



Instituto Federal de Brasília

Campus Taguatinga

Superior em Computação

Henrique Tavares Aguiar

João Vitor Souza Rezende

Método de Gauss-Seidel e Interpolação polinomial
(Sistema linear e polinômio de Newton)

Taguatinga

2019

Henrique Tavares Aguiar

João Vitor Souza Rezende

Método de Gauss-Seidel e Interpolação polinomial
(Sistema linear e polinômio de Newton)

Trabalho apresentado à disciplina de Cálculo Numérico, do curso de Ciência da Computação, referente à parte da nota do segundo módulo de avaliações.

Professor: Dhiego Loiola de Araújo

Taguatinga

2019

1 Gauss-Seidel

1.1 Definição

O método de Gauss-Seidel para resolver um sistema linear de forma iterativa se dá a partir um chute inicial para daí começar o algoritmo.

Em uma iteração k qualquer o algoritmo consiste em:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)} & -\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)} & - \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)} & + \frac{b_1}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)} & + 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{(k)} & - \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)} & + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}}x_3^{(k+1)} & - \dots & + 0 & + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

1.2 Aplicação

Aplicando o método de Gauss-Seidel no sistema linear abaixo:

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0.2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -1.425 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esperamos encontrar como solução: $x^* = [0.9, -0.8, 0.7]^T$

E como resultado, o algoritmo encontrou uma aproximação satisfatória, com uma precisão de 10^{-3} .

i	x1	x2	x3
0	10	10	10
1	10.2	6.175	-5.1125
2	-4.9125	-5.15937	4.332812
3	4.532812	1.924609	-1.57051
4	-1.37051	-2.50288	2.119067
5	2.319067	0.264301	-0.18692
6	0.013083	-1.46519	1.254323
7	1.454323	-0.38426	0.353548
8	0.553548	-1.05984	0.916532
9	1.116532	-0.6376	0.564667
10	0.764667	-0.9015	0.784583
11	0.984583	-0.73656	0.647136
12	0.847136	-0.83965	0.73304
13	0.93304	-0.77522	0.67935
14	0.87935	-0.81549	0.712906
15	0.912906	-0.79032	0.691934
16	0.891934	-0.80605	0.705042
17	0.905042	-0.79622	0.696849
18	0.896849	-0.80236	0.701969
19	0.901969	-0.79852	0.698769
20	0.898769	-0.80092	0.700769
21	0.900769	-0.79942	0.699519

Tabela 1 – $x1 = 0.900769$, $x2 = -0.79942$, $x3 = 0.699519$

Para melhor visualização, temos o gráfico do módulo de cada variável:

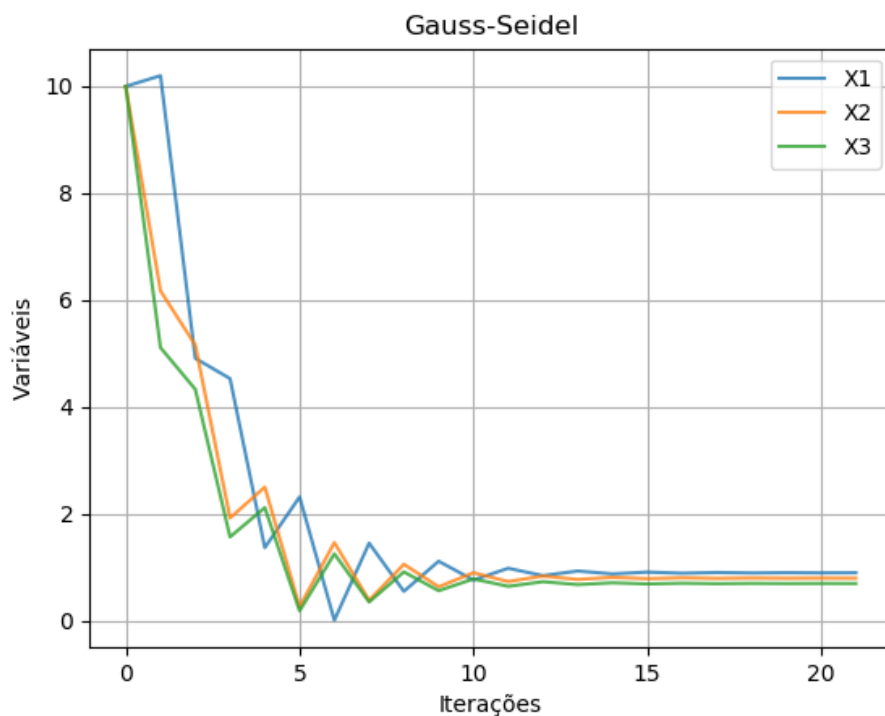


Gráfico 1 – representação do módulo da tabela acima em forma de gráfico

Agora iremos observar o que acontece quando mudamos o sistema linear anterior para:

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0.2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -1.425 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Essa mudança faz com que a matriz deixe de convergir para uma solução com o método de Gauss-Seidel, apresentando o seguinte gráfico:

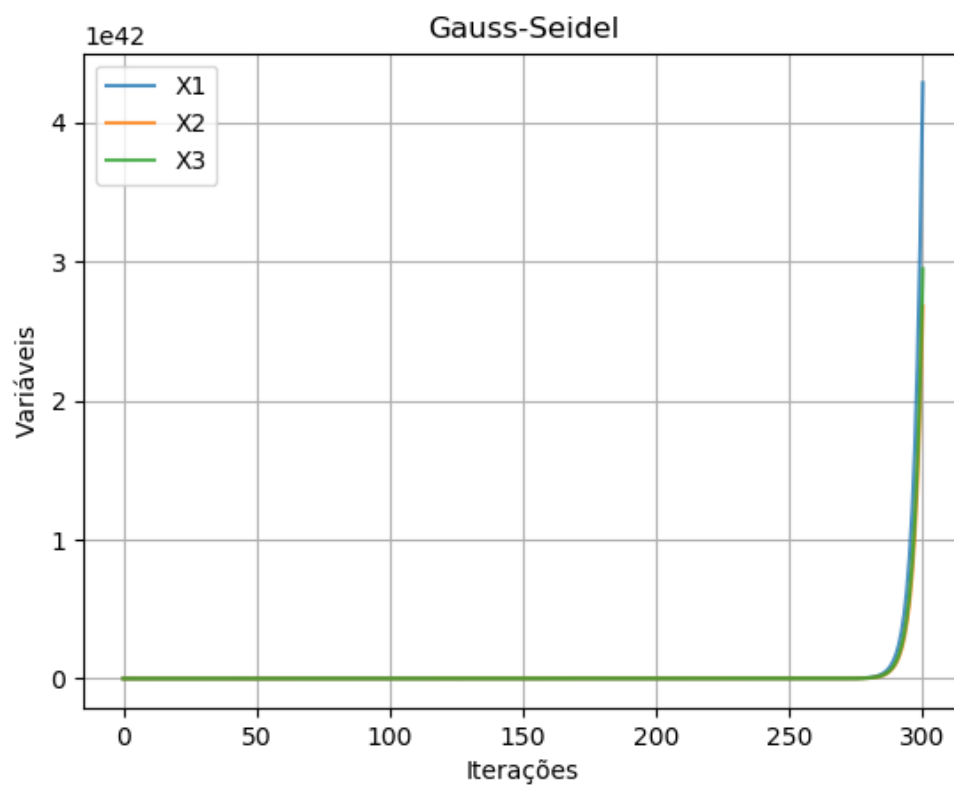


Gráfico 2 – representação do módulo das variáveis em forma de gráfico

2 Interpolação com Sistemas Lineares

2.1 Definição

Dado um conjunto de pontos $P = \{(x_0, y_0); (x_1, y_1); \dots; (x_n, y_n)\}$, podemos criar a matriz de Vandermonde para determinar os coeficientes a_i do polinômio interpolador:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Daí encontramos o polinômio: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

2.2 Aplicação

Considerando o seguinte conjunto de dados:

$$P = \{(-2, -162); (0, 0); (1, 21); (2, 242)\}$$

Criamos a matriz de Vandermonde:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -162 \\ 0 \\ 21 \\ 242 \end{bmatrix}$$

Após resolvermos a matriz acima, nesse caso através da Eliminação de Gauss-Jordan, encontramos os seguintes coeficientes:

$$a = [0, -19, 10, 30]^T$$

Como resultado, obtemos o seguinte polinômio:

$$P_3(x) = -19x + 10x^2 + 30x^3$$

Dessa forma iremos fazer uma aproximação da função original desconhecida através desse polinômio para os valores: -1 e 3:

$$P_3(-1) = -1$$

$$P_3(3) = 843$$

Para melhor visualização, construímos o gráfico no intervalo [-4,4] para o polinômio acima, juntamente com o conjunto de dados:

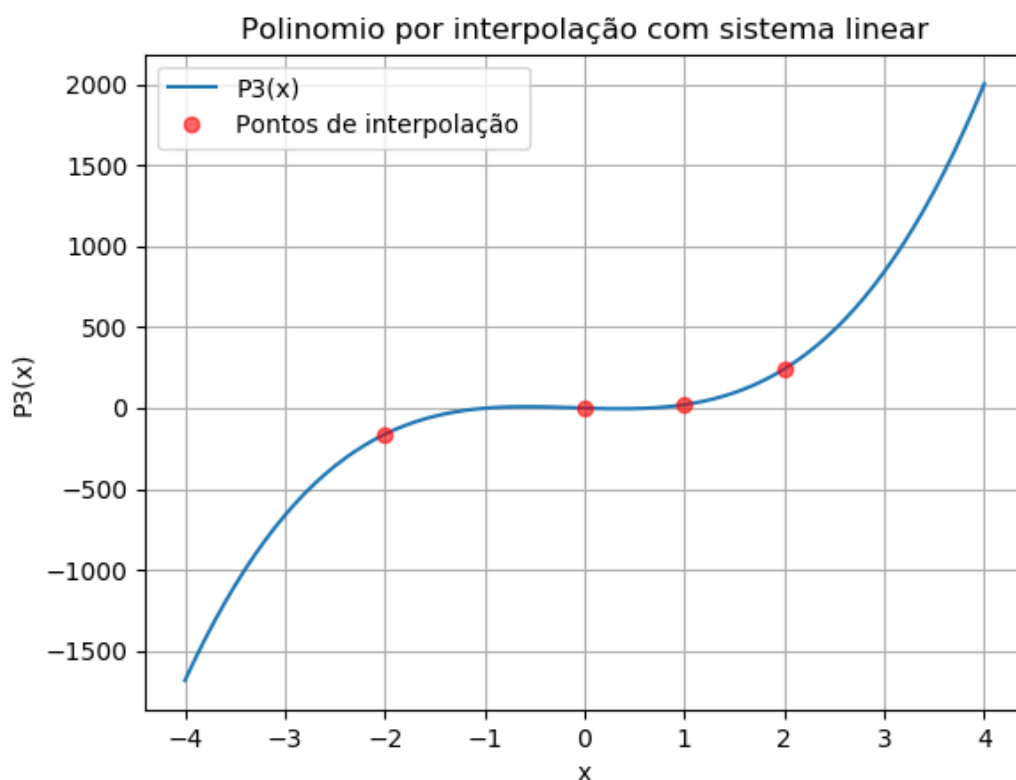


Gráfico 3 – representação em forma de gráfico para o polinômio interpolado por sistema linear no intervalo [-4,4]

3 Interpolação e o Futuro

Para esta parte do trabalho decidimos utilizar o polinômio de Newton para tentar prever o futuro, e inclusive uma estimativa dos erros de tais previsões.

3.1 Definição

Dado um conjunto de pontos $P = \{(x_0, y_0); (x_1, y_1); \dots; (x_n, y_n)\}$, o polinômio de Newton consiste em:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Onde os coeficientes d_i são as diferenças divididas de ordem i , a partir de um x_0 .

Exemplos:

$$\text{Ordem 0: } f[x_k] = f(x_k)$$

$$\text{Ordem 1: } f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$\text{Ordem 2: } f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$\text{Ordem 3: } f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] - f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

$$\text{Ordem n: } f[x_k, \dots, x_n] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_n] - f[x_k, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_k}$$

Para calcular uma estimativa do erro cometido. Temos que:

$$|E_n(x)| \leq |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n| (\max |d_{n+1}|)$$

3.2 Aplicação

Dado o seguinte conjunto de dados:

Anos: $x = [2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018]$.

População: $y = [6115108363, 6194460444, 6273526441, 6352677699, 6432374971, 6512602867, 6593623202, 6675130418, 6757887172, 6840591577, 6922947261, 7004011262, 7086993625, 7170961674, 7255653881, 7340548192, 7426103221, 7510990456, 7594270356]$.

Primeiro construímos o polinômio de Newton que interpola os dados de 2000 até 2016: $P_{16}(x)$, que apresenta os seguintes coeficientes:

$d_0 = 6.115.108.363$	$d_9 = -50,48920304$
$d_1 = 79.352.081$	$d_{10} = 13,19108383$
$d_2 = -143.042$	$d_{11} = -2,944372119$
$d_3 = 61.890,83333$	$d_{12} = 0,566392348$
$d_4 = 3.725,333333$	$d_{13} = -0,097318018$
$d_5 = -4.712,925$	$d_{14} = 0,015459499$
$d_6 = 1.831,804167$	$d_{15} = -0,002308818$
$d_7 = -578,735119$	$d_{16} = 0,000323549$
$d_8 = 173,4850446$	

Com esse polinômio tentaremos prever o futuro, iremos calcular uma estimativa para a população mundial nos anos 2017 e 2018, e compará-los com os valores corretos:

$$2017: P_{16}(2017) = 22.490.785.114$$

$$\text{População no ano de 2017} = 7.510.990.456$$

$$2018: P_{16}(2018) = 244.904.403.037$$

$$\text{População no ano de 2018} = 7.594.270.356$$

Podemos observar que há uma diferença muito expressiva entre os valores encontrados com os valores que deveríamos ter encontrado, porém esses valores encontrados pelo polinômio ainda estão dentro dos erros calculados.

Diferença entre a estimativa e o valor correto (2017):

$$22.490.785.114 - 7.510.990.456 = 14.979.794.658$$

$$\text{Erro calculado para } P_{16}(2017): |E_{16}(2017)| \leq 17.346.376.505$$

Diferença entre a estimativa e o valor correto (2018):

$$244.904.403.037 - 7.594.270.356 = 237.310.132.681$$

$$\text{Erro calculado para } P_{16}(2018): |E_{16}(2018)| \leq 312.234.777.090$$

Portanto, essa disparidade entre os valores é explicada pelas suas respectivas estimativas de erro calculadas, que por sua vez são explicadas pelo fato polinômio interpolar muitos pontos, 17 para ser mais específico, o que resulta em um polinômio de grau 16.

Caso queira ver as tabelas completas das diferenças divididas, elas estão disponíveis nos arquivos:

$P_{16}(x)$: *diferencas_divididas_P16.png*

Roxo: coeficientes do polinômio em questão

$E_{16}(x)$: *diferencas_divididas_E16.png*

Azul: diferenças divididas do polinômio de referência

Roxo: Coluna da próxima ordem, negrito: maior elemento da coluna.

Agora vamos produzir um polinômio mais ajustado, para que seja possível estimar a população mundial em 2019 e também uma estimativa do erro cometido. Nesse caso construímos um polinômio que interpola os dados de 2016 até 2018, na tentativa de conseguir uma aproximação de acordo com realidade, decidimos diminuir o grau, ou seja, o número de pontos interpolados, a fim de mantê-lo mais estável e com um comportamento mais linear: $P_2(x)$, que apresenta os seguintes coeficientes:

$$d_0 = 7.426.103.220$$

$$d_1 = 84.887.235$$

$$d_2 = -803.667,5$$

Com esse outro polinômio, tentaremos prever o futuro mais uma vez, agora calculando uma estimativa para a população mundial em 2019:

$$2019: P_2(2019) = 7.675.942.921$$

Agora calcularemos uma estimativa para o erro do valor recém encontrado:

$$\text{Erro calculado para } P_2(2019): |E_2(2019)| \leq 3.210.045$$

Como as estimativas de erro anteriores se provaram confiáveis, podemos concluir, que esta previsão comparada às outras, está muito mais precisa e o resultado ainda aparenta ser o que se encontraria no mundo real, com um erro não muito significativo.

Caso queira ver as tabelas completas das diferenças divididas, elas estão disponíveis nos arquivos:

$P_2(x)$: *diferencas_divididas_P2.png*

Roxo: coeficientes do polinômio em questão

$E_2(x)$: *diferencas_divididas_E2.png*

Azul: diferenças divididas do polinômio de referência

Roxo: Coluna da próxima ordem, negrito: maior elemento da coluna.

Para melhor visualização, construímos gráficos em diferentes intervalos para explicitar os comportamentos dos dois polinômios:

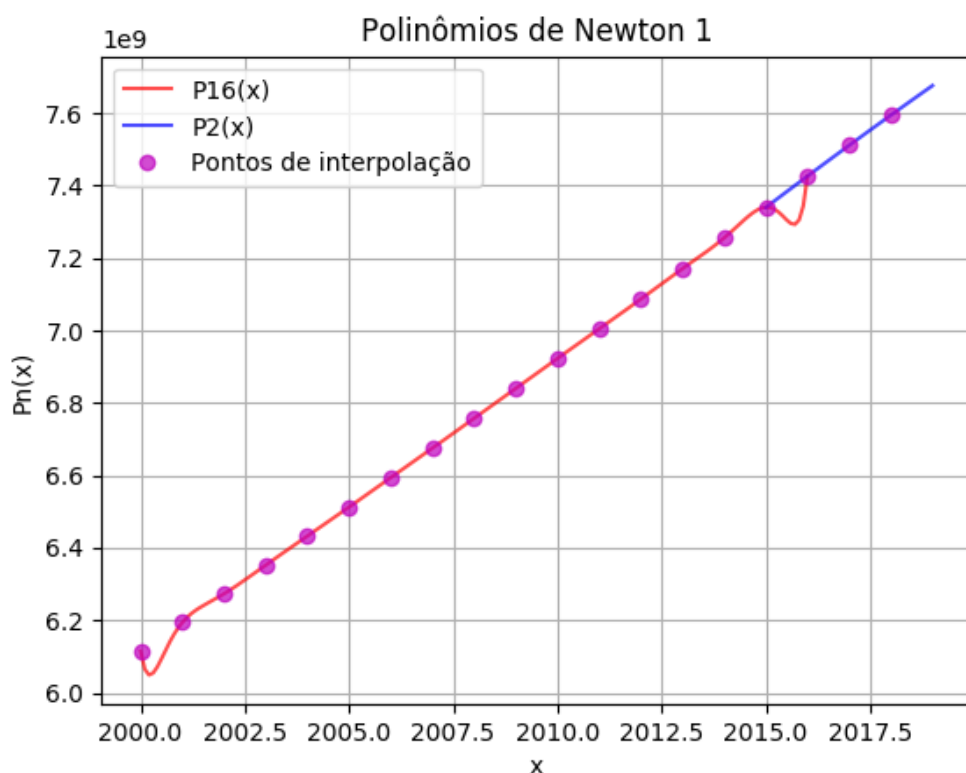


Gráfico 4 – representação de $P_{16}(x)$ no intervalo $[2000, 2016]$ e $P_2(x)$ no intervalo $[2015, 2019]$.

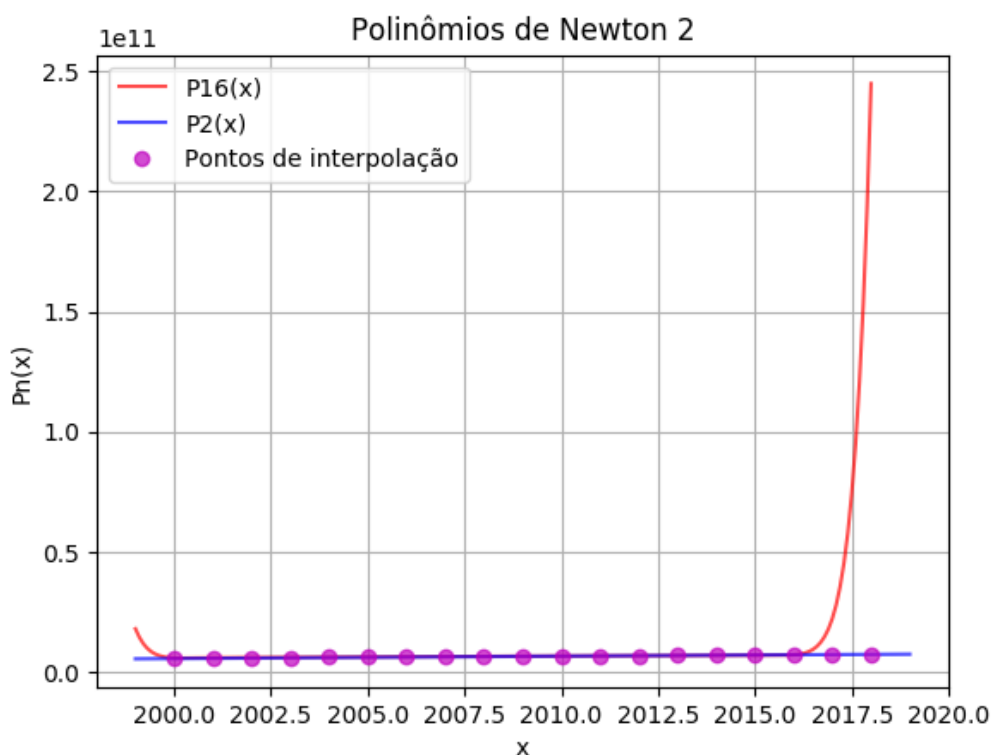


Gráfico 5 – representação de $P_{16}(x)$ no intervalo $[1999, 2018]$ e $P_2(x)$ no intervalo $[1999, 2019]$.

Conclusão

Conclui-se que este artigo tem a capacidade de informar, a metodologia a ser utilizada com os métodos de Gauss-Seidel na resolução de cada sistema linear e suas matrizes, demonstrando como atingir os erros mais próximos a cada variável com a precisão da ordem de 10^{-3} e assim mostrando o resultado que não foi o esperado e encontrando o erro acima do elevado.

Além da retratação através de gráficos para cada função dentro do método para conclusão do Gauss-Seidel que não funciona.

Assim, o método gerado de interpolação de sistemas lineares, que formam a matriz de Vandermonde, a ser aplicada dentro do sistema linear que por dispor de uma fomentação bem construída da matriz, possibilita que detenhamos uma visão ampliada sobre a mesma aperfeiçoando assim a localização de cada coeficiente polinômio por um sistema linear. Concedendo, umas visualizações aprimoradas da Matriz de Interpolação, apresentando as interpolações do trabalho.

Método de Newton um melhor desempenho, apresentado com gráficos os resultados do método, estimulando o erro a ser inserido no sistema para melhor apuração desta informação gerada.

Com as aplicações gerando no momento e tendo as funções bem elaboradas e executadas na função e mostrando os polinômios de Newton e tendo as referencias para a estatística de população e assim executando o trabalho com os intervalos de 1999 a 2019.