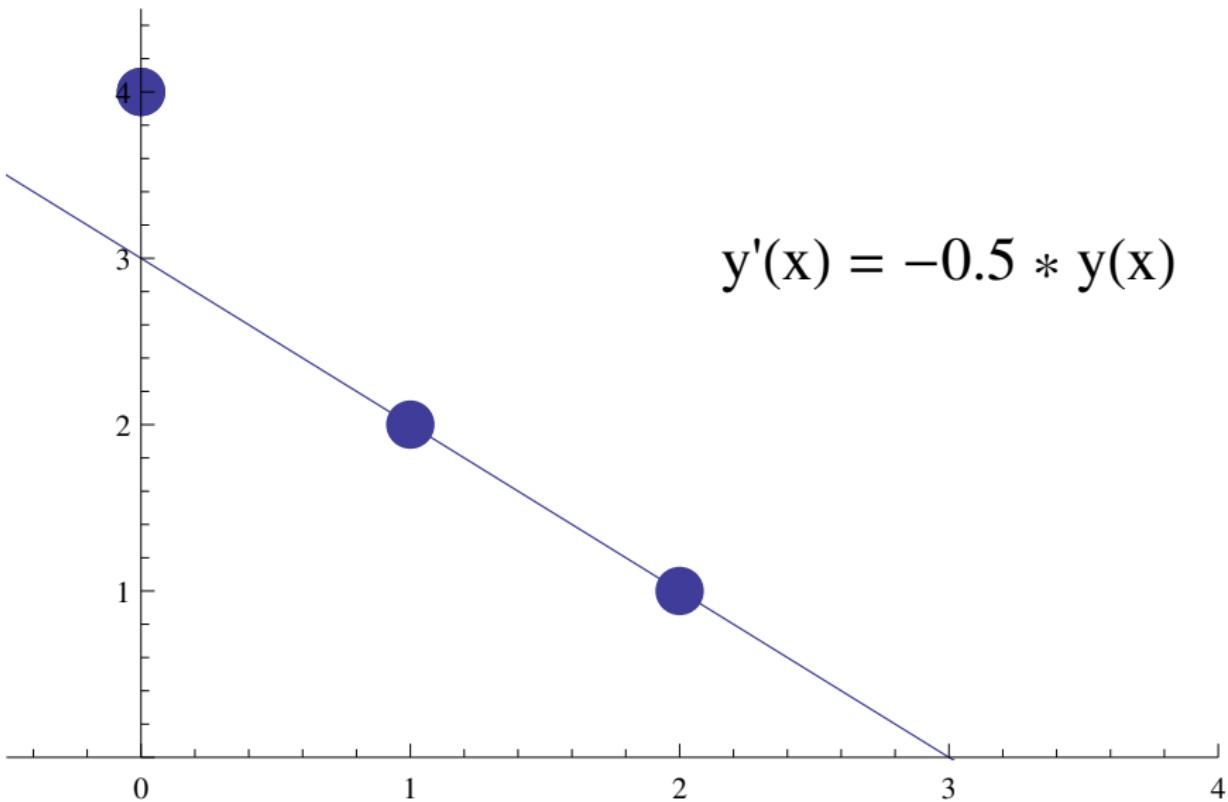
# Numerisk løsning – grafisk



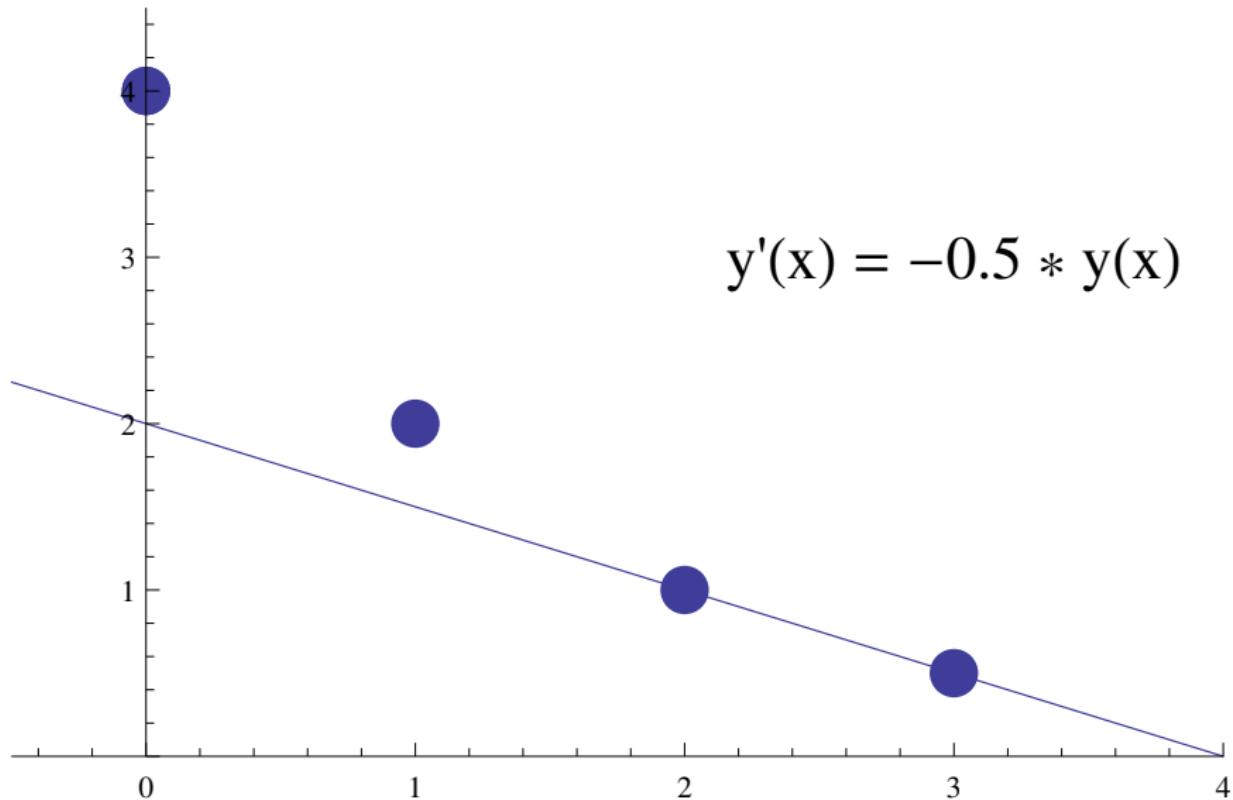
# Numerisk løsning – grafisk



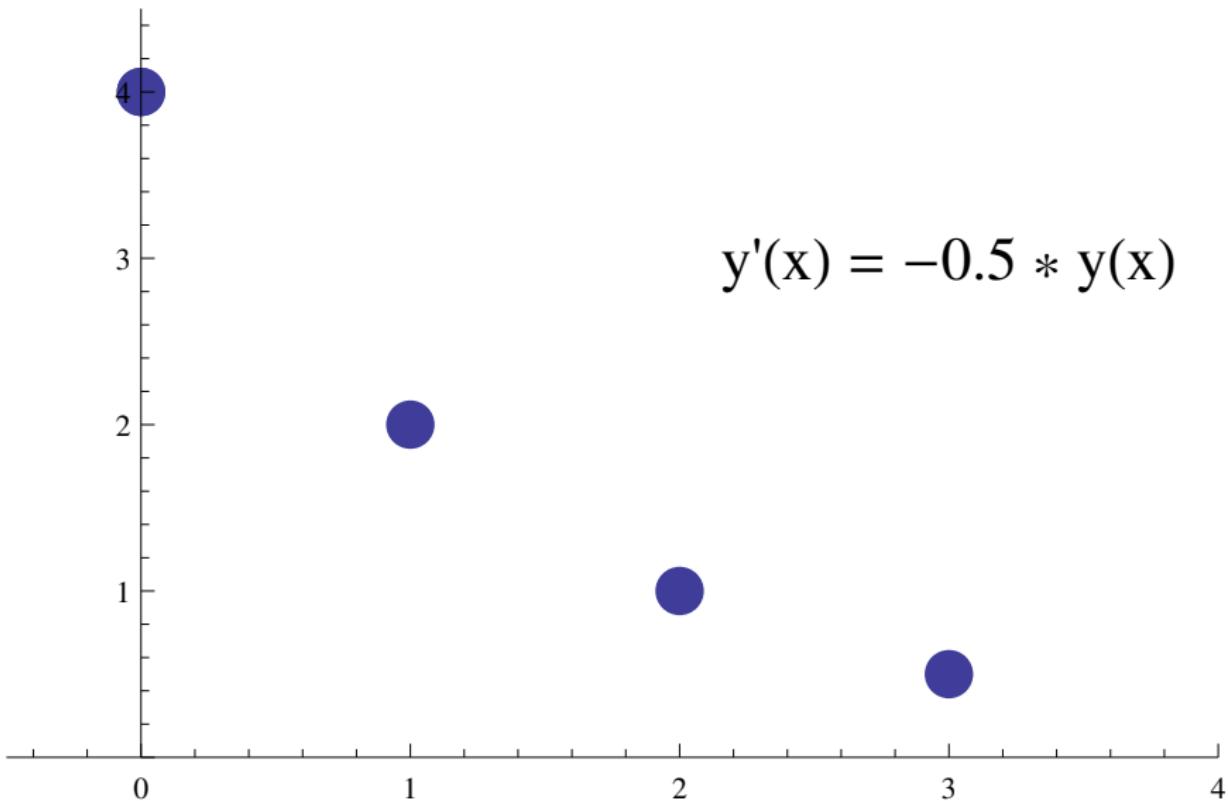
# Numerisk løsning – grafisk



# Numerisk løsning – grafisk



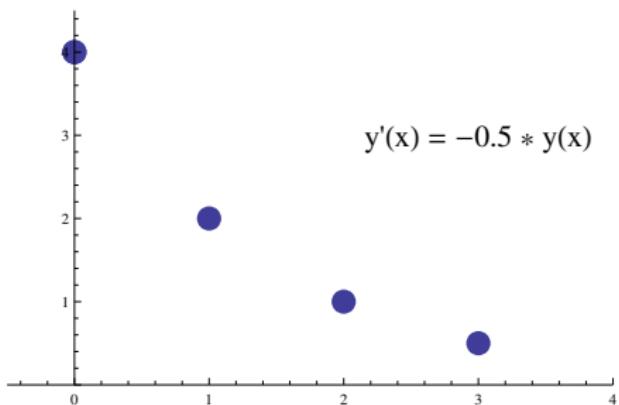
# Numerisk løsning – grafisk



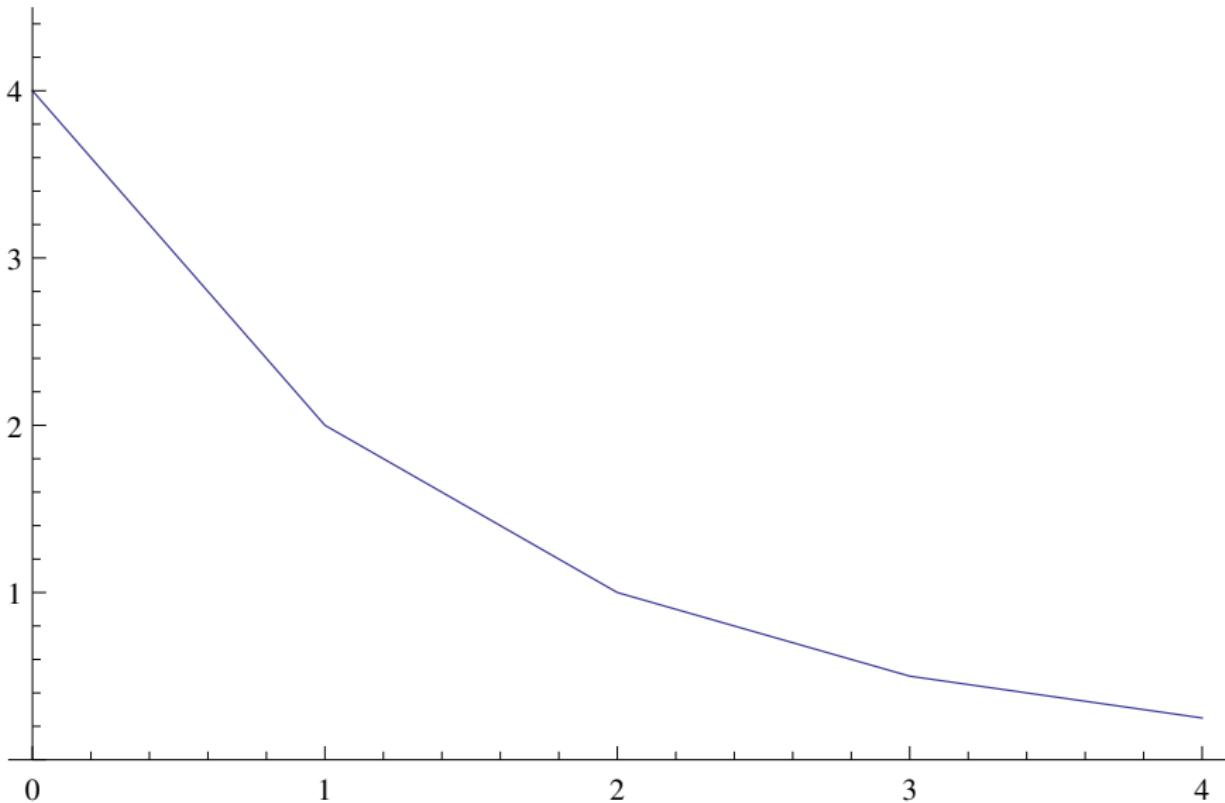
# Numerisk løsning – med tal

$$y(x + h) = y(x) + h \cdot y'(x)$$

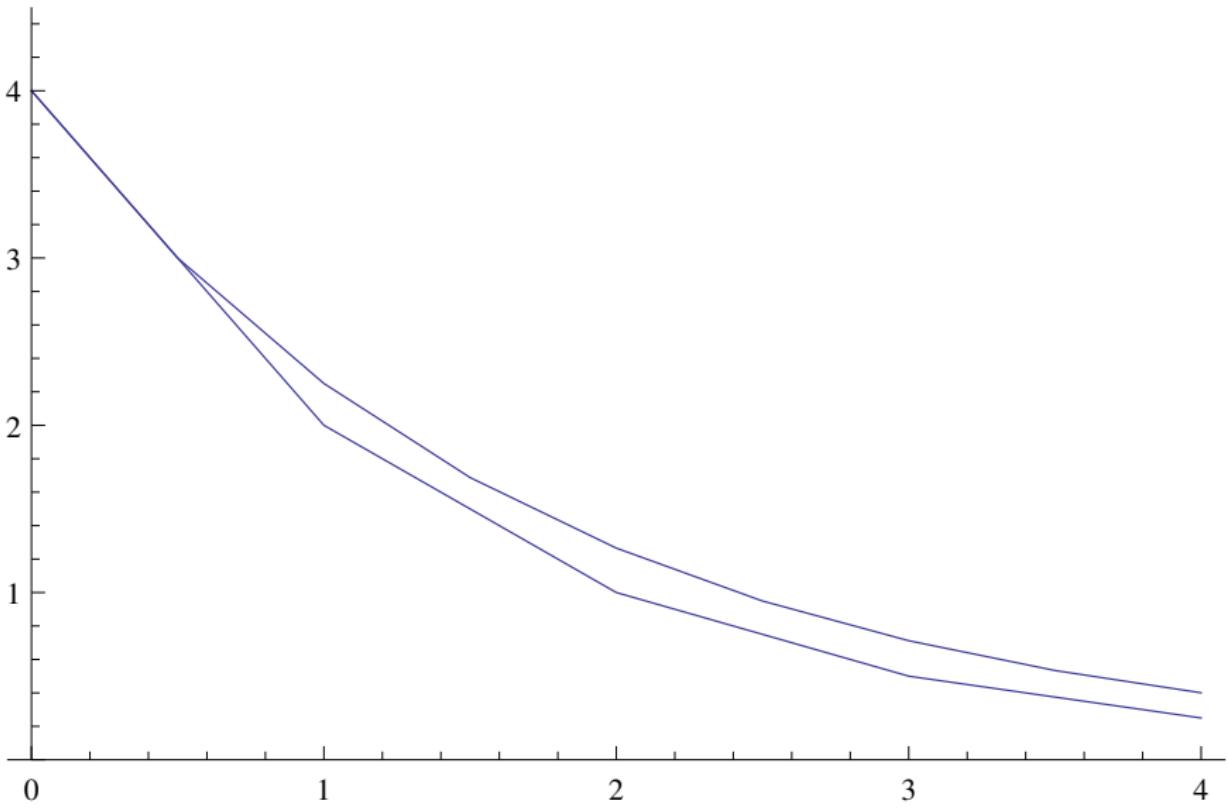
$x$	$y(x)$	$y'(x)$
0.00	4.00	-2.00
1.00	2.00	-1.00
2.00	1.00	-0.50
3.00	0.50	-0.25



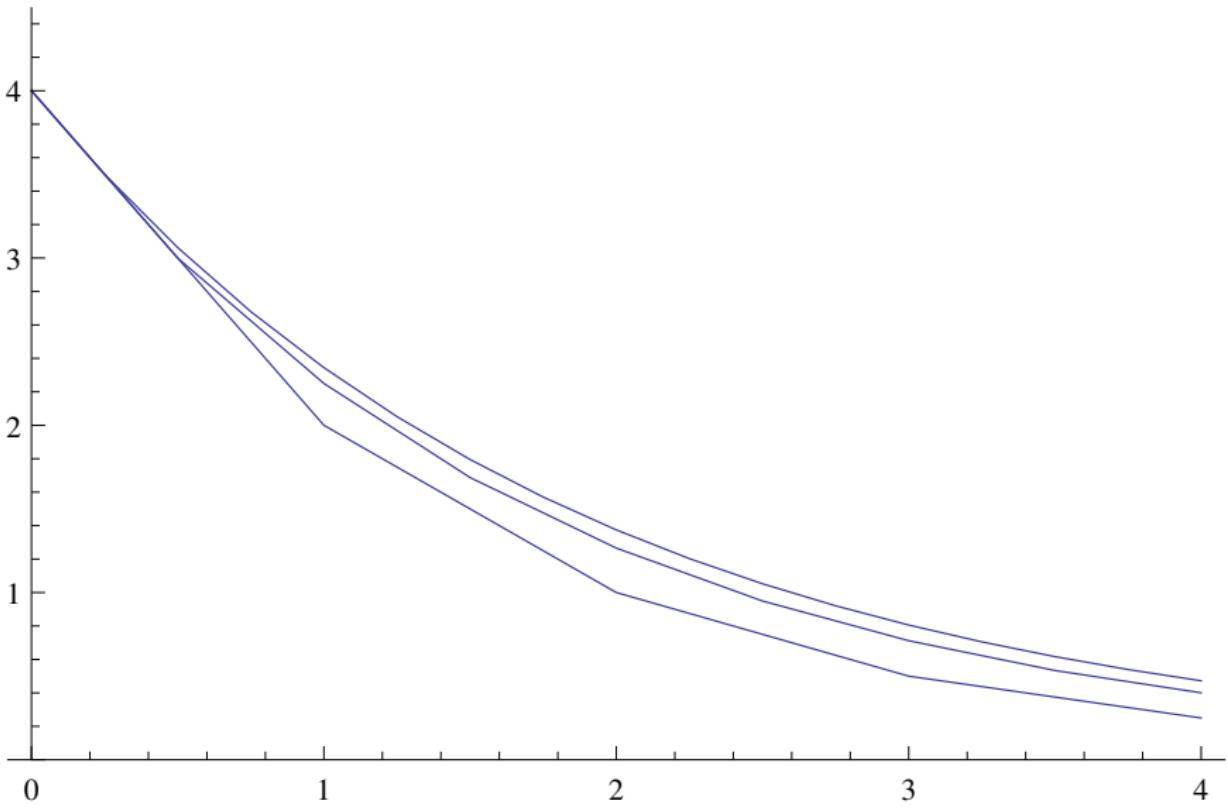
# Skridt længden gøres mindre



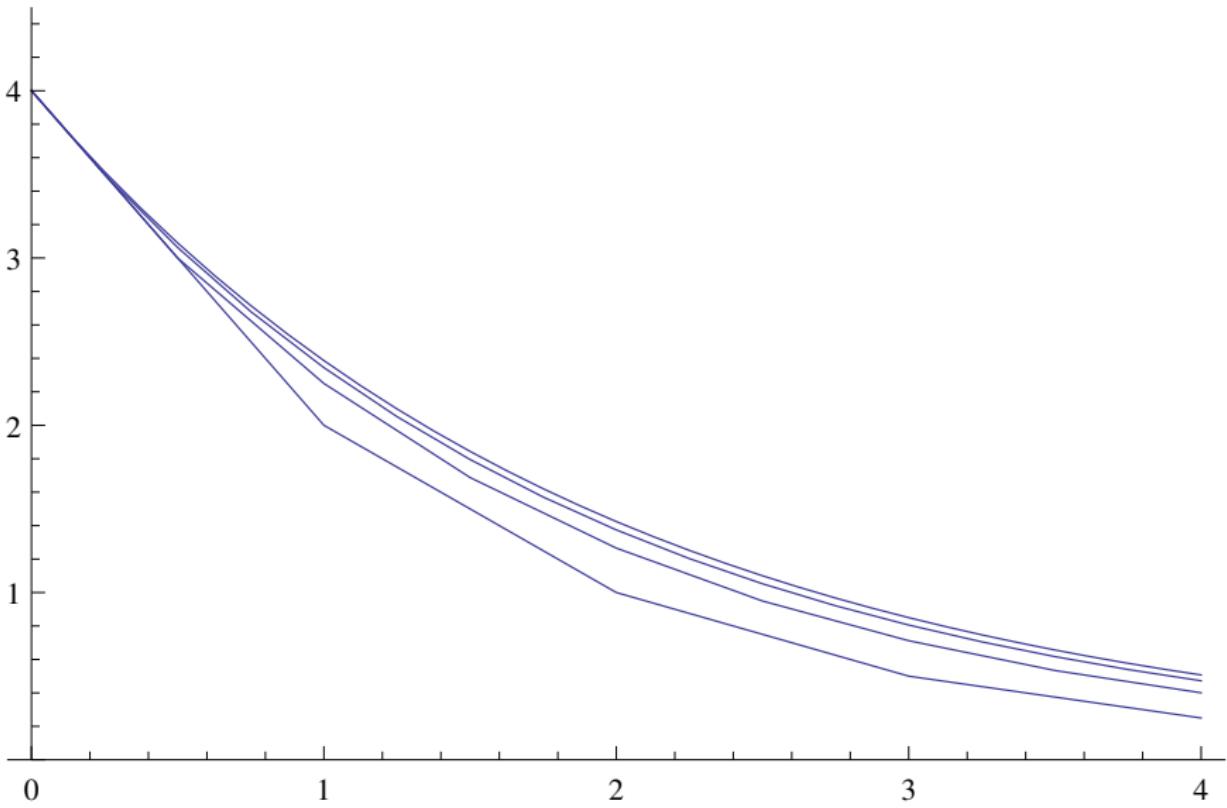
# Skridt længden gøres mindre



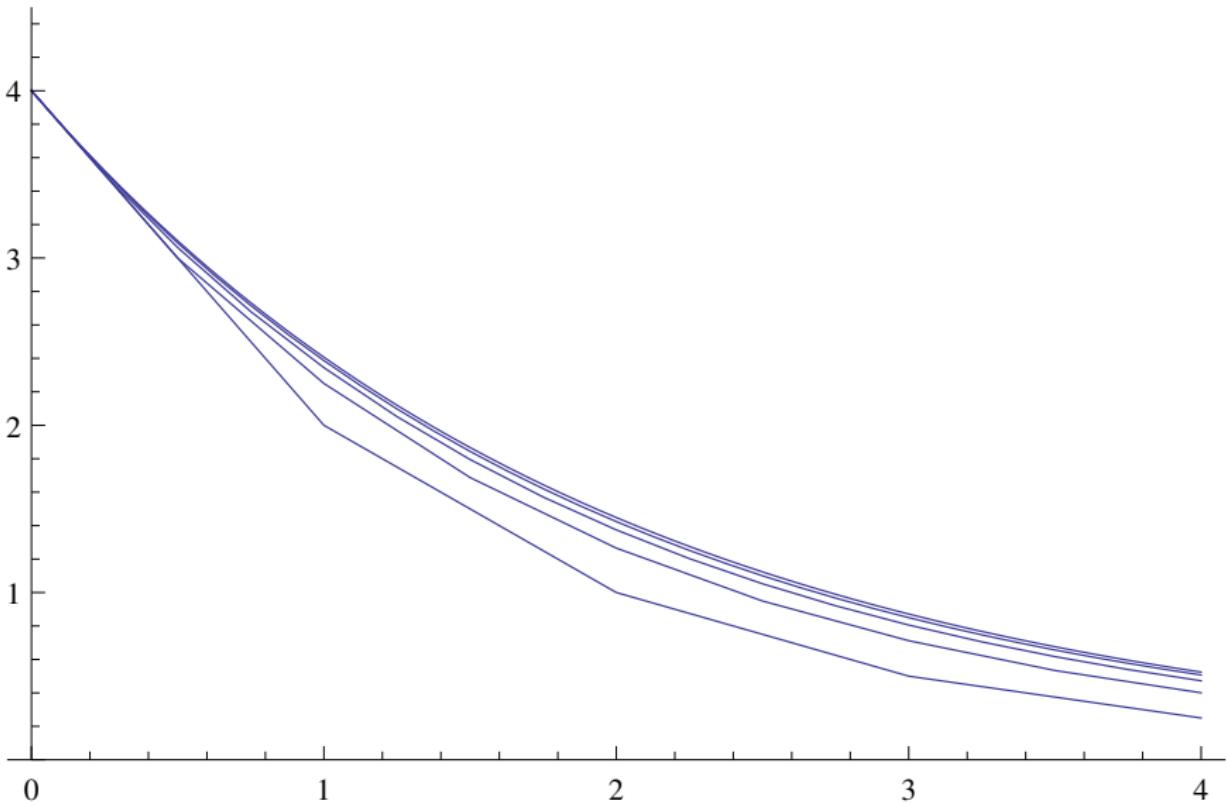
# Skridt længden gøres mindre



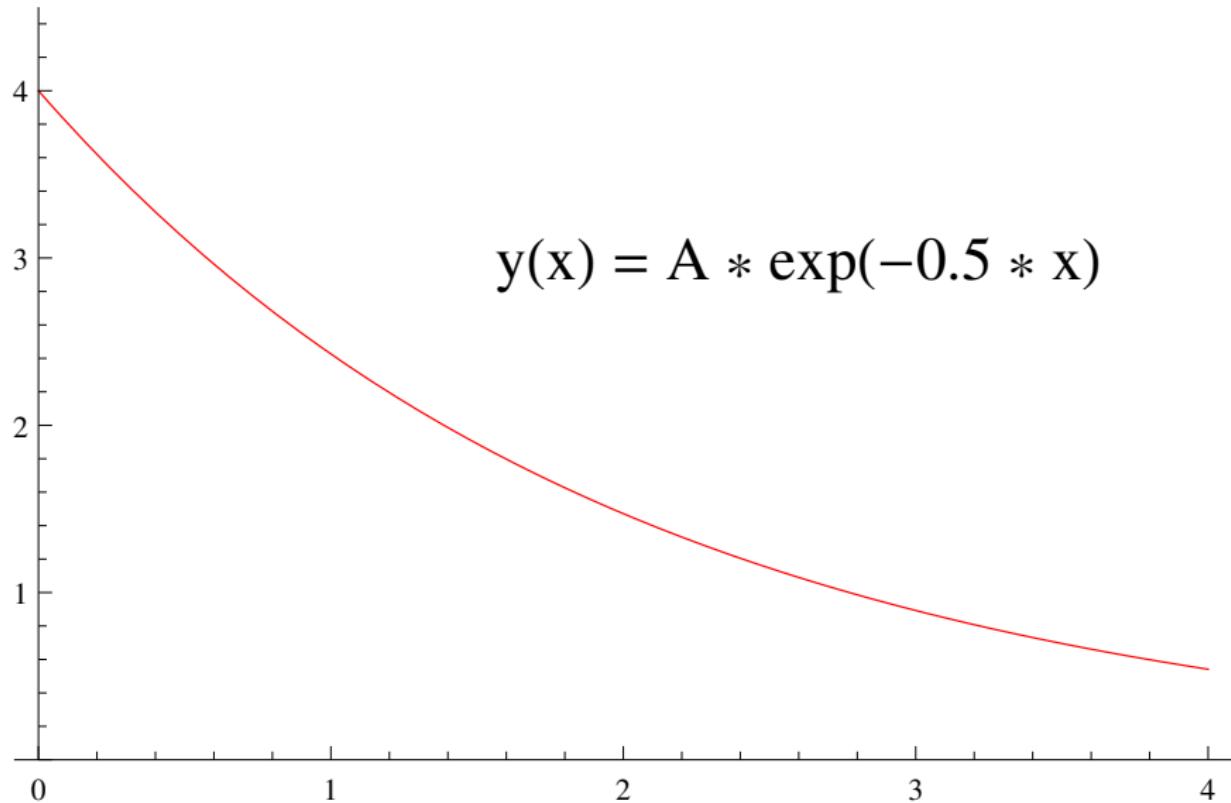
# Skridt længden gøres mindre



# Skridt længden gøres mindre

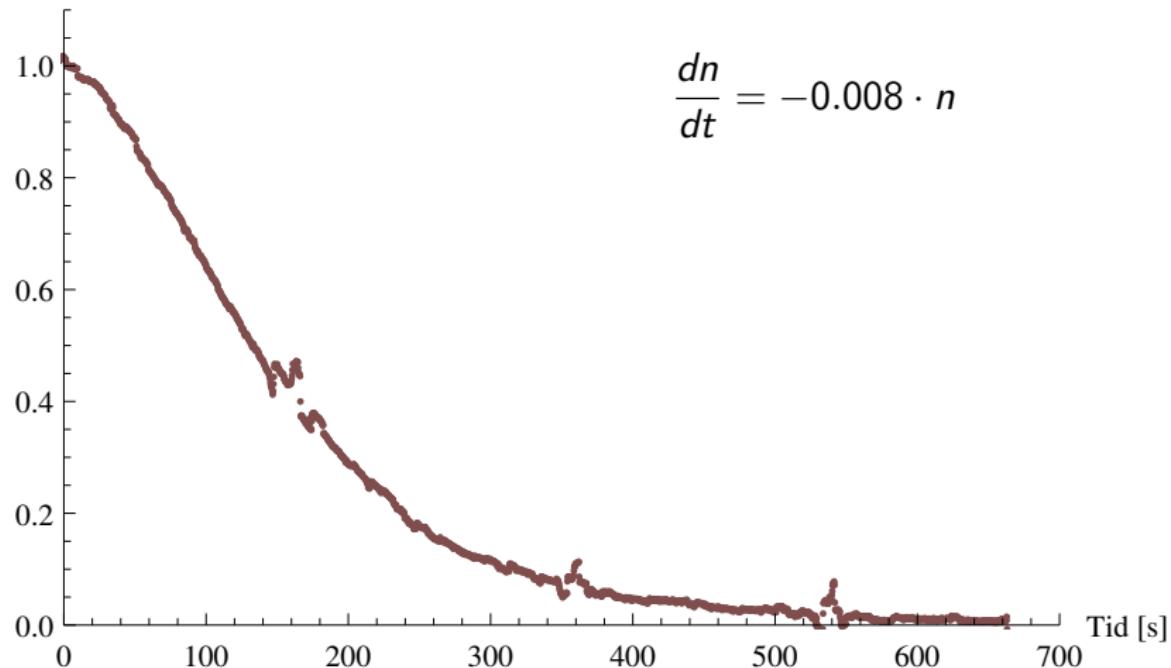


# Skridt længden gøres mindre



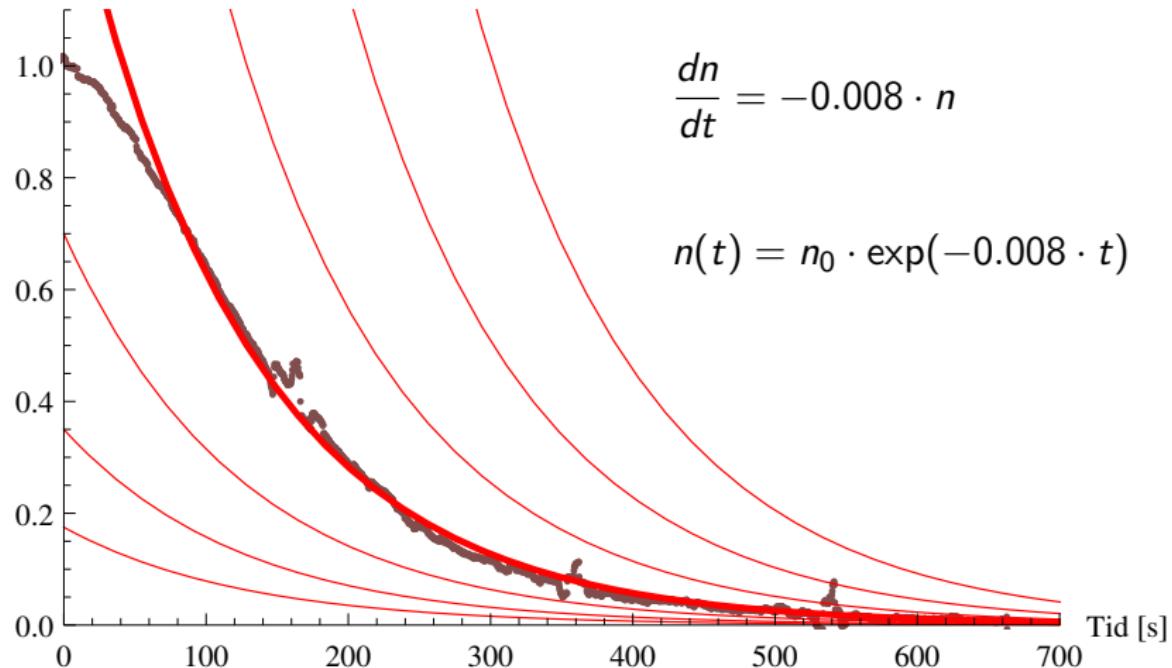
# Eksperimentet

Stofmængde [Arb]



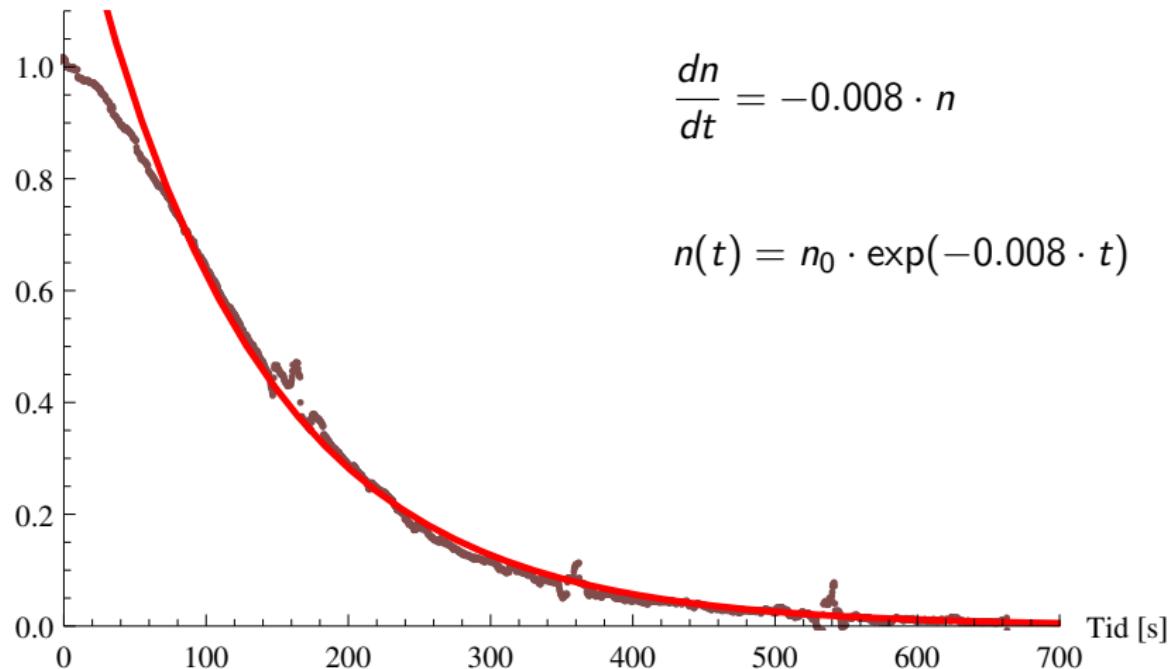
# Eksperimentet

Stofmængde [Arb]



# Eksperimentet

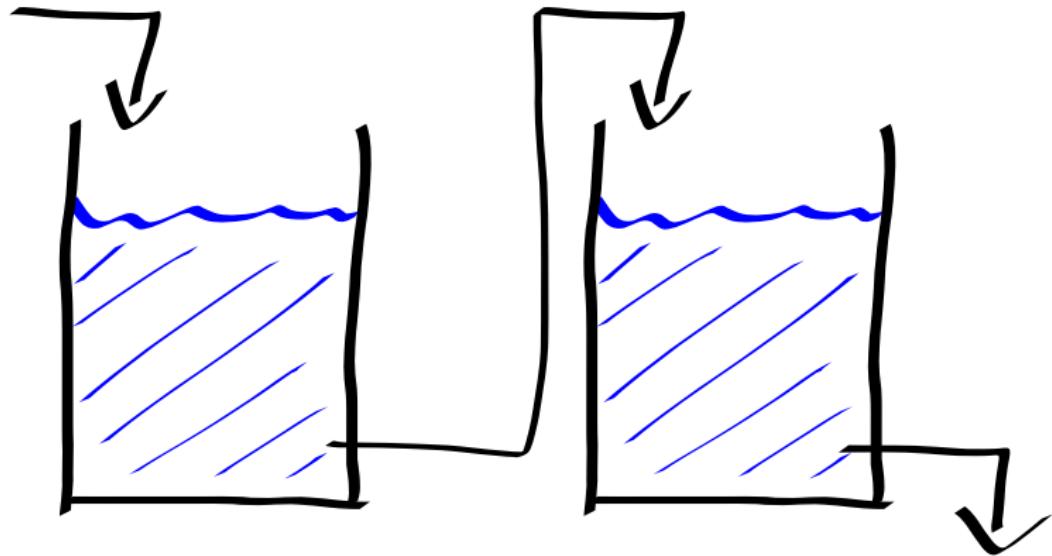
Stofmængde [Arb]



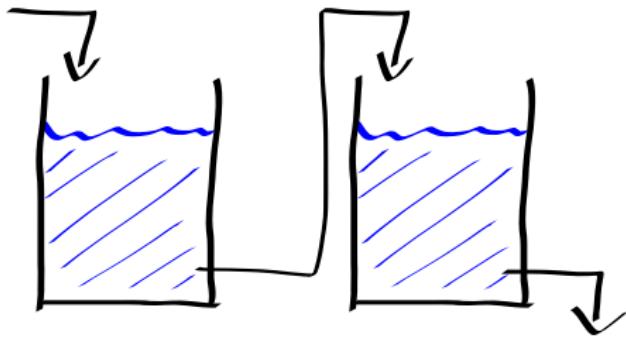
# Indhold

- 1 Hvordan har jeg lært om differentialligninger?
- 2 Ligninger og differentialligninger
- 3 Første ordens differentialligninger
- 4 Koblede differentialligninger
- 5 Flere eksempler på differentialligninger

# Fortynding af oplosning over tid

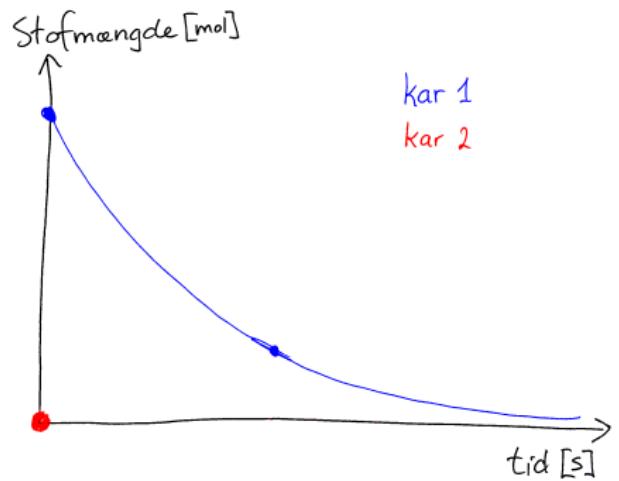


# Fortynding af opløsning over tid



Der ledes rent vand ind i kar 1.  
Kar 1: Farvet vand til  $t = 0$ .  
Kar 2: Rent vand til  $t = 0$ .

# Fortynding af opløsning over tid



Svar på telefon / pc

- [www.theanswerpad.com](http://www.theanswerpad.com)
- Students
- I have a connect code

Indtegn hvordan I forventer at stofmængden ændres over tid for kar 2.

# Eksperiment – Se video



# Eksperiment – Differentialligninger

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 \cdot \frac{\dot{V}}{V} - n_2 \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

$$n_1(0) = 1.4$$

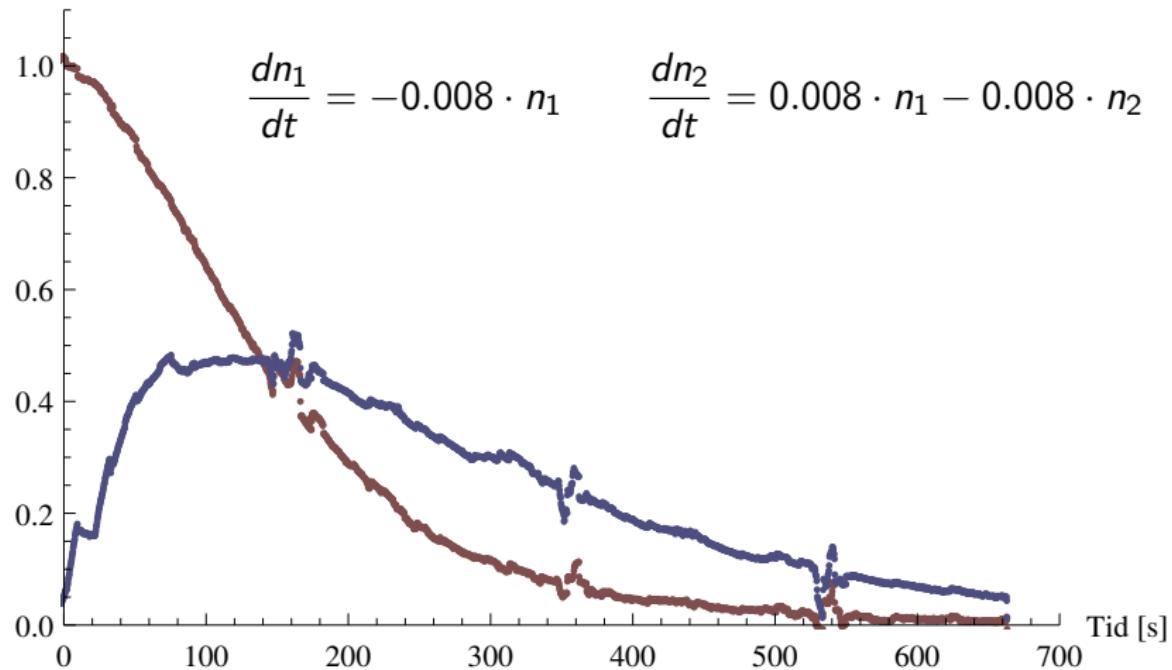
$$n_2(0) = 0$$

$$\dot{V} = 3.2$$

$$V = 400$$

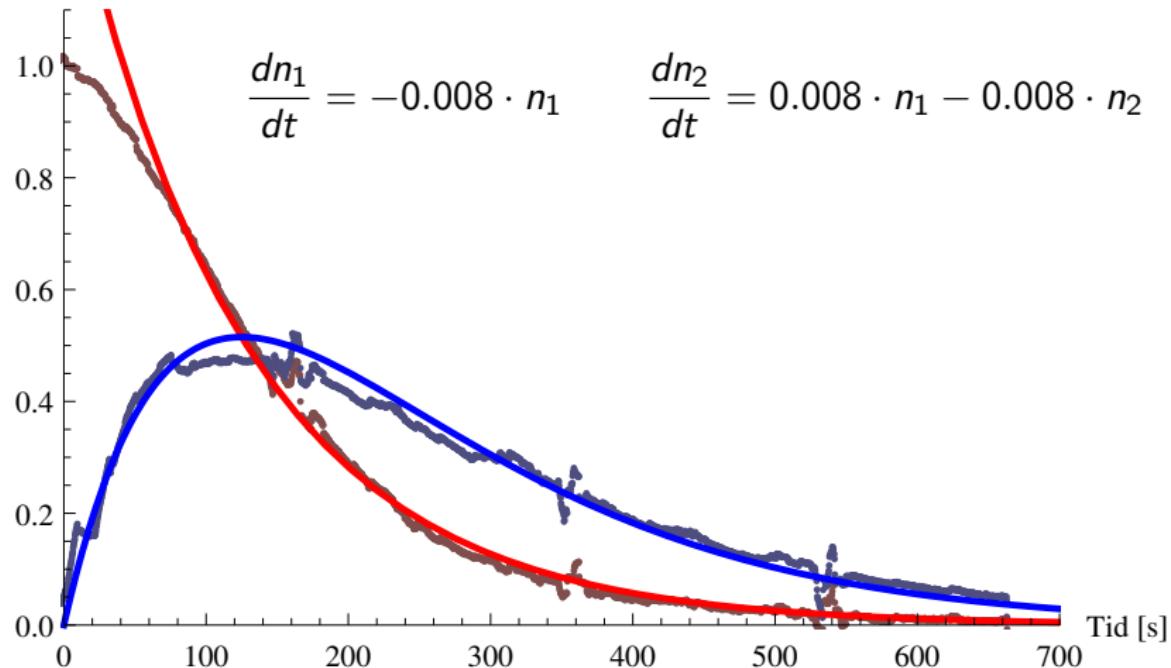
# Eksperimentet

Stofmængde [Arb]



# Eksperimentet

Stofmængde [Arb]



# Indhold

1 Hvordan har jeg lært om differentialligninger?

2 Ligninger og differentialligninger

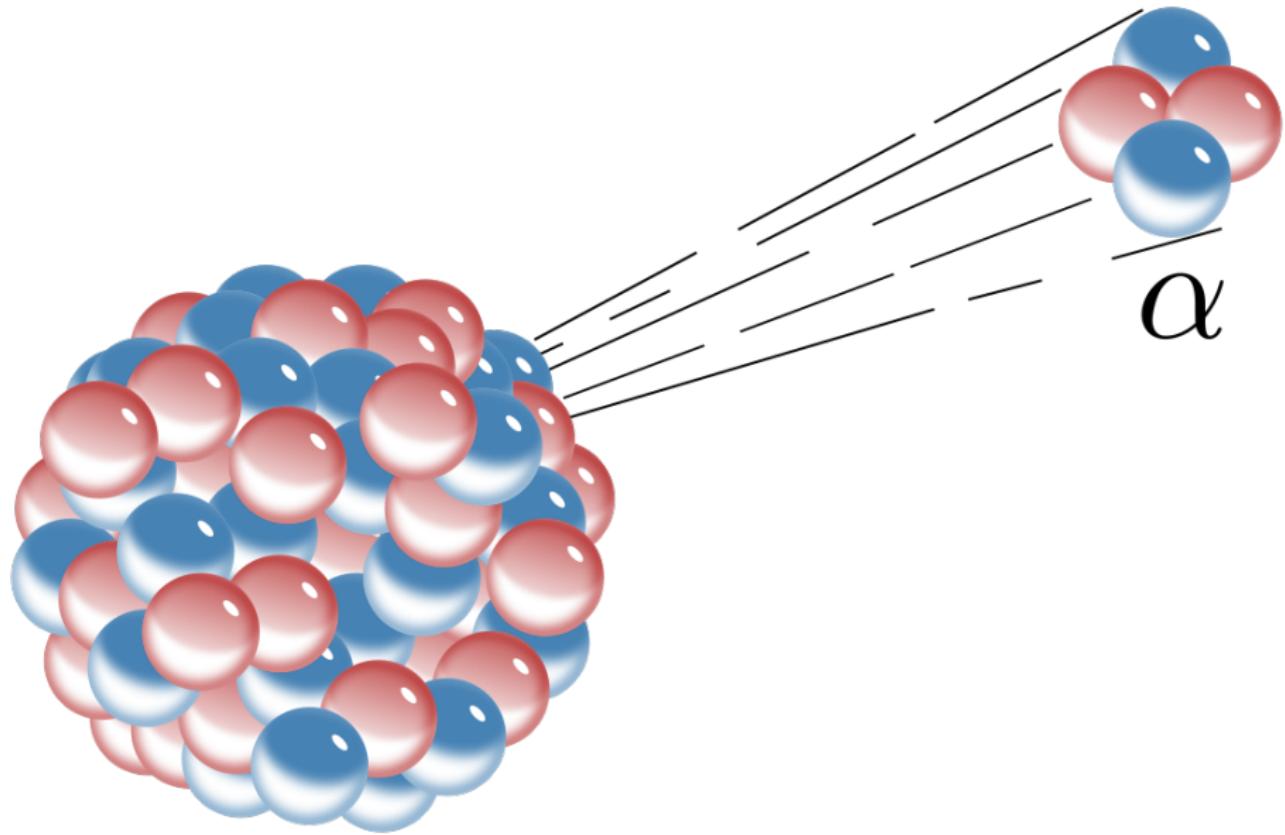
3 Første ordens differentialligninger

4 Koblede differentialligninger

5 Flere eksempler på differentialligninger

- Radioaktivt henfald
- Eksponentiel vækst
- Logistisk vækst
- Lotka–Volterra populations modeller
- Kemiske reaktioner
- Afkøling af personer

# Radioaktivt henfald

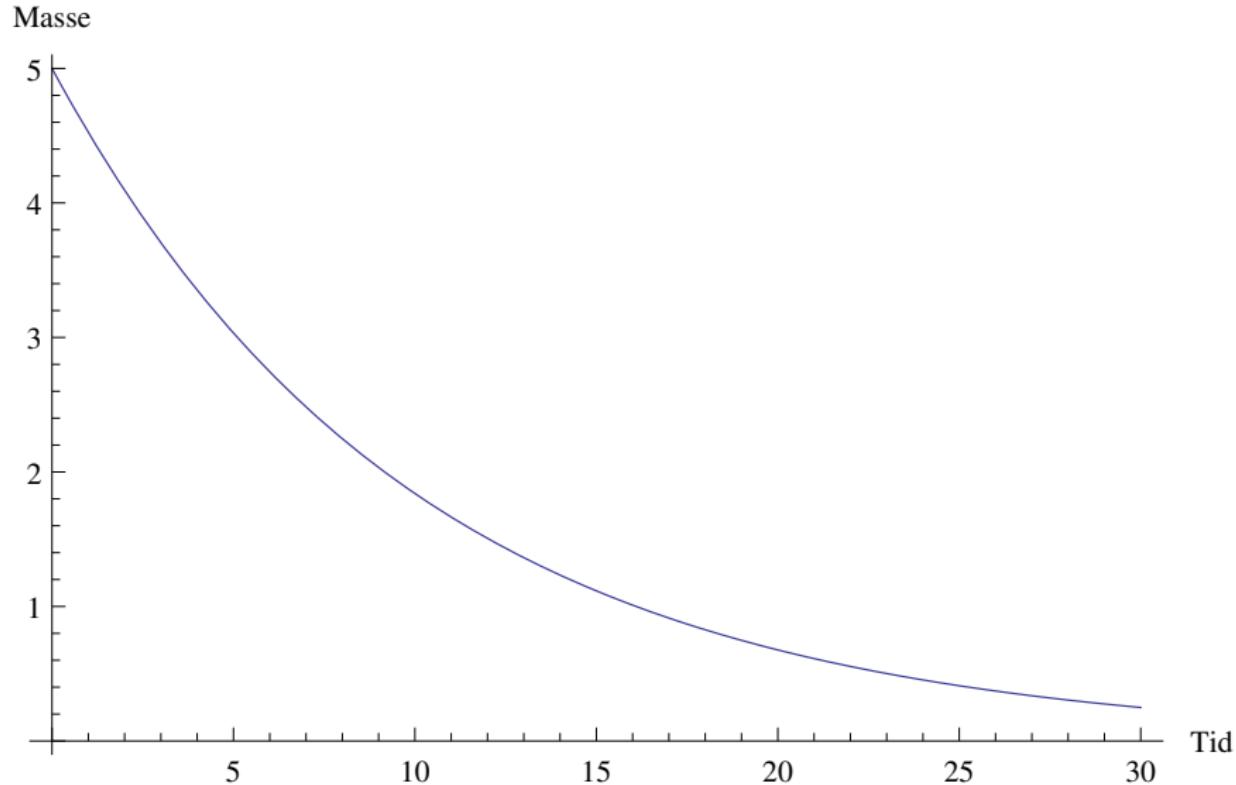


# Radioaktivt henfald

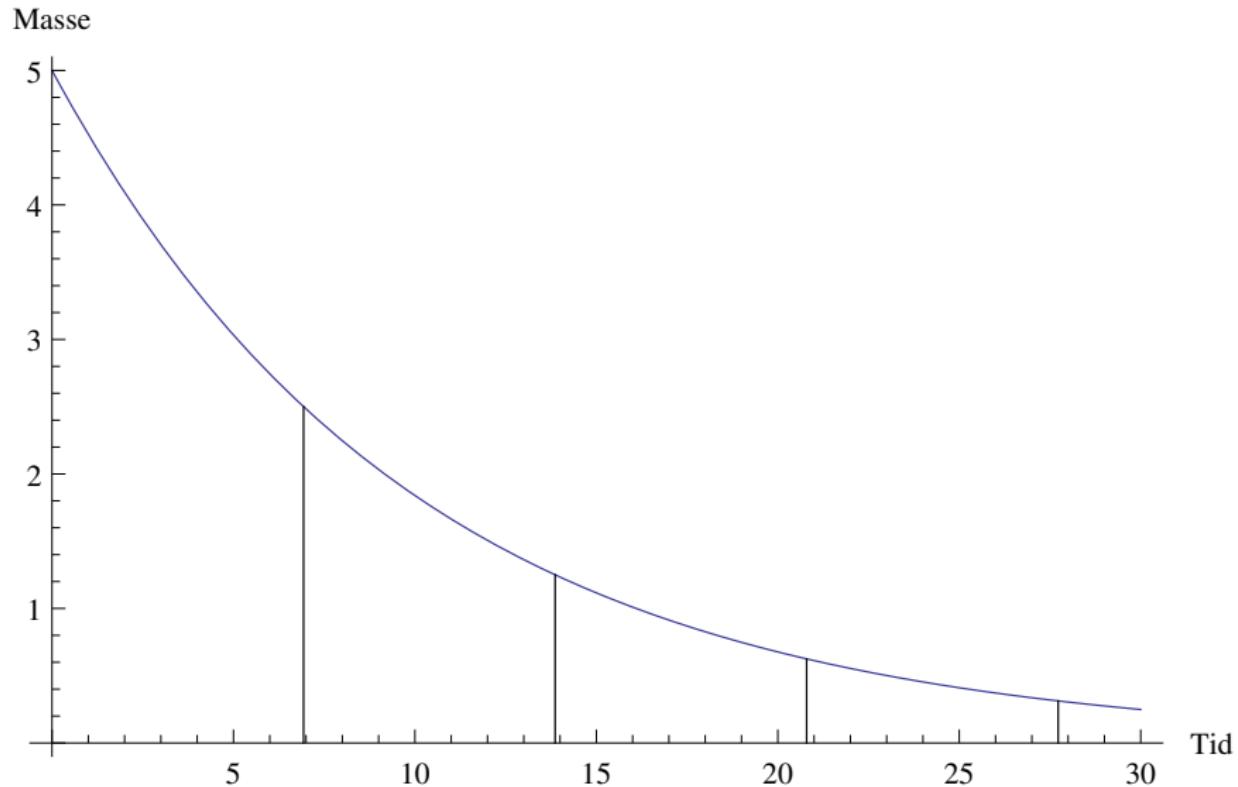
- $\lambda$  er en konstant for det radioaktive stof
- $N$  er stofmængden

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

# Radioaktivt henfald



# Radioaktivt henfald



# Halveringstid

$$\frac{y(0)}{2} = y(t_{1/2})$$

$$\frac{y_0 \cdot \exp(-\lambda 0)}{2} = y_0 \cdot \exp(-\lambda t_{1/2})$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-\lambda t_{1/2})$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

# Eksponentiel vækst – Celle deling



<http://vimeo.com/14316782>

# Eksponentiel vækst – Celle deling

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$\frac{dN}{dt} = 0.1 \cdot N$$

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(kt)$$

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(0.1t)$$

# Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

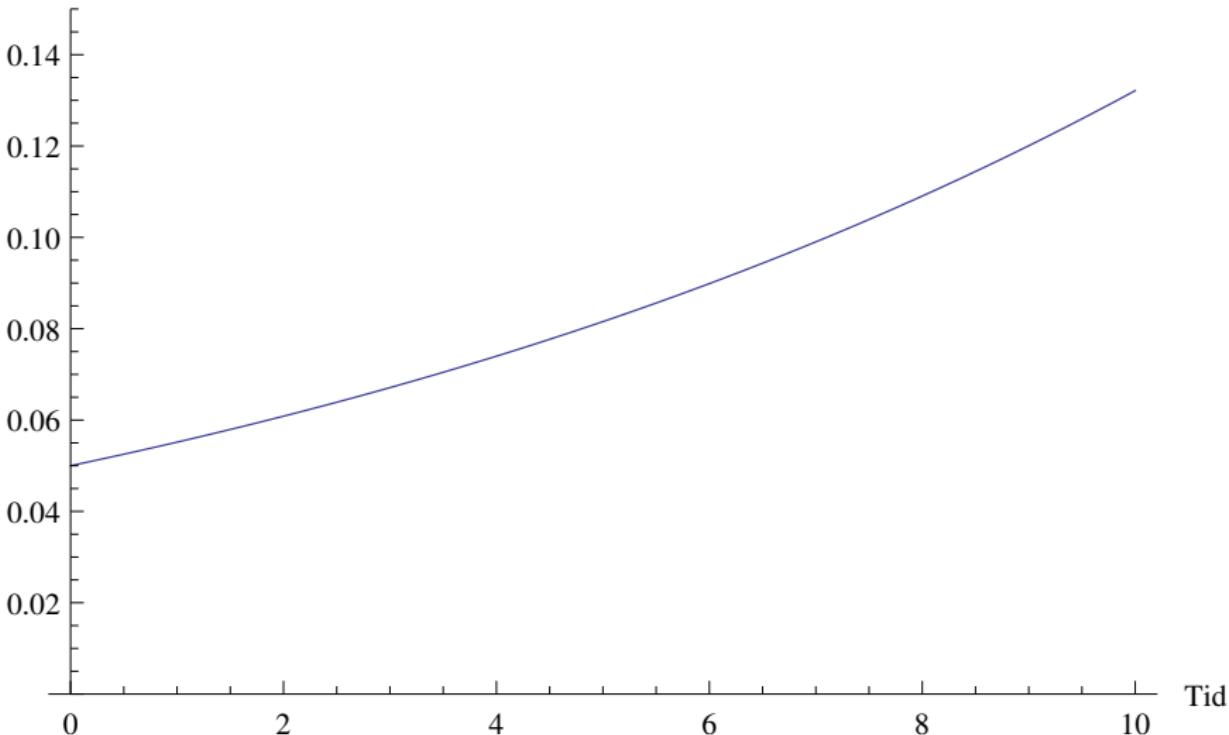
# Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

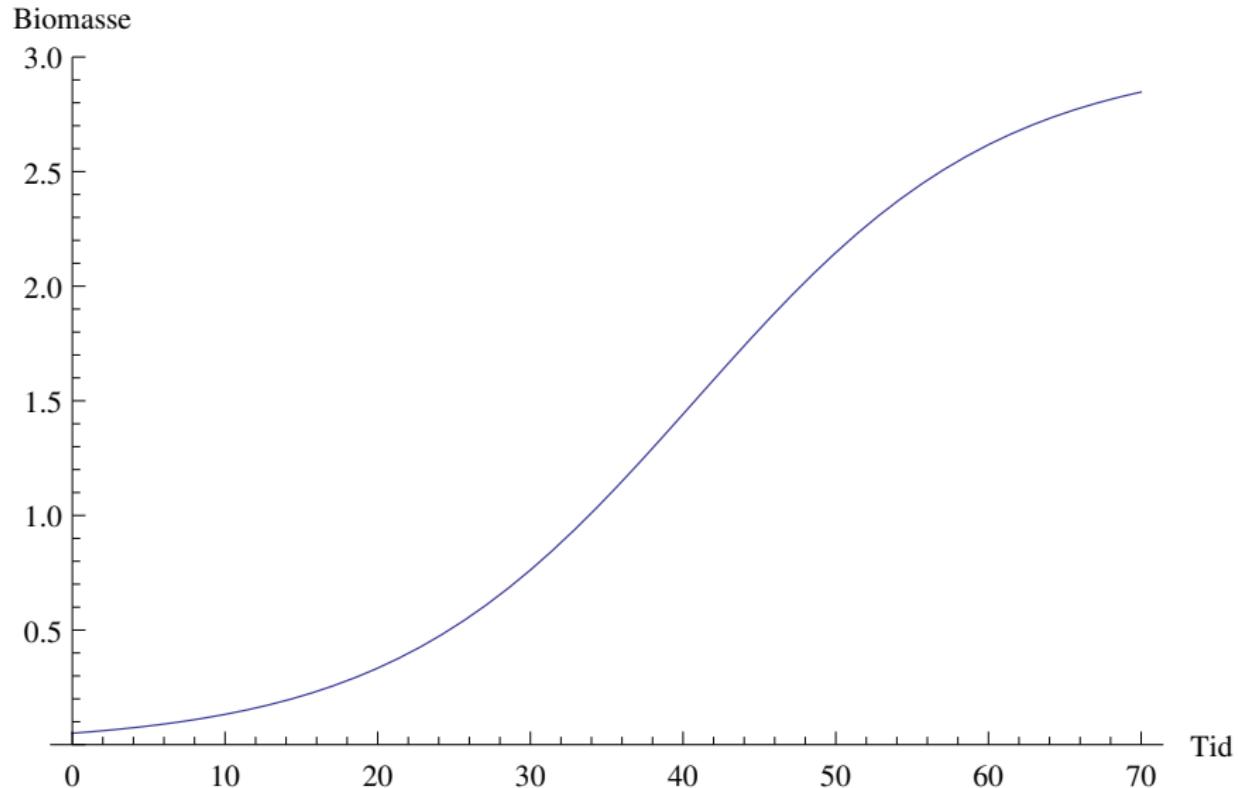
$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{N_{max}}\right)$$

# Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

Biomasse



# Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang



# Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

Biomasse

3.0

2.5

2.0

1.5

1.0

0.5

0

10

20

30

40

50

60

70

Tid

# Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$N(t) = a \cdot \exp(k \cdot t)$$

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{N_{max}}\right)$$

$$\begin{aligned}N(t) &= \frac{N_{max}}{1 + a \cdot \exp(-k \cdot t)} \\&= \frac{N_{max}y_0}{y_0 + (N_{max} - y_0)e^{-kt}}\end{aligned}$$

# Lotka–Volterra populations modeller



# Lotka–Volterra populations modeller

Ræve  $R$  og kaniner  $K$  på en lille ø

Kanin bestanden vokser proportionelt  $\alpha \cdot K$ .

Når en kanin og en ræv mødes

- mindskes kanin bestanden  $\beta \cdot K \cdot R$
- øges ræve bestanden  $\gamma \cdot K \cdot R$

Uden noget at spise mindskes ræve bestanden proportionelt  $\delta \cdot R$

# Lotka–Volterra populations modeller

$$\frac{dK}{dt} = \alpha \cdot K - \beta \cdot K \cdot R$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot K \cdot R - \delta \cdot R$$

$$\alpha = 0.0507$$

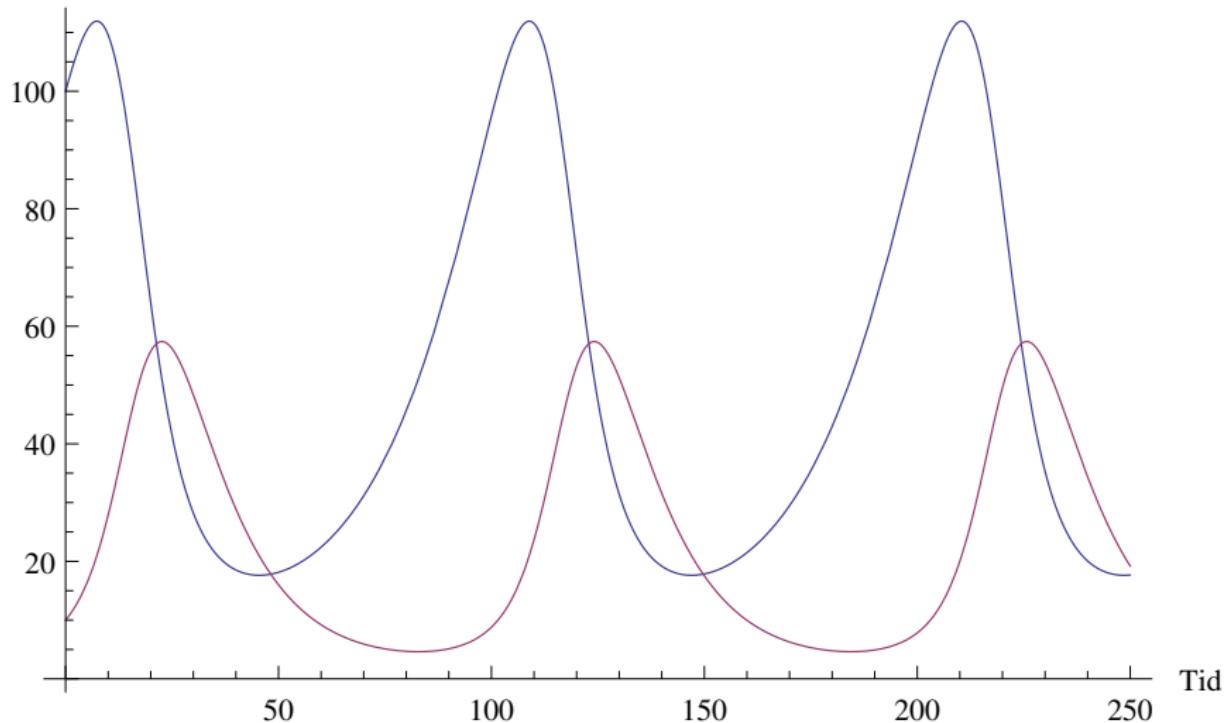
$$\beta = 0.00242$$

$$\gamma = 0.001782$$

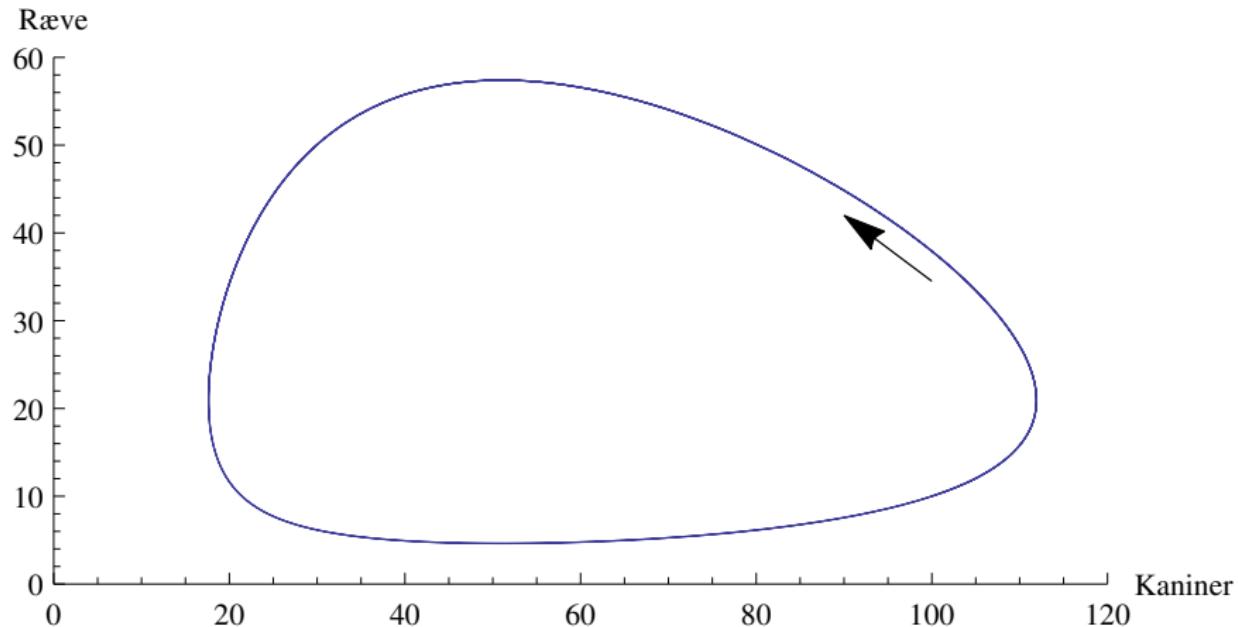
$$\delta = 0.0909$$

# Lotka–Volterra populations modeller

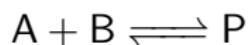
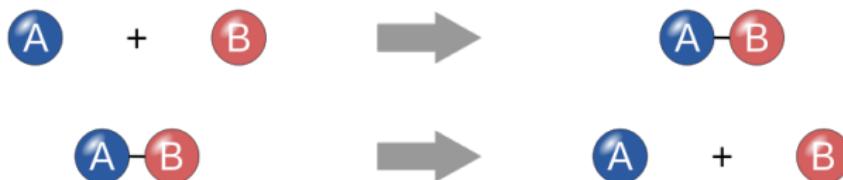
Individder



## Lotka–Volterra populations modeller – Fase plot



# Kemiske reaktioner



Hastighed til højre:  $k_1 \cdot [A] \cdot [B]$

Hastighed til venstre:  $k_2 \cdot [P]$

# Kemiske reaktioner

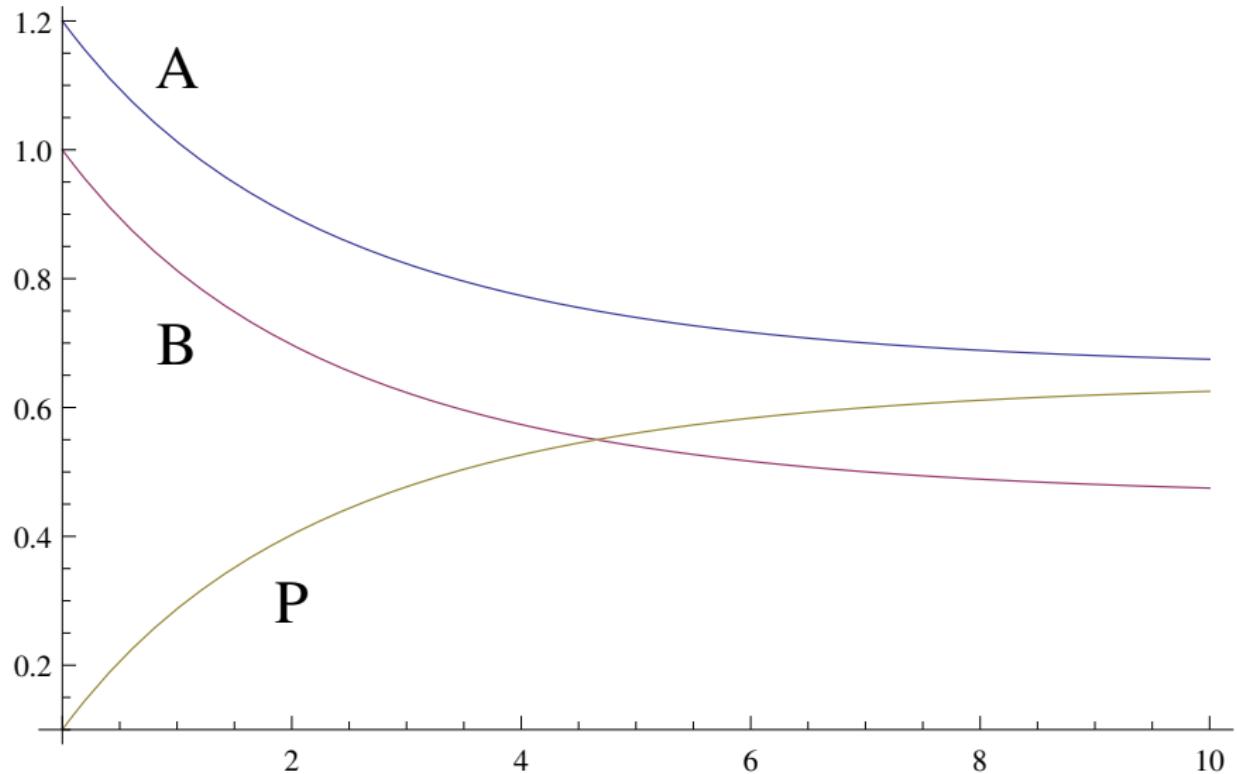
Tre koblede differentialligninger

$$\frac{d[A]}{dt} = k_2 \cdot [P] - k_1 \cdot [A] \cdot [B]$$

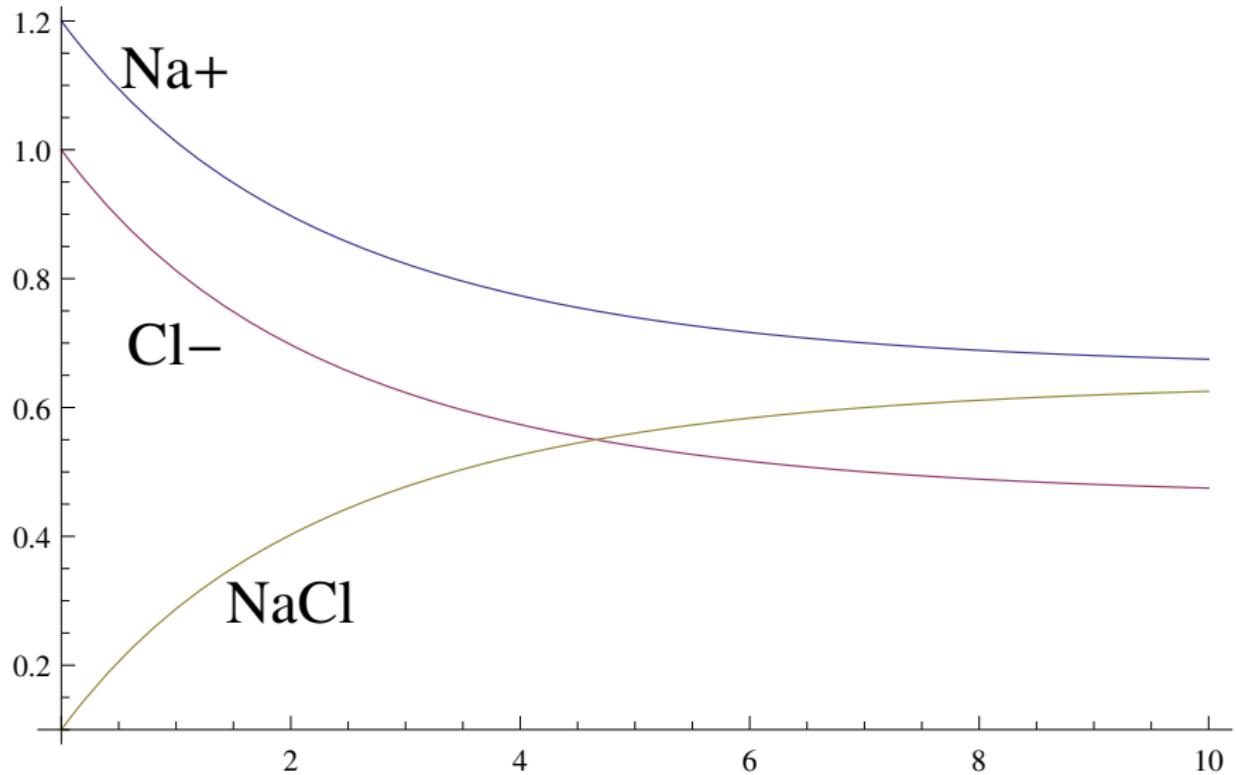
$$\frac{d[B]}{dt} = k_2 \cdot [P] - k_1 \cdot [A] \cdot [B]$$

$$\frac{d[P]}{dt} = -k_2 \cdot [P] + k_1 \cdot [A] \cdot [B]$$

# Kemiske reaktioner

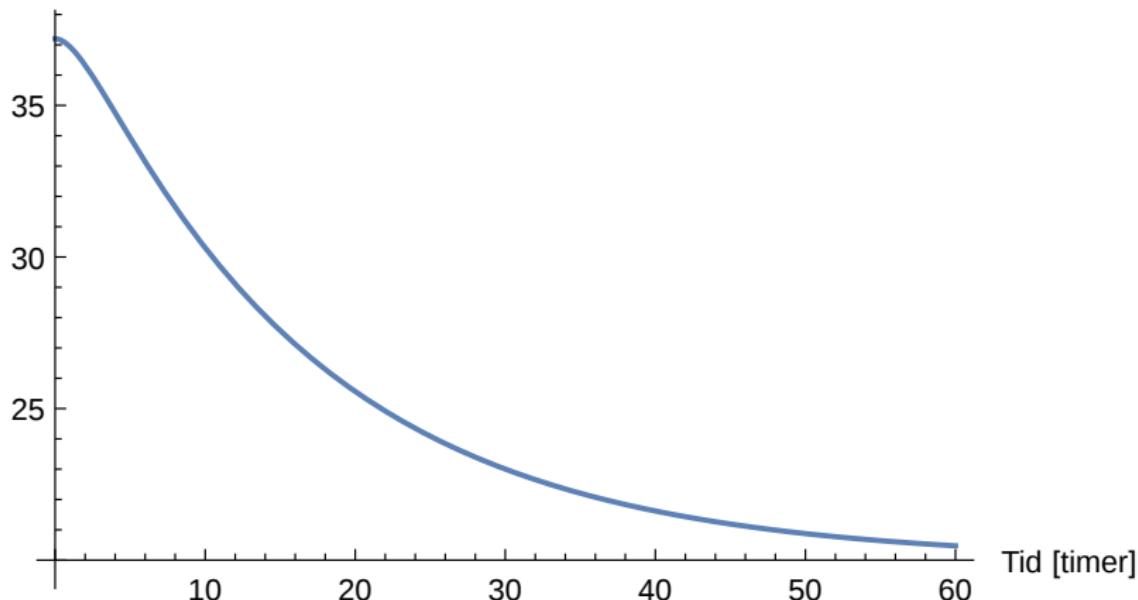


# Kemiske reaktioner



# Afkøling af personer

Temperatur [celcius]



Person på 70 kg ved en rum temperatur på 20°.

Hensges nomogram.

# Afkøling af personer

Formlen

$$\frac{T_{\text{rectum}} - T_{\text{ambient}}}{37.2 - T_{\text{ambient}}} = 1.11 \exp(Bt) - 0.11 \exp(10Bt)$$

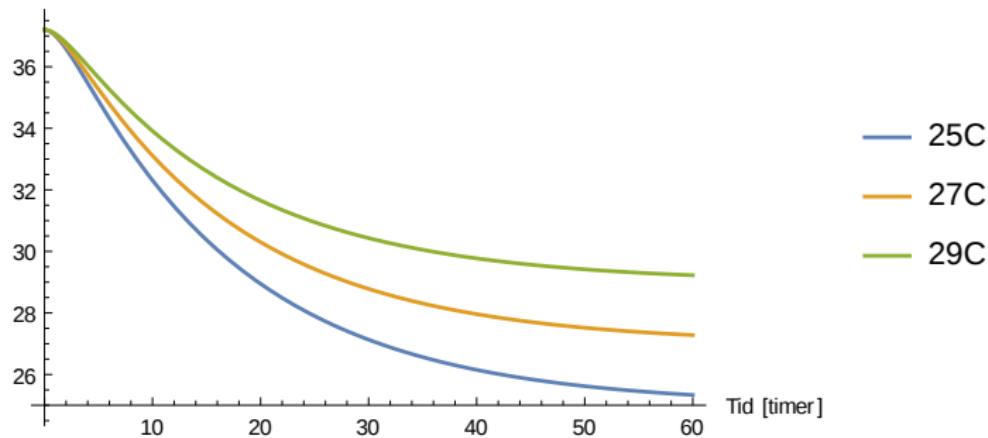
$$B = 0.0284 - \frac{1.2815}{m^{0.625}}$$

$$m = 70$$

$$B = -0.0616601$$

# Afkøling af personer

Temperatur [celcius]



# Afkøling af personer

Men hvor kommer formlen fra?

Fra to koblede differentialligninger!

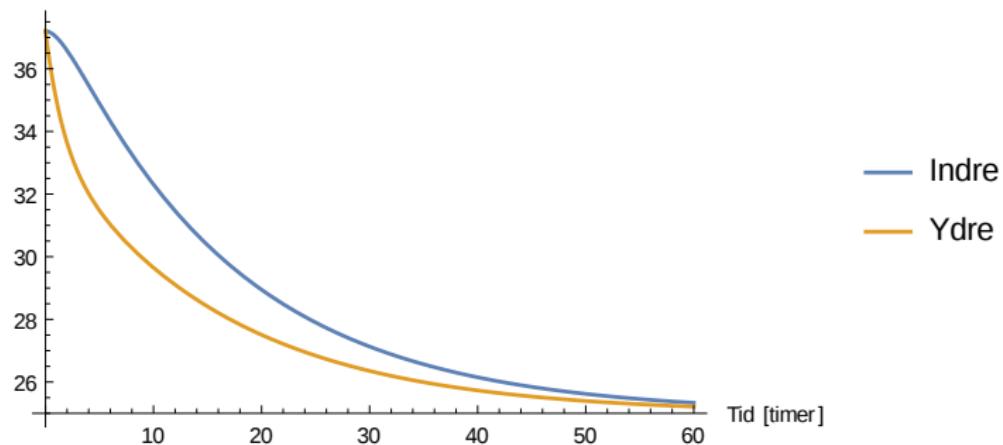
$$\frac{dT_1}{dt} = 0.17(T_2(t) - T_1(t))$$

$$\frac{dT_2}{dt} = 0.29(T_1(t) - T_2(t)) + 0.23(T_{\text{rum}} - T_2(t))$$

Der beskriver hvordan temperaturen i midten af kroppen  $T_1$  og den ydre del af kroppen  $T_2$  ændres over tid.

# Afkøling af personer

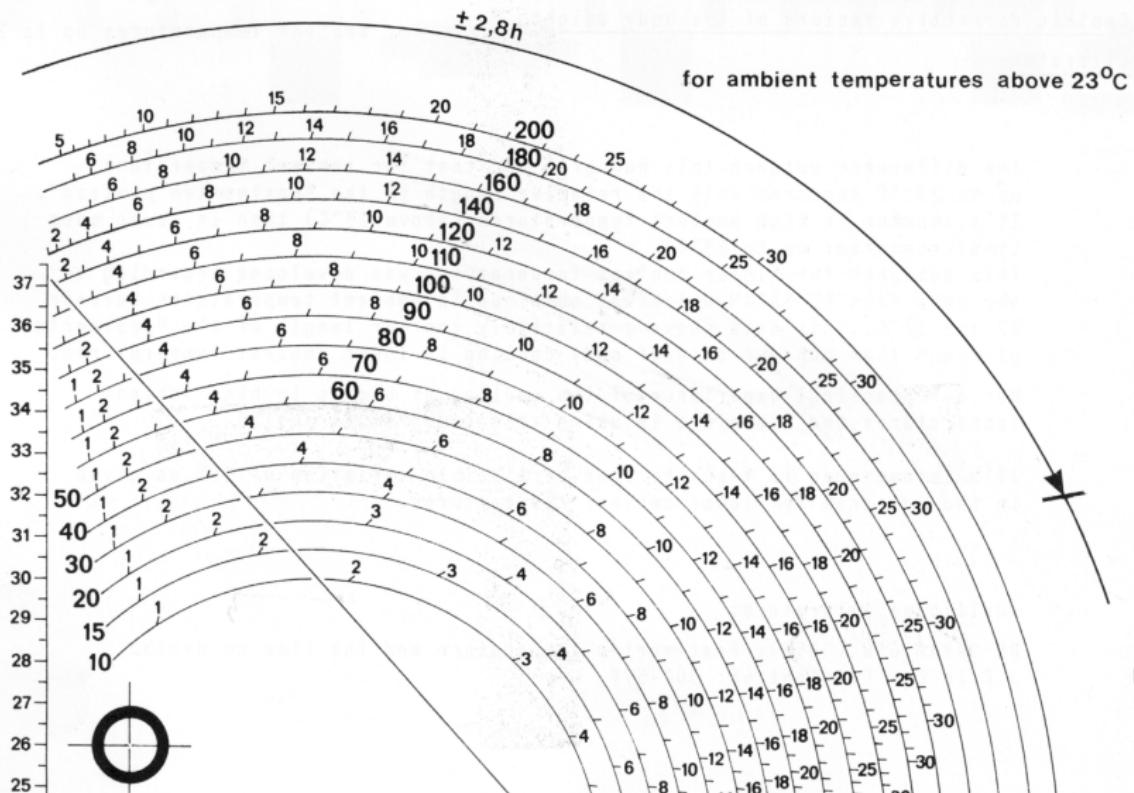
Temperatur [celcius]



# Afkøling af personer

PERMISSIBLE VARIATION OF 95%

## TEMPERATURE TIME OF DEATH RELATING NOMOGRAM

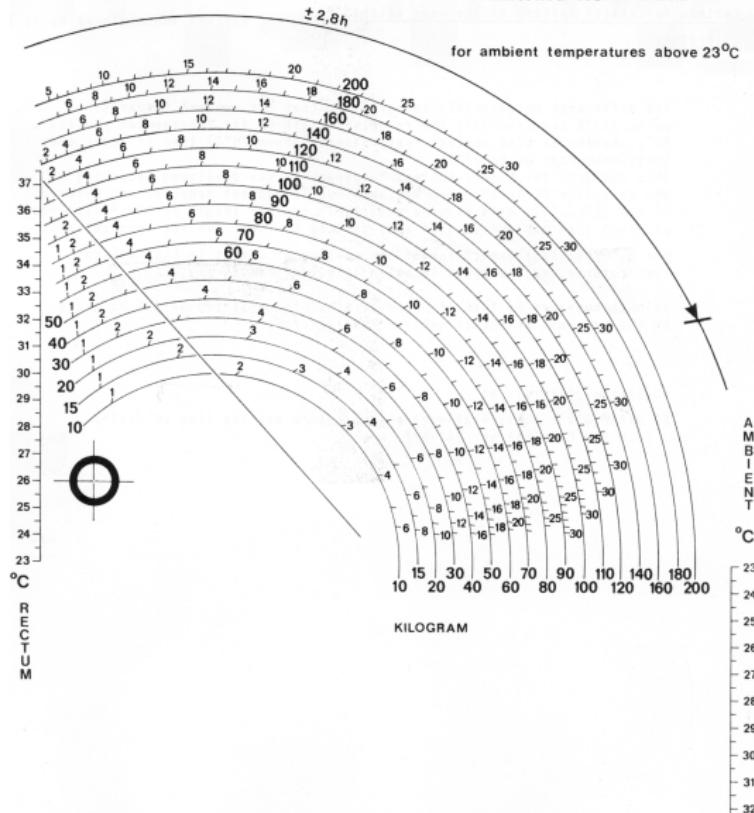


# Hensges nomogram

PERMISSIBLE VARIATION OF 95%

## TEMPERATURE TIME OF DEATH

### RELATING NOMOGRAM



# Hvorfor differentialligninger?

## Påstand

Verden er lettere at beskrive ved brug af differentialligninger.

# Hvorfor differentialligninger?

## Påstand

Verden er lettere at beskrive ved brug af differentialligninger.

Vist ved eksempler.

# Spørgsmål