Instituto Federal de Brasília

Campus Taguatinga

Superior em Computação

Henrique Tavares Aguiar

João Vitor Souza Rezende

Polinômio de Taylor e Raízes por Métodos Iterativos

(Método do Ponto Fixo, de Newton e da Bissecção)

Taguatinga

2019

Henrique Tavares Aguiar

João Vitor Souza Rezende

Polinômio de Taylor e Raízes por Métodos Iterativos

(Método do Ponto Fixo, de Newton e da Bissecção)

Trabalho apresentado à disciplina de Cálculo Numérico, do curso de Ciência da Computação, referente à parte da nota do primeiro módulo de avaliações.

Professor: Dhiego Loiola de Araújo

Taguatinga

2019

1 POLINÔMIO DE TAYLOR

1.1 Definição

Seja *f* uma função de classe C^{n+1} em um intervalo contendo *a* como ponto interior. Então, o polinômio de Taylor gerado por *f* em x = a é:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1.2 Analisando o Polinômio de Taylor com uma função

Considerando a função f abaixo a partir do ponto a = 0.

$$f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$$

Utilizando o intervalo [0, 4], com 11 divisões igualmente espaçadas obtém-se o vetor x = [0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4, 2.8, 3.2, 3.6, 4.0], para análise de comportamento do polinômio.

1.2.1 Os Polinômios de Taylor e a f(x):

$$P_0(x) = 1{,}2$$

$$P_1(x) = -0{,}25x + 1{,}2$$

$$P_2(x) = -0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$$

$$P_3(x) = -0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$$

$$P_4(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$$

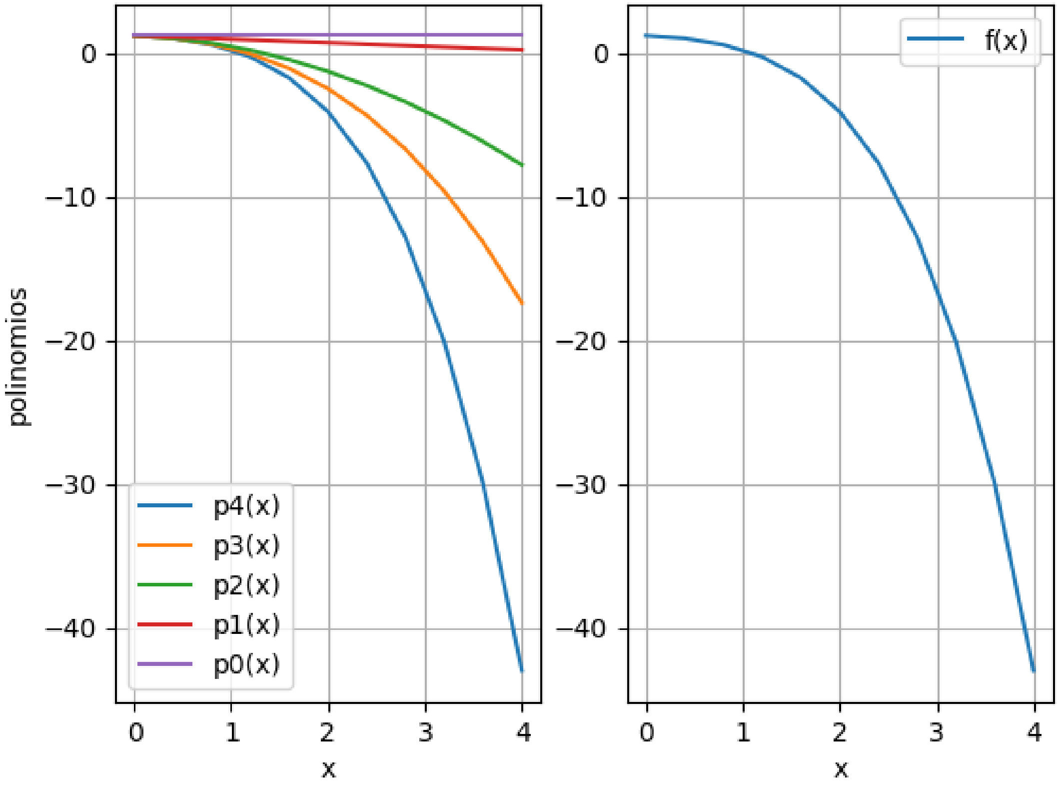

Figura 1 - Comparação entre o P_i e a f no intervalo [0, 4]

x	P0(x)	P1(x)	P2(x)	P3(x)	P4(x)	f(x)
0	**1.2**	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
0.4	1.2	1.1	1.02	1.0104	**1.00784**	1.00784
0.8	1.2	1	0.68	0.6032	**0.56224**	0.56224
1.2	1.2	0.9	0.18	-0.0792	**-0.28656**	-0.28656
1.6	1.2	0.8	-0.48	-1.0944	**-1.74976**	-1.74976
2	1.2	0.7	-1.3	-2.5	**-4.1**	-4.1
2.4	1.2	0.6	-2.28	-4.3536	**-7.67136**	-7.67136
2.8	1.2	0.5	-3.42	-6.7128	**-12.85936**	-12.85936
3.2	1.2	0.4	-4.72	-9.6352	**-20.12096**	-20.12096
3.6	1.2	0.3	-6.18	-13.1784	**-29.97456**	-29.97456
4	1.2	0.2	-7.8	-17.4	**-43**	-43

Tabela 1 - Comportamento de x em cada polinômio P_i

(Pontos em negrito onde $|P_i(x) - f(x)| < 10^{-3}$)

2 Método da Bissecção

Vamos utilizar esse método para determinar, com maior exatidão, o ponto em que a função $f(x)$ se distancia de seu Polinômio de Taylor $P_n(x)$ de grau n por: 10^{-3}.

Para cada um dos polinômios anteriores, determinaremos esse ponto usando o método da bissecção se existir um intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, onde x_i é o ponto onde $|P_n(x) - f(x)| < 10^{-3}$ e x_{i-1} é o ponto anterior, a partir da função:

$$h_i(x) = P_i(x) - f(x) - 10^{-3}$$

Encontrando o ponto x_b com precisão de 10^{-4} , este ponto deve ser mais preciso que o ponto x_i.

Diferença entre os Polinomios de Taylor e a funcao original						
i	x	P0(x) - f(x)	P1(x) - f(x)	P2(x) - f(x)	P3(x) - f(x)	P4(x) - f(x)
0	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	**0.4**	**0.19216**	**0.09216**	**0.01216**	**0.00256**	0.0
2	0.8	0.63776	0.43776	0.11776	0.04096	1.11E-16
3	1.2	1.48656	1.18656	0.46656	0.20736	-1.11E-16
4	1.6	2.94976	2.54976	1.26976	0.65536	-2.22E-16
5	2	5.3	4.8	2.8	1.6	0.0
6	2.4	8.87136	8.27136	5.39136	3.31776	-2.66E-15
7	2.8	14.05936	13.35936	9.43936	6.14656	1.78E-15
8	3.2	21.32096	20.52096	15.40096	10.48576	3.55E-15
9	3.6	31.17456	30.27456	23.79456	16.79616	-3.55E-15
10	4	44.2	43.2	35.2	25.6	0.0

Tabela 2 – pontos em destaque onde $|P_i(x) - f(x)| > 10^{-3}$

Obs: Não há ponto algum em $P_4(x)$, tal que $|P_4(x) - f(x)| > 10^{-3}$. Logo não é preciso usar do método da bissecção neste polinômio.

1) $P_0(x) = 1{,}2$

i	x0	xk	xb	h(xb)	P0(xb)	f(xb)
1	0	0.4	0.2	0.07036	1.2	1.12864
2	0	0.2	0.1	0.02916	1.2	1.16984
3	0	0.1	0.05	0.012769375	1.2	1.186230625
4	0	0.05	0.025	0.005564883	1.2	1.193435117
5	0	0.025	0.0125	0.00220342	1.2	1.19679658
6	0	0.0125	0.00625	0.000582068	1.2	1.198417932
7	0	0.00625	0.003125	-0.000213863	1.2	1.199213863
8	0.003125	0.00625	0.0046875	0.000182877	1.2	1.198817123
9	0.003125	0.0046875	**0.00390625**	-1.57991E-05	1.2	1.199015799

Tabela 3 – Encontrando o xb *tal que* $h_0(xb) < 10^{-4}$

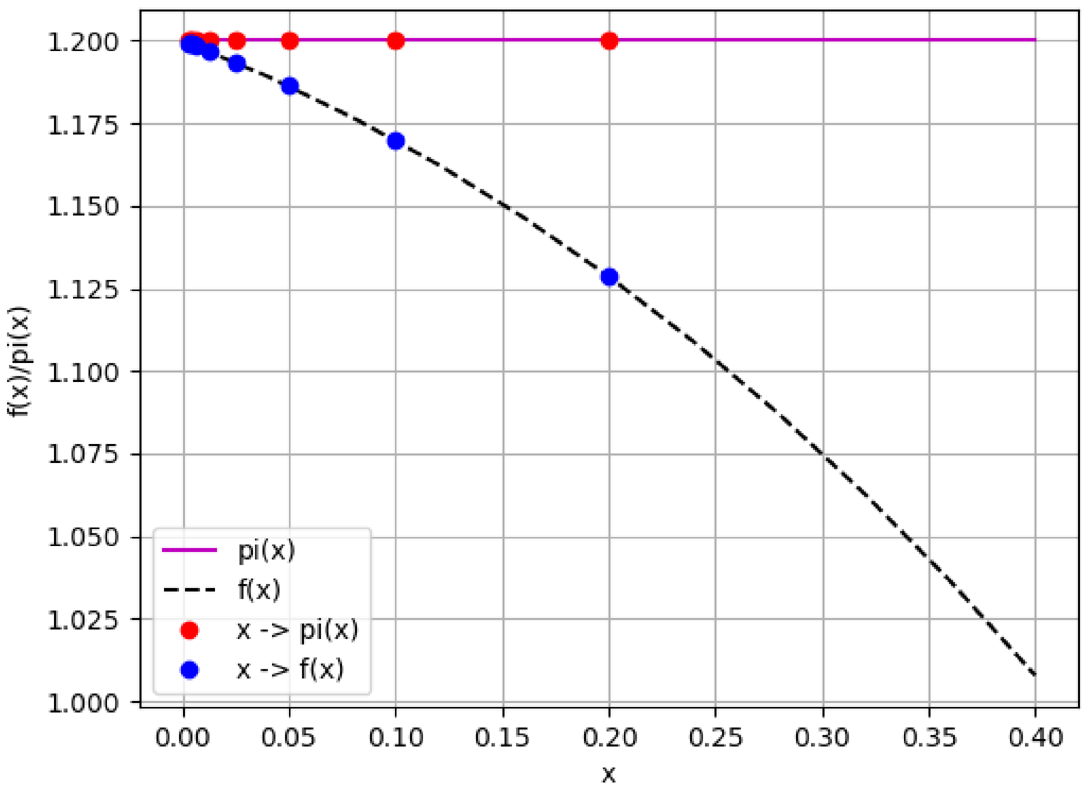

Figura 2 – $xb = 0{,}00390625,\ P_0(xb) = 1.2,\ f(xb) = 1.199015799$

2) $P_1(x) = -0,25x + 1,2$

i	x0	xk	xb	h(xb)	P1(xb)	f(xb)
1	0	0.4	0.2	0.02036	1.15	1.12864
2	0	0.2	0.1	0.00416	1.175	1.16984
3	0	0.1	0.05	0.000269375	1.1875	1.186230625
4	0	0.05	0.025	-0.000685117	1.19375	1.193435117
5	0.025	0.05	0.0375	-0.000288767	1.190625	1.189913767
6	0.0375	0.05	**0.04375**	-3.00414E-05	1.1890625	1.188092541

Tabela 4 - Encontrando o xb *tal que* $h_1(xb) < 10^{-4}$

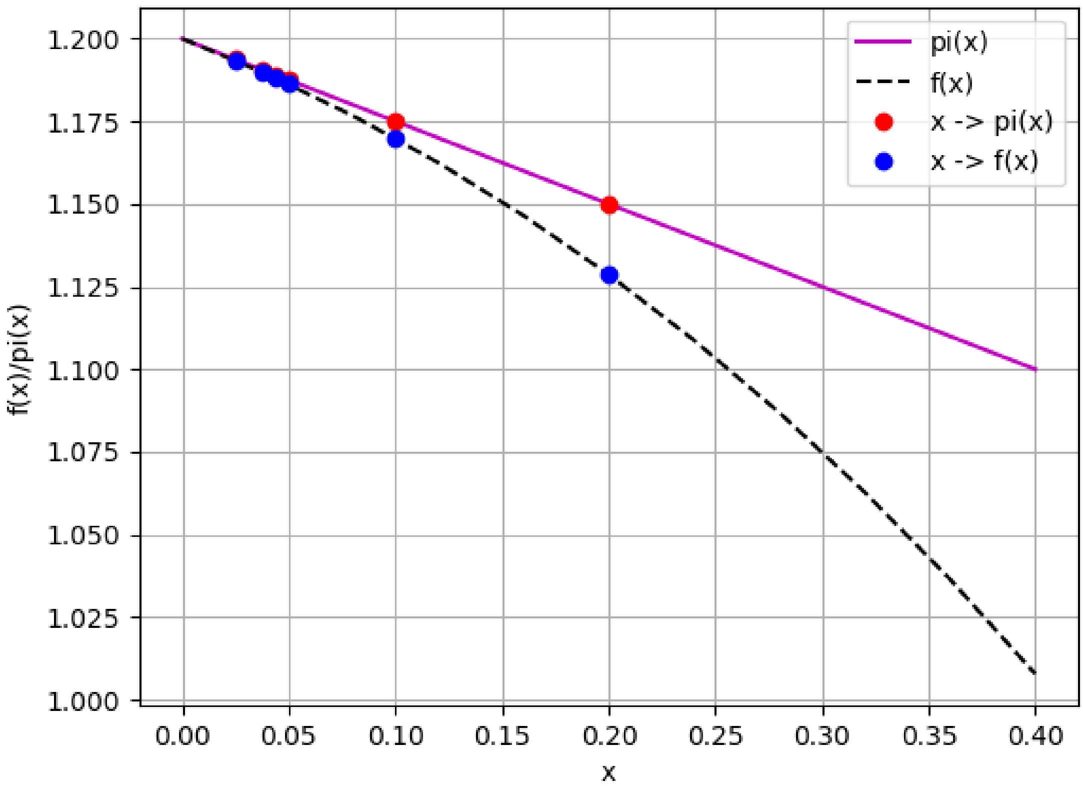

Figura 3 – $xb = 0,04375,\ P_1(xb) = 1.1890625,\ f(xb) = 1.188092541$

3) $P_2(x) = -0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$

i	x0	xk	xb	h(xb)	P2(xb)	f(xb)
1	0	0.4	0.2	0.00036	1.13	1.12864
2	0	0.2	0.1	-0.00084	1.17	1.16984
3	0.1	0.2	0.15	-0.000443125	1.15125	1.150693125
4	0.15	0.2	0.175	-0.000102305	1.1409375	1.140039805
5	0.175	0.2	0.1875	0.000112366	1.135546875	1.134434509
6	0.175	0.1875	**0.18125**	1.07437E-06	1.138261719	1.137260644

Tabela 5 - Encontrando o xb *tal que* $h_2(xb) < 10^{-4}$

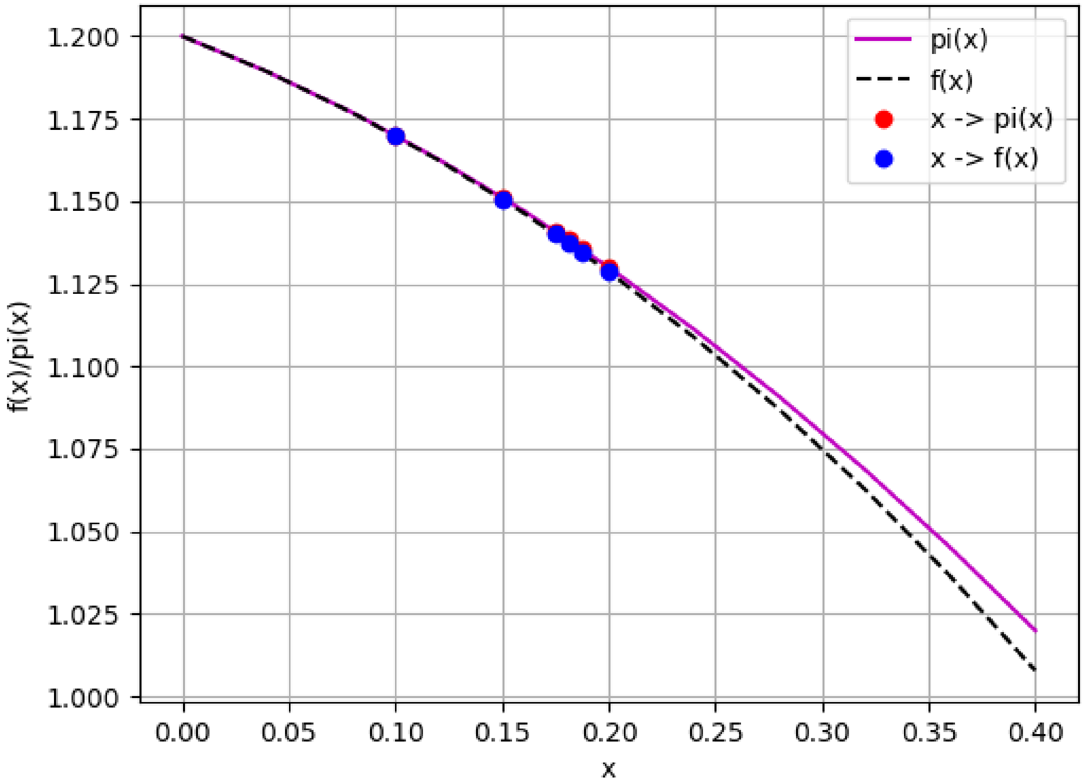

Figura 4 – $xb = 0{,}18125,\ P_2(xb) = 1.138261719,\ f(xb) = 1.13726044$

4) $P_3(x) = -0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$

i	x0	xk	xb	h(xb)	P3(xb)	f(xb)
1	0	0.4	0.2	-0.00084	1.1288	1.12864
2	0.2	0.4	0.3	-0.00019	1.07595	1.07514
3	0.3	0.4	0.35	0.000500625	1.04481875	1.043318125
4	0.3	0.35	0.325	0.000115664	1.060788281	1.059672617
5	0.3	0.325	**0.3125**	-4.63257E-05	1.068469238	1.067515564

Tabela 6 - Encontrando o xb *tal que* $h_3(xb) < 10^{-4}$

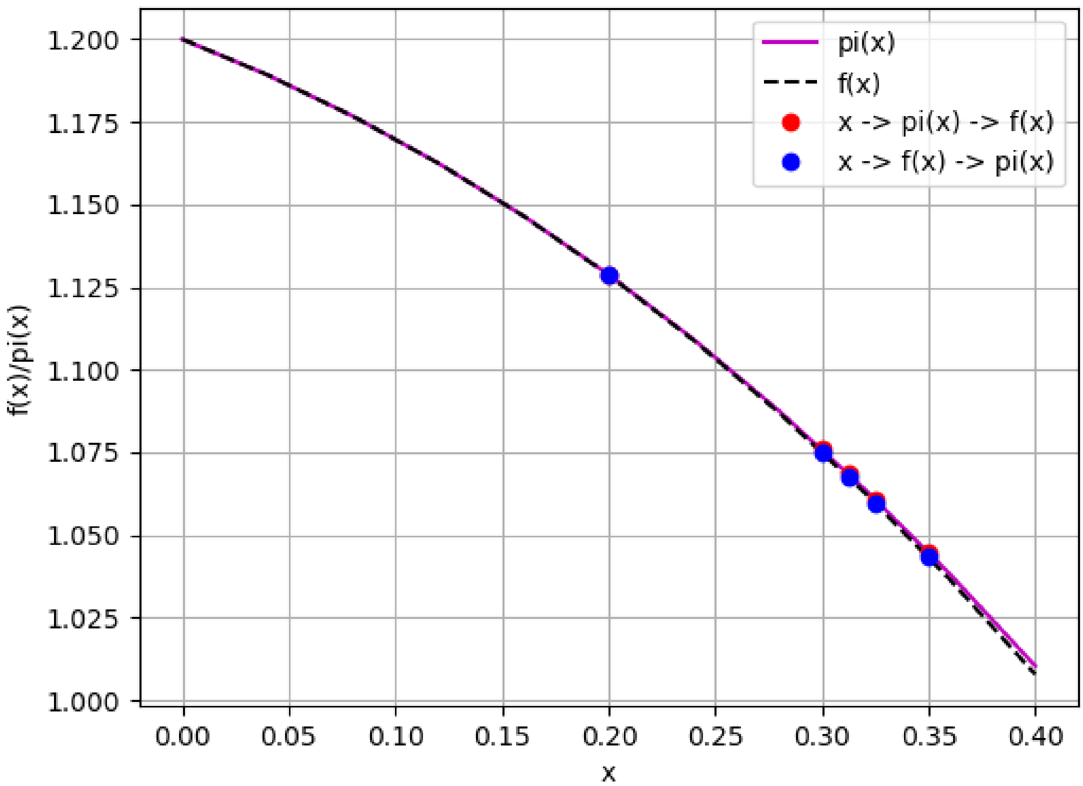

Figura 5 – $xb = 0{,}3125,\ P_3(xb) = 1.068469238,\ f(xb) = 1.067515564$

3 Comparação entre métodos

Iremos determinar para cada função a seguir uma aproximação da primeira raiz não negativa, com uma precisão de pelo menos 10^{-6}, utilizando os métodos de Newton, do Ponto Fixo e da Bissecção.

1) $f_1(x) = \cos(x) + 1$

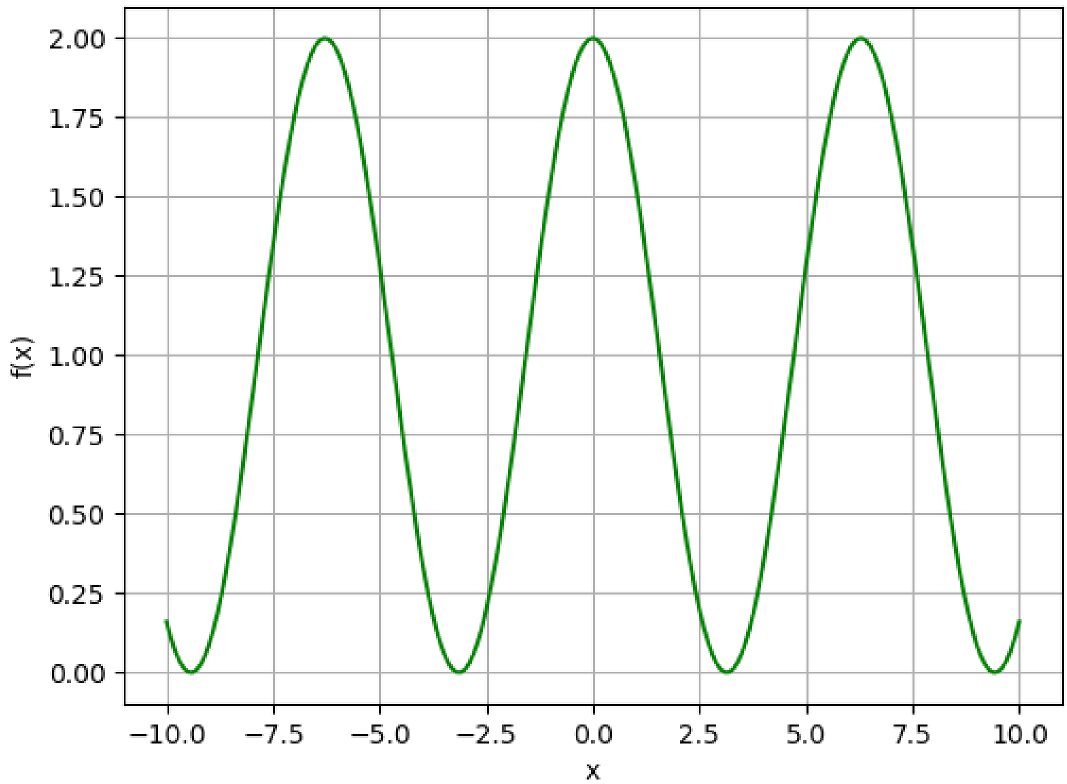

Figura 6 - $f_1(x)$

Obs: Como a função não apresenta valores negativos, não é possível usar o método da bissecção.

a) Ponto Fixo:

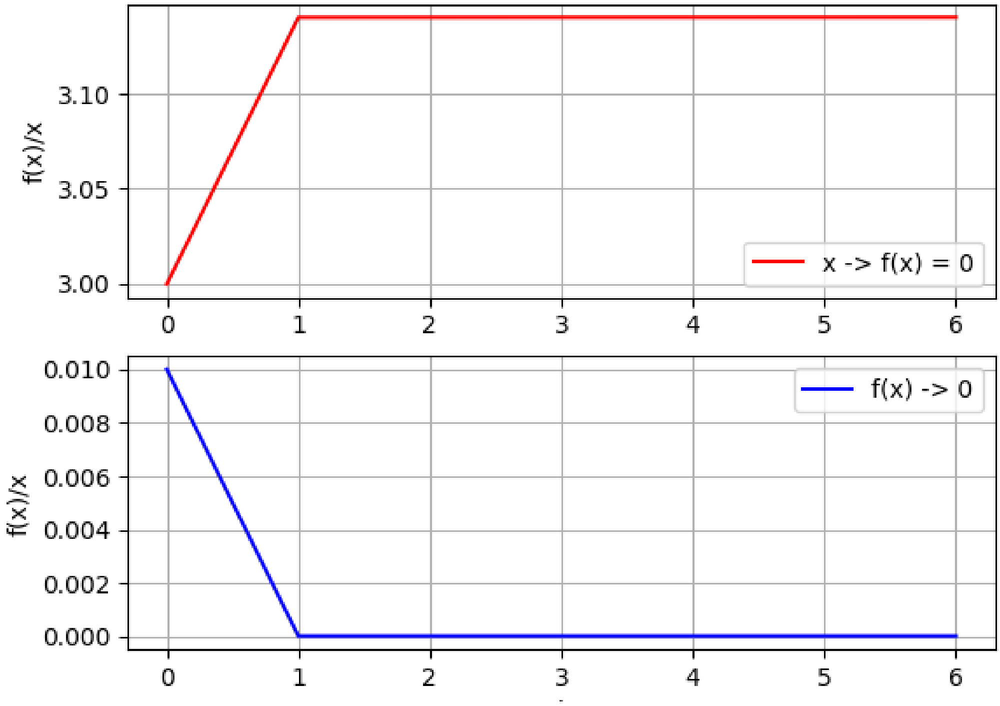

Figura 7 - $g_1(x_{i+1}) = x_i + 14 * f_1(x_i)$*, raiz = 3.14039, ponto inicial = 3*

(função e ponto inicial encontrados experimentalmente)

b) Newton:

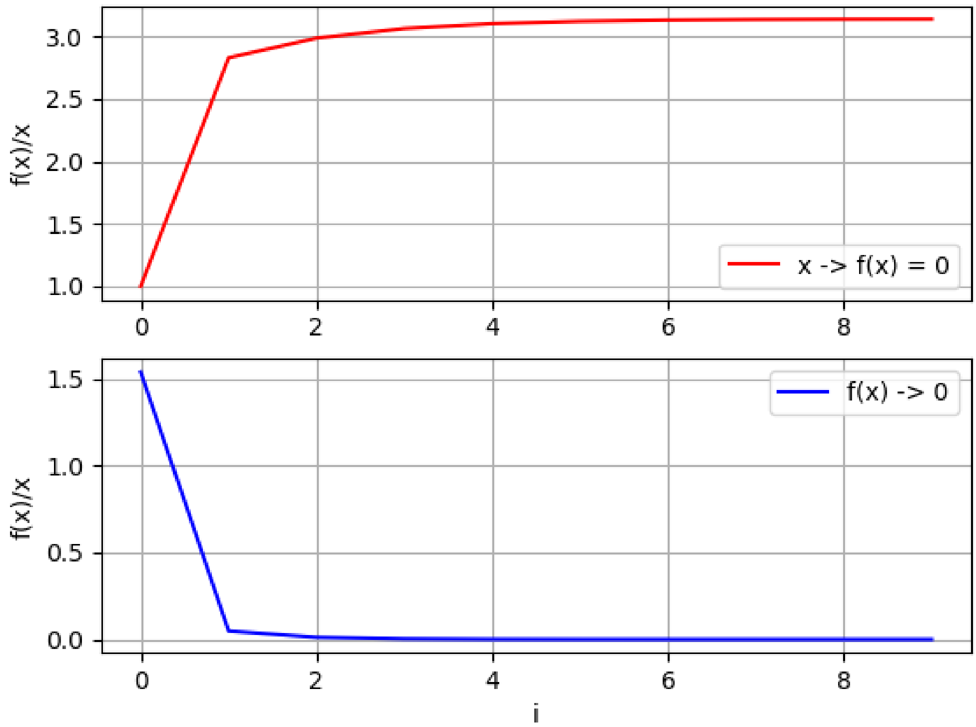

Figura 8 - $g_1(x_{i+1}) = x_i - \frac{f_1(x_i)}{f_1{}'(x_i)}$*, raiz = 3.140179, ponto inicial = 1*

2) $f_2(x) = 10 + (\mathrm{x} - 2)^2 - 10\cos(2\pi\mathrm{x})$

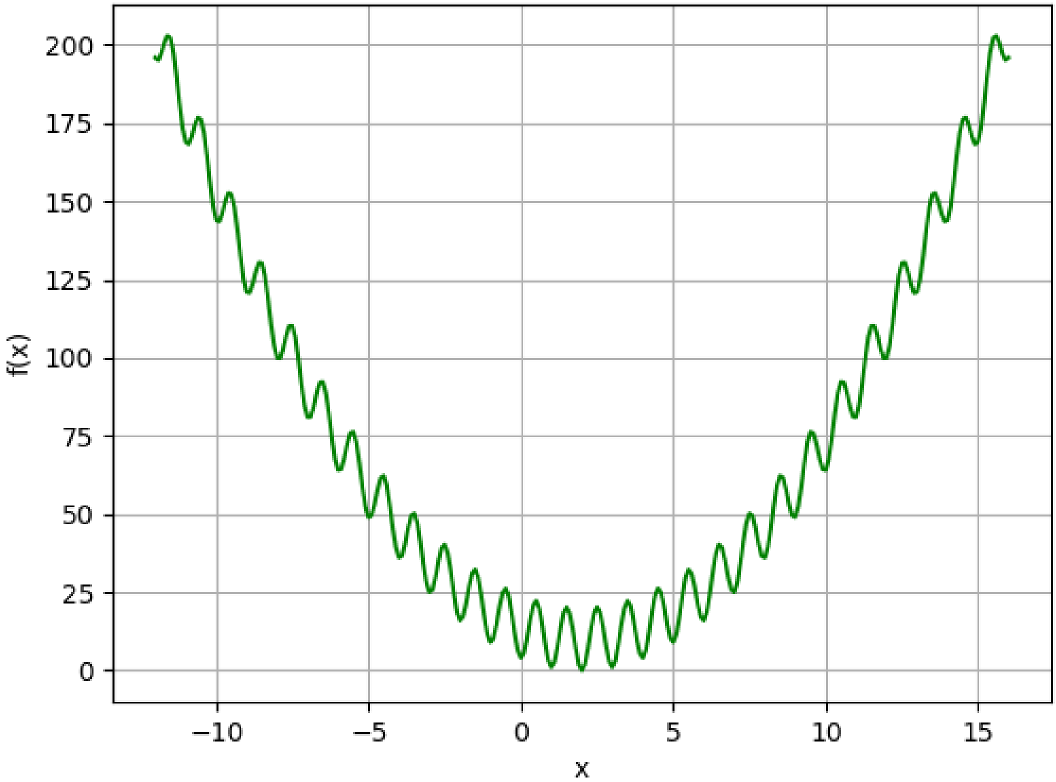

Figura 9 - $f_2(x)$

Obs: Como a função não apresenta valores negativos, não é possível usar o método da bissecção.

a) Ponto fixo:

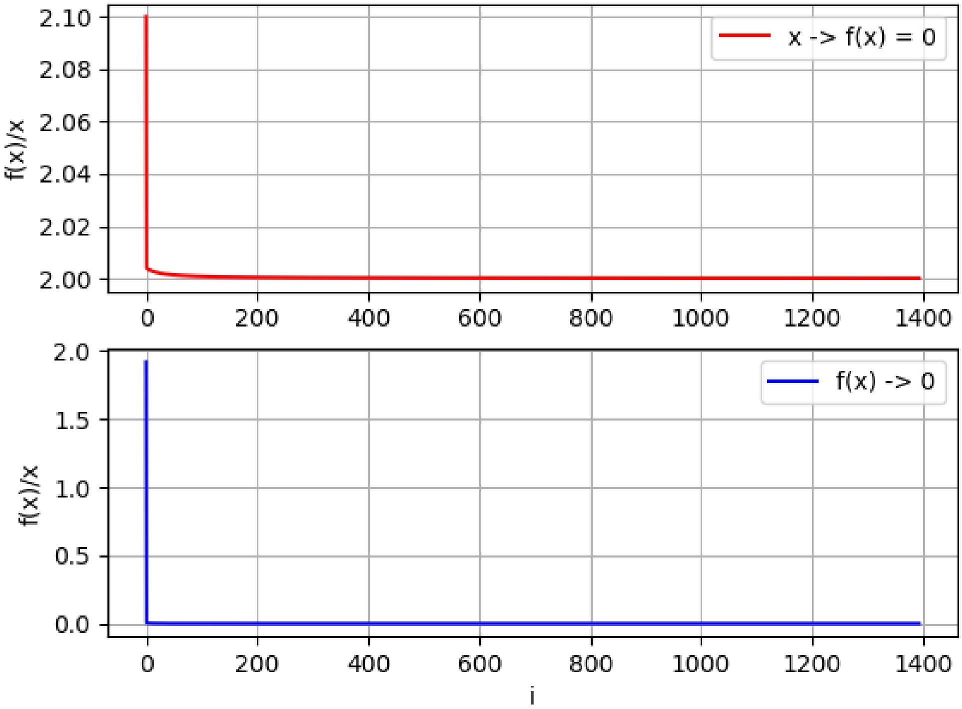

Figura 10 - $g_2(x_{i+1}) = x_i - \frac{f_2(x_i)}{20}$*, raiz = 2.000070983, ponto inicial = 2.1*

(função e ponto inicial encontrados experimentalmente)

b) Newton:

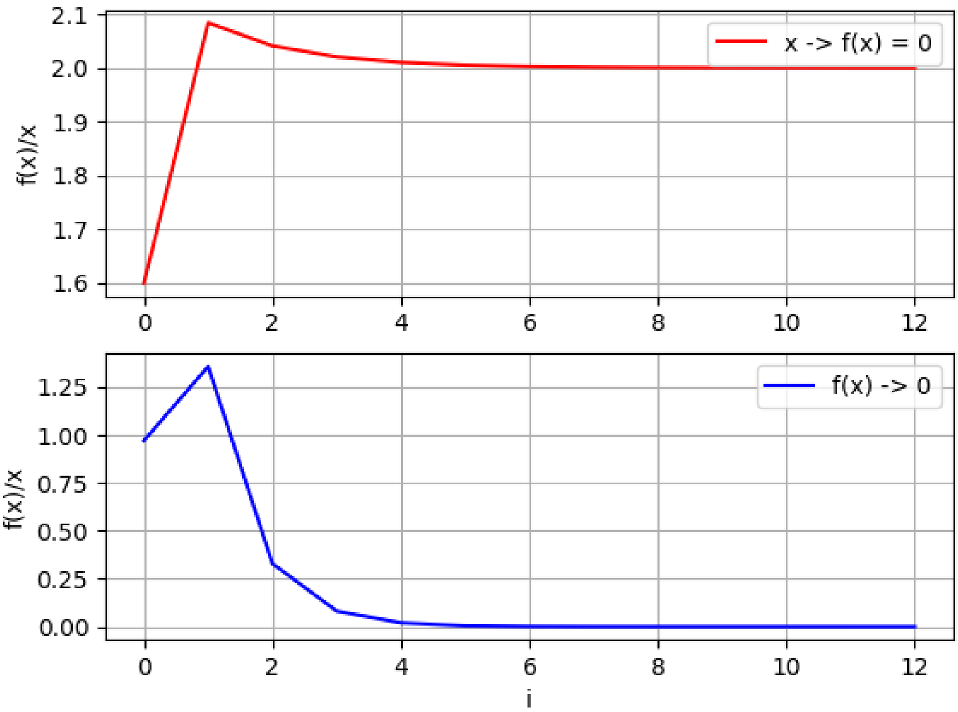

Figura 11 - $g_2(x_{i+1}) = x_i - \frac{f_2(x_i)}{f_2{'}(x_i)}$*, raiz = 2.0000396, ponto inicial = 1.6*

3) $f_3(x) = x^3 - 3x^2 * 2^{-x} + 3x * 4^{-x} - 8^{-x}$

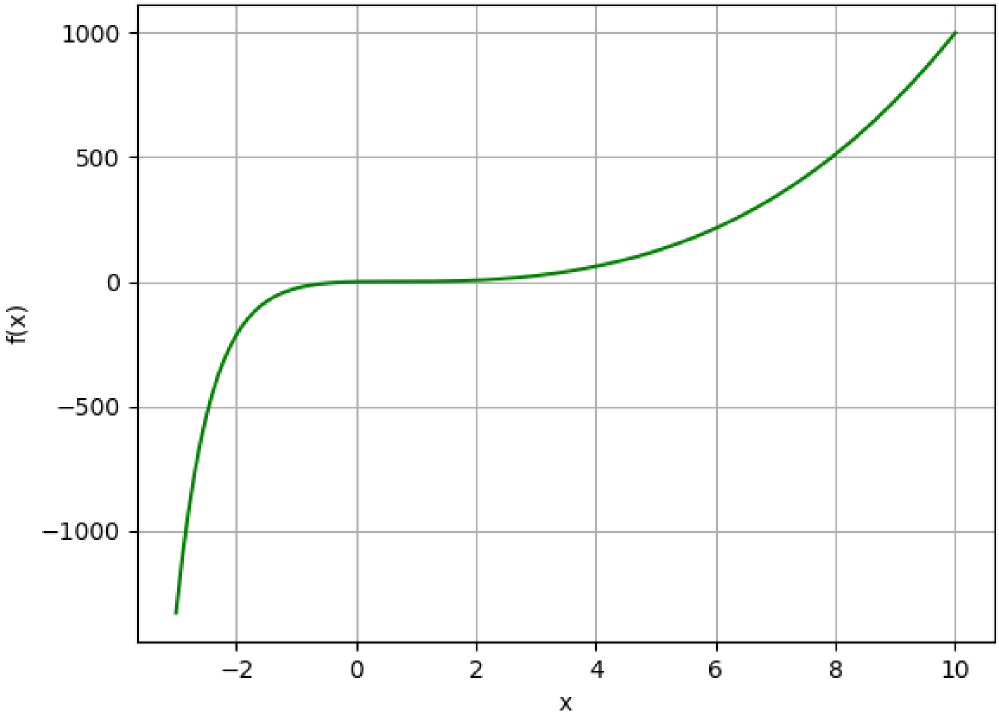

Figura 12 - $f_3(x)$

a) Bissecção:

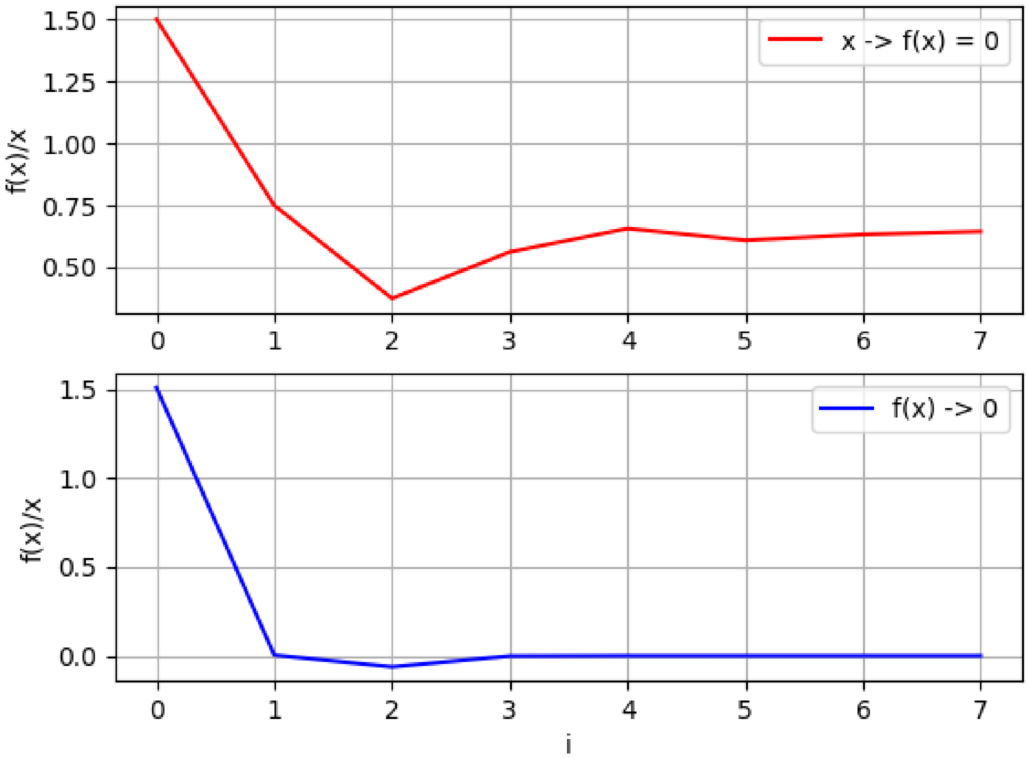

Figura 13 – Intervalo inicial $[0, 3]$*, raiz = 0.6453125*

b) Ponto Fixo:

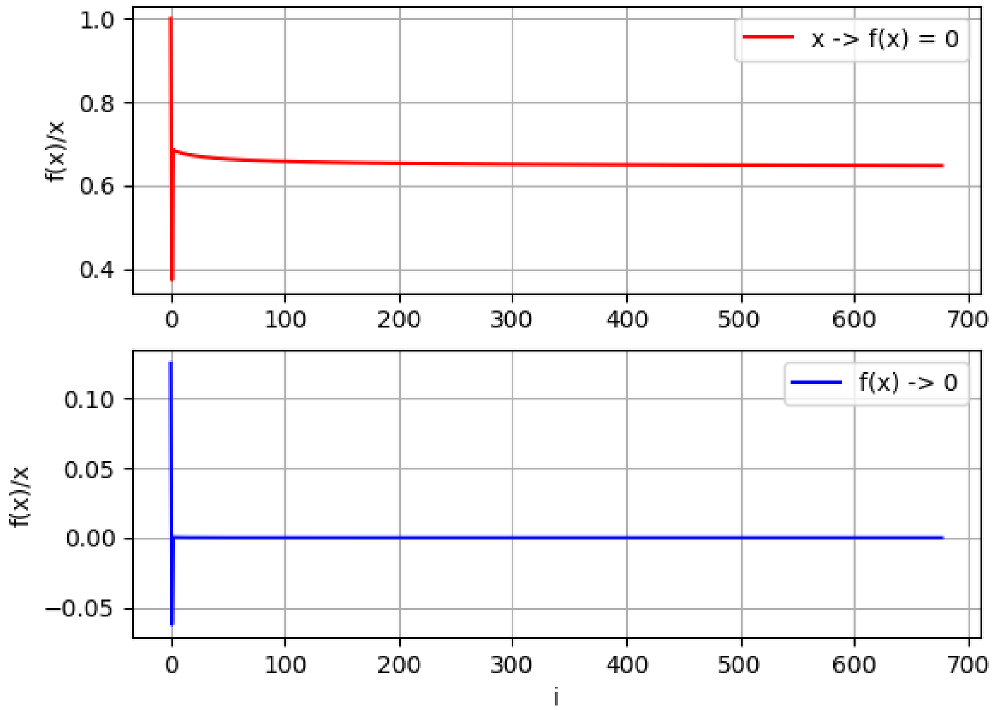

Figura 14 - $g_3(x_{i+1}) = x_i - 5 * f_3(x_i)$*, raiz = 0.64811, ponto inicial = 1 (função e ponto inicial encontrados experimentalmente)*

c) Newton:

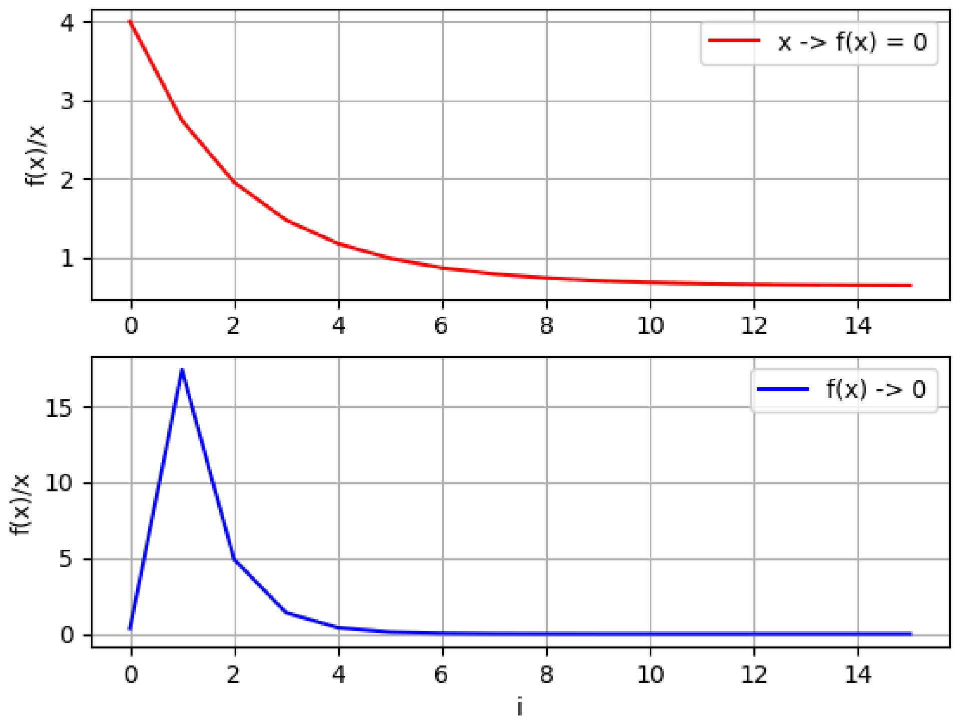

Figura 15 - $g_3(x_{i+1}) = x_i - \frac{f_3(x_i)}{f_3{'}(x_i)}$*, raiz = 0.646946, ponto inicial = 4*

4) $f_4(x) = \sin(x) * \sin(x^2/\pi)$

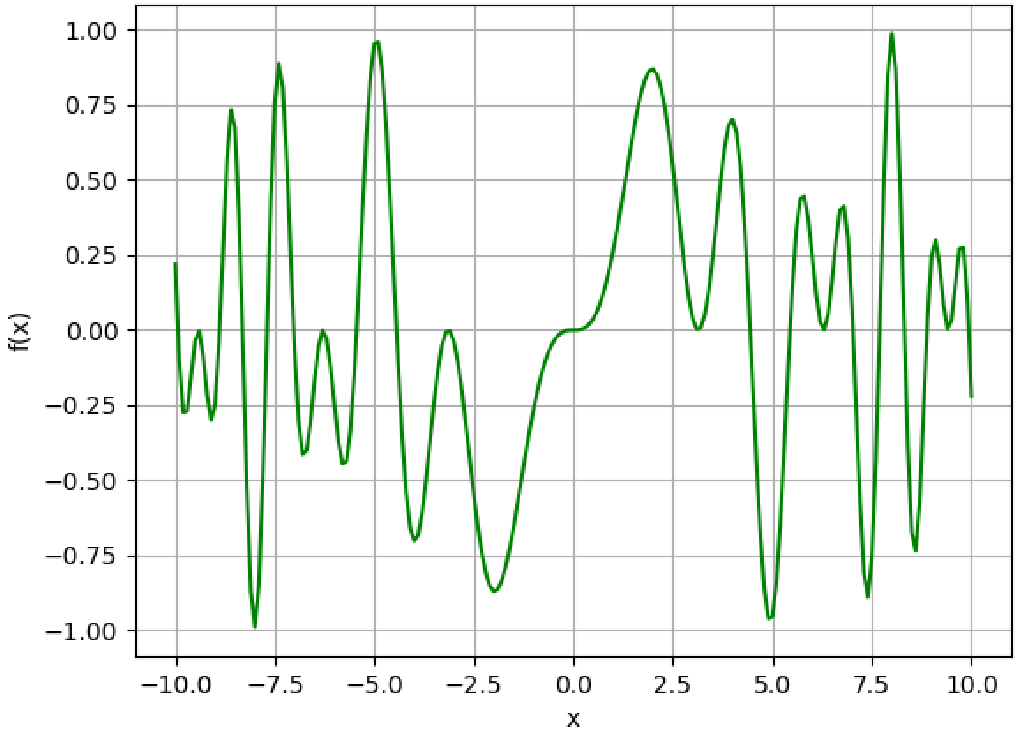

Figura 16 - $f_4(x)$

a) Bissecção:

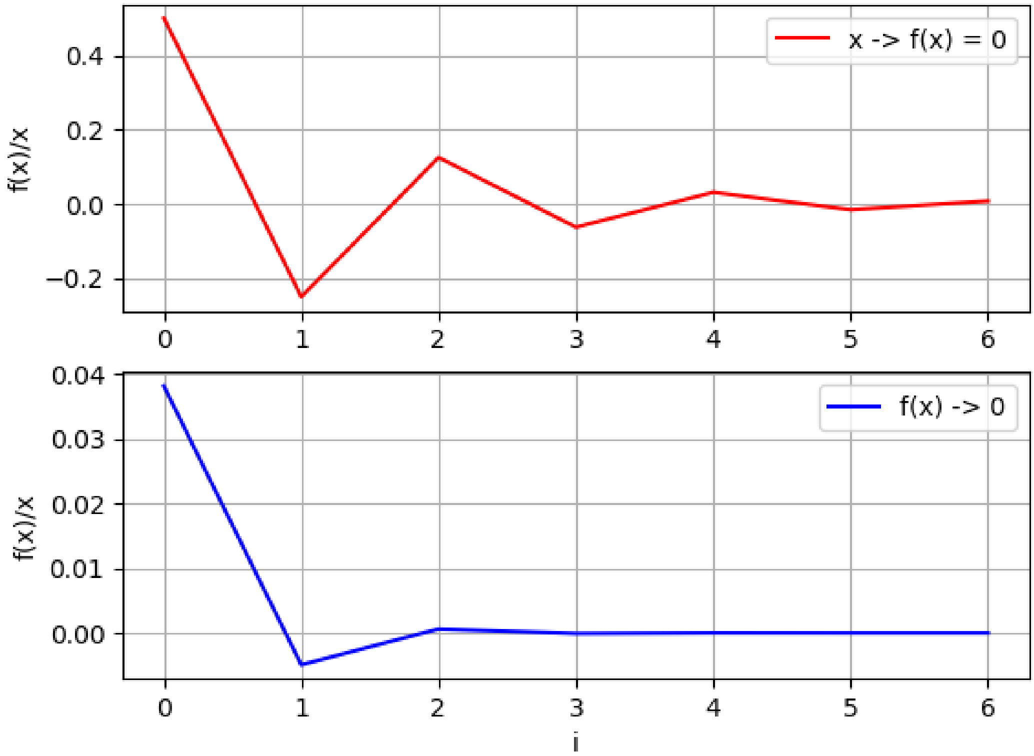

Figura 17 – Intervalo inicial $[-1, 2]$, raiz = 0.0078125

b) Ponto Fixo:

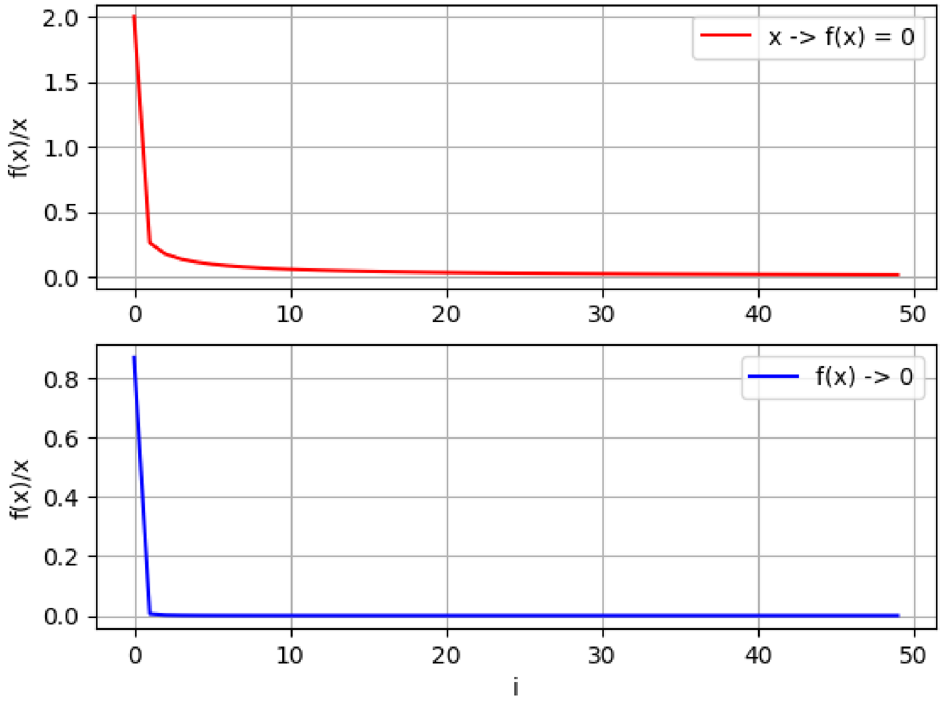

Figura 18 - $g_4(x_{i+1}) = x_i - \frac{4*f_4(x_i)}{x_i}$*, raiz = 0.014525768, ponto inicial = 2*

(função e ponto inicial encontrados experimentalmente)

c) Newton:

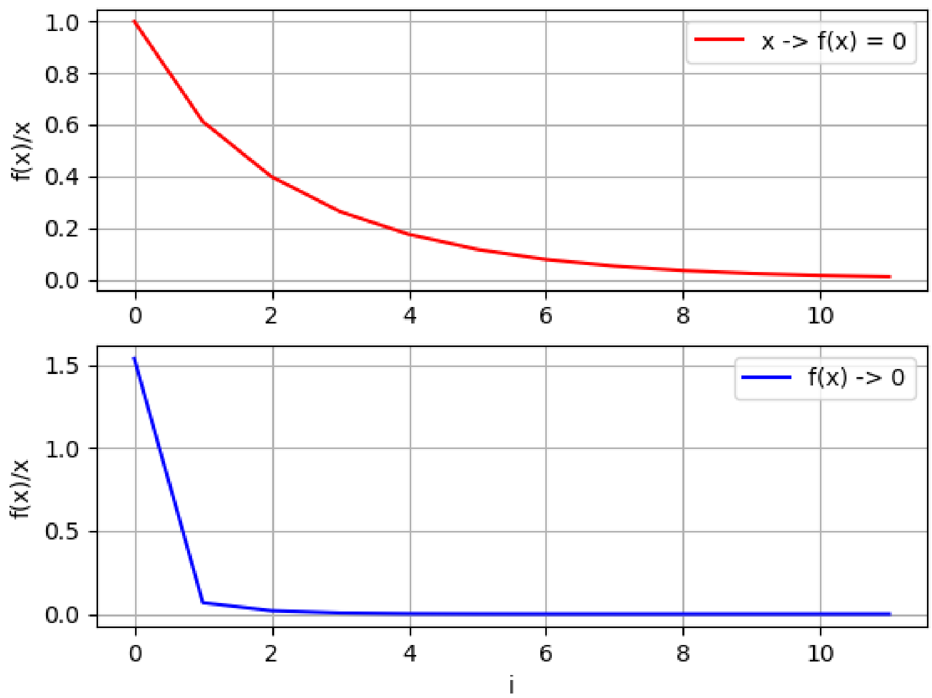

Figura 19 - $g_4(x_{i+1}) = x_i - \frac{f_4(x_i)}{f_4'(x_i)}$*, raiz = 0.0101819, ponto inicial = 1*

5) $f_5(x) = (x - 1.44)^5$

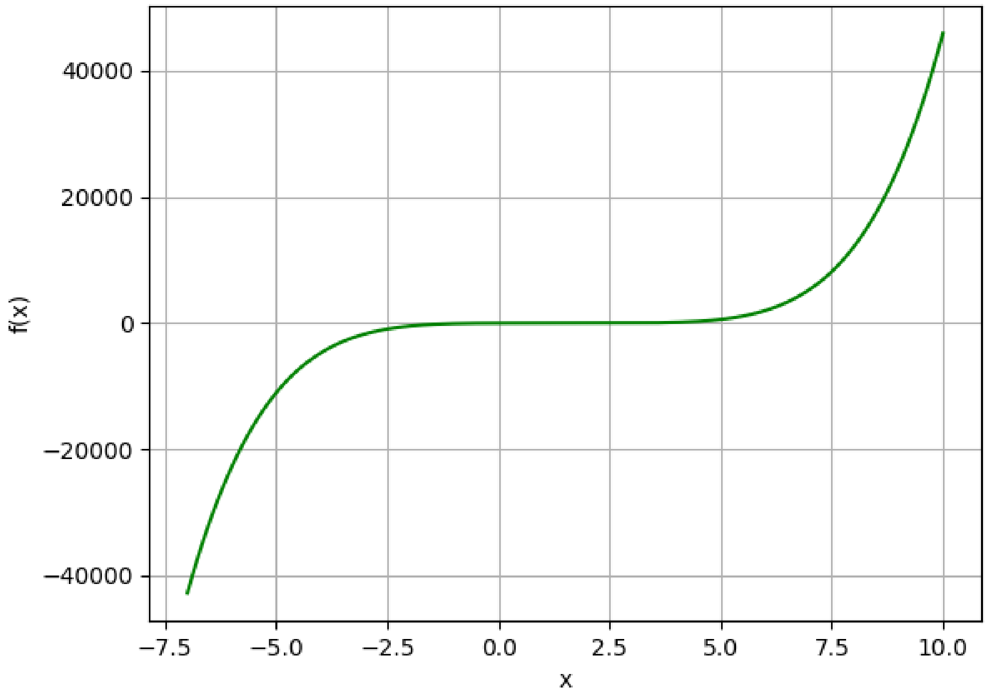

Figura 20 - $f_5(x)$

a) Bissecção:

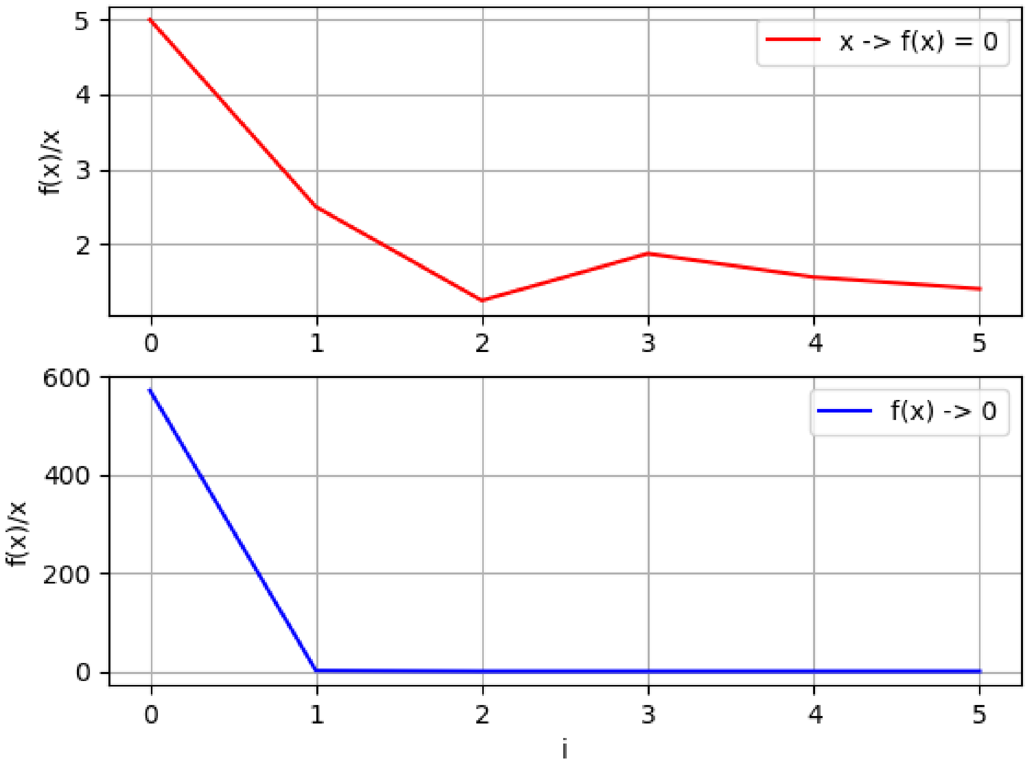

Figura 21 – Intervalo inicial = $[0, 10]$, raiz = 1.40625

b) Ponto Fixo:

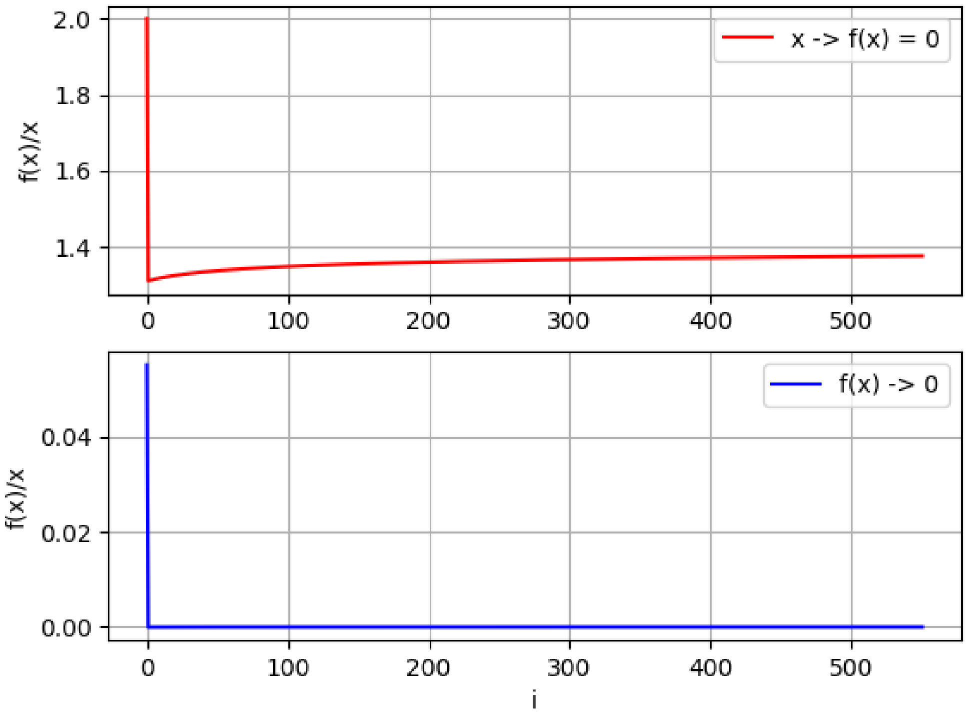

Figura 22 - $g_5(x_{i+1}) = x_i - \frac{50*f_5(x_i)}{{x_i}^2}$*, raiz = 1.376911, ponto inicial = 2*

(função e ponto inicial encontrados experimentalmente)

c) Newton:

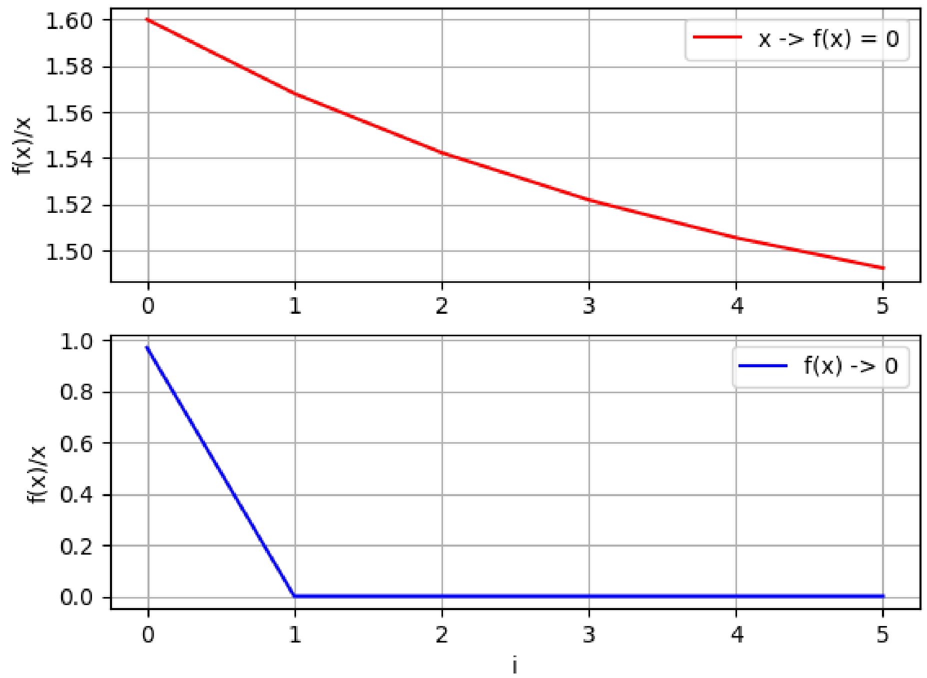

Figura 23 - $g_5(x_{i+1}) = x_i - \frac{f_5(x_i)}{f_5{'}(x_i)}$*, raiz = 1.4924288, ponto inicial = 1.6*

Análise dos métodos

Correspondente ao método de bissecção, chegamos à conclusão de que apesar do método ter fácil aplicação, sua função deve possuir valores negativos em sua imagem, e um prévio conhecimento de um intervalo onde possa estar a raiz. Trata-se também de um método cuja convergência é linear, ou seja, pode demorar para encontrar a raiz dependendo da função e do intervalo inicial, de modo que uma de suas vantagens é de não ser afetado por muitas variações na função do gráfico. E caso hajam duas ou mais raízes ele parará na primeira que encontrar.

Em relação ao Ponto Fixo, concluímos que se trata de um método extremamente instável e frágil, no caso deste trabalho, as funções de pontos fixos obtidos foram baseados em tentativa e erro a partir de um ponto próximo da raiz desejada, isso significa que da mesma forma que o método da bissecção, é necessário um conhecimento prévio da função. Além disso, é de longe o método que levou mais interações.

Sobre o método de Newton, a eficácia foi superior aos métodos anteriores, por não ter a limitação da bissecção, possuir uma convergência quadrática, e ser menos instável e frágil do que o ponto fixo original, apesar de ser uma variação de ponto fixo. Ele também possui uma aplicação relativamente fácil, pois necessita apenas saber a derivada da função em questão, e ter atenção quanto ao ponto final, pois caso a derivada da função variar muito é necessário escolher um ponto relativamente próximo da raiz desejada para o funcionamento dentro do programa ou para a equação.